УДК 621.37/39

О.О. Скопа, к.т.н., доцент, кафедра комп’ютерної інженерії,
Міжнародний гуманітарний університет (м. Одеса)

Г.А. Гундерич, аспірант УНДІЗ (м. Київ)

ЗНАХОДЖЕННЯ γ-НИЖНЬОЇ ГРАНИЦІ ПОКАЗНИКА НАДІЙНОСТІ СИСТЕМИ З *m* ПОСЛІДОВНО З’ЄДНАНИХ ОБ’ЄКТІВ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ЇХ АВТОНОМНИХ БІНОМІАЛЬНИХ ВИПРОБУВАНЬ

Анотація. Розглядається методика знаходження γ-нижньої границі для показника надійності системи з *m* послідовно з’єднаних об’єктів за результатами їх автономних біноміальних випробувань. Доводиться теорема, яка дозволяє в простій формі дати вирішення складної задачі по знаходженню γ- нижньої границі для показника $\text{Ï} = R_1 R_2 ... R_m$ надійності системи з *m* послідовно з’єднаних об’єктів.

Annotation. The method of finding of γ-lower border is examined for the reliability index of the system from the *m* consistently united objects as a result of their autonomous binomials tests. There is a theorem which allows in a simple form dates decision of intricate problem on finding of γ-lower border for the reliability index $\text{Ï} = R_1 R_2 ... R_m$ of the system from the *m* consistently united objects.

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв’язок із важливими науковими чи практичними завданнями. До необхідності оцінки надійності резервних систем телекомунікацій з послідовним з’єднанням їх окремих об’єктів приводять випадки сугубо практичного характеру. З огляду на те, що необхідність у включенні резервного устаткування такої системи є випадковою величиною, то проведення планових перевірок апаратури повинне забирати мінімальний час. Його скорочення можливе за рахунок прискореного проведення випробувань в перевантаженому режимі, за рахунок структурної надмірності або за рахунок запасу по ресурсу [1…4]. Вид випробувань обирається з врахуванням конкретних задач та в залежності від способу побудови системи, яка підлягає випробовуванню. Таким чином, з метою вибору найбільш ефективного виду випробувань, необхідно вирішення всіх наукових та практичних задач, які стосуються оцінки надійності резервних систем телекомунікацій і, в тому числі, з послідовним з’єднанням об’єктів [5, 6].

Метою статті є отримання оцінки надійності резервних систем телекомунікацій з послідовним з’єднанням об’єктів, що, одночасно, є ***раніше частиною невирішеної загальної проблеми***. Отримання такої оцінки дозволяє передбачити оптимальну кількість резервного обладнання, необхідність в зміні структури та організації обслуговування системи та інші технічні та виробничі параметри.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв’язання даної проблеми, виділення невирішених раніше загальної проблеми. Методики проведення вище зазначених випробувань, технічні і математичні проблеми обробки результатів досить докладно розглянуті в технічній літературі. Однак, слід зазначити, що методики передбачають припинення функціонування об’єкта в складі технічної системи при проведенні випробувань і повернення в неї після їх закінчення. Така процедура випробувань повністю відповідає проблемі, що винесена в заголовок статті. Цією проблемою займалося достатньо широке коло вчених – Мирний Р.А., Павлов І.В., Большев Л.Н. та інші. Окремі результати щодо оцінки надійності резервних систем телекомунікацій з послідовним з’єднанням об’єктів за результатами їх біноміальних іспитів з зупинкою опубліковані авторами самостійно або в співавторстві в [1…8]. Однак, у публікаціях, які доступні для широкого кола науковців, оцінка надійності резервних систем телекомунікацій з послідовним з’єднанням об’єктів за результатами їх біноміальних іспитів з зупинкою не розглядалася.

В зв’язку з зазначеним ***раніше невирішеною частиною загальної проблеми*** є задача, яка дозволяє оцінити обсяг робіт, які необхідно виконати при планових чи інших іспитах резервних систем телекомунікацій з послідовним з’єднанням об’єктів в процесі визначення їх надійності, передбачити необхідну кількість резервного обладнання, структуру організації системи та інші технічні та виробничі параметри.

Постановкою завдання для послідуючого вирішення є задача розробки методики знаходження γ-нижньої границі для показника надійності системи з m послідовно з’єднаних об’єктів за результатами їх автономних біноміальних випробувань та доведення теорема, яка дозволяє в простій формі дати вирішення цієї складної задачі.

Перейдемо до викладу ***основного матеріалу*** з математичним обґрунтуванням отриманих результатів.

Розглянемо систему телекомунікацій (мал. 1), вважаючи, що кожен з її об’єктів випробується на надійність за біноміальною схемою Бернуллі. При цьому в n випробуваннях i-го об’єкта реєструються значення випадкової величини r_i числа його відмовлень у n_i біноміальних випробуваннях. В результаті дістанемо m пар (n_i, r_i) чисел n_i, r_i, з яких n_i – заздалегідь встановлений обсяг випробувань, що є фіксованим числом, а r_i – випадкова величина, що має функцію розподілу виду:

$$P\left(r_i \le x\right) = \sum_{k=0}^{[x]} \binom{n_i}{k} R_i^{n_i-k}\left(1-R_i\right)^k, \tag{1}$$

де R_i – імовірність успішного функціонування в одному випробуванні i-го об’єкта, що вважається відомим і підлягає оцінці при даному n_i за значеннями величини r_i. Зокрема, для R_i може знаходитися γ-нижня границя $\underline{R}_i$ і γ-верхня границя $\overline{R}_i$ по формулах Клопера-Пірсона [7…10]:

$$\underline{R}_i = f_2\left(n_i, r_i, \gamma\right) \text{ і } \overline{R}_i = f_1\left(n_i, r_i, \gamma\right), \tag{2}$$

де $\underline{R}_i$ і R_i – корені рівнянь $1-\gamma = \sum_{k=0}^{r_i} \binom{n_i}{k} x^{n_i-k}\left(1-x\right)^k$ і $\gamma = \sum_{k=0}^{r_i-1} \binom{n_i}{k} x^{n_i-k}\left(1-x\right)^k$, (в останньому з них $r_i > 0$), що вирішуються відносно $x \in [0,1]$. При числі відмовлень $r_i = 0$ статистики (2) приймають значення $\underline{R}_i = \left(1-\gamma\right)^{1/n_i}$, $\overline{R}_i = 1$.

Інформацію, отриману при таких випробуваннях, представимо у вигляді схеми мал. 1.

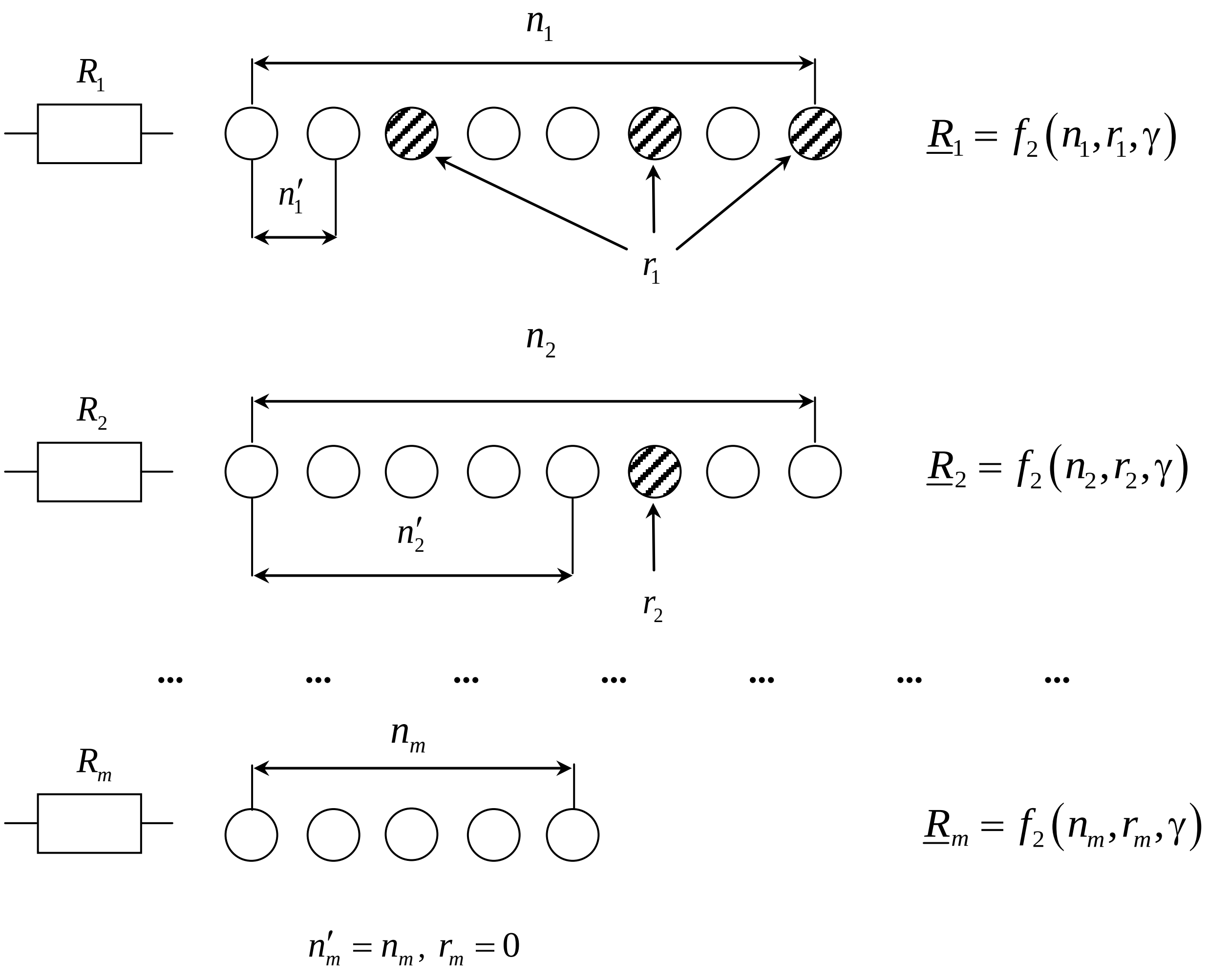
Поставимо в описаній ситуації наступну задачу. Дістаючи за результатами автономних випробувань об’єктів вказаної схеми дані (2), знайти γ-нижню границю $\underline{Ï}$ і γ-верхню границю $\overline{Ï}$ для імовірності $Ï = R_1 R_2 ... R_m$ успішного функціонування системи в цілому в одному її випробуванні. При цьому статистики $\underline{Ï}$ і $\overline{Ï}$ повинні задовольняти умовам:

$$P\left(\underline{Ï} \le Ï\right) \ge \gamma, \; P\left(\overline{Ï} \ge Ï\right) \ge \gamma. \tag{3}$$

Ясно, що вирішення цієї задачі неоднозначно. Дійсно, якщо при випробуваннях об’єктів системи поряд з r_i реєструються і значення випадкових величин n_i', то можна покласти, що

$$\underline{Ï} = \left(1-\gamma\right)^{1/n'}, \; n' = \min_{1 \le i \le m} n_i', \tag{4}$$

де $P\left(\underline{Ï} \le Ï\right) \ge \gamma$.



Мал. 1

Теоретично можливий розгляд тривіального рішення $\underline{\text{Ї}} \equiv 0$, $\overline{\text{Ї}} \equiv 1$, тому що при Ї > 0 і кожнім $\gamma \in (0,1]$ для такого вирішення співвідношення (3) свідомо виконуються. Однак тривіальне рішення не має практичного значення і лише підкреслює декілька вирішень поставленої задачі. Отже, мова може йти про знаходження одного або декількох нетривіальних рішень. Одне з них (для γ-нижньої границі) дається формулою (4). Однак вона не враховує інформації за результатами $n_i - (n_i' + 1)$ випробувань кожного з об'єктів. Тому нижче дослідимо й інші можливості. Зрозуміло, тут потрібна оптимізаційна постановка задачі, що дає можливість визначення в деякому змісті найкращого рішення. Однак, у математичній статистиці така постановка, починаючи з класичної задачі Ст'юдента про інтервальне оцінювання середнього значення випадкової величини, що має нормальний розподіл при невідомій дисперсії, ще не сформована. Разом з тим ідея в [11] про існування найкращих рішень дає орієнтування в пошуках γ-границь, «що заслуговують уваги». Зокрема γ-границя (4) є такою, що не поліпшується, якщо як вихідну статистику прийняти випадкову величину n' та обмежитися цим вибором. Однак властивість «неполіпшуваності» може не зберегтися при виборі іншої вихідної статистики. Іншими словами, якщо взяти в якості такої статистику іншу, відмінну від n', то можна розраховувати на одержання більш високих значень γ-нижньої границі для Ї . У роботі [12] з цього приводу висловлене припущення про те, що вихідна статистика повинна бути незміщеною оцінкою для

Ï, а значить на самому початку варто розглядати випадкову величину $\hat{\text{Ï}} = \prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{r_i}{n_i}\right) = 1-\hat{q}$, вважаючи, що при $i=\overline{1,m}$ величини r_i незалежні. Дане припущення хоча і залишилося недоведеним, але на практиці себе виправдало, тому що відомі аналітичні залежності для γ-нижньої границі $\underline{\text{Ï}}$ отримані з використанням саме цієї вихідної статистики [3]. Хотілося б при цьому домогтися отримання γ-нижньої границі, що не поліпшується, у вигляді $\underline{\text{Ï}} = \min_i f_2\left(n_i, r_i, \gamma\right)$. Однак довести, що при такому виборі умова $P\left(\underline{\text{Ï}} < \text{Ï}\right) \geq \gamma$ виконується, не вдається. Результати виходять «ледве гірше», чим цей бажаний результат. Переходимо до їх викладу.

Теорема. Нехай кожен з m об'єктів системи випробується автономно по біноміальній схемі Бернуллі з реєстрацією числа r_i відмовлень у n_i таких випробуваннях. Випадкові величини r_i при $i=\overline{1,m}$ вважаються незалежними. Припустимо, що кожна з імовірностей $R_i = P\left(A_i\right)$, що входить до функції розподілу (1), невідома, а події A_i при $i=\overline{1,m}$ – незалежні. Тоді в якості γ-нижньої границі для імовірності $\text{Ï} = R_1 R_2 ... R_m$ можна прийняти статистику

$$\underline{\text{Ï}} = f_2\left(n, r', \gamma\right),\; r' = n\hat{q}, \tag{5}$$

якщо довірча імовірність γ обрана такою, що $\underline{\text{Ï}} \leq \hat{\text{Ï}}' = 1-\hat{q}$. Тут $n = \min_{1\leq i\leq m} n_i$ – менше з чисел n_i випробувань, $\hat{q} = 1-\hat{\text{Ï}}$, $\hat{q} = -\ln\hat{\text{Ï}}$, $\hat{\text{Ï}} = \prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{r_i}{n_i}\right)$, причому можна покласти також $\hat{q} = m\left(1-\hat{\text{Ï}}^{1/m}\right)$.

Відповідно до (5), $f_2\left(n, r', \gamma\right) = f_2\left(n, n\hat{q}, \gamma\right)$ є коренем рівняння $1-\gamma = \mathcal{J}_x\left(n\hat{\text{Ï}}', n\hat{q}+1\right)$, що вирішується відносно $x \in [0,1]$. Статистика (5) задовольняє нерівності $P\left(\underline{\text{Ï}} \leq \text{Ï}\right) \geq \gamma$.

Доказ. Нехай F – функція розподілу статистики $\hat{\text{Ï}}$. Тоді справедливе співвідношення:

$$P\left(\hat{\text{Ï}} \geq x\right) = 1-F\left(x-0\right) \leq \mathcal{J}_{\text{Ï}}\left(n\left(1-U_m\right), nU_m+1\right),$$

де $U_m = m\left(1-x^{1/m}\right)$, а $n_1 = n_2 = ... n_n$. При різних n_i дістаємо:

$$1-F\left(x-0\right) = \sum_{\bar{k}\in D(x)} ... \sum \prod_{i=1}^{m} \binom{n_i}{k_i} R_i^{n_i-k_i} q_i^{k_i} \leq \max_{1\leq \nu \leq m} \sum_{\bar{k}\in D(x)} \cdots \sum \prod_{i=1}^{m} \binom{n_\nu}{k_i} R_i^{n_\nu-k_i} q^{k_i} =$$

$$= \sum_{\bar{k}\in D(x)} \cdots \sum \prod_{i=1}^{m} \binom{\tilde{n}}{k_i} R_i^{\tilde{n}-k_i} q_i^{k_i} \leq \mathcal{J}_{\text{Ï}}\left(\tilde{n}\left(1-U_m\right); \tilde{n}U_m+1\right) \leq \mathcal{J}_{\text{Ï}}\left(n\left(1+\ln x\right), -n\ln x+1\right),$$

де $\tilde{n} = \tilde{n}\left(x\right)$ – ті з чисел $n_1, ... n_m$, для яких в останньому виразі досягається максимум по $\nu \in I_m = \{1, 2, ..., m\}$, а $D\left(x\right)$ – область підсумовування. Покладемо у виразі для $1-F\left(x-0\right)$ замість x випадкову величину $\hat{\text{Ï}}$. Тоді по нерівності Большева з [11] і з останнього співвідношення дістаємо:

$$\gamma \le P\left(F\left(\hat{\Pi}-0\right)\le\gamma\right)=P\left(1-F\left(\hat{\Pi}-0\right)\ge 1-\gamma\right)\le P\left(\mathcal{J}_{\Pi}\left(\tilde{n}'\left(1-U'_m\right),\tilde{n}'U'_m+1\right)\ge 1-\gamma\right),$$

де $\tilde{n}'=\tilde{n}\left(\hat{\Pi}\right)\ge n=\min\limits_{1\le i\le m} n_i$, $U'_m=m\left(1-\hat{\Pi}^{1/m}\right)$.

Розглянемо рівняння $\mathcal{J}_x\left(\tilde{n}'\left(1+U'_m\right),\tilde{n}'U'_m+1\right)=1-\gamma$ та $\mathcal{J}_x\left(\tilde{n}'\left(1+\ln\hat{\Pi}\right),-\tilde{n}'\ln\hat{\Pi}+1\right)=1-\gamma$, позначаючи їхні корені як $x=\underline{\Pi}'=f_2\left(\tilde{n}',\tilde{r}',\gamma\right)$, $\tilde{r}'=\tilde{n}'U'_m=\tilde{n}'m\left(1-\hat{\Pi}^{1/m}\right)$, $x=\underline{\Pi}''=f_2\left(\tilde{n}',\tilde{r}'_*,\gamma\right)$ та $\tilde{r}'_*=-\tilde{n}'\ln\hat{\Pi}$. Тоді $1-\gamma\equiv\mathcal{J}_{\underline{\Pi}'}\left(\tilde{n}'\left(1-U'_m\right),\tilde{n}'U'_m+1\right)$, $1-\gamma\equiv\mathcal{J}_{\underline{\Pi}''}\left(\tilde{n}'\left(1+\ln\hat{\Pi}\right),-\tilde{n}'\ln\hat{\Pi}+1\right)$, а це значить, що

$$\gamma\le P\left(\mathcal{J}_{\Pi}\left(\tilde{n}'\left(1-U'_m\right),\tilde{n}'U'_m+1\right)\ge\mathcal{J}_{\underline{\Pi}'}\left(\tilde{n}'\left(1-u'_m\right),\tilde{n}'U'_m+1\right)\right)\le$$
$$\le P\left(\mathcal{J}_{\Pi}\left(\tilde{n}'\left(1-\ln\pi'\right),\tilde{n}'\ln\hat{\Pi}+1\right)\ge\mathcal{J}_{\underline{\Pi}''}\left(\tilde{n}'\left(1+\ln\hat{\pi}\right),-\tilde{n}'\ln\Pi'+1\right)\right)$$

або $\gamma\le P\left(\Pi\ge\underline{\Pi}'\right)\le P\left(\Pi\ge\underline{\Pi}''\right)$, що і доводить теорему для випадку рівних чисел випробувань, коли $n_1=n_2=...=n_m=n=\tilde{n}'$. При розгляді випадку різних n_i теорема залишається в силі. Дійсно, по її умові число γ вибирається таким, щоб виконувалися нерівності $f_2\left(n,r',\gamma\right)\le 1-\dfrac{r'}{n}=\hat{\Pi}'=1-m\left(1-\hat{\Pi}^{1/m}\right)$ та $f_2\left(n,r'_*,\gamma\right)\le 1-\dfrac{r'_*}{n}=\hat{\Pi}''=1+l\hat{\Pi}$, а це означає, що з рівностей $1-\dfrac{r'}{n}=\hat{\Pi}'=1-\dfrac{\tilde{r}'}{\tilde{n}'}$ та $1-\dfrac{r'_*}{n}=\hat{\Pi}''=1-\dfrac{r'_*}{n'}$ і зі співвідношення $\tilde{n}\ge n=\min\limits_i n_i$ випливає, що $\underline{\Pi}'=f_2\left(\tilde{n}',\tilde{r}',\gamma\right)\ge f_2\left(n,r',\gamma\right)$ та $\underline{\Pi}''=f_2\left(\tilde{n}',\tilde{r}'_*,\gamma\right)\ge f_2\left(n,r'_*,\gamma\right)$. Звідси дістаємо, що $\gamma\le P\left(\Pi\ge\underline{\Pi}'\right)\le P\left(\Pi\ge f_2\left(n,r',\gamma\right)\right)$ та $\gamma\le P\left(\Pi\ge\underline{\Pi}''\right)\le P\left(\Pi\ge f_2\left(n,r'_*,\gamma\right)\right)$ або $P\left(f_2\left(n\left(1-U'_m\right),nU'_m+1\right)\le\Pi\right)\ge\gamma$ та $P\left(f_2\left(n\left(1-\ln\hat{\Pi}\right),-n\ln\hat{\Pi}+1\right)\le\Pi\right)\ge\gamma$.

Висновок. Доведена теорема дозволяє в простій формі дати вирішення складної задачі по знаходженню γ-нижньої границі для показника $\Pi=R_1R_2...R_m$ надійності системи з m послідовно з'єднаних об'єктів за результатами їхній автономних біноміальних випробувань.

Список літератури

1. Скопа О.О. Інтервальне оцінювання надійності Т-систем з паралельним з'єднанням елементів за результатами їх біноміальних іспитів // Наукові праці ОНАЗ: Період. наук. збір. з радіотехніки і телекомунікацій, електроніки та економіки в галузі зв'язку. – Одеса, 2002. – №1. – С.65–71.
2. Казакова Н.Ф., Мухін О.М., Скопа О.О. Скорочення обсягу випробувань систем телекомунікацій на надійність за рахунок їх структурної надмірності // 1-й Междунар. радиоэлектрон. форум «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития»: 8–10 октября 2002 г.: Сб. научн. трудов. – Харьков: ХНУРЭ. – 2002. – С.358–360.
3. Панфилов И.П., Скопа А.А. Надежность работы линии связи, состоящей из основного и резервного каналов // Радиотехника: Всеукр. межведомств. научн.-техн. сб. – Харьков. – 2002. – Вып. 128. – С.91-96.
4. Скопа О.О., Казакова Н.Ф., Мурін О.С. Вплив функціональної надмірності резервованих систем телекомунікацій на скорочення обсягів їх випробувань на надійність // Наук. праці ДонНТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. Випуск 58. – Донецьк: РВА ДонНТУ, 2003. – С.115-121.
5. Скопа О.О. Біноміальні моделі випробувань з зупинкою // Матер. III Міжнар. наук.-техн. конф. «Сучасні інформаційно-комунікаційні технології COMINFO-2007», 24-28 вересня 2007 р., Ялта: ДУІКТ.

6. Скопа О.О., Головань В.Г. Оцінка надійності систем телекомунікацій з послідовним з'єднанням об'єктів за результатами їх біноміальних іспитів з зупинкою / Наукові записки УНДІЗ. – 2008. – №4(6). – С.75-79.

7. Скопа А.А., Согина Н.Н. Уравнения Клоппера-Пирсона // Матер. III Міжнар. наук.-техн. конф. «Сучасні інформаційно-комунікаційні технології COMINFO-2007», 24-28 вересня 2007 р., Ялта: ДУІКТ.

8. Скопа А.А., Никифоренко К.Б., Согина Н.М. Прикладное применение уравнений Клоппера-Пирсона в системах телекоммуникаций / Наукові записки УНДІЗ. – №2. – К.: УНДІЗ, 2007. – С.83-88.

9. Казакова Н.Ф. Аналітичне розв'язання одновимірної задачі Клопера-Пірсона // Радиотехника: Всеукр. межведомств. научн.-техн. сб. – Харьков: ХНУРЭ. – 2002. – Вып. 128. – С.97-98.

10. Казакова Н.Ф. Технічне рішення задачі Клопера-Пірсона / Наук. записки Міжнар. гуманіт ун-ту. Випуск 3. – Одеса: МГУ, 2005. – С.89-94.

11. Большев Л.Н., Логинов Э.А. Интервальные оценки при наличии мешающих параметров. – М.: Теория вероятностей и ее применения, 1966, т.11, №1.

12. Судаков Р.С. Теория испытаний. – М.: Изд-во военной академии ПВО. – 1985. – 228 с