МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ γ-НИЖНЬОЇ ГРАНИЦІ ЖИВУЧОСТІ ТЕХНІЧНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ ВИПАДКУ РІЗНОРІДНИХ ОБ‘ЄКТІВ

Гундерич Г.А., Скопа О.О.
Український науково-дослідний інститут зв‘язку
03680, Київ-110, вул. Солом‘янська, 13, тел. 8(096)5490198
E-mail: gunderich@mail.ru

В [1] приведена нерівність Мінковського, використовуючи яку та з врахуванням того, що $R_i + q_i = 1$ при $i = \overline{1,\nu}$ та $R_i \in [0,1]$, отримаємо $\left(\prod_{i=1}^{\nu} R_i\right)^{\frac{1}{\nu}} + \left(\prod_{i=1}^{\nu} q_i\right)^{\frac{1}{\nu}} \le 1.$ Звідси випливає, що

$$\hat{P} = 1 - \prod_{i=1}^{\nu} q_i \ge 1 - \left(1 - \left(\prod_{i=1}^{\nu} R_i\right)^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}. \tag{1}$$

При цьому R_i – ймовірність успішного функціонування об’єкта в *i*-му одному біноміальному випробуванні. Нерівність (1) дозволяє звести задачу знаходження γ-нижньої границі [2] $\underline{\hat{P}}$ для ймовірності $\hat{P}$ успішного функціонування системи (рис.1,а), складеної з ν паралельно з’єднаних різних об’єктів (при $\bar{C} = \bigcap_{i=1}^{\nu} \bar{A}_i$), до задачі знаходження γ-нижньої границі $\underline{\text{Ï}}$ для ймовірності Ï $= R_1 R_2 \ldots R_\nu$ успішного функціонування системи, складеної з тих же ν об’єктів, але з’єднаних послідовно (рис.1, б) [3].

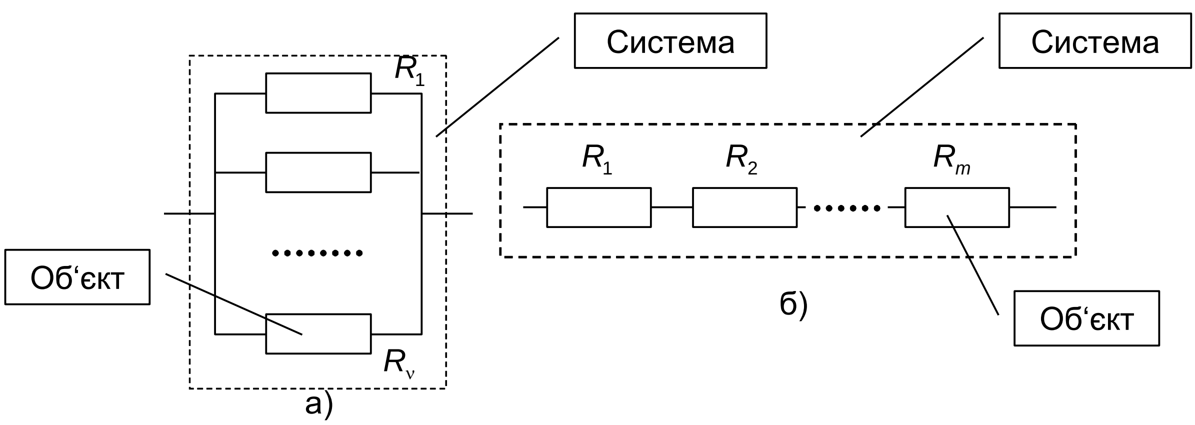


Рис. 1

Іншими словами, будемо вважати, що об’єкти системи випробуються автономно і мета цих іспитів – стан γ-нижньої границі $\underline{\hat{P}}$ для ймовірності $\hat{P}$.

Тоді цю задачу можна вирішити шляхом розгляду системи (рис.1,б), асоційованої з системою рис.1,а, визначивши по тим же вихідним даним γ-нижню границю $\underline{\text{Ï}}$ для показника $\text{Ï} = R_1 R_2 ... R_m$ її надійності, де m – кількість об‘єктів. Зрозуміло, при цьому необхідне відповідне перерахування, що дозволяє знайти $\underline{P}$ по значеннях $\underline{\text{Ï}}$. Покажемо, що формула для перерахунку існує та має простий аналітичний вигляд.

Теорема. Нехай $\underline{\text{Ï}}$ – статистика, що є γ-нижньою границею для ймовірності $\text{Ï} = R_1 R_2 ... R_m$, така, що $P(\underline{\text{Ï}} \le \text{Ï}) \ge \gamma$. Тоді статистика

$$\underline{\hat{P}} = 1 - \left(1 - \text{Ï}^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu} \qquad (2)$$

є γ-нижньою границею для ймовірності $\hat{P}$.

Доказ. З (1) випливає, що $P\left(\underline{\hat{P}} > \hat{P}\right) \le P\left(1 - \left(1 - \underline{\text{Ï}}^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu} > 1 - \left(1 - \text{Ï}^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}\right) =$ $= P(\underline{\text{Ï}} > \text{Ï}) \le 1 - \gamma$ чи $P\left(\underline{\hat{P}} \le \hat{P}\right) \ge \gamma$. Теорема доведена.

Вона справедлива при широких передумовах щодо вихідних даних, так як в ній не обмовляється те, за яким планом іспитів [4] системи отримана γ-нижня границя $\underline{\text{Ï}}$ в (2). Для аналізу розглянемо випадок, коли кожен з об'єктів випробується n_i раз за схемою Бернуллі чи за схемою біноміальних іспитів з зупинкою і реєстрацією випадкових величин n_i'. Обидва методи припускають, що закон зміни параметра R функції розподілу, заздалегідь відомий. При цьому вважається, що величина n_i' дорівнює числу іспитів до одержання першого відмовлення, якщо число відмовлень $r_i \ne 0$ і $n_i' = n_i$, якщо $r_i = 0$. Якщо величини n_i' при $i = \overline{1,\nu}$ незалежні, то згідно даних, які є в [1], статистика $\underline{\text{Ï}} = (1-\gamma)^{\frac{1}{n'}}$, де $n' = \min\limits_{1 \le i \le \nu} n_i'$, є γ-нижньою границею для ймовірності $\text{Ï} = R_1 R_2 ... R_m$. Звідси, з врахуванням (6), отримуємо γ-нижню границю $\underline{\hat{P}}$ для ймовірності $\hat{P}$ з (4) у вигляді:

$$\underline{\hat{P}} = 1 - \left(1 - (1-\gamma)^{\frac{1}{\nu n'}}\right)^{\nu}. \qquad (3)$$

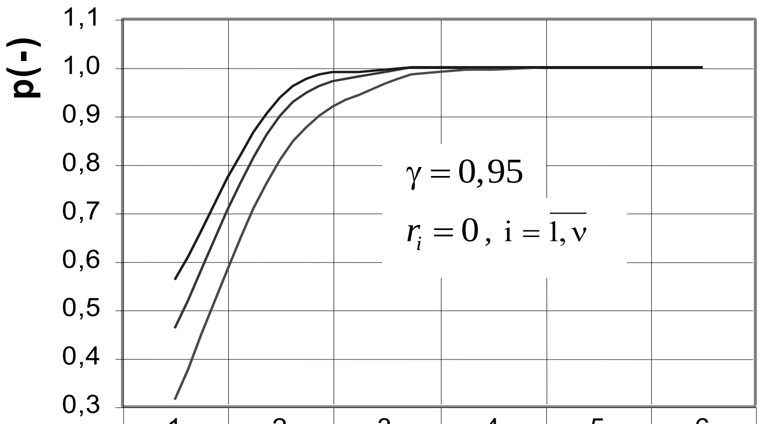
В якості висновку, розглянемо приклад. Нехай кількість об‘єктів в системі дорівнює двом ($\nu = 2$) і вони незалежні. Встановимо, що кожен з них проходив іспит по біноміальному плану з зупинкою і в результаті отримано значення $n_1' = 5$ та $n_2' = n_2 = 10$. Відомо, що випадкові величини n_1' та n_2' незалежні. Потрібно знайти γ-нижню границю $\underline{\hat{P}}$ для ймовірності $\hat{P} = 1 - q_1 q_2$ успішного функціонування системи в цілому при значенні довірчої ймовірності $\gamma = 0,90$.

Рішення. По формулі (3) отримаємо: $\underline{\hat{P}} = 1 - \left(1 - (1 - 0,9)^{\frac{1}{2\times 5}}\right)^2 = 0,96$. При всіх $r_i = 0$, $i = \overline{1,\nu}$ (випадок безвідмовних випробувань) з (3) отримуємо значення γ-нижньої границі:

$$\underline{\hat{P}} = 1 - \left(1 - (1-\gamma)^{\frac{1}{n\nu}}\right)^{\nu}, \qquad (4)$$

де n – найменше з чисел n_i безвідмовних випробувань.

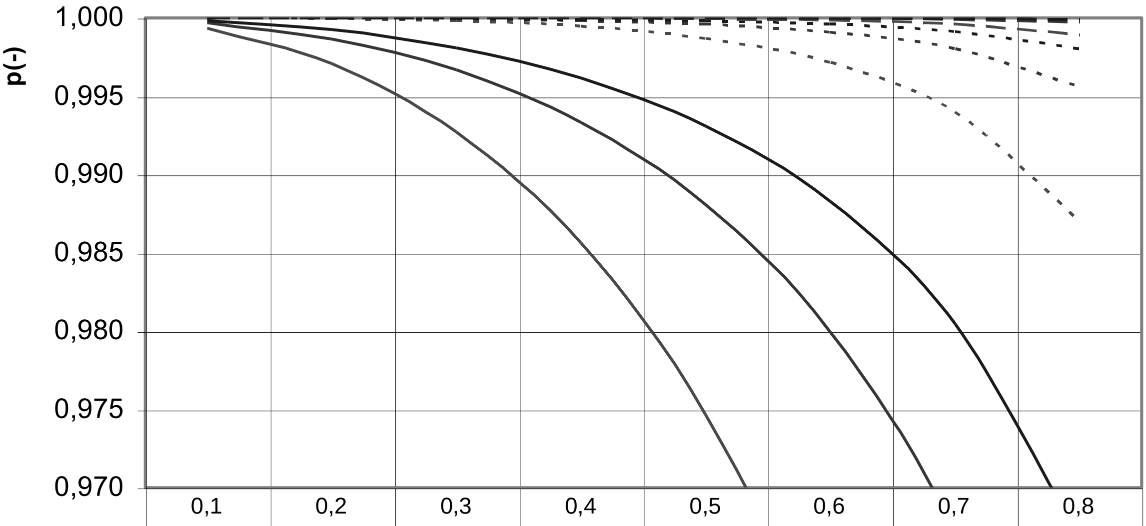
Висновок. Відношення (4) дозволяє встановити в аналітичній формі залежність значення γ-нижньої границі від n і ν (рис. 2), вирішити зворотні задачі по плануванню обсягів іспитів в залежності від параметра γ (рис. 3).



	1	2	3	4	5	6
n=2	0,3162	0,8085	0,9676	0,9961	0,9996	1,0000
n=3	0,4642	0,8984	0,9885	0,9991	0,9999	1,0000
n=4	0,5623	0,9374	0,9947	0,9997	1,0000	1,0000

nu

Рис. 2



	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
n=2, nu=2	0,999324	0,997056	0,992722	0,985627	0,974686	0,958086	0,932443	0,890267
n=3, nu=2	0,999697	0,998667	0,996669	0,993339	0,988097	0,979942	0,966945	0,944645
n=4, nu=2	0,999829	0,999243	0,998099	0,996174	0,993112	0,988288	0,980479	0,966791
n=2, nu=3	0,999995	0,999951	0,999808	0,999456	0,998701	0,997159	0,993990	0,986976
n=3, nu=3	0,999998	0,999985	0,999941	0,999832	0,999593	0,999093	0,998037	0,995609
n=4, nu=3	0,999999	0,999994	0,999975	0,999928	0,999823	0,999603	0,999130	0,998023
n=2, nu=4	1,000000	0,999999	0,999996	0,999985	0,999953	0,999863	0,999619	0,998897
n=3, nu=4	1,000000	1,000000	0,999999	0,999997	0,999990	0,999971	0,999917	0,999752
n=4, nu=4	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999997	0,999990	0,999972	0,999916

gamma

Рис. 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Судаков Р.С. Теория испытаний. – М.: Изд-во военной академии ПВО им. А.М.Василевского, 1985. – 228 с.

2. Скопа А.А., Казакова Н.Ф., Билык Н.М. Нахождение γ-нижней границы для показателя надежности системы из m последовательно соединенных элементов по результатам их автономных биноминальных испытаний // Матер. III Міжнар. наук.-техн. конф. «Сучасні інформаційно-комунікаційні технології COMINFO-2007», 24-28 вересня 2007 р., Ялта: ДУІКТ.

3. Скопа О.О. Інтервальне оцінювання надійності Т-систем з паралельним з’єднанням елементів за результатами їх біноміальних іспитів / Наукові праці ОНАЗ: Період. наук. збір. з радіотехніки і телекомунікацій, електроніки та економіки в галузі зв’язку. – Одеса, 2002. – №1. – С.65-71.

4. Скопа О.О. Плани проведення випробувань надійності систем телекомунікацій з накопиченням пошкоджень // Праці УНДІРТ. – Одеса, 2003. – №3(35). – С.104-106.