УДК 621.3.019:621.395.2.019.3

Казакова Н.Ф., к.т.н., декан ф-ту комп'ютерних технологій
Міжнародний гуманітарний університет (м. Одеса)

ВИКОРИСТАННЯ НМ-ПРОЦЕСІВ ПРИ АНАЛІЗІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ПРИСТРОЇВ УПРАВЛІННЯ РЕЗЕРВНИМ ОБЛАДНАННЯМ

Казакова Н.Ф. Використання НМ-процесів при аналізі функціонування пристроїв управління резервним обладнанням. Наводяться основні положення щодо використання математичного апарату напівмарківських (НМ) процесів для аналізу функціонування пристроїв управління резервним обладнанням (ПУР). Показано, що НМ-процеси використовуються в якості математичних моделей складних стохастичних систем з кінцевою або рахунковою множиною можливих станів, переходи між якими відбуваються через випадкові моменти часу θ, розподілені довільним чином.

Kazakova N.F. Use of almost Markov-processes at the analysis of functioning of control units by the stand-by equipment. Substantive provisions are pointed in relation to the use of mathematical vehicle of almost Markov-processes for the analysis of functioning of control units by the stand-by equipment. It is rotined that almost Markov-processes are used in quality the mathematical models of the difficult stochastic systems with the countable set of the possible states finite or transitions between which take place through the casual moments of time, up-diffused by arbitrary appearance.

Одним з важливих завдань розвитку інформаційних мереж і систем є створення надійних і ефективних автоматизованих систем управління резервним обладнанням. Рішенню проблем синтезу різноманітних автоматизованих систем управління, розвитку теорії їхньої оптимізації присвячена велика кількість наукових і прикладних робіт як вітчизняних, так і закордонних учених. Серед достатньої кількості публікацій по зазначеній тематиці, основоположними роботами є праці Р.Барлоу, Ф.Прошана та І.Герцбаха. В них висвітлюються основні аспекти обслуговування складних систем на основі точних оцінок їх надійності і стійкості. Разом з тим слід зазначити, що в умовах розмаїтості інформаційних і телекомунікаційних технологій, їхнього швидкого прогресу і конвергенції, розмаїтості типів, розгалуженості і взаємозв'язку мереж, росту попиту користувачів на нові послуги, підвищення вимог до їхньої якості, конкуренції на ринку інформаційних систем і телекомунікацій, виникають нові задачі, пов'язані з синтезом та побудовою надзвичайно надійних та стійких систем управління інформаційними мережами і системами. Відповідно здобуває особливої ваги встановлення і рішення наукових проблем і прикладних задач визначення якості систем і пристроїв управління – від загальномережних і загальнооператорських задач оптимізації управління, зв'язаних з синтезом надійних, ефективних і гнучких структур до задач найбільш точного визначення надійності, точності і швидкодії окремих компонентів систем управління і контролю їхньої ефективності. Однак, в зв'язку з відсутністю адекватного математичного апарату і розроблених методик, придатних для інженерних розрахунків на ЕОМ надійності ПУР, не припиняються пошуки ефективних алгоритмів, що дозволяють отримувати більш точні оцінки показників і характеристик надійності складних систем при прийнятних витратах праці і часу. Необхідність подібних досліджень очевидна, оскільки вона має пряме відношення до проблеми створення інформаційних мереж на основі діючих каналів зв'язку без їхньої істотної і дорогої реконструкції, що в даний час є актуальним питанням для багатьох регіонів. В зв'язку з цим далі наводяться основні положення щодо розгляду математичного апарату НМ-процесів та використання його для аналізу функціонування ПУР.

НМ-процеси використовуються в якості математичних моделей складних стохастичних систем з кінцевою або рахунковою множиною можливих станів, переходи між якими відбуваються через випадкові моменти часу θ, розподілені довільним чином [1]. Так, в початковий момент часу $t=0$ встановлюється, що система знаходиться в одному з можливих станів множини $E\subset\{0,1,2,...\}$, наприклад в стані $i\in E$. Після закінчення деякого випадкового часу θ_0 вона миттєво переходить в інший стан $j\in E$, причому час θ_0 перебування системи в стані i до переходу в стан j визначається функцією розподілу ймовірності $G_{ij}(t)$. Перехід системи із стану i в стан j відбувається з ймовірністю $p_{ij}\ge 0$, причому $\sum\limits_{j\in E} p_{ij}\le 1$ для будь-якого $i\in E$.

Якщо відбувається перехід із стану j в стан k, то в стані j система перебуває випадковий час θ_1 з функцією розподілу $G_{jk}(t)$ і т.д. Таким чином, еволюцію НМ-системи описується двома послідовностями:

1). $\{\eta_n, n\ge 0\}$ – стан системи після n-го переходу (зміни стану);

2). $\{\theta_n, n\ge 0\}$ – час перебування в станах між n–м і $(n+1)$-м переходами системи.

Для побудови математичної моделі НМ-системи задали характеристики двомірного процесу ймовірності $\{\eta_n, \theta_n, n\ge 0\}$ [2]. Визначили НМ-матрицю $Q_{ij}(t)=\{Q_{ij}, i, j\in E\}$, яка задає ймовірність переходу двомірного ланцюга

Маркова $\{\eta_n, \theta_n, n \geq 0\}$, що описує еволюцію НМ-системи. Таку матрицю назвали *напівмарківською*, якщо для будь-яких $i, j \in E\, Q_{ij}(t) \equiv 0$, $t < 0$, де $Q_{ij}(t)$ – неубутні безперервні справа функції при $t \geq 0$, а $\sum_{j \in E} Q_{ij}(t) = p_i(t) \leq 1$ для любих $i \in E$ та $t \geq 0$. Для будь-якого фіксованого t матриця $Q(t)$ є напівстохастичною в тому значенні, що її елементи ненегативні, а сума елементів в кожному рядку не перевищує одиниці.

Визначили стохастичну матрицю $P = \{p_{ij}, i, j \in E\}$ так: $p_{ij} = Q_{ij}(+\infty)$ для всіх $i, j \in E$. При цьому вважали, що $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$ для будь-кого $i \in E$. Інакше можна розширити множину E, додавши до нього ще один елемент l і поклавши $Q_{ij}(t) = 1 - \sum_{j \in E} Q_{ij}(t)$.

Для $p_{ij} = Q_{ij}(+\infty) > 0$ визначили функції розподілу $G_{ij}(t) = \dfrac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}}$. У випадку $p_{ij} = 0$ функцію розподілу $G_{ij}(t)$ можна вибирати довільно, наприклад: $G_{ij}(t) = 1,\ t \geq 1$, і $G_{ij}(t) = 0$, $t < 1$.

Встановили, що процесом марківського відновлення (ПМВ) є двомірний ланцюг Маркова $\{\eta_n, \theta_n, n \geq 0\}$ із значеннями $\eta_n \in E$, $\theta_n \in [0, +\infty]$, заданий НМ-матрицею ймовірності переходу

$$P\left\{\eta_{n+1} = j, \theta_n \leq \frac{t}{\eta_0}, \ldots, \eta_n = i, \theta_0, \ldots, \theta_{n-1}\right\} = P\left\{\eta_{n+1} = j, \theta_n \leq \frac{t}{\eta_n} = i\right\} = Q_{ij}(t). \qquad (1)$$

Процес $\{\eta_n, \theta_n, n \geq 0\}$ є специфічним двомірним ланцюгом Маркова, в якому ймовірності переходу залежать тільки від значень першої дискретної компоненти $\{\eta_n, n \geq 0\}$. Ця компонента у свою чергу є ланцюгом Маркова з ймовірністю переходу $P\left\{\eta_{n+1} = \dfrac{j}{\eta_n} = i\right\} = p_{ij} = Q_{ij}(+\infty)$. Із співвідношення (1) також випливає, що $P\left\{\theta_n \leq \dfrac{t}{\eta_n} = i, \eta_{n+1} = j\right\} = G_{ij}(t) = \dfrac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}}$. Зокрема, якщо ланцюг Маркова знаходиться весь час в одному фіксованому стані, то ПМВ перетворюється на звичайний процес відновлення. Якщо ж число можливих станів рівно двом, то в науковій літературі такий ПМВ називається *альтернуючим*.

Таким чином, $p_i(t)$ є функцією розподілу часу перебування НМ-процесу $\eta(t)$ в стані $i \in E$. Елементи НМ-матриці $Q_{ij}(t)$ і функції розподілу $p_i(t)$ зв'язані рівнянням:

$$Q_{ij}(t) = \int_0^t q_{ij}(x)\, p_i(dx) \tag{2}$$

де $q_{ij}(x)$ – умовна ймовірність переходу НМ-процесу із стану i в j за умови, що в i-му стані час перебування дорівнює x: $q_{ij}(x) = P\left\{\eta_{n+1} = \dfrac{j}{\eta_n} = i, \theta_n = x\right\}$.

Конструктивно НМ-процес $\eta(t)$ визначається вектором $p(t) = \{p_i(t), i \in E\}$ функцій розподілу часів перебування і матрицею $q(t) = \{q_{ij}(t), i, j \in E\}$ умовної ймовірності переходу. Співвідношення (2) однозначно визначає НМ-матрицю $Q(t)$.

Практичний інтерес представляє стохастична конструкція НМ-процесу. ПМВ з кінцевим числом переходів в дискретному фазовому просторі станів задали рівнянням:

$$\theta_i = \min_{j \in E} \alpha_{ij} = \sum_{j \in E} J_{ij} \alpha_{ij} \tag{3}$$

де α_{ij} – незалежні в сукупності випадкові ненегативні величини із заданими функціями розподілу $A_{ij}(t) = P\{\alpha_{ij} \le t\}$; J_{ij} – індикатори випадкових подій,

$$\min_{k \in E} \alpha_{ik} = \alpha_{ij} \tag{4}$$

із заданими умовними ймовірностями $h_{ij}(t) M\left[\dfrac{J_{ij}}{\alpha_{ij}} = t\right]$, які визначають переходи вкладеного ланцюга Маркова $\{\eta_n, n \ge 0\}$. В кожному стані i діє k незалежних випадкових чинників через випадкові часові інтервали α_{ik} таким чином, що система змінює свій стан, як тільки на неї починає впливати один з чинників. При цьому час перебування ПМВ в стані i визначається мінімальним часом дії одного з чинників.

Співвідношення (3) і (4) дозволили визначити аналітичні характеристики ПМВ. Для цього скористалися співвідношенням для розподілу мінімуму незалежних випадкових величин – $P\left\{\min\limits_{1\le k<N}\alpha_k > t\right\} = \prod\limits_{k=1}^{N} P\{\alpha_k > t\}$. НМ-матриця визначилася як $Q_{ij}(t) = \int\limits_0^t h_{ij}(x) A_{ij}(dx)$. В цьому випадку $p_{ij} = \int\limits_0^\infty h_{ij}(x) A_{ij}(dx) = Mh_{ij}(\alpha_{ij}) = MJ_{ij}$ [3].

Еволюцію НМ-процесу в такій стохастичній конструкції визначили таким чином. В i-му стані визначили індикатори переходу J_{ij} у відповідності з (4). При фіксованому i тільки один індикатор переходу $J_{ij} = 1$ з ймовірністю p_{ij}. НМ-процес знаходиться в i-му стані випадковий час α_{ij}, потім переходить в стан j і т.д.

Узагальнюючи сказане, зробили висновок, що НМ-процес можна задавати наступними матрицями:

1. Напівмарківською матрицею $Q(t) = \{Q_{ij}(t), i, j \in E\}$, *де* $Q_{ij}(t) = p\left\{\eta_{(\tau_{n+1})} = j; \theta_n \le \frac{t}{\eta_{(\tau_n)}} = i\right\}$ *і початковим розподілом*

$$p_i = P\{\eta_0 = i\}. \tag{5}$$

2. Матрицею перехідної ймовірності вкладеного ланцюга Маркова

$$P = \{p_{ij}, i, j \in E\},\ p_{ij} = P\left\{\eta_{n+1} = \frac{j}{\eta_n} = i\right\}, \tag{6}$$

матрицею функцій розподілу часу перебування $G(t) = \{G_{ij}(t), i, j \in E\}$; $G_{ij}(t) = P\left\{\theta_n \le \frac{t}{\eta_{n+1}} = j, \eta_n = i\right\}$ *і початковим розподілом (5).*

3. Матрицею умовної ймовірності переходу $q(t) = \{q_{ij}(t), i, j \in E\}$; $q_{ij}(t) = P\left\{\eta_{n+1} = \frac{j}{\eta_n} = i, \theta_n = t\right\}$, *вектором функцій розподілу часу перебування* $p(t) = \{p_i(t), i \in E\}$; $p_i(t) = P\left\{\theta_n \le \frac{t}{\eta_n} = i\right\}$ *і початковим розподілом (5).*

4. Матрицею функцій розподілу незалежних в сукупності випадкових величин $A(t) = \{A_{ij}(t), i, j \in E\}$; $A_{ij}(t) = P\{\alpha_{ij} \le t\}$ *і початковим розподілом (5).*

На основі викладеного математичного апарату було створено алгоритм оцінки надійності ПУР, який полягає в наступному [4]:

1. Описується множина можливих станів системи E*. Окремі стани системи запроваджуються з урахуванням можливих різних фізичних станів елементів, з яких складається система. Нехай працездатність системи характеризується рівнями зниження ефективності. Тоді множина станів, в яких може перебувати система, розбивається на класи станів, відповідні певному рівню зниження ефективності:*

$$E = \bigcup_{i=0}^{N} E_i ,$$

де E_0 *– множина повністю працездатних станів;* $E_k\left(k = \overline{1, N-1}\right)$ *– множина станів часткової відмови, що відповідають* k*-му зниженню ефективності;* E_N *– стани повної відмови системи (жодна функція системи не може бути виконана).*

2. Будується граф можливих переходів системи, які можуть здійснюватися тільки між станами одного класу і в стани суміжних класів. На цьому кроці для кожного стану $j \in E$ *визначається множина станів системи, в які можливий перехід з позитивною ймовірністю.*

3. На множині станів E *одним із способів, розглянутих вище, формується НМ-матриця, що описує функціонування системи.*

4. Обчислюються різні характеристики НМ-процесу.

5. Визначаються показники надійності досліджуваної системи і при необхідності шляхи підвищення надійності.

Список літератури

1. Казакова Н.Ф. Рекурентный полиномиальный метод линейного программирования // Наук. праці ДонДТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. Випуск 47. – Донецьк: РВА ДонДТУ, 2002. – С.240-248.
2. Казакова Н.Ф. Аналітичне розв’язання одновимірної задачі Клопера-Пірсона // Радиотехника: Всеукр. межведомств. научн.-техн. сб. – Харьков: ХНУРЭ. – 2002. – Вып. 128. – С.97-98.
3. Казакова Н.Ф. Порівняння методів управління вибором резервного радіоканалу // Праці УНДІРТ. – Одеса: УНДІРТ, 2002. – №1(29). – С.49-51.
4. Казакова Н.Ф. Методи оцінки надійності систем телекомунікацій з резервом // Праці УНДІРТ. – Одеса, 2003. – №2(34). – С.109-112.