УДК 621.391

С.Л. Волков, кандидат технічних наук
Н.Ф. Казакова, кандидат технічних наук

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧНОЇ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ

Наводиться теоретичний виклад суті статистичного методу регуляризації. Обґрунтовуються переваги застосування методу при проектуванні та експлуатації телекомунікаційних мереж.
Ключові слова: *статистична регуляризація, якість обслуговування, неповнота, недостовірність*

Приводится теоретическое изложение сущности статистического метода регуляризации. Обосновывается преимущества применения метода при проектировании и эксплуатации телекоммуникационных сетей.
Ключевые слова: *статистическая регуляризация, качество обслуживания, неполнота, недостоверность*

The theoretical description of the statistical nature of the regularization method. Substantiates the benefits of applying the method in the design and operation of telecommunication networks.
Keywords: *statistical regularization, quality service (QoS), incomplete, inaccurate*

Постановка проблеми в загальному вигляді. На практиці достатньо часто зустрічаються завдання визначення вхідних параметрів телекомунікаційної системи, що задовольняють заданим вихідним характеристикам. Необхідність вирішення таких завдань, необхідних для забезпечення відповідного QoS (*Quality of Service – якість обслуговування*), виникає на різних етапах функціонування телекомунікаційної мережі і полягає в послідовному вирішенні ряду близьких завдань з вхідними даними, які змінюються.

Опис телекомунікаційної системи в загальному вигляді можна представити як відображення певного набору параметрів на деякий простір характеристик [1]. Відповідне операторне рівняння має вигляд:

$$AX = Y, \tag{1}$$

де A – лінійний оператор, який описує роботу системи (прямокутна матриця відповідної розмірності), X – шукана вектор-функція, Y – відома вектор-функція, яка є елементами метричних просторів параметрів системи U і характеристик системи F відповідно:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in U\ ,\ Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\} \in F\ .$$

Як параметри x розглядаються абонентська ємкість та продуктивність вузлів телекомунікаційної системи, їх зв’язність та ін. Характеристики системи y – це пропускна здатність телекомунікаційної мережі, кількість абонентів, що підключаються, відсоток втрачених пакетів, час затримки і т.д.

За своєю суттю, оптимізація телекомунікаційної системи по параметрах якості обслуговування відноситься до класу некоректно (погано) поставлених завдань. Вперше систематичне вивчення таких завдань проводилося Ж. Адамаром, який тоді ж ввів поняття коректної постановки завдань математичної фізики, намагаючись з’ясувати ті типи краєвих умов, які найбільш природні для різних диференціальних рівнянь. Протягом тривалого часу багато учених вважали некоректно поставлені завдання нецікавими і такими, що не мають практичного значення. Зокрема завдання Коші для рівняння Лапласа приводилося у Адамара, а потім ще в ряді підручників, в якості прикладу завдання, яке позбавлене фізичного сенсу. Необхідність розгляду некоректно поставлених завдань і правильна їх постановка вперше була показана А.Н. Тихоновим. При систематичному дослідженні таких завдань центральну роль грають умови єдиності та стійкості. У зв’язку з цим було введено ряд нових понять, таких як коректність по Тихонову, квазірішення, регуляризація. Одночасно були розроблені алгоритми чисельного рішення.

На сьогоднішній день сформульована велика кількість некоректно поставлених завдань, які відносяться як до класичних розділів математики, так і до різних класів важливих прикладних завдань. Цими завданнями є вирішення лінійних інтегральних рівнянь першого роду, завдання підсумовування рядів Фур‘є, коефіцієнти яких відомі приблизно, завдання оптимального управління, вирішення вироджених і погано обумовлених систем лінійних рівнянь алгебри та вирішення інших важливих прикладних проблем.

У зв’язку з викладеним, для оптимізації телекомунікаційної системи по параметрах якості обслуговування (тобто для забезпечення заданого QoS), сформулюємо і отримаємо регуляризоване рішення саме для вказаного випадку.

Аналіз публікацій. Основними публікаціями в яких проведено аналіз впливу самоподібності мережевого трафіку на показники QoS, а також розглянуті алгоритми оптимізації вхідних параметрів, є роботи [1, 3]. У них приведені результати імітаційного моделювання мовного трафіку і визначено, що оптимізація, яка полягає в знаходженні екстремуму функціонала нев’язності якості обслуговування, залежить від ступеня самоподібності: зі збільшенням показника Херста H точність оптимізації збільшується, проте при $H \to 1$ точність починає знижуватися. На підставі отриманих чисельних результатів був зроблений висновок про нестійкість знайдених рішень залежно від початкового значення оптимізації. Тут же, як досконаліші методи оптимізації були розглянуті алгоритми мінімізації функціонала нев’язності Хука-Джівса (метод прямого пошуку) і функціонала Тихоновова. Для досягнення цієї мети також була показана доцільність використання методу Кулакова та алгоритму Нелдера-Міда. Строгий математичний виклад даних методів приведений в [2, 4]. Результати оптимізації параметрів QOS з використанням алгоритму мінімізації функціонала нев’язності Хука-джівса по запропонованій в [2] моделі, показали, що у досліджуваного функціонала можливе існування декількох локальних мінімумів, і, отже, існує вірогідність того, що в процесі моделювання *глобальний мінімум так і не буде знайдений*. Крім того, зміну початкової точки моделювання, проведену для оцінки стійкості отриманих результатів, показало зростання значення функціонала нев'язності майже в два рази, що може свідчити про некоректність моделі в цілому.

Як альтернатива, в [4] був розглянутий алгоритм мінімізації функціонала Тихонова. Суть його полягає в побудові сімейства коректних завдань (регуляризуючого сімейства), залежного від параметра регуляризації α, яке володіє тією властивістю, що при $\alpha \to 0$ рішення коректної задачі прагне до дійсного рішення початкової некоректної задачі. Відомо, що існує дві основні проблеми використання методу регуляризації Тихонова:

– невизначеність з вибором параметра α, значення якого необхідно знати апріорі;

– припущення *про можливість* контролю точної верхньої межі помилки під час експерименту.

На практиці другий пункт може привести до загладжених рішень, що пов'язано зі значенням фактичної помилки, яка зазвичай менше свого максимального значення.

Результати імітаційного моделювання телекомунікаційної системи з використанням алгоритму мінімізації функціонала Тихонова заданими апріорними значеннями $0 \le \alpha \le 14$ і заданою погрішністю [3], показали незначну зміну функціонала нев'язності при великих значеннях $(\alpha \ge 6)$, що говорить про стійкість результатів оптимізації. Проте при невеликих значеннях $(\alpha < 6)$ спостерігалося різке зниження стійкості отримуваних рішень, що привело до перевищення заданих по погрішностях вимог до коливань функціонала нев'язності по QoS.

Метою роботи, є теоретичний виклад суті статистичного методу регуляризації, строгий математичний опис якого приведений в [2, 5], а також обґрунтування переваги застосування даного методу при проектуванні та експлуатації телекомунікаційних мереж.

Виклад основного матеріалу. Як показано в [6], в статистиці, машинному навчанні та теорії зворотних завдань під *регуляризацією* розуміють додавання до вихідних умов деякої додаткової інформації з метою вирішення некоректно поставленої задачі або метою запобігання перенавчанню. Ця інформація часто має вид штрафу за складність моделі. Наприклад, це можуть бути обмеження гладкості результуючої функції або обмеження по нормі векторного простору. З байєсовської точки зору багато методів регуляризації відповідають додаванню деяких апріорних розподілів на параметри моделі. Подібні проблеми виникають в різних областях науки. Наприклад, метод найменших квадратів може бути розглянутий як проста форма регуляризації. Регулярізація Тихонова для інтегральних рівнянь дозволяє балансувати між відповідністю даних і маленькою нормою рішення. Останнім часом зросла популярність методу нелінійної регуляризації.

Метод статистичної регуляризації заснований на використанні в якості апріорних даних інформації про розподіл вірогідності початкових даних, що приводить до заміни точного рішення на деяке наближене. Такий підхід має наступні переваги:

– завдання вирішення некоректного рівняння виступає як завдання обробки експериментальних даних, для якого введення імовірнісних понять є неминучим, оскільки помилка правої частини (1) носить випадковий характер і може бути охарактеризована лише імовірнісним чином;

– статистичний метод дозволяє використовувати попередній досвід, враховуючи його в апріорному розподілі;

– за відсутності апріорної інформації можливе використання наявних припущень про шукану функцію.

Сформулюємо поставлене завдання, як завдання математичної статистики. Для цього запишемо (1) в наступному вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = y_i,\ i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Припустимо, що права частина рівняння (2) вимірюється з середньоквадратичною помилкою σ_i і для конкретизації функції щільності вірогідності помилок зробимо допущення, що σ_i при різних i незалежні та розподілені по нормальному закону з математичним очікуванням рівним нулю. Таке допущення, відповідно до центральної граничної теореми, цілком виправдане, оскільки число доданків σ_i велике, а внесок кожного в суму – малий. В результаті вимірювань вектора Y при заданому векторі X з врахуванням (2) умовна вірогідність отримання визначається по формулі:

$$P(Y \mid X) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(y_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right)^2}{2\sigma_i^2}}. \tag{3}$$

Ввівши діагональну матрицю помилок W з матричними елементами

$$w_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sigma_i^2};\ i, j = 1, m;\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ ï ðè } i = j \\ 0 \text{ ï ðè } i \neq j \end{cases},$$

запишемо умовну вірогідність (3) в наступному вигляді:

$$P(Y \mid X) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(X, A^T W A) + (A^T W Y, X)}, \tag{4}$$

де C_1 – не залежна від X константа.

Далі введемо симетричну ненегативну певну матрицю Ω за допомогою якої утворимо стабілізуючий функціонал

$$\Omega[X] = (X, \Omega X) \tag{5}$$

і побудуємо статистичний ансамбль гладких функцій з параметром гладкості α:

$$P_\alpha(X) = C_\alpha \, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha(X,\Omega X)}{2}}, \tag{6}$$

де константа C_α визначає умову нормування.

Функціонал (5) характеризує ступінь гладкості функції, наприклад, норму її q-ї похідної:

$$\Omega[x(z)] = \int \left[\frac{d^q x(z)}{dz^q} \right]^2 dq,$$

де матриця Ω є кінечно-різницевим еквівалентом введеного функціонала.

Визначимо $P_\alpha(X)$ як апріорну вірогідність для шуканої вектор-функції X і знайдемо рішення в статистичному ансамблі (6) із заданим параметром гладкості α. Для цього по формулі Байеса розрахуємо апостеріорний розподіл для X:

$$P(Y \mid X, \alpha) = \frac{P(X \mid Y) P_\alpha(X)}{\int P(X \mid Y) P_\alpha(X) dx}.$$

Підставляючи (4) і (6) отримуємо:

$$P(Y \mid X, \alpha) = C_2 \, \mathrm{e}^{-\frac{(\alpha, [A^T WA + \alpha\Omega] X) + (A^T WY, X)}{2}}, \tag{7}$$

де C_2 – константа, яка не залежить від X.

Формула (7) при заданому апріорі α дає найповніше рішення даної задачі. При цьому як відновлена функція X приймається математичне очікування по розподілу (7):

$$M[X_\alpha] = (A^T WA + \alpha\Omega)^{-1} \cdot A^T WY. \tag{8}$$

Помилка відновлення x_i визначається як середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma(x_i) = \sqrt{[(A^T WA + \alpha\Omega)^{-1}]_{ii}}. \tag{9}$$

Наближене значення параметра α отримуємо на підставі (5) та усередненням по ансамблю гладких функцій (6):

$$M[X, \Omega X] = \sum_{i,j} \Omega_{ij} M[x_i, x_j] = \sum_{i,j} \Omega_{ij} \frac{(\Omega^{-1})_{ij}}{\alpha} = \frac{n}{\alpha}, \; \alpha = \frac{n}{M[X, \Omega X]},$$

де $M[X,\Omega X]$ – приблизне значення функціонала (5) для очікуваного X.

Повніша апріорна інформація про функцію X може бути отримана в результаті проведення серії статистичних вимірювань. Наприклад, при визначенні середньої затримки проходження пакетів в телекомунікаційній системі слід скористатися результатами вимірювань числа користувачів в системі, що виконуються протягом деякого проміжку часу. Далі на підставі отриманих вибіркових статистичних даних обчислити середню функцію $X_0 = M[X_{\text{âèá³ðê}}]$ і кореляційну матрицю C з елементами $c_{ij} = M\left[(x_{i\,\text{âèá³ðê}} - x_{0i})(x_{j\,\text{âèá³ðê}} - x_{0j})\right]$.

Оскільки кореляційна матриця відома, то як апріорний розподіл для X можна вибрати такий гасівський розподіл, у якого кореляційна матриця співпаде з матрицею C:

$$P(X) = const\,\mathrm{e}^{-\frac{\left(X,C^{-1}X\right)}{2}}.$$

Таким чином, знання кореляційної матриці для X дає регулюючий функціонал без всякої невизначеності в константі регуляризації.

Замінюючи в (8) і (9) $\alpha\Omega$ на C^{-1}, отримуємо відновлену функцію

$$M[X_\alpha] = (A^TWA + C^{-1})^{-1} \cdot A^TWY$$

та її помилку $\sigma(x_i) = \sqrt{[(A^TWA + C^{-1})^{-1}]_{ii}}$.

Для використання розглянутої методики при програмуванні завдань пошуку безумовного локального екстремуму функції, приведемо наступний алгоритм, який складається з двох фаз – *досліджуючий пошук* та *пошук за зразком*. Відзначимо, що цей алгоритм відноситься до прямих методів, тобто безпосередньо спирається на значення функції [6], але він (при деякій модифікації) дозволяє вирішити вище зазначену задачу *віднайдення глобального мінімуму*.

На початковому етапі задаємо стартову точку 1 і кроки h_i по координатах (рис. 1). Далі фіксуємо значення всіх координат окрім першої. Після цього необхідно обчислити значення функції в точках $x_0 + h_0$ та $x_0 - h_0$, де x_0 – перша координата точки, а h_0 – значення кроку по цій координаті. Після цього переходимо в точку з найменшим значенням функції. У цій точці фіксуємо значення всіх координат окрім другої; обчислюємо значення функції в точках $x_1 + h_1$ та $x_1 - h_1$; переходимо в точку з найменшим значенням функції і т.д. для всіх координат. У випадку, якщо для якої-небудь координати значення в початковій точці менше, ніж значення для

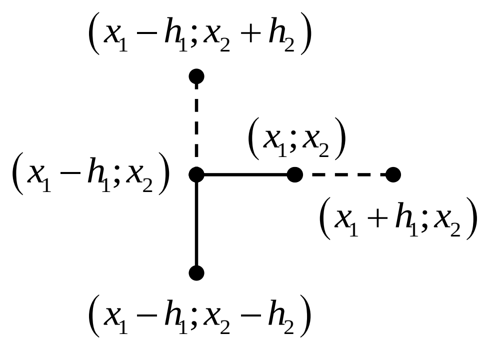

Рис. 1 – Ілюстрація першого етапу для двох перших координат обох напрямів кроку, то крок по цій координаті зменшується. Коли кроки по всіх координатах h_1 стануть менше відповідних значень x_i, алгоритм завершується і точка 1 визнається точкою мінімуму.

Таким чином, провівши досліджуючий пошук по всіх координатах, ми отримаємо нову точку з найменшим значенням функції в окрузі: позначимо її 2. Тепер переходимо до другої фази алгоритму (рис. 2).

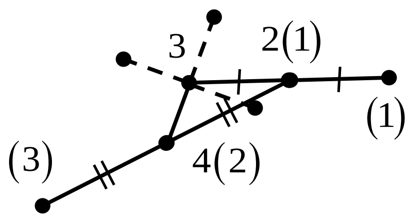

Рис. 2 – Ілюстрація другого етапу для двох координат

На етапі пошуку за зразком відкладаємо точку 3 в напрямі від 1 до 2 на тій же відстані. Її координати вираховуємо по формулі $\bar{x}_3 = \bar{x}_1 + \lambda\left(\bar{x}_2 - \bar{x}_1\right)$, де x_i –точка з номером i, λ – параметр алгоритму, який вибирається рівним 2. Потім в новій точці 3 проводимо досліджуючий пошук, як на першій фазі алгоритму, за винятком того, що крок на цій фазі не зменшується. Якщо на цій фазі, в результаті досліджуючого пошуку, вдається отримати точку 4, відмінну від точки 3, то точку 2 перейменуємо в 1, а 4 – в 2 і повторюємо пошук за зразком. У випадку якщо не вдається знайти точку 4, відмінну від точки 3, то точку 2 перейменуємо в точку 1 і повторимо першу фазу алгоритму досліджуючого пошуку.

У дужках відмічені номери точок після перейменування. З рисунку зрозуміло, як алгоритм коректує свій напрям залежно від знайдених значень функції.

Висновки. Вирішення некоректних завдань, зокрема оптимізація вхідних параметрів телекомунікаційної системи по заданих параметрах якості обслуговування, вимагає регуляризації, тобто привнесення деяких додаткових даних про вхідні параметри. Розглянутий метод статистичної регуляризації має відмінну рису, а саме – точну і відповідаючу суті досліджуваної телекомунікаційної системи форму, до якої вноситься апріорна інформація. Це, в порівнянні з методами, запропонованими в [1], дає наступні переваги:

– однозначну статистичну оцінку погрішності результату відновлення;

– однозначну статистичну оцінку параметра регуляризації;

– отримання (на підставі додаткової статистичної апріорної інформації про шукану функцію) регулюючого функціонала без всякої невизначеності в константі регуляризації.

Подальші дослідження мають на увазі створення імітаційної моделі для підтвердження правильності теоретичних викладень і вироблення рекомендацій для практичного застосування даного методу при аналізі роботи існуючих телекомунікаційних мереж та при проектуванні нових.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Шелухин О.И., Осин А.В., Смольский С.М. Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения / Под ред. О.И Шелухина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 386 с.
2. Некорректные задачи цифровой обработки информации и сигналов / А.А. Грешилов – Изд. 2-е доп, М.: Университетская книга; Логос, 2009. – 360 с.: ил.

3. Шелухин О.И., Пружинин А.В., Осин А.В., Оптимизация параметров телекоммуникационных сетей методом регуляризации Тихонова // Информационно-измерительные и управляющие системы, 2006, т.4, №6, с.63-72.

4. Методы решения некорректных задач. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. Изд. 2-е.

5. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // УНФ. – 1970 – Т. 102, вып. 3.

6. Регуляризация (математика) / [Электронный ресурс]: http://ru.wikipedia.org/wiki/Регуляризация_(математика) – Режим доступа: свободный.