

УДК 339.138:338.27

JEL Classification: C 53, F 17

**Янковий Олександр Григорович***д-р екон. наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України,  
завідувач кафедри економіки підприємства та організації підприємницької діяльності  
Одеський національний економічний університет (Одеса, Україна)***Гура Ольга Леонидівна***канд. екон. наук., доцент, директор  
Одеський фінансово-економічний коледж  
Київського національного торговельно-економічного університету (Одеса, Україна)*

## МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ЖИТТЄВОГО ЦИКЛУ ТОВАРУ НА ОСНОВІ S-ПОДІБНИХ КРИВИХ

У статті розглянуто підходи щодо моделювання та прогнозування життєвого циклу товару. Отримано моделі життєвого циклу товару за допомогою різноманітних S-подібних математичних функцій. Розраховані прогнози на перспективу, важливіші ключові параметри цих кривих: точки максимуму, точки перегину, коли прискорений ріст продажів змінюється на уповільнений, а також коефіцієнти еластичності S-подібних функцій. За даними моделями проаналізовано життєвий цикл товару підприємства м'ясопереробної галузі та визначено цінову еластичність попиту на нього.

Ключові слова: життєвий цикл товару, моделювання, прогнозування, цінова еластичність попиту

DOI: 10.15276/mdt.1.1.2017.5

**Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.** Одним із фундаментальних напрямків стратегічного аналізу є моделювання, прогнозування та планування процесів розвитку товарного виробництва на основі дослідження життєвого циклу товару (ЖЦТ). Це пов'язане з тим, що з початку минулого століття в економічній науці домінує концепція, згідно з якою продажі будь-якого товару характеризуються певною циклічністю.

Теорія ЖЦТ припускає, що кожний товар або вмирає відразу після народження, або проходить ряд певних послідовних етапів, що є аналогією життєвого циклу біологічної істоти – стадіям її раннього розвитку, росту, зрілості й спаду. Концепція ЖЦТ в цілому є подальшим розвитком «органістичної» теорії, розробленої в XIX ст. для того, щоб привернути увагу до ідеї еволюції та еволюційних процесів на противагу механістичній моделі Всесвіту, пов'язаної із класичною фізикою Ньютона [1, с. 347-367; 2; 3, с. 22-24; 4].

Модель ЖЦТ графічно відображається у формі гіпотетичної кривої (рис. 1) і демонструє життєвий період продажів (прибутку, рентабельності) на стадіях впровадження (1), росту (2), насичення (3) й спаду (4).

Етап впровадження (1) відображає час проникнення товару на ринок, інформування потенційних споживачів про його переваги у порівнянні з аналогічними товарами інших підприємств;

етап росту (2) – це період різкого підвищення продажів, напрацювання іміджу товару підприємства;

етап насичення (3) – період стабільності й найбільшого успіху, за яким неминуче, раніше чи пізніше, настає спад (етап 4). Точка А – початковий момент, з якого товар починає захоплювати ринок; точка В – рубіж стабільного успіху, а точка С – точка зриву із кривою успіху.

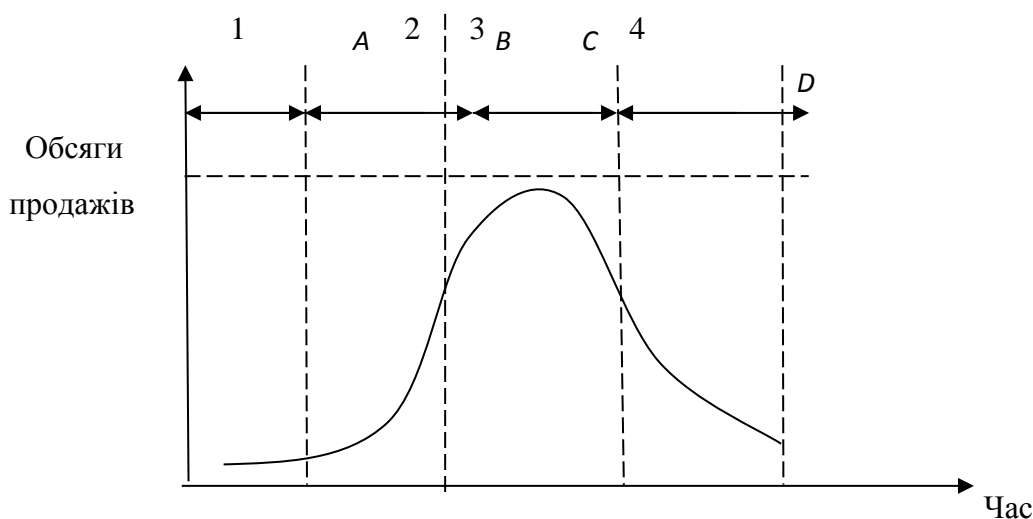


Рисунок 1 – Крива життєвого циклу товару

Вибір стратегій та пріоритетів ефективного менеджменту змінюється залежно від того, на якому етапі знаходиться даний товар. На етапі (1) варто сформувати чітку управлінську ієрархію з фіксованим розподілом повноважень і відповідальності. Справа в тому, що до приходу в точку *A* в команді керування продажами товару, як правило, усі рівні й усі відповідають за все. У підсумку успіх стає загальним надбанням, а за помилки не відповідає ніхто. Така «анархія» в управлінні здатна призвести до того, що товар може не дожити до етапу (2). На цьому етапі зростає роль маркетингового керування збутом товару. Успіх залежить від того, наскільки точно виявлені закономірності ЖЦТ й способи торгівлі ними на товарних ринках.

На етапі (3) пріоритетними стають реклама, *PR*, підтримка іміджу торгівельної марки й розширення спектра фірмових послуг підприємства. Відрізок *BC* продовжується за рахунок надання традиційній продукції додаткових споживчих вигод, що на час рятує товар від зриву з кривої успіху. Етап (4) характеризується поступовим покиданням ринку, необхідністю «ротації» членів команди управління продажами, тому що її здатності здійснювати ефективний менеджмент вичерпані майже повністю.

ЖЦТ, зображений на рис. 1, розглядається як найбільш типовий, традиційний життєвий цикл. Однак існують й інші види ЖЦТ:

1) усічений цикл не має завершальної фази спаду, тому що товар користується стабільним високим та тривалим попитом і не вимагає серйозного вивчення. Прикладом тут може служити телебачення;

2) «ракетоподібний» цикл – це модель ситуації, що демонструє обвал продажів після того, як нововведення втратило інтерес до себе;

3) «модний» цикл відображає коливання в обсязі продажів залежно від того, як змінюється мода.

Такі різні життєві цикли передбачають різні стратегії діяльності. Традиційний життєвий цикл (рис. 1) вирізняється високими вимогами в області вивчення попиту споживача й базується на досить великих витратах у сфері освоєння ринку, просування й збуту продукції. На нашу думку, дослідник не може знати цього з досить високим рівнем імовірності, тому треба обережно ставитися до результатів моделювання, заснованих на статистичній інформації, перевіряючи їх адекватність реальному розвитку продажів.

Зрозуміло, що концепція ЖЦТ не має статусу закону, тому що не кожна стадія спричиняє наступну. Стадія спаду може супроводжуватися серією інновацій, що розвертаються, і товари можуть пропускати або повторно проходити у своєму розвитку деякі стадії. Якщо концепція ЖЦТ має пояснювальне значення, то вона повинна виходити за межі недостатньої метафори циклу народження, росту, піка розвитку й спаду. Товари й послуги не є біологічними організмами. Потрібно виявити зовнішні фактори або процеси, які діють як причинний механізм, приводячи до певного результату, показати, що продажі змінюються в часі недостатньо, оскільки сам час не є єдиною змінною, що впливає на обсяги продажів. Час – це штучний аргумент, що втілює в собі дію безліч реальних економічних чинників, які впливають на обсяги продажів. Це наукова абстракція, покликана спростити наші уявлення про динаміку показника, що вивчається, і побудувати більш-менш адекватну його модель.

Вище досягнення служби маркетингу підприємства в рамках стратегічної концепції ЖЦТ полягає в умінні точно визначити момент часу, коли варто почати диверсифікацію виробництва й «зачати» життєвий цикл інноваційного товару (показаний штриховою кривою  $A^*B^*C^*D^*$  на рис. 2). Якщо це вдається, то гребені «хвиль успіху»  $BC$  і  $B^*C^*$  наближаються одна до одної (зменшується зона втрат  $CB^*FE$  на рис. 2) і успіх бізнесу в часі може бути продовжений надалі.

Якщо проаналізувати графіки традиційних кривих ЖЦТ на рис. 2, то можна побачити, що найбільш підходящим моментом для започаткування життєвого циклу інноваційного товару є точка  $M$ , що приблизно відповідає максимальному обсягу продажів першого (за часом) товару. Аналогічно, початок впровадження на ринку третього інноваційного товару збігається з точкою  $N$ , яка відповідає максимальному обсягу продажів другого (за часом) товару тощо.

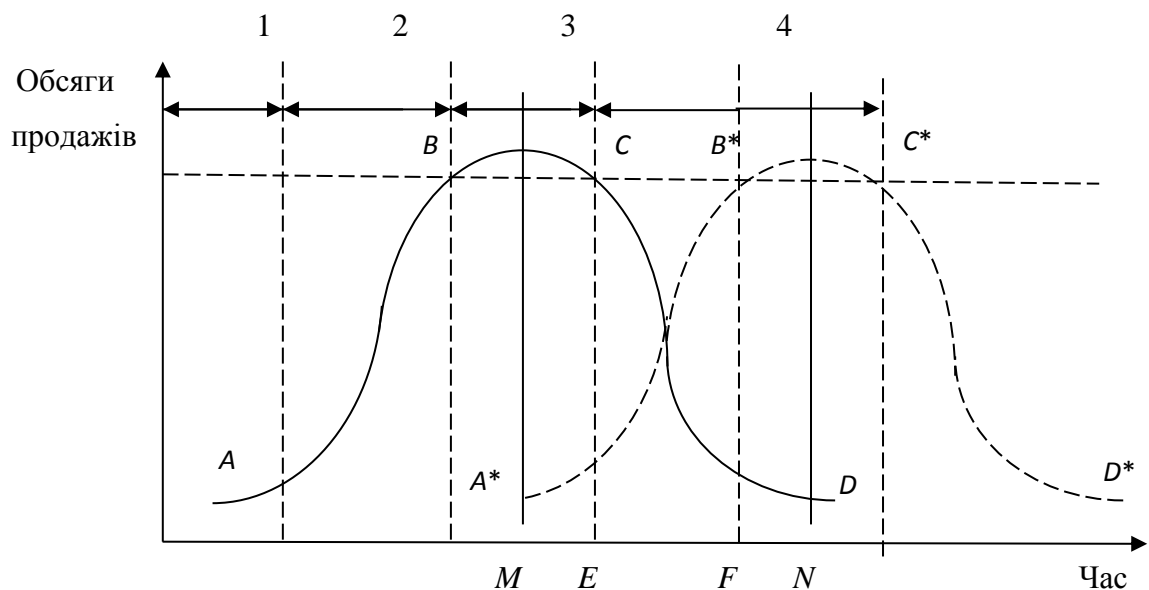


Рисунок 2 – Криві життєвих циклів двох товарів

У разі дотримання такого графіка планування і виходу на ринок нового товару успіх у часі буде продовжуватися. Тому виникає проблема математико-статистичного моделювання і прогнозування ЖЦТ й визначення важливіших ключових точок:

- максимуму ( $M, N$ );
- точок перегину, коли прискорений ріст продажів змінюється на уповільнений;
- коефіцієнтів еластичності продажів за часом.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор.** Слід відмітити, що питаннями моделювання і прогнозування ЖЦТ займалися науковці різних шкіл та напрямків маркетингу [5-9].

Так, А.В. Дзюбіна, ґрунтуючись на функціональних описах етапів життєвого циклу інновацій, пропонує власну інтерпретацію моделювання динаміки поточної інновації та інновації-наступника. Вона вказує, що шукана точка  $(t_0, S_0)$  є відліком часу виходу поточної інновації на ринок у процесі освоєння виробництва після повністю завершених НДДКР. На даному етапі спостерігається помірно зростаюча динаміка обсягу реалізації даного інноваційного продукту. Найкраще даний процес описується функцією виду  $S_1 = a_1 t^{a_2}$ . Подальше зростання обсягу виробництва поточної інновації після повного освоєння виробництва носитиме прямолінійний характер зі стабільними темпами приросту, який буде описуватися рівнянням прямої ( $S_2 = a_3 t + a_4$ ). Після фази росту настане фаза зрілості, яка матиме спочатку спадний зростаючий характер до досягнення найвищого обсягу реалізації поточної інновації, а далі спостерігатиметься помірне спадання внаслідок насичення ринку, зменшення попиту і появи конкурентів (фаза занепаду). Це доцільно описати рівнянням параболи ( $S_3 = a_4 t^2 + a_5 t + a_6$ ) [5].

На нашу думку, розбиття життєвого циклу інноваційного товару на окремі стадії суттєво ускладнює й занадто деталізує процес моделювання і прогнозування майбутніх його продажів. Такий підхід містить загрозу за окремими частинними деталями втратити загальну тенденцію розвитку товарного виробництва. До того ж, автор не надає переконливих аргументів на користь запропонованих рівнянь кривих.

У монографії [6] за редакції професора Р.В. Федоровича розглянуто методичні підходи до моделювання і планування маркетингової діяльності підприємств, зокрема, планування переміщення матеріалів і товарів в ланцюгу поставок продукції промислового призначення, теоретико-прикладні аспекти моделювання в маркетингу, моделювання системи управління споживчим попитом, моделювання управління витратами на маркетинг у системі стратегічного управління підприємством.

О.С. Сичов розглядає технологію прогнозування попиту товарів масового споживання із застосуванням експертів. Він зазначає, що основними відмінними рисами запропонованої технології є: врахування знань експерта при побудові моделі, що надає можливість більш правильно враховувати вплив зовнішніх факторів; аналіз результатів прогнозування експертів гарантує, що в моделі були враховані всі суттєві фактори впливу; багаторазова оптимізація з поступовим збільшенням факторів дає можливість вводити до моделі нові залежності з урахуванням їх важливості; вибір і аналіз найбільших відхилень дають змогу експерту генерувати гіпотези, завдяки яким у моделі можуть бути враховані додаткові фактори; статистична перевірка гіпотез забезпечує об'єктивність отриманих результатів [7].

Ми в цілому погоджуємось із зазначеними рисами і підходами до прогнозування попиту товарів масового споживання і вважаємо, що вони досить корисні при використанні формальних процедур математико-статистичного моделювання і прогнозування ЖЦТ.

В.Ю. Школа, В.М. Кислий аналізують побудову прогнозів життєвого циклу інновацій у системі управління еколого-економічною безпекою підприємства [8]. На їх думку, прогнозування ЖЦТ інновацій полягає у визначенні тривалості аналітично-пошукових робіт, випробовування в ринкових умовах освоєння комерційного виробництва та часу потенційної ринкової життєдіяльності інновації. Авторами подана формула математичної інтерпретації тривалості ЖЦТ, яка залежить від системності та глибини маркетингових досліджень, достатності наявного інформаційного поля, вибору методологічного інструментарію, ступеня новизни інновації, тісноти зв'язку

розрахункових показників із факторами мікро- та макросередовища, стану системи – рівноваги, квазістабільності. Тривалість НДДКР визначається трудомісткістю робіт зі створення інновації, що залежить від ступеня її новизни (типу інновації). Для інновацій модифікують та замінюють виробництво, основу розрахунків складають існуючі дані про витрати часу на створення базової моделі. При цьому пропонується застосовувати такі підходи: детермінований (нормативний), імовірнісний, комбінований.

На наш погляд, у статті В.Ю. Школи, В.М. Кислого недостатньо уваги приділено математико-статистичним аспектам моделювання і прогнозування ЖЦТ й визначенню його найважливіших ключових точок.

А.Ю. Огнева, О.І. Лабурцева досліджували традиційні підходи до використання ЖЦТ в управлінні діяльністю компанії без застосування сучасних математико-статистичних методів і моделей [9].

**Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячена стаття.** Проведений вище аналіз останніх досліджень і публікацій за даною проблематикою показав, що в економічній літературі бракує наукових розробок, спрямованих на вирішення наступних запитань:

– Чи здатне сучасне промислове підприємство систематично здійснювати інноваційний процес на виробництві і регулярно пропонувати споживачам нові види продукції (послуг)?

– Як побудувати математико-статистичну модель ЖЦТ, адекватну реальним емпіричним даним за обсягами продажів продукції (послуг)?

– Чи можна в процесі планування на базі побудованої моделі ЖЦТ розрахувати ключові точки (на рис. 2 точки  $M$ ,  $N$ , точки перегину на осі часу)?

**Формулювання мети статті (постановка завдання).** Адресуючи перше запитання фахівцям сфери науково-технічного та інвестиційно-інноваційного розвитку промисловості, зокрема, харчового виробництва, ми в даній статті поставили завдання відповісти на друге і третє запитання, а саме: змоделювати ЖЦТ за допомогою  $S$ -подібних математичних функцій і спрогнозувати найважливіші ключові точки цих кривих – такі, як точки максимуму  $M$ ,  $N$ , точки перегину, коли прискорений ріст продажів змінюється на уповільнений, а також визначити коефіцієнти еластичності  $S$ -подібних функцій.

**Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.**  $S$ -подібні функції вибрані як інструменти моделювання не випадково, оскільки саме вони найбільш адекватно описують модель ЖЦТ й досить часто зустрічаються в практичних дослідженнях в області маркетингу. На користь застосування  $S$ -подібних функцій у ході економіко-статистичного моделювання ЖЦТ можна навести наступні міркування.

Успіх будь-якого моделювання суттєво залежить від правильного вибору математичних функцій, властивості яких відповідали б внутрішній природі об'єкта дослідження. Так, експоненційні криві добре описують процеси, що мають «лавиноподібний» характер, а саме – коли приріст економічного показника, що вивчається, залежить в основному від уже досягнутого рівня. Обмеження для зростання не мають суттєвого впливу. Якщо ж обмежуючий чинник увесь час діє, при цьому сила його впливу збільшується разом з ростом досягнутого рівня, то точний опис такого економічного явища можна отримати за допомогою модифікованої експоненти.

Нарешті, у разі, коли обмежуючий чинник починає впливати тільки після певного моменту (точка перегину), до котрого процес розвивався за деяким експоненційним законом (тобто спочатку змінюється повільно, потім швидко і далі знову повільно), то найкраще наближення статистичних даних дають саме  $S$ -подібні криві. По суті,  $S$ -подібні

криві описують два послідовних процеси: один з прискоренням розвитку, другий – з уповільненням, і навпаки. Такий розвиток, окрім ЖЦТ, мають процеси росту народонаселення країн світу, популяцій тварин у живій природі.

Можна вказати, принаймні, п'ять S-подібних математичних функцій, які при певних умовах можуть використовуватися для моделювання і прогнозування ЖЦТ. Розглянемо їх головні апроксимаційні властивості з метою застосування в практичних розрахунках у процесі планування інновацій на промисловому підприємстві [10; 11].

1. Тригонометричні функції, зокрема функція

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 \sin X^* , \quad (1)$$

де  $X^* = X\pi/(X_{\max} - X_{\min})$  – радіанна міра чинника часу  $X$ .

Функція (1) приводиться до лінійного вигляду шляхом заміни  $\sin X^* = Z$ . Вона визначена на усьому інтервалі  $[0, +\infty)$  і періодична з періодом  $2\pi$ . А її графік, який називається синусоїдою, симетричний відносно початку координат (рис. 3).

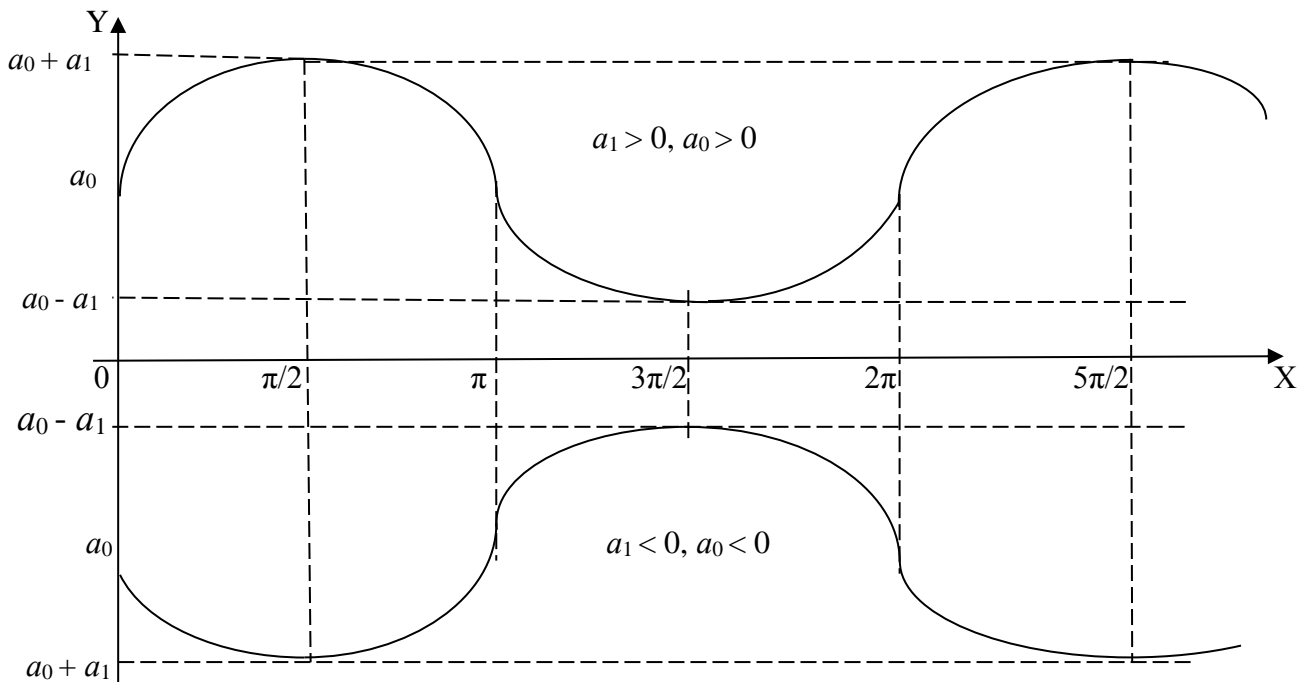


Рисунок 3 – Графіки синусоїди

При  $X = 0$   $Y = a_0$  і спостерігається перетин графіка синусоїди осі  $OY$ .

При  $X \rightarrow +\infty$  функція, що розглядається, монотонно коливається навколо прямої  $Y = a_0$  і горизонтальних та вертикальних асимптот не має.

Аналіз знаків першої і другої похідних функції (1) показує, що при  $a_1 > 0$  в точках  $X^* = \pi/2 + 2\pi n$  спостерігаються максимальні значення синусоїди  $Y_{\max} = a_0 + a_1$ , а в точках  $X^* = 3\pi/2 + 2\pi n$  – мінімальне ( $Y_{\min} = a_0 - a_1$ ). При  $a_1 < 0$  картина поведінки синусоїди змінюється на протилежну.

При  $a_1 > 0$  на інтервалі  $[0, \pi]$  синусоїда опукла доверху, а на інтервалі  $[\pi, 2\pi]$  – опукла донизу. При  $a_1 < 0$  картина поведінки синусоїди змінюється на протилежну. У точках  $X^* = \pi + 2\pi n$  друга похідна дорівнює нулю, тому вони є точками перегину (рис.3).

Візуальний аналіз графіка на рис. 3 показує, що на відрізках  $[\pi/2, 3\pi/2]$ ,  $[3\pi/2, 5\pi/2]$  синусоїда змінюється спочатку уповільнено, далі прискорено, а потім знов уповільнено, тобто поводить себе як  $S$ -подібна крива з межами  $Y = a_0 - a_1$ ,  $Y = a_0 + a_1$ . Така її властивість дозволяє використовувати функцію (1) для моделювання і прогнозування ЖЦТ у процесі планування впровадження інноваційної продукції.

Формула коефіцієнта еластичності для функції (1) має вигляд

$$E = a_1 X^* \cos X^* / (a_0 + a_1 \sin X^*) . \quad (2)$$

Побудова точкового та інтервального прогнозів на основі рівняння регресії (1) відбувається за наступною схемою:

$$\hat{Y}_{N+L} \pm \Delta, \quad (3)$$

де  $\hat{Y}_{N+L} = a_0 + a_1 \sin X_{N+L}$  – точковий прогноз продажів на період упередження  $L$  ( $X_{N+L}$  – значення чинника часу, що відповідає періоду упередження  $L$ );

$\Delta$  – гранична помилка прогнозу.

Схема (3) є базовою і використовується для визначення довірчих інтервалів прогнозів, побудованих на основі будь-яких моделей, що приводяться до лінійного виду. Вона автоматично реалізується в деяких програмах статистичної обробки даних, наприклад, STATISTICA.

Доведено, що для парної лінійної моделі гранична помилка прогнозу  $\Delta$  з достовірністю  $(1 - \alpha) \times 100\%$  розраховується за формулою

$$\Delta = t_{\alpha; N-2} S_y [1/N + (Z_{N+L} - \bar{Z})^2 / \sum (Z_i - \bar{Z})^2]^{1/2}. \quad (4)$$

Тут  $S_y$  позначає стандартну помилку перетвореної до лінійного вигляду регресії,  $t_{\alpha; N-2}$  – табличне значення  $t$ -критерію Стьюдента.

## 2. Функція, зворотна до гіперболічної експоненти

$$\hat{Y} = 1 / (a_0 + a_1 e^{-X}). \quad (5)$$

Заміною величин  $1/\hat{Y} = \hat{Y}_1$ ,  $e^{-X} = Z$  функція (5) приводиться до лінійного вигляду  $\hat{Y}_1 = a_0 + a_1 Z$  зі звичайним застосуванням оцінки невідомих коефіцієнтів регресії за методом найменших квадратів і статистичного аналізу отриманого рівняння, наприклад, в редакторі *Excel* (стандартні програми «Кореляція», «Регресія»).

Функція (5) визначена на усьому проміжку  $[0, +\infty)$ , крім тих точок, де гіперболічна експонента перетинає ось  $OX$ , тобто де знаменник (5) дорівнює нулю. При однакових знаках коефіцієнтів регресії гіперболічна експонента не перетинає вісь  $OX$  і графік функції (5) при  $X \rightarrow +\infty$  прямує до горизонтальної асимптоти  $Y = 1/a_0$ , а при  $X \rightarrow -\infty$  до горизонтальної асимптоти  $Y = 0$  (рис. 4).

Аналіз знаків першої і другої похідних функції (5) показує, що при  $a_1 > 0$  функція, зворотна до гіперболічної експоненти, зростає, а при  $a_1 < 0$  – спадає. В області визначення (5) перша похідна ніколи не набуває нульового значення, тому дана функція екстремумів не має.

Очевидно, що при однакових знаках коефіцієнтів регресії в точці  $X = \ln(a_1/a_0)$  друга похідна дорівнює нулю і функція (5) має точку перегину.

У випадку  $a_1 > a_0 > 0$  при  $X > \ln(a_1/a_0)$  ( $a_1e^{-X} - a_0 < 0$ ) і друга похідна негативна, тобто функція, зворотна до гіперболічної експоненти, опукла доверху, а при  $X < \ln(a_1/a_0)$  ( $a_1e^{-X} - a_0 > 0$ ) і друга похідна позитивна, тобто функція опукла донизу (рис. 4).

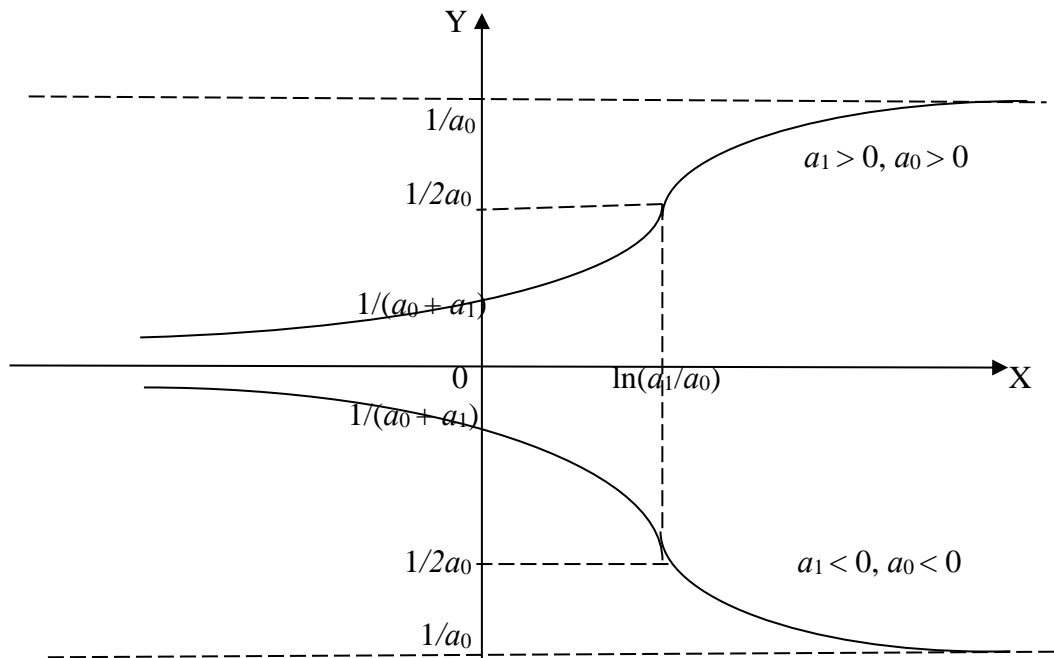


Рисунок 4 – Графіки функції, зворотної до гіперболічної експоненти

Якщо  $a_1 < a_0 < 0$ , то все навпаки, тобто має місце симетрія графіка відносно осі  $OX$  (рис. 4).

Коефіцієнт еластичності для моделі (5) має вигляд

$$E = a_1 X / (a_1 + a_0 e^X). \quad (6)$$

Внаслідок перетворення вихідних даних  $1/\hat{Y} = \hat{Y}_1$ ,  $e^{-X} = Z$  точковий прогноз на базі функції (5) знаходиться за формулами:

$$Y_{1N+L} = a_0 + a_1 Z_{N+L}; \quad Y_{N+L} = 1/Y_{1N+L}. \quad (7)$$

При однакових знаках коефіцієнтів  $a_0$ ,  $a_1$  функція (5) поводить себе як  $S$ -подібна крива з межами  $Y = 1/a_0$  і  $Y = 0$ . Така її властивість дозволяє використовувати функцію, зворотну до гіперболічної експоненти, для описання ЖЦТ.

Довірчий інтервал прогнозу визначається за наступною схемою

$$1/(Y_{1N+L} \pm \Delta). \quad (8)$$

### 3. Степенево-показникові функції

$$\hat{Y} = a_0 X^{a_1 X}. \quad (9)$$

Логарифмуючи праву і ліву частини (9), отримаємо:  $\ln \hat{Y} = \ln a_0 + a_1 X \ln X$ . Заміна величин  $\ln \hat{Y} = \hat{Y}_1$ ,  $\ln a_0 = b$ ,  $X \ln X = Z$  приводить (9) до лінійного вигляду  $\hat{Y}_1 = b + a_1 Z$  зі



застосуванням оцінки невідомих коефіцієнтів регресії за методом найменших квадратів. Потім шляхом потенціювання знаходиться значення коефіцієнта регресії  $a_0$ .

При  $X = 0$   $Y = a_0$ . Отже, степеневопоказникова функція визначена на усьому відрізку  $[0, +\infty)$ . При  $X = 1$   $Y = a_0$ .

Треба мати на увазі, що за визначенням функції (9) притаманні властивості як показникової, так і степеневій регресії. Так, на проміжку  $[1, +\infty)$  при  $a_1 > 0$  поведінка степеневопоказникової функції нагадує зміну звичайної степеневій функції або експоненти. При цьому розвиток економічного процесу, що вивчається, лавиноподібно прискорюється, оскільки з ростом  $X$  зростає також і показник степеня  $a_1X$ .

У випадку  $a_1 < 0$  на проміжку  $[1, +\infty)$  при  $X \rightarrow +\infty$   $Y \rightarrow 0$ .

Аналіз знаків першої і другої похідних функції (9) показує, що при  $\ln X = -1$  ( $X = e^{-1}$ ) спостерігається екстремум степеневопоказникової функції.

При однакових знаках коефіцієнтів регресії  $a_0, a_1$  на інтервалі  $[0, e^{-1}]$   $Y' < 0$  і спостерігається монотонне зниження функції (9), а на інтервалі  $[e^{-1}, +\infty)$   $Y' > 0$  – її монотонне зростання. При цьому степеневопоказникова функція досягає свого мінімуму.

Якщо знаки коефіцієнтів  $a_0, a_1$  не збігаються, то навпаки: на інтервалі  $[0, e^{-1}]$   $Y' > 0$  та спостерігається монотонний ріст, а на інтервалі  $[e^{-1}, +\infty)$   $Y' < 0$  – монотонне зниження і функція досягає свого максимуму. Екстремальне значення степеневопоказникової функції дорівнює  $Y = a_0(e^{-1})^{a_1/e}$ .

При виконанні умови  $X(\ln X + 1)^2 = -1/a_1$  друга похідна (9) починає дорівнювати нулю, що визначає точку перегину степеневопоказникової функції.

Коефіцієнт еластичності для моделі (9) має вигляд

$$E = a_1X(\ln X + 1). \quad (10)$$

Внаслідок логарифмування вихідних даних точковий прогноз на базі степеневопоказникової функції знаходиться за формулами:

$$Y_{1N+L} = \ln a_0 + a_1 X_{N+L} \ln X_{N+L}; \quad Y_{N+L} = EXP(Y_{1N+L}) = a_0 (X_{N+L})^{a_1 X_{N+L}}. \quad (11)$$

Довірчий інтервал прогнозу визначається за схемою

$$EXP(Y_{1N+L} \pm \Delta), \quad (12)$$

де  $\Delta$  – гранична помилка прогнозу, яка розраховується за формулою (4).

Враховуючи, що  $EXP(Y_{1N+L} + \Delta) = EXP(Y_{1N+L})EXP(\Delta) = Y_{N+L}EXP(\Delta)$ , а  $EXP(Y_{1N+L} - \Delta) = EXP(Y_{1N+L})/EXP(\Delta) = Y_{N+L}/EXP(\Delta)$ , можна отримати кінцевий вираз нижньої та верхньої меж довірчого інтервалу прогнозу на базі степеневопоказникової функції:

$$a_0 (X_{N+L})^{a_1 X_{N+L}} / EXP(\Delta), \quad a_0 (X_{N+L})^{a_1 X_{N+L}} EXP(\Delta). \quad (13)$$

Очевидно, що довірчий інтервал (13) не буде симетричним відносно точкового прогнозу (11). Це дещо ускладнює тлумачення отриманих меж довіри і робить досить умовними результати інтервального прогнозування на базі функції (9).

Враховуючи ці міркування, графіки степеневопоказникової функції мають вигляд, показаний на рис. 5 (а) і (б).

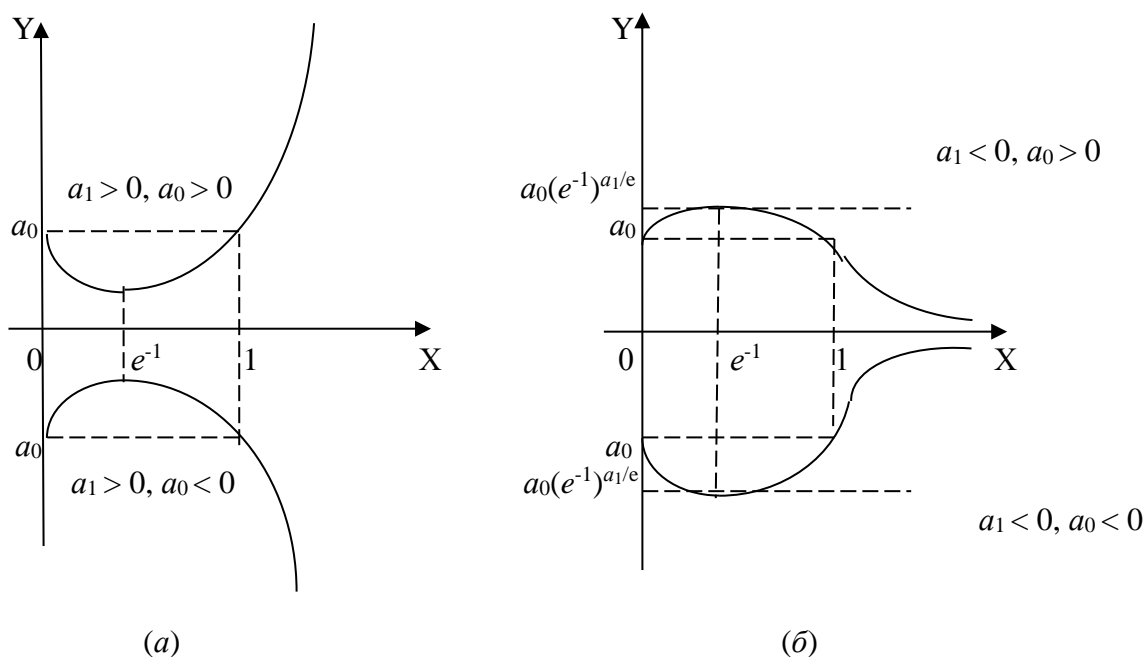


Рисунок 5 – Графіки степеневно-показникової функції

Як видно з наведених графіків, у випадку (б) при  $a_1 < 0$  степеневно-показникова функція поводить себе як S-подібна крива з межами  $Y = a_0(e^{-1})^{a_1/e}$  і  $Y = 0$ . Наприклад, при  $a_1 < 0, a_0 < 0$  це означає, що на інтервалі  $[e^{-1}, +\infty)$  вона спочатку опукла донизу до точки перегину, а потім навпаки. При  $a_1 < 0, a_0 > 0$  ситуація протилежна. Такі її властивості дозволяють використовувати функцію (9) для моделювання і прогнозування ЖЦТ.

4. *Логістична функція* (зворотна до модифікованої експоненти) є ще одним різновидом S-подібної кривої, яку іноді називають кривою Перла-Ріда. Основна форма логістичної функції має вигляд

$$\hat{Y} = 1/(a_0 a_1^X + a_2), \quad a_0 > 0, \quad 0 < a_1 < 1, \quad a_2 > 0. \quad (14)$$

Як і модифікована експонента, функція (14) при невідомому коефіцієнті  $a_2$  потребує застосування методів нелінійного оцінювання для визначення коефіцієнтів регресії  $a_0, a_1, a_2$ . При відомому коефіцієнті  $a_2$  заміна  $1/\hat{Y} - a_2 = \hat{Y}_2$  дозволяє перетворити логістичну функцію у звичайну експоненту  $\hat{Y}_2 = a_0 a_1^X$ , оцінка коефіцієнтів якої не викликає особливих труднощів.

Оскільки модифікована експонента не перетинає вісь  $OX$  ( $a_0 a_1^X + a_2 \neq 0$ ), то логістична функція визначена на усьому інтервалі  $[0, +\infty)$ . Вона не має точок розриву і вертикальних асимптот. При  $X = 0$   $Y = 1/(a_0 + a_2)$ .

При  $X \rightarrow +\infty$   $Y \rightarrow 1/a_2$ , а при  $X \rightarrow -\infty$   $Y \rightarrow 0$ , тобто графік функції (14) має дві горизонтальні асимптоти:  $Y = 1/a_2$  і  $Y = 0$ , перша з яких виконує роль «стелі», а друга – «підлоги» на графіку кривої Перла-Ріда.

Оскільки перша похідна не набуває нуля ні при яких значеннях  $X$ , то екстремумів логістична функція не має.

Аналіз знаків другої похідної функції (14) показує, при  $X < \ln(a_2/a_0)/\ln a_1$   $Y'' > 0$  і крива Перла-Ріда опукла донизу, а при  $X > \ln(a_2/a_0)/\ln a_1$   $Y'' < 0$  – навпаки: функція (14) опукла доверху. Логістична крива центрально симетрична відносно точки перегину (рис. б).

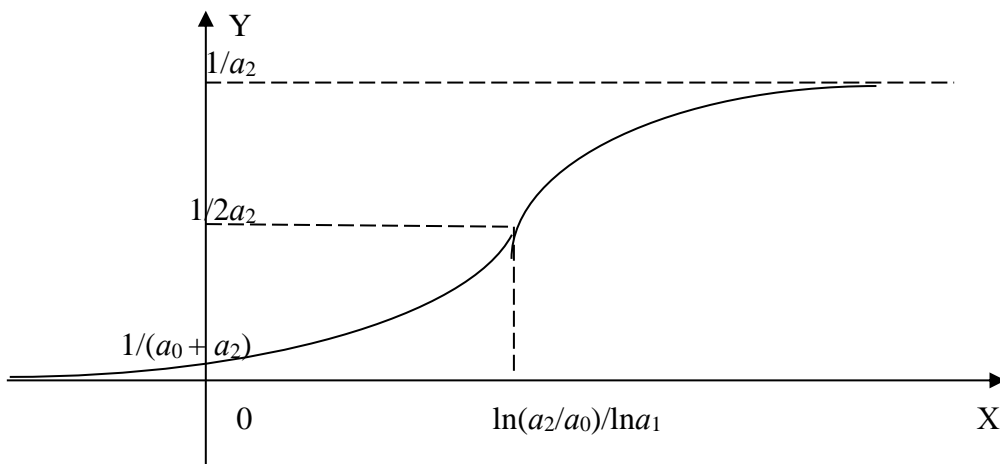


Рисунок 6 – Графік логістичної функції

Оскільки лінеаризація логістичної функції передбачає не тільки логарифмування, а й зворотне перетворення результативної ознаки  $Y$ , то точковий прогноз і еластичність будуться так:

$$Y_{2N+L} = EXP(\ln a_0 + X_{N+L} \ln a_1); Y_{N+L} = 1/(Y_{2N+L} + a_2) = \\ = 1/[EXP(\ln a_0 + X_{N+L} \ln a_1) + a_2] = 1/(a_0 a_1^{X_{N+L}} + a_2). \quad (15)$$

$$E = -a_0 a_1^X \ln(a_1) X Y. \quad (16)$$

Межі інтервального прогнозу (у випадку, коли  $a_2$  відоме) визначаються наступним чином:

$$1/[EXP(Y_{1N+L} \pm \Delta) + a_2], \quad (17)$$

де  $Y_{1N+L} = \ln Y_{2N+L} = \ln(1/Y_{N+L} - a_2)$ ;

$\Delta$  – гранична помилка прогнозу, яка розраховується за формулою (4).

Кінцевий вираз нижньої та верхньої меж довірчого інтервалу прогнозу на базі логістичної функції має вигляд

$$1/[a_0 a_1^{X_{N+L}} / EXP(\Delta) + a_2], \quad 1/[a_0 a_1^{X_{N+L}} EXP(\Delta) + a_2]. \quad (18)$$

Вони, як і довірчі межі всіх інтервальних прогнозів, отриманих за допомогою функцій, лінеаризованих на основі логарифмування вихідних даних (степеневі, показникової, степеневі-показникової, модифікованої експоненти), несиметричні відносно точкового прогнозу (15).

5. *Функція Гомперця* є ще одним прикладом функції, котра поводить себе як модифікована експонента і як S-подібна крива:

$$\hat{Y} = EXP(a_0 a_1^X + a_2), \quad a_1 > 0. \quad (19)$$

Зазначимо, що шляхом подвійного логарифмування і подальшої заміни змінних функція Гомперця зводиться спочатку до модифікованої експоненти  $\ln \hat{Y} = a_0 a_1^X + a_2$ , а потім лінеаризується (якщо  $a_2$  відоме).

Заміна  $a_0 = \ln b_0$ ,  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = \ln b_2$  дозволяє отримати ще один, відомий в літературі, вираз функції Гомперця:

$$\hat{Y} = b_2 b_0^{(b_1^X)}, \quad b_1 > 0. \quad (20)$$

Функція (19) визначена на усьому проміжку  $(-\infty, +\infty)$ , тобто не має точок розриву, а її графік не має вертикальних асимптот. Оскільки число  $e$  в будь-якій степені величина позитивна, то  $Y \geq 0$ .

При  $a_1 > 1$  функція Гомперця поводить себе в залежності від знака  $a_0$ . При позитивному  $a_0$  вона має нижню межу у вигляді горизонтальної асимптоти  $Y = EXP(a_2)$  і необмежена зверху. При негативному  $a_0$  вона має дві межі у вигляді горизонтальних асимптот: нижню  $Y = 0$  і верхню  $Y = EXP(a_2)$ .

У другому випадку при  $0 < a_1 < 1$  функція Гомперця теж поводить себе в залежності від знака  $a_0$ , але картина зміни (19) дзеркально протилежна при зміні  $X \rightarrow +\infty$  на  $X \rightarrow -\infty$ , тобто має місце симетричність відносно осі  $OY$ .

При  $X = 0$   $Y = EXP(a_0 + a_2)$  – точка перетину кривої Гомперця з віссю  $OY$ .

Аналіз знаків першої і другої похідних функції (19) показує, що екстремумів функція Гомперця не має, а при  $a_0 < 0$  коли  $a_1^X = -1/a_0$  вона має точку перегину  $X = \ln(-1/a_0)/\ln(a_1)$ .

Останній випадок якраз і визначає функцію (19) як  $S$ -подібну криву: при  $X < \ln(-1/a_0)/\ln(a_1)$   $Y'' > 0$  і функція Гомперця опукла донизу, при  $X > \ln(-1/a_0)/\ln(a_1)$   $Y'' < 0$  вона опукла доверху. В точці перегину функція (19) дорівнює  $Y = EXP(-1 + a_2)$ .

З урахуванням проведеного математичного аналізу функції Гомперця її графіки мають вигляд, показаний на рис. 7, (а) і (б).

При  $a_0 < 0$  функція (19) є  $S$ -подібною кривою, тобто спочатку змінюється повільно, потім прискорено, а потім знову повільно (рис. 7, (а), (б)). В цьому вигляді крива Гомперця може використовуватися задля дослідження ЖЦТ при моделюванні і плануванні продажів певного товару.

Коефіцієнт еластичності для моделі (19) має такий вигляд

$$E = a_0 a_1^X \ln(a_1) X. \quad (21)$$

Оскільки лінеаризація функції Гомперця передбачає подвійне логарифмування даних, то точковий прогноз будується так:

$$\begin{aligned} Y_{1N+L} &= (\ln a_0 + X_{N+L} \ln a_1); \quad Y_{N+L} = EXP(Y_{1N+L} + a_2) = \\ &= EXP[EXP(\ln a_0 + X_{N+L} \ln a_1) + a_2] = EXP(a_0 a_1^{X_{N+L}} + a_2). \end{aligned} \quad (22)$$

Межі інтервального прогнозу (у випадку, коли  $a_2$  відоме) визначаються наступним чином:

$$EXP[EXP(Y_{1N+L} \pm \Delta) + a_2], \quad (23)$$

де  $Y_{1N+L} = \ln(Y_{2N+L} - a_2) = \ln(1/Y_{N+L} - a_2)$ ;

Кінцевий вираз нижньої та верхньої меж довірчого інтервалу прогнозу на базі функції (19) має вигляд

$$\text{EXP}[a_0 a_1^{X_{N+L}} / \text{EXP}(\Delta) + a_2], \quad \text{EXP}[a_0 a_1^{X_{N+L}} \text{EXP}(\Delta) + a_2]. \quad (24)$$

Вони теж несиметричні відносно точкового прогнозу (22).

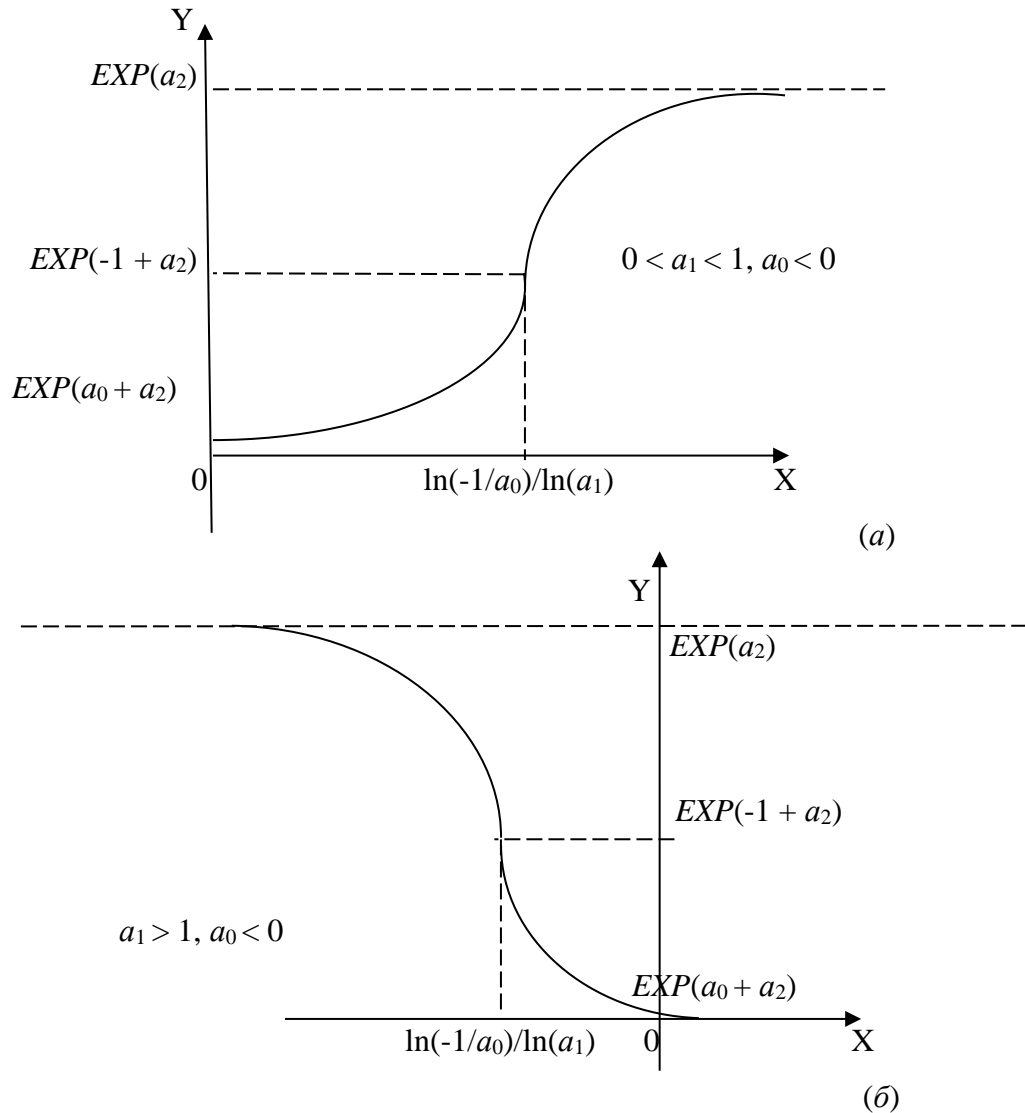


Рисунок 7 – Графіки функції Гомперця

Вибір тієї чи іншої функції з наведених вище п'ятьох з метою використання її для моделювання й прогнозування ЖЦТ (у даному випадку – динаміки збуту певного виробу) відбувається за допомогою їх порівняльного аналізу на основі найважливіших статистичних характеристик точності, надійності та адекватності побудованих рівнянь регресії. До таких характеристик слід віднести:

1. Коефіцієнт детермінації  $R^2$ , який показує частку варіації результативної ознаки  $Y$ , обумовленої даним видом  $S$ -подібної функції. Величина  $R^2$  змінюється від 0 до 1 і є відносною мірою точності отриманої моделі. Зазвичай перевага віддається тій кривій, для якої  $R^2 = \max$ .

2. Стандартна помилка регресії віддзеркалює абсолютну точність знайденого рівняння регресії, вона змінюється від 0 до  $+\infty$ . Чим менша стандартна помилка, тим точніше описує  $S$ -подібна функція статистичні дані.

3.  $F$ -критерій Фішера характеризує надійність побудованої регресійної моделі: його розрахункове значення порівнюється з критичним. У разі перевищення розрахункового значення критичної точки рівняння визнається статистично значущим, надійним. Зазвичай перевага віддається тій кривій, для якої  $F = \max$ .

4. Значущість  $F$  – величина, обернена до  $F$ -критерію Фішера. Чим менша значущість  $F$ , тим більш надійною, суттєвою є використана  $S$ -подібна функція. Для перевірки надійності рівняння регресії значущість  $F$  порівнюють з вибраним рівнем значущості  $\alpha$ . Зазвичай  $\alpha = 0,01; 0,05; 0,10$ . У разі, якщо  $F$ -значущість менша за  $\alpha$ , модель визнається статистично надійною. Тобто перевага віддається тій кривій, для якої  $F$ -значущість мінімальна.

5. Коефіцієнт автокореляції залишків моделі першого порядку  $r(1)$  є показником адекватності побудованого рівняння:

1) якщо  $r(1) \approx 0$ , тобто статистично ненадійний, то вибрана крива адекватно описує економічний процес, що досліджується;

2) якщо  $r(1)$  статистично надійний і виконується нерівність  $-1 < r(1) < 0$ , то побудована модель є «перевантаженою» – треба перейти до більш простої математичної функції;

3) якщо  $r(1)$  статистично надійний і виконується нерівність  $0 < r(1) < 1$ , то побудована модель є «недовантаженою» – треба перейти до більш складної математичної функції. Тобто перевага віддається тій кривій, для якої коефіцієнт автокореляції залишків  $r(1)$  ближче до 0.

Таким чином, застосовуючи вказані статистичні характеристики отриманих  $S$ -подібних функцій, можна вибрати ту з них, яка найбільш придатна для використання в процесі прогнозування та стратегічного планування збуту на підприємстві.

У завершенні теоретичної частини статті наведемо кінцеву таблицю, в якій відображено всі п'ять запропонованих кривих із указівкою точок максимуму, в котрих доцільно здійснити започаткування життєвого циклу інноваційного товару, перегину, коли прискорений ріст продажів змінюється на уповільнений, а також коефіцієнтів еластичності  $S$ -подібних функцій (див. табл. 1).

Використання методів моделювання і прогнозування ЖЦТ за допомогою  $S$ -подібних функцій дає можливість оптимізувати стратегічний план промислового підприємства, вчасно прийняти обґрунтоване рішення за такими напрямками:

- нарощення обсягу виробництва продукції, що виготовляється;
- проведення додаткових заходів щодо стимулювання збуту продукції;
- оновлення асортименту продукції.

Розглянемо тепер практичне застосування  $S$ -подібних кривих, які були детально обговорені вище, при моделюванні, прогнозуванні та плануванні виробництва м'ясопродуктів на Одеському приватному підприємстві «Гармаш», що має досить розвинену торгівельну мережу як у самому місті, так і в Одеській області.

Основна частина продукції, що виробляється на ПП «Гармаш», – це групи варених ковбас, копченостей, твердих ковбас. Асортимент м'ясної продукції досить широкий і містить у собі понад 80 найменувань. Дуже значний перелік пропонує виробників ковбасних виробів: це варені ковбаси й шинки (12 видів), 14 видів напівкопчених ковбас, 30 видів копченостей, 7 видів сосисок, 24 види твердих ковбас, 25 найменувань напівфабрикатів, у тому числі: котлети й шніцелі, пельмені й равіоли (8 видів), 3 види фаршів та інша продукція. У середньому щоквартально на підприємстві розробляється й

уводиться у виробництво 1-2 найменування інноваційної продукції з відмінними смаковими якістьми.

Таблиця 1 – Ключові точки та еластичність S-подібних функцій, що використовуються при моделюванні і прогнозуванні ЖЦТ

Рівняння регресії	Точка максимуму	Точка перегику	Еластичність
1. Синусоїда $\hat{Y} = a_0 + a_1 \sin X^*$	$Y = a_0 + a_1$ при $X^* = \pi/2 + 2\pi n$	$Y = a_0$ при $X^* = \pi + 2\pi n$	$E = a_1 X^* \cos X^* / (a_0 + a_1 \sin X^*)$
2. Функція, зворотна до гіперболічної експоненти $\hat{Y} = 1/(a_0 + a_1 e^{-X})$ при однакових знаках $a_0, a_1$	$Y = 1/a_0$ при $X \rightarrow +\infty$	$Y = a_0/2$ при $X = \ln(a_1/a_0)$	$E = a_1 X / (a_1 + a_0 e^X)$
1. Степенево-показникова функція $\hat{Y} = a_0 X^{a_1 X}$ при $a_1 < 0, a_0 > 0$ або $a_1 < 0, a_0 < 0$	$Y = a_0 (e^{-1})^{a_1/e}$ при $X = e^{-1}$	$Y = a_0$ при $X = 1$	$E = a_1 X (\ln X + 1)$
4. Логістична функція $\hat{Y} = 1/(a_0 a_1^X + a_2)$ при $a_0 > 0, 0 < a_1 < 1, a_2 > 0$ .	$Y = 1/a_2$ при $X \rightarrow +\infty$	$Y = 1/2 a_2$ при $X = \ln(a_2/a_0)/\ln a_1$	$E = -a_0 a_1^X \ln(a_1) X Y$
5. Функція Гомперца $\hat{Y} = EXP(a_0 a_1^X + a_2)$ при $0 < a_1 < 1, a_0 < 0$	$Y = EXP(a_2)$ при $X \rightarrow +\infty$	$Y = EXP(-1 + a_2)$ при $X = \ln(-1/a_0)/\ln(a_1)$	$E = a_0 a_1^X \ln(a_1) X$

Існують місячні дані за 2-е півріччя 2016 р. і 1-е півріччя 2017 р. продажів одного з різновидів вареної ковбаси – сосисок «Прикопчених» (табл. 2), що реалізуються в мережі фірмових магазинів підприємства за ціною 85 грн. за кг.

Таблиця 2 – Динаміка продажів сосисок «Прикопчених» за липень 2016 – червень 2017 рр.

Місяць	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
Обсяги продажів, т	5	7	10	15	22	30	35	37	38	38	39	40

За цими даними проведемо графічний та кореляційно-регресійний аналіз ЖЦТ з метою розрахунку коефіцієнта еластичності та прогнозування (точкового і інтервального з достовірністю 95 %) продажів сосисок «Прикопчених» на липень 2017 р. (період упередження  $L = 1$ , прогнозний період часу  $X_{N+L} = 13$ ).

Цілком очевидно, що залежною змінною  $Y$  виступає місячний обсяг продажів сосисок «Прикопчених», а чинником є час  $X$ . Для обґрунтування математичної форми зв'язку між змінними побудований графік залежності, що відображає динаміку продажів товару, що досліджується (рис. 8).

Вигляд графіка на рис. 8 в певній мірі нагадує графіки п'яти функцій, зображених на рис. 3-7. Тому для порівняльного аналізу апроксимаційних можливостей всіх розглянутих вище S-подібних кривих застосуємо їх для моделювання і прогнозування наведених економічних даних. Перетворення вихідної інформації в ході лінеаризації усіх п'яти S-подібних функцій наведено в табл. 3.

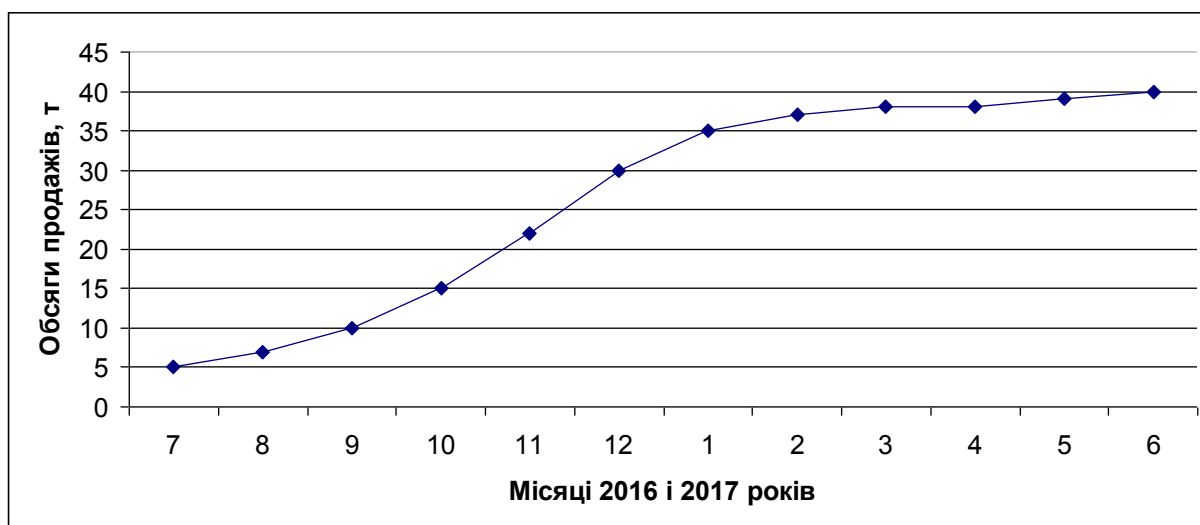


Рисунок 8 – Динаміка продажу сосисок «Прикопчених» за лип. 2016 – черв. 2017 рр.

Таблиця 3 – Вихідні та перетворені дані для моделювання продажів сосисок «Прикопчених»

X	Y	1/Y	lnY	1/Y - a <sub>2</sub>	ln(1/Y - a <sub>2</sub> )	-(lnY - a <sub>2</sub> )	ln(a <sub>2</sub> - lnY)	EXP(-X)	XlnX	sinX*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	5	0,2	1,60944	0,17561	-1,73949	2,10413	0,74390	0,367879	0	-1
2	7	0,142857	1,94591	0,11847	-2,13312	1,76766	0,56966	0,135335	1,386294	-0,95949
3	10	0,1	2,30259	0,07561	-2,58217	1,41099	0,34429	0,049787	3,295837	-0,84125
4	15	0,066667	2,70805	0,04228	-3,16353	1,00552	0,00551	0,018316	5,545177	-0,65486
5	22	0,045455	3,09104	0,02106	-3,86018	0,62253	-0,47396	0,006738	8,04719	-0,41542
6	30	0,033333	3,40120	0,00894	-4,71687	0,31237	-1,16355	0,002479	10,75056	-0,14231
7	35	0,028571	3,55535	0,00418	-5,47716	0,15822	-1,84374	0,000912	13,62137	0,142315
8	37	0,027027	3,61092	0,00264	-5,9382	0,10265	-2,27639	0,000335	16,63553	0,415415
9	38	0,026316	3,63759	0,00193	-6,25255	0,07599	-2,57721	0,000123	19,77502	0,654861
10	38	0,026316	3,63759	0,00193	-6,25255	0,07599	-2,57721	4,54E-05	23,02585	0,841253
11	39	0,025641	3,66356	0,00125	-6,68399	0,05001	-2,99552	1,67E-05	26,37685	0,959493
12	40	0,025	3,68888	0,00061	-7,40245	0,02469	-3,70125	6,14E-06	29,81888	1

Графік на рис. 8 нагадує S-подібну криву з межами  $Y = 0$  і  $Y = 41$ , тобто насичення ринку сосисками «Прикопченими» майже відбулося. Це надає підставу для приблизного визначення величин коефіцієнтів  $a_2$  для логістичної кривої і функції Гомперця. Застосуємо логістичну функцію (14) зі «стелею»  $Y = 1/a_2 = 41$ . Звідси знайдемо коефіцієнт регресії  $a_2 = 1/41 = 0,02439$  (стовпці 5-6 табл. 3).

Застосуємо для моделювання також функцію (19) зі «стелею»  $Y = EXP(a_2) = 41$ . Звідси для функції Гомперця знайдемо коефіцієнт регресії  $a_2 = \ln 41 = 3,71357$  (стовпці 7-8 табл. 3).



З метою знаходження за допомогою персонального комп'ютера коефіцієнтів регресії усіх п'яти функцій в редакторі *Excel* утворимо робочий лист і введемо в стовпці електронних таблиць необхідні змінні. Тут треба враховувати той факт, що асимптота  $Y = EXP(a_2) = 41$  розташована вище емпіричних даних ( $\ln Y_i - a_2 < 0$ ) і логарифм негативного числа не існує. Тому випадок функції Гомперця, зображений на рис. 7 (а), штучно перетворимо до вигляду  $EXP(a_2 - \ln Y) = EXP(a_0 a_1^X)$ , коли  $a_0 > 0$ ,  $a_2 > 0$ , тобто змінимо знак різниці ( $\ln Y_i - a_2$ ) і  $a_0$  на протилежний.

Далі скористаємося вбудованим блоком регресійного аналізу з виконанням стандартних команд «Сервіс» – «Аналіз даних» – «Регресія – «ОК» і вказівкою адрес комірок результативної ознаки та чинників. Розрахунки на персональному комп'ютері дали наступні результати регресійного аналізу та прогнозування на один місяць уперед (див. табл. 4).

Тут стандартна помилка рівняння синусоїди (рядок 1, стовпець 2) наведена у вихідних одиницях виміру результативної ознаки (т), а стандартні помилки інших нелінійних функцій наводяться у перетворених одиницях ( $\ln Y$ ,  $1/Y$  тощо). У стовпчику 5 показаний  $r(1)$  – коефіцієнт автокореляції залишків рівнянь регресії першого порядку. Значущість (стовпець 4) характеризує ймовірність помилки першого роду при перевірці нульової гіпотези відносно відповідного параметра.

Порівняння показників точності, надійності та адекватності побудованих моделей показує, що тільки три з них (синусоїда – рядок 1, логістична – рядок 4, Гомперця – рядок 5 табл. 4) здатні задовільно описувати динаміку продажів сосисок «Прикопчених». При цьому перевагу треба віддати двом останнім функціям, оскільки лише вони забезпечують позитивний коефіцієнт еластичності (синусоїда дає негативне значення) і цілком реальні точкові та інтервальні прогнози, що піддаються економічному тлумаченню.

Слід також відмітити, що коефіцієнти еластичності і довірчі інтервали прогнозу, отримані на базі функції Гомперця ( $E = 0,0939$ ;  $2\Delta = 41,45507 - 40,54037 = 0,9147$ ) і логістичної функції ( $E = 0,0826$ ;  $2\Delta = 40,7869 - 39,8762 = 0,9107$ ), майже збігаються. Це свідчить про схожі апроксимаційні можливості обох регресійних моделей, що розглядаються.

Зіставляючи статистичні параметри двох останніх рівнянь регресії, приходимо до висновку, що найбільш точною, надійною і адекватною у порівнянні з іншими чотирма моделями є функція Гомперця:

$$\hat{Y} = EXP(-4,089268 \times 0,421101^X + 3,71357), \quad (25)$$

яку і будемо застосовувати при аналізі й прогнозуванні виробництва сосисок «Прикопчених» на ПП «Гармаш».

Результати наведених розрахунків дозволили дійти наступних висновків:

По-перше, якщо тенденція розвитку продажів сосисок «Прикопчених» буде зберігатися у близькому майбутньому, то його величина у липні 2017 р. (прогнозний період часу  $X_{N+L} = 13$ ) буде складати приблизно 41 т (точковий прогноз). При цьому з достовірністю 95 % прогнозу оцінку продажів можна очікувати у межах від 40,54 до 41,46 т (інтервальний прогноз).

По-друге, треба відмітити, що ріст продажів даного виду варених ковбас за останні місяці 2017 р. був дуже уповільнений (березень-квітень 38 т, травень 39 т, прогноз на липень 2017 р. майже 41 т), тобто ринок даного товару наблизився до свого насичення.

По-третє, точка  $X = \ln(-1/a_0)/\ln(a_1) = \ln(1/4,089268)/\ln(0,656324) = 3,34$  є точкою перегину. Це означає, що з другої декади жовтня 2016 р. прискорений ріст продажів

сосисок «Прикопчених» змінився на уповільнений і почалося поступове насичення ринку даним ковбасним виробом.

Таблиця 5 – Результати моделювання та прогнозування продажу сосисок «Прикопчених» за різними функціями

Рівняння регресії	Статистичні параметри моделі						Ела- стич- ність ( <i>E</i> )	Прогноз		
	точності		надійності		адекватності			точковий	інтервальний (95 %)	
	$R^2$	стандарт. помилка	<i>F</i> - критерій	значу- щість	<i>r</i> (1)	значу- щість			нижня межа	верхня межа
А	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. $\hat{Y} = 26,3333 + 17,11747\sin X^*$	0,9224	4,0149	118,9457	7,14E-07	0,8145	0,0023	-0,918	42,7574	42,6558	42,8590
2. $\hat{Y} = 1/[0,0383 + 0,493413EXP(-X)]$	0,8744	0,021	69,6133	8,13E-06	0,5223	0,0993	0,0004	26,0817	-89,3655	113,805
3. $\hat{Y} = 9,183264X^{0,064718X}$	0,7542	0,3883	30,6800	0,0002	0,8264	0,0017	2,9993	79,4686	28,7707	219,5032
4. $\hat{Y} = 1/(0,28851 \times 0,589012^X + 0,02439)$	0,9748	0,3217	387,0691	2,52E-09	0,7092	0,0145	0,0826	40,5083	39,8762	40,7869
5. $\hat{Y} = EXP(-4,089268 \times 0,421101^X + 3,71357)$	0,9781	0,2381	447,2937	1,24E-09	0,5144	0,1055	0,0939	40,9977	40,54037	41,45507

По-четверте, розрахована еластичність продажів  $E = 0,094$  свідчить про слабку реакцію споживчого ринку в останні місяці на випуск сосисок «Прикопчених» у часі.

**Висновки з цього дослідження і перспективи подальших розробок за даним напрямом.** Теоретична гіпотеза щодо потенційної можливості застосовувати *S*-подібні криві для моделювання і прогнозування ЖЦТ, а також для визначення найважливіших ключових точок динаміки продажів повністю підтвердилась.

Моделювання ЖЦТ сосиски «Прикопчені», які виробляються на ПП «Гармаш», показало, що існуюча інформація місячних продажів 2016-2017 рр. найкраще описується за допомогою функції Гомперця (19). Використання даної *S*-подібної кривої дозволило достатньо обґрунтовано визначити точкові та інтервальні оцінки майбутньої величини продажів на липень 2017 р., розрахувати рівень насичення і точку перегину

Окрім того, графічний аналіз статистичної інформації та математичне дослідження побудованої регресійної моделі дозволили дійти висновку, що відбулося насичення ринку даним товаром: з другої декади жовтня 2016 р. прискорений ріст продажів сосисок «Прикопчених» змінився на уповільнений. Незабаром треба очікувати поступового скорочення їхніх продажів і, відповідно, зниження виробництва даного товару.

Така реакція маркетологів допоможе запобігти погіршенню ефективної виробничої діяльності ПП «Гармаш» на певний період функціонування, а також визначити нові способи реалізації стратегічних цілей і завдань м'ясопереробного підприємства відповідно до його потенційних можливостей.

1. О'Шоннеси Дж. Конкурентный маркетинг : стратегический поход / пер. с англ. СПб : Питер, 2001. 864 с.
2. Яковенко Е. Г., Басс М. И., Махров Н. В. Циклы жизни экономических процессов, объектов и систем М. : Наука, 1991. 192 с.
3. Яновский А. М. О бизнес-модели предприятия XXI века // Пищевая промышленность. 2000. № 5. С. 22–24.
4. Ілляшенко С. М. Проблеми управління життєвим циклом товару // Механізм регулювання економіки. 2004. № 4. С. 80–87.
5. Дзюбіна А. В. Моделювання динаміки життєвого циклу інноваційного продукту // Ефективна економіка: електрон. версія журн. 2012. № 9. URL : <http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=1414> (дата звернення: 15.01.2016).
6. Маркетингові технології підприємств в сучасному науково-технічному середовищі / за ред. Р. В. Федоровича. Тернопіль : Астон, 2012. 544 с.
7. Сичов О. С. Технологія створення прогнозів попиту товарів масового споживання з застосуванням експертів // Математичні машини і системи. 2013. № 2. С. 73–80.
8. Школа В. Ю., Кислий В. М. Прогнозування життєвого циклу інновацій у системі управління еколого-економічною безпекою підприємства // Механізм регулювання економіки. 2013. № 3. С. 49–59.
9. Огнева А. Ю., Лабурцева О. І. Концепція життєвого циклу товару в управлінні ТМ «Valenta» // Технології та дизайн. 2014. № 3 (12). С. 1–11.
10. Янковой О. Г., Гура О. Л. Моделювання та прогнозування життєвого циклу товару // Збірник наукових праць ХДУХТ. 2007. Т. 2, Вип. 1 (5), С. 185–190.
11. Янковий О. Г., Гура О. Л. Щодо вдосконалення планування на підприємстві за допомогою математико-статистичних методів прогнозування // Актуальні питання економіки. 2009. № 1. С. 229–238.

1. O'Shonnesi, Dzh. (2001). *Konkurentnyiy marketing : strategicheskii pohod* [Competitive Marketing: A Strategic Campaign]. SPb. : Piter, 864 p.
2. Yakovenko, E. G., Bass, M. I., Mahrov, N. V (1991). *Tsikly zhizni ekonomicheskikh protsessov, ob'ektov i sistem* [Cycles of the life of economic processes, objects and systems]. M. : Nauka, 192 p.
3. Yanovskiy, A. M. (2000). *O biznes-modeli predpriyatiya XXI vekam* [About business model of the enterprise of the XXI century]. *Pischevaya promyishlennost*, V.5, pp. 22–24.
4. Ilyashenko, S. M. (2004). *Problemu upravlinnya zhittevim tsiklom tovaru* [Problems of managing the life cycle of goods]. *Mehanizm reguluyuvannya ekonomiki*, V. 4, pp. 80–87.
5. Dzyubina, A. V. (2012). *Modelyuvannya dynamiky zhyttyevoho tsyklu innovatsiyoho produktu* [Modeling the dynamics of the life cycle of the innovative product]. [www.economy.nayka.com.ua, V.9](http://www.economy.nayka.com.ua, V.9). Retrieved from <http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=1414>.
6. Fedorovycha, R. V (2012). *Marketynhovi tekhnolohiyi pidpryyemstv v suchasnomu naukovotekhnichnomu seredovyshchi* [Marketing technologies of enterprises in the modern scientific and technical environment]. Fedorovycha, R. V (Ed.). *Kolektyvna monohrafiya*. Ternopil: Aston, 544 p.
7. Sychov, O. S. (2013). *Tekhnolohiya stvorenniya prohnoziv popytu tovariv masovoho spozhyvannya z zastosuvannyam ekspertiv* [he technology of forecasting the demand for commodities of mass consumption with the use of experts]. *Matematychni mashyny i systemy*, V. 2, pp. 73–80.
8. Shkola, V. Yu. & Kyslyy, V. M. (2013). *Prohnozuvannya zhyttyevoho tsyklu innovatsiy u systemi upravlinnya ekoloho-ekonomichnoyu bezpekoyu pidpryyemstva* [Prediction of the life cycle of innovations in the system of management of ecological and economic safety of the enterprise]. *Mekhanizm rehulyuvannya ekonomiky*, V. 3, pp. 49–59.
9. Ohnyeva, A. Yu. & Laburtseva, O. I. (2014). *Kontseptsiya zhyttyevoho tsyklu tovaru v upravlinni TM «Valenta»* [The Concept of the Product Lifecycle in the Management of TM "Valenta"]. *Tekhnolohiyi ta dizayn*, V. 3(12), pp. 1–11.
10. Yankovyy, O. H. & Hura, O. L.(2007). *Modelyuvannya ta prohnozuvannya zhyttyevoho tsyklu tovaru* [Modeling and forecasting of the product life cycle]. *Zbirnyk naukovykh prats' KhDUKHT*. Kharkiv, V. 1 (5), pp. 185–190.

11. Yankovyy, O. H. & Hura, O. L. (2009). Shchodo vdoskonalennya planuvannya na pidpryyemstvi za dopomohoyu matematyko-statystychnykh metodiv prohnozuvannya [On improvement of planning at the enterprise by means of mathematical-statistical methods of forecasting]. Aktual'ni pytannya ekonomiky, V. 1, pp, 229–238.

**O.H. Iankovyi**, Doctor of Economics, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, Head of the Department of Enterprise Economics and Entrepreneurship Organization, Odessa National Economic University (Odessa, Ukraine)

**O.L. Hura**, Ph.D., Associate Professor, Director, Odessa College of Finance and Economics of Kyiv National University of Trade and Economics (Odessa, Ukraine)

**Modeling and prognosing the product life cycle on the basis of 'S'-like curve**

**The aim of the article** is to simulate the product life cycle using 'S'-like mathematical functions and to predict the most important key points of these curves: maximum value, inflection point, when the accelerated growth of sales changes to slowing one, as well as the elasticity coefficients of the 'S'-like functions.

**The results of the analysis.** The success of any simulation essentially depends on the correct choice of mathematical functions which would correspond to the inner nature of the study object. Five 'S'-like mathematical functions were selected for the analysis, which, under certain conditions, can be used to simulate and predict the product life cycle. Their main approximation properties are considered in order to provide practical calculations in the process of planning innovations at an industrial enterprise.

The trigonometric function monotonically fluctuates around the Y axis; there are no horizontal and vertical asymptotes. It is recommended for simulating and predicting the product life cycle when planning the introduction of innovative products.

A function opposite to the hyperbolic exponent has two horizontal asymptotes and can be used to simulate and predict any product life cycle.

Exponential functions can be used to simulate and predict life-cycles that are avalanche-like or inhibited. The logistic function (inverse to the modified exponent) or the Pearl-Reed curve has two horizontal asymptotes and can be used to model and predict processes that are slowly rising or falling.

The Gompertz function also has two horizontal asymptotes but allows simulation and prediction of more rapid processes than the Pearl-Reed curve.

The life cycle of the product of meat processing enterprises is analyzed according to these models, and the price elasticity of demand for it is determined.

**Conclusions and direction for further research.** The use of simulation and prediction methods of product life cycle using 'S'-like functions makes it possible to optimize the strategic plan of an industrial enterprise and make timely, reasonable decisions in the following areas: increasing production volume; carrying out additional measures to stimulate sales; updating the product range.

**In further research** it is important to determine the specifics of the use of 'S'-shaped curves for products novelties from various industries.

**Keywords:** product life cycle, modeling, forecasting, price elasticity of demand

*Надійшло до редакції 28 серпня 2017 р.*