

Узагальнення рівнянь Клопера-Пірсона

Олександр Скопа

Одеський національний економічний університет,
Україна, м. Одеса, вул. Преображенська, 8
e-mail: skopa2003@ukr.net

Annotation: The question of generalization of equations Clopper Pearson theory in relation to tests of reliability and survivability tools and network communications.

Keywords: Equation Clopper Pearson, test, reliability, survivability, rate

I. Вступ

До необхідності використання рівнянь Клопера-Пірсона приводять випадки суцього практичного характеру, наприклад, оцінка з необхідною точністю показників надійності живучості засобів телекомунікацій за результатами їх періодичних випробувань і перевірок, планування обсягів переданої інформації залежно від встановлених значень надійності та живучості окремих об'єктів мережі зв'язку та т.п. Найбільш часто такі перевірки проводяться при встановленні дієздатності резервних каналів та об'єктів.

II. Методика узагальнення

Рівняннями Клопера-Пірсона називаються рівняння виду $1-\gamma = \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} t^{n-k} (1-t)^k$ або $\gamma = \sum_{k=0}^{l-1} \binom{n}{k} t^{n-k} (1-t)^k$, де: $\gamma \in [0,1]$; n та l – цілі невід'ємні числа; $t \in [0,1]$.

Доцільним є також запис: $1-\gamma = I_x(n\mathcal{K}, n\mathcal{K}+1)$, де $\mathcal{K} + \mathcal{K}' = 1$; $\mathcal{K} \geq 0$. При цьому корінь рівняння позначається, як $x = \underline{x} = f_2(n, l', \gamma) = \underline{x}_\gamma$, де $l' = n\mathcal{K}$. Основні положення щодо практичного застосування рівнянь, а також частина використаних позначень та скорочень, приведено у доповіді та у [1-21].

Узагальнення полягає в тому, що l' – не обов'язково повинно бути цілим числом. При цьому l' приходимо до звичайного рівняння Клопера-Пірсона. З того, що неповна β -функція $I_x(a, b)$ визначена не тільки для цілих $a > 0$ і $b > 0$, а також строго зростає й безперервна по $x \in [0,1]$, впливає існування та одиничність розв'язку приведених вище рівнянь. Функція $f_2(n, l', \gamma)$ табульована для дробових l' , однак це не виключає необхідності використання аналітичних оцінок для \underline{x} . Викладемо їх у вигляді леми.

Лема. Функція $\underline{x} = f_2(n, l', \gamma)$ задовольняє нерівностям:

$$f_2^t\left(n, l', \left(1 - (1-\gamma)^t\right)\right) \leq f_2(n, l', \gamma) \leq f_2^t\left(n, l', \left(1 - (1-\gamma)^t\right)\right),$$

$$t^{\frac{1}{n\mathcal{K}}} f_2\left(n, l', \left(1 - \frac{1-\gamma}{t}\right)\right) \leq f_2(n, l', \gamma) \leq \frac{1}{t^{\frac{1}{n\mathcal{K}}}} f_2\left(n, l', (1-(1-\gamma) \cdot t)\right),$$

де $t \geq 1$. Крім того $\frac{(1+n\mathcal{K})^{\frac{1}{n\mathcal{K}-1}}}{(1+n\mathcal{K})^{s'}} (1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}-1}} \leq f_2(n, l', \gamma) \leq (1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}}}$, де $s' = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}-1}$, і, нарешті, $\underline{x} = f_2(n, l', \gamma) =$

$$= k\mathcal{K}(1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}}}, \text{ де } k = \lim_{N \rightarrow \infty} k_N, k_N = \frac{1}{k'_N}, k'_N = \left(I_{\frac{x_1}{\mathcal{K}}} \dots I_{\frac{x_N}{\mathcal{K}}} \right)^{\frac{1}{n\mathcal{K}}},$$

$$I_x = I_x(n\mathcal{K}, n\mathcal{K}+1), x_1 = \frac{\mathcal{K}(1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}}}}{I_{\frac{x_1}{\mathcal{K}}}}, x_N = (1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}}} \cdot \frac{x_{N-1}}{I_{\frac{x_{N-1}}{\mathcal{K}}}},$$

$N = 2, 3, \dots$, причому $\underline{x} = \mathcal{K} \Rightarrow \underline{x} \leq x_N \leq x_{N-1}$.

Доказ. Перші три нерівності встановлюються безпосередньо на основі властивостей неповної β -функції. Співвідношення для \underline{x} отримуємо з залученням властивостей функції $\varphi(x)$ та принципу нерухливої точки. З виразу для \underline{x} впливає наближена формула:

$$f_2(n, l', \gamma) \approx \mathcal{K}(1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}}}.$$

III. Приклад рішення задачі

Нехай задано: $n = 15$, $\gamma = 0,90$, $\mathcal{K} = 0,90$. Тоді $l' = n\mathcal{K} = 1,5$, а з виразу

$$\frac{(1+n\mathcal{K})^{\frac{1}{n\mathcal{K}-1}}}{(1+n\mathcal{K})^{s'}} (1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}-1}} \leq f_2(n, l', \gamma) \leq (1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}}}$$

отримуємо: $0,65 = \frac{2,5^{12,5} \cdot 0,1^{12,5}}{14,5^{0,12}} \leq f_2(15; 1,5; 0,90) \leq 0,1^{\frac{1}{13,5}} = 0,84$.

Точне значення з таблиць, які демонструються у доповіді, складає: $f_2(15; 1,5; 0,90) = 0,74$.

ВИСНОВОК

Як видно з отриманих результатів, очевидно, слушною є нерівність $f_2(n, l', \gamma) \leq \mathcal{K}(1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}}}$ при $\gamma \geq 0,5$. Втім, отримати строгий доказ нерівності поки не вдалося.

Значення кореня $f_2(n, l', \gamma)$ узагальненого рівняння Клопера-Пірсона полягає в тому, що велика кількість багатомірних узагальнень біноміальної схеми Бернуллі (див., наприклад, [1-21]), приводять до результатів, що використовують функцію $f_2(n, l', \gamma)$. Цей факт установлений та також демонструється у доповіді та

у [1-21]. Співвідношення $\frac{(1+n\mathcal{K})^{\frac{1}{n\mathcal{K}-1}}}{(1+n\mathcal{K})^{s'}} (1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}-1}} \leq$

$\leq f_2(n, l', \gamma) \leq (1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}}}$ та $\underline{x} = f_2(n, l', \gamma) = k\mathcal{K}(1-\gamma)^{\frac{1}{n\mathcal{K}}}$

дозволяють знаходити оцінні значення функції $f_2(n, l', \gamma)$, не використовуючи спеціальні таблиці.

Більш докладно відомі та отримані результати представлено у доповіді у вигляді таблиць.

Література

- [1] Казакова, Н. Ф. Аналітичне розв'язання одновимірної задачі Клопера-Пірсона [Текст] / Н. Ф. Казакова // Радиотехника. — Харьков : ХНУ-РЭ. — 2002. — № 128. — С. 97-98.
- [2] Казакова, Н. Ф. Методи оцінки надійності систем телекомунікацій з резервом [Текст] / Н. Ф. Казакова // Праці УНДІРТ. — Одеса : УНДІРТ. — 2003. — № 2(34). — С. 109-112.
- [3] Казакова, Н. Ф. Оптимізація стратегії обслуговування резервних систем зв'язку / Н. Ф. Казакова // Вісник УБЕНТЗ. — Київ : УБЕНТЗ. — 2002. — № 2. — С. 79-80.
- [4] Казакова, Н. Ф. Оцінка живучості систем моніторингу інформаційного простору [Текст] / Н. Ф. Казакова // Восточно-европейский журнал передовых технологий. — Харьков : Технологический центр. — 2012. — № 4/2(58). — С. 12-15.
- [5] Казакова, Н. Ф. Порівняння методів управління вибором резервного радіоканалу [Текст] / Н. Ф. Казакова // Праці УНДІРТ. — Одеса : УНДІРТ. — 2002. — № 1(29). — С. 49-51.
- [6] Казакова, Н. Ф. Технічне рішення задачі Клопера-Пірсона [Текст] / Н. Ф. Казакова // Наукові записки Міжнародного гуманітарного університету. — Одеса : МГУ. — 2005. — № 3. — С. 89-94.
- [7] Казакова, Н. Ф. Визначення показників для вирішення завдань прогностичного контролю мультисервісних телекомунікаційних мереж [Текст] / Н. Ф. Казакова, О. О. Скопа // Сучасний захист інформації. — К.: ДУІКТ. — 2010. — Спецвипуск (4). — С. 55-61.
- [8] Мінін, А. В. Біноміальні моделі випробування живучості захищених інформаційних каналів [Текст] / А. В. Мінін, О. О. Скопа, М. Александер // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. — Луганськ : СНУ ім. В.Даля. — 2012. — № 8(179). — Ч. 1. — С. 42-58.
- [9] Мухін, О. М. Планування обсягу випробувань в мережах телекомунікацій [Текст] / О. М. Мухін, Н. Ф. Казакова, О. О. Скопа // Вісник УБЕНТЗ. — Київ : УБЕНТЗ. — 2002. — № 2. — С. 104-109.
- [10] Панфилов, И. П. Надежность работы линии связи, состоящей из основного и резервного каналов [Текст] / И. П. Панфилов, А. А. Скопа // Радиотехника. — Харьков : ХТУРЭ. — 2002. — № 128. — С. 91-96.
- [11] Скопа, О. О. Біноміальна схема контрольних випробувань резервних систем зв'язку [Текст] / О. О. Скопа // Збірник наукових праць УДМТУ. — Миколаїв : УДМТУ. — 2002. — № 7(385). — С. 116-124.
- [12] Скопа, О. О. Інтервальне оцінювання надійності Т-систем з паралельним з'єднанням елементів за результатами їх біноміальних іспитів [Текст] / О. О. Скопа // Наукові праці ОНАЗ. — Одеса : ОНАЗ. — 2002. — № 1. — С. 65-71.
- [13] Скопа, О. О. Обслуговування резервних систем зв'язку [Текст] / О. О. Скопа // Наукові праці ДонДТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. — Донецьк : РВА ДонДТУ. — 2002. — № 38. — С. 89-91.
- [14] Скопа, О. О. Однобічна процедура контролю надійності резервних каналів зв'язку [Текст] / О. О. Скопа // Наукові праці ДонДТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. — Донецьк : РВА ДонДТУ. — 2002. — № 47. — С. 168-175.
- [15] Скопа, О. О. Оптимізація експлуатації резервних систем телекомунікацій [Текст] / О. О. Скопа // Праці УНДІРТ. — Одеса : УНДІРТ. — 2002. — № 1(29). — С. 91-93.
- [16] Скопа, О. О. Плани проведення випробувань надійності систем телекомунікацій з накопиченням пошкоджень [Текст] / О. О. Скопа // Праці УНДІРТ. — Одеса : УНДІРТ. — 2003. — № 3(35). — С. 104-106.
- [17] Скопа, О. О. Концепція контрольних випробувань резервних систем на основі біноміальної схеми [Текст] / О. О. Скопа, С. Л. Волков, А. В. Мінін // Інформаційна безпека. — Луганськ : СНУ ім. В.Даля. — 2011. — № 2(6). — С. 69-76.
- [18] Скопа, О. О. Аналіз розвитку сучасних напрямів інформаційної безпеки автоматизованих систем [Текст] / О. О. Скопа, Н. Ф. Казакова // Системи обробки інформації. — Харків : Харківський ун-т Повітряних Сил ім. І. Кожедуба. — 2009. — № 7(79). — С.48-54.
- [19] Скопа, О. О. Встановлення ступеню ризику підприємства при скороченні обсягу профілактичних вимірювань [Текст] / О. О. Скопа, Н. Ф. Казакова, Є. О. Мініна // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. — Луганськ : СНУ ім. В.Даля. — 2011. — № 7(161). — Ч. 1. — С. 138-141.
- [20] Скопа, О. О. Вплив функціональної надмірності резервованих систем телекомунікацій на скорочення обсягів їх випробувань на надійність [Текст] / О. О. Скопа, Н. Ф. Казакова, О. С. Мурін // Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. — Донецьк : РВА ДонДТУ. — 2003. — № 58. — С.115-121.
- [21] Удосконалення принципів та методів інформаційного забезпечення, інформаційної та фінансово-економічної безпеки підприємств та організації сфери економіки, бізнесу та фінансів [Звіт про НДР] : (пром.жн.) / О. О. Скопа, Н. Ф. Казакова, О. В. Орлик, Ю. В. Щербина, А. О. Петров, С. Л. Волков, О. І. Мацків, О. Г. Єсіна, А. Ю. Вакула, О. О. Фразе-Фразенко, А. В. Мінін, О. О. Йона, Є. В. Вавілов, К. Б. Айвазова // ОНЕУ ; кер. О. О. Скопа. — 0112U007713. — Одеса, 2013. — 236 с.