

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ВДОСКОНАЛЕННЯ ВИРОБНИЧОГО ПЛАНУ ПРОМИСЛОВОГО ПІДПРИЄМСТВА

JEL classification: C61; M11

Адаптація суб'єкта господарювання до змін у зовнішньому та внутрішньому середовищі досягає суттєвого успіху, якщо вона базується на використанні топ-менеджментом функції планування, зокрема, оптимізації виробничої програми підприємства. Пошук оптимального плану виробництва продукції (робіт, послуг) зазвичай здійснюється шляхом розв'язання задачі лінійного програмування (ЗЛП) в її прямій та двоїстій постановці. Це забезпечує знаходження початкового оптимального плану застосування виробничих ресурсів підприємства, а також відкриває можливості його подальшого вдосконалення.

Запишемо модель ЗЛП в канонічному вигляді, яка включає три складові – цільову функцію Z_1 , обмеження на ресурси b_1, b_2, \dots, b_m у вартісному виразі й обмеження на невідомі змінні X_1, X_2, \dots, X_n :

$$\begin{aligned}
 Z_1 = \sum_{i=1}^n c_i X_i \rightarrow \max \quad (\min) \\
 \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_{1i} X_i = b_1 - e_1 \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} X_i = b_2 - e_2 \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} X_i = b_m - e_m \end{array} \right. \quad (1) \\
 0 \leq X_i \leq X_{i0}
 \end{aligned}$$

У моделі (1) через c_i позначено ціну одиниці продукції i -го виду, через X_{i0} – верхню межу випуску продукції, що обумовлена потужністю техніко-технологічного устаткування підприємства X_{i1} , а також реальним ринковим попитом X_{i2} на i -й вид продукції: $X_{i0} = \min(X_{i1}; X_{i2})$. Через e_j (excess) позначено допуск (перевищення), наявного запасу j -го ресурсу в порівнянні з фактичним його використанням. Обмеження, за якими допуски дорівнюють нулю ($e_j = 0$) визначають дефіцитні ресурси, на відміну від недефіцитних ресурсів, що спостерігаються з ненульовим допуском ($e_j > 0$). Вважається, що апріорі відома технологічна матриця $A = \{a_{ji}\}$ вартісних витрат j -го ресурсу на виробництво одиниці i -го виду продукції ($j = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n$).

Очевидно, що отримане за моделлю (1) оптимальне рішення можна розглядати як перший крок до адаптації підприємства до мінливих умов зовнішнього та внутрішнього середовища. Однак, у разі, якщо деякі $e_j > 0$, то це буде означати, що грошові ресурси підприємства застосовуються не повністю, є певні резерви фінансових коштів. Щоб їх використати можна запропонувати, принаймні, два шляхи: 1) вилучити грошові надлишки e_j з недефіцитних виробничих ресурсів; 2) спробувати вдосконалити знайдений оптимальний план виробництва за вимогами $Z_1 < Z_k, e_j \rightarrow 0$.

Перший шлях базується на наступних математичних міркуваннях. Використовуючи третю теорему теорії двоїстості [1, с. 112-122; 2], легко визначити вплив на зміну цільової функції Z збільшення (зменшення) обсягів окремих ресурсів: числові значення двоїстих оцінок y_j показують, на яку величину змінюється цільова функція при зміні обсягу j -го ресурсу на одиницю:

$$y_j = \frac{\Delta Z}{\Delta b_j} \quad (2)$$

Це означає, що при малій зміні b_j замість задачі, що описується моделлю (1), отримаємо нову задачу, де b_j замінено на $b'_j = b_j + \Delta b_j$, а $\Delta b_j = e_j$. Позначимо через X' – оптимальний план нової задачі, через X – оптимальний план вихідної задачі за моделлю (1). Визначення зміни цільової функції ΔZ не потребує розв'язування нової ЗЛП, оскільки з формули (2) випливає

$$\Delta Z = Z(X') - Z(X) = y_j e_j \quad (3)$$

За визначенням для недефіцитних виробничих ресурсів $y_j = 0$. Тому виключення з оптимального плану величин допусків не змінює цільову функцію й оптимальний план, оскільки в цьому випадку в формулі (3) $y_j = 0 = \Delta Z$. Тобто завжди є можливість вилучити з оптимального плану кошти у розмірі $\sum_{j=1}^m e_j$ зі зберіганням отриманої виробничої програми.

Реалізація другого шляху покращення знайденого оптимального плану виробництва передбачає перерозподіл величин ненульових допусків недефіцитних ресурсів між дефіцитними ресурсами, для яких $e_j = 0$. Така трансформація дозволить удосконалити вихідний оптимальний план, а саме: при незмінних значеннях технологічної матриці $A = \{a_{ji}\}$ забезпечити підвищення початкової цільової функції Z_1 . Отримання рішення нової задачі буде означати покращення використання ресурсів підприємства, а, отже, й подальшу його адаптацію до мінливих умов і тенденцій ринкової економіки.

Зазначимо, що при перерозподілі коштів доцільно користатися результатами розв'язання не тільки прямої, а й двоїстої до неї ЗЛП. Така інформація містяться в трьох звітах рішення прямої задачі, отриманого за допомогою надбудови «Поиск решения» пакету Microsoft Excel.

1. Звіт про результати (answer) включає вихідні і кінцеві значення цільової функції та впливових комірок електронних таблиць, а також додаткові відомості про допуски, комірки змінних, обмеження на ресурси.

2. Звіт про стійкість (sensitivity) містить відомості про чутливість рішення до малих змін у комірках, у яких знаходяться значення X_1, X_2, \dots, X_n , або у формулах обмежень.

3. Звіт про межі (limits) включає величину цільової функції при оптимальному рішенні, а також в яких межах вона варіює, коли відповідні комірки рішення X_1, X_2, \dots, X_n приймають нульове, або оптимальне значення.

Найбільший інтерес з точки зору поставленої в даній роботі мети є звіти про результати та стійкість, тому на них рекомендується звернути особливу увагу.

У разі, якщо виявлені допуски фінансових ресурсів e_j не вилучаються з виробництва, а перерозподіляються між k дефіцитними ресурсами ($k \leq m$), то повне прирощення цільової функції ΔZ дорівнює:

$$\Delta Z = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_k e_k. \quad (4)$$

Формула (4) забезпечує оцінку ΔZ й збереження структури оптимального плану (асортименту) випуску продукції підприємства за умови, якщо в цілому величина додавання кількості кожного виду ресурсів b_k не перевищує сумарно 100 % від максимально припустимих значень змін кількості ресурсів, указаних у стовпчику «Допустимое увеличение» табл. «Ограничения» звіту про стійкість. У цьому полягає зміст терміну «при малій зміні b_j » у формулі (3), тобто при $\sum_{j=1}^m \frac{\Delta b_j}{\Delta b_j^+} \times 100 \leq 100$ % . Тут

Δb_j^+ – максимальне «Допустимое увеличение» j -го ресурсу.

Слід мати на увазі, що після кожного перерозподілу допуску необхідно перераховувати рішення ЗЛП, оскільки при постійному асортименті оптимального плану випуску продукції можуть змінюватися статуси деяких ресурсів з дефіцитних на недефіцитні, й навпаки. На кожному кроці повинні перевірятися умови покращення попереднього плану: $Z_{k-1} < Z_k$ при $e_j \rightarrow 0$.

У разі, якщо пряма ЗЛП, яка описується моделлю (1), має оптимальне рішення, то теоретично можливі наступні п'ять станів ресурсів оптимального плану виробництва, що наводяться у звітах про результати: 1. Одна прив'язка – один допуск. 2. Одна прив'язка – декілька допусків. 3. Декілька прив'язок – один допуск. 4. Декілька прив'язок – декілька допусків. 5. Усі прив'язки – нуль допусків. П'ятий стан ресурсів є ідеальним, оскільки всі допуски дорівнюють нулю й задача їхнього перерозподілу між дефіцитними ресурсами розв'язана. Всі інші стани ресурсів слід наближати до даного ідеального стану за допомогою запропонованої процедури перерозподілу величин ненульових допусків недефіцитних ресурсів між дефіцитними ресурсами.

Література

1. Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. К. : КНЕУ, 2016. 303 с.

2. Yankovyi O. Application of duality theory in post-optimization analysis of results solutions to linear programming problems. *Enterprise economics: modern problems of theory and practice: Materials of the 11th International science and practice conference, September 9-10, 2022. Odessa: ONEU, 2022. P. 309–310. URL: https://drive.google.com/file/d/1rWxemxDXbFHstYZ_7dD2aLMgvRsOc42p/view*