

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ЯНКОВОЙ А.Г.**

**МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
И МОДЕЛИ В УПРАВЛЕНИИ ПРЕДПРИЯТИЕМ**

**Учебное пособие**

ОДЕССА ОНЭУ 2014

**УДК 334.716:519.24(075.8)**

**ББК 65.29я73**

**Я 60**

*Рекомендовано Ученым советом Одесского национального экономического университета (протокол № 5 от 28 января 2014 года)*

***Рецензенты:***

***Савенко И.И.*** – доктор экономических наук, профессор

***Егунов Ю.А.*** – кандидат экономических наук, доцент

***Мацкул В.Н.*** – кандидат физ.-мат. наук, доцент

***Янковой А.Г.***

Математико-статистические методы и модели в управлении предприятием: Учебное пособие. – Одесса: ОНЭУ, ротاپринт, 2014. – 250 с.

Учебное пособие посвящено практическому применению математико-статистических методов и моделей в управлении современным предприятием на основе исследования его производственно-финансовой деятельности. Содержит элементы теории математического и статистического анализа и прогнозирования с иллюстрацией их прикладных аспектов на практических примерах. Каждая глава пособия содержит варианты индивидуальных заданий и список литературы, позволяющей расширить научный кругозор в обсуждаемой теме.

Данное пособие будет исключительно полезно бакалаврам и магистрам, изучающим экономику предприятия, а также иностранным студентам, аспирантам и преподавателям, использующим в своих исследованиях математико-статистические методы и модели.

**Учебное издание**

Янковой Александр Григорьевич

**МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
И МОДЕЛИ В УПРАВЛЕНИИ ПРЕДПРИЯТИЕМ**

**Учебное пособие**

Корректор: С.А. Бондарь

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |            |
|--|------------|
| <b>Раздел I. АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ<br/>ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ПРЕДПРИЯТИЯ.....</b>                                    | <b>4</b>   |
| 1. Статистический анализ экономической динамики.....   | 4          |
| 2. Прогнозирование экономической динамики на основе<br>трендов и моделей сезонной волны.....                             | 20         |
| 3. Прогнозирование экономической динамики с помощью<br>методов автокорреляции и авторегрессии.....                       | 46         |
| 4. Моделирование и анализ экономической динамики<br>на основе производственных функций.....                              | 64         |
| <br>   |            |
| <b>Раздел II. АНАЛИЗ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ ТЕХНИКО-<br/>ЭКОНОМИЧЕСКИМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ПРЕДПРИЯТИЯ.....</b>                    | <b>82</b>  |
| 5. Разложение прироста результативного экономического<br>показателя по факторам с помощью детерминированных моделей..... | 82         |
| 6. Корреляционно-регрессионный анализ взаимосвязей<br>экономических показателей.....                                     | 105        |
| <br>   |            |
| <b>Раздел III. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ<br/>ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ.....</b>                          | <b>144</b> |
| 7. Экономическая оценка инвестиционных проектов.....   | 144        |
| 8. Формирование портфеля инвестиций.....   | 172        |
| 9. Анализ и планирование безубыточности.....   | 195        |
| 10. Оптимизация производственной программы.....  | 225        |

# Раздел I. АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ПРЕДПРИЯТИЯ

## 1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Показатели хозяйственной деятельности предприятий любой организационно-правовой формы находятся в непрерывном изменении и развитии. С течением времени – от месяца к месяцу, от года к году – изменяются объём произведенной и реализованной продукции (работ, услуг), прибыли, рентабельности, численности работающих, производительности труда и т.п. Поэтому одной из важнейших задач экономических служб предприятия является постоянный мониторинг и статистический анализ динамики его основных производственно-финансовых параметров с целью принятия оперативных, тактических и стратегических управленческих решений.

Эта задача решается с помощью построения и исследования рядов динамики экономических показателей предприятия, которые еще называют временными рядами. Главными элементами временного ряда являются уровни ряда  $Y_i$  и интервалы или моменты времени, к которым они относятся (рис. 1.1).

|                             |                       |                       |     |                         |
|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----|-------------------------|
| Интервал или момент времени | Интервал или момент 1 | Интервал или момент 2 | ... | Интервал или момент $N$ |
| Уровень $Y_i$               | $Y_1$                 | $Y_2$                 | ... | $Y_N$                   |

Рис. 1.1. Общая схема ряда экономической динамики

В зависимости от второго элемента все временные ряды делятся на *интервальные* и *моментные* ряды динамики (рис. 1.2).

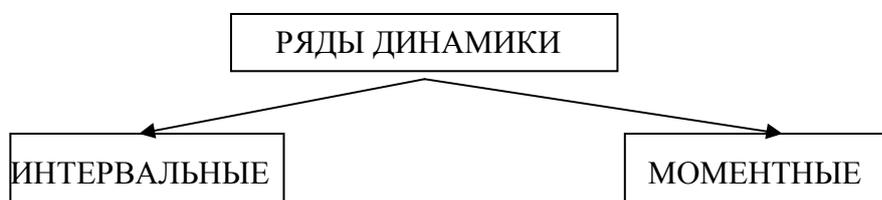


Рис. 1.2. Классификация рядов динамики

Интервальные ряды характеризуют результат какой-то деятельности за определенные периоды времени. Например, ряд динамики годового производства продукции на предприятии на протяжении последних лет. В табл. 1.1 приведен пример интервального ряда динамики прибыли предприятия по месяцам года.

Таблица 1.1

## Динамика показателей прибыли предприятия по месяцам года

| Месяцы                 | 1    | 2   | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10  | 11   | 12   |
|------------------------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|
| Прибыль<br>(тыс. грн.) | 10,5 | 1,3 | 15,8 | 12,4 | 17,0 | 13,5 | 19,2 | 16,6 | 22,7 | 9,9 | 24,3 | 27,4 |

Уровни интервальных рядов можно суммировать, при этом получаются уровни за более крупные периоды времени (сумма уровней месячной прибыли предприятия даст квартальные уровни, сумма уровней квартальной прибыли даст полугодовые, годовые уровни и т.п.).

Моментные ряды отражают состояние единиц статистической совокупности на определенные моменты времени. Например, ряд динамики остатков готовой продукции на складе предприятия на начало каждого квартала. Уровни моментных рядов суммировать нельзя вследствие двойного счёта одних и тех же единиц совокупности.

Нельзя также складывать уровни интервальных рядов, которые представляют собой относительные или средние величины. Необходимо сначала образовать ряды динамики числителя и знаменателя изучаемого относительного (среднего) показателя, просуммировать их уровни, а затем первую сумму разделить на вторую.

В процессе статистического анализа рядов экономической динамики предприятия используют такие основные уровни:

1.  $Y_i$  – сравниваемый уровень ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).
2.  $Y_{i-t}$  – базисный уровень, который отстоит от  $Y_i$  на  $t$  единиц времени (обычно в качестве базисного рассматривают первый уровень временного ряда).
3.  $Y_{i-1}$  – предшествующий уровень.

При этом, если уровень  $Y_i$  сопоставляется с уровнем  $Y_{i-t}$ , то найденный показатель анализа динамики называется *базисным*. Если же уровень  $Y_i$  соотносится с уровнем  $Y_{i-1}$ , то найденный показатель анализа динамики называется *цепным*.

В табл. 1.2 приведены важнейшие базисные и цепные показатели статистического анализа динамики. Следует помнить, что если  $N$  – число уровней временного ряда, то количество базисных и цепных показателей анализа динамики, которое можно рассчитать, всегда равняется  $N - 1$ .

Таблица 1.2

## Базисные и цепные показатели анализа динамики

| Показатель | Абсолютный прирост ( $\Pi$ ) | Темп роста ( $T_p$ )  | Темп прироста ( $T_{пп}$ ) | Абсолютное содержание 1 % прироста ( $A$ ) |
|------------|------------------------------|-----------------------|----------------------------|--|
| Базисный   | $Y_i - Y_{i-t}$              | $\frac{Y_i}{Y_{i-t}}$ | $T_p - 1$                  | —  |
| Цепной     | $Y_i - Y_{i-1}$              | $\frac{Y_i}{Y_{i-1}}$ | $T_p - 1$                  | $\frac{Y_{i-1}}{100}$                      |

*Абсолютный прирост*  $\Pi$  (базисный или цепной) показывает, на сколько единиц изменился уровень  $Y_i$  по сравнению с базисным или предшествующим уровнем и характеризует абсолютную скорость роста (снижения, если  $\Pi$  со знаком минус) изучаемого экономического показателя.  $\Pi$  выражается в тех же единицах измерения, что и уровни временного ряда.

Легко показать, что сумма последовательных цепных абсолютных приростов  $\Pi_{1 \text{ ЦЕП}}, \Pi_{2 \text{ ЦЕП}}, \dots, \Pi_{N-1 \text{ ЦЕП}}$  равняется соответствующему базисному приросту  $\Pi_{\text{БАЗ}}$ :

$$\Sigma \Pi_{\text{ЦЕП}} = \Pi_{\text{БАЗ}} . \quad (1.1)$$

*Темп роста*  $T_p$  (базисный или цепной) показывает, во сколько раз уровень  $Y_i$  превышает базисный или предшествующий (какую часть его составляет, если  $T_p < 1$ ) и характеризует относительную скорость изменения исследуемого экономического показателя. Темп роста представляет собой обычную относительную величину динамики или индивидуальный индекс и выражается в форме коэффициента или в процентах.

Легко показать, что произведение последовательных цепных темпов роста  $T_{p1}, T_{p2}, \dots, T_{p N-1}$  равняется соответствующему базисному темпу роста  $T_{p\text{БАЗ}}$ :

$$T_{p1} \times T_{p2} \times \dots \times T_{p N-1} = T_{p \text{БАЗ}} . \quad (1.2)$$

*Темп прироста*  $T_{\text{ПР}}$  – это абсолютный прирост, выраженный по отношению к базисному уровню:

$$T_{\text{ПР}} = \frac{\Pi}{Y_{i-t}} = \frac{Y_i - Y_{i-t}}{Y_{i-t}} = \frac{Y_i}{Y_{i-t}} - 1 = T_p - 1. \quad (1.3)$$

Согласно (1.3) темп прироста, выраженный в форме коэффициента, всегда на 1 меньше соответствующего темпа роста. Если темп роста выражен в процентах, то темп прироста меньше  $T_p$  на 100 %. В последнем случае он показывает, на сколько процентов уровень  $Y_i$  превышает базисный или предшествующий и так же, как и темп роста характеризует относительную скорость изменения изучаемого экономического признака.

**Замечание 1.** Если среди уровней ряда имеются отрицательные числа, например, при анализе динамики прибыли (убытков) предприятия, то темпы роста и прироста находятся только для уровней с одинаковыми знаками. Соотносить уровни с разными знаками запрещено.

Например, в январе прибыль предприятия составила 100 тыс. грн., в феврале наблюдались убытки в размере 20 тыс. грн., а в марте убытки составили 12 тыс. грн. Тогда возможен расчёт лишь цепного темпа роста и цепного темпа прироста убытков в марте по сравнению с февралем:

$$T_p = \frac{Y_{\text{март}}}{Y_{\text{февр}}} = \frac{-12}{-20} = 0,6 \quad \text{или} \quad 60 \% .$$

$$T_{\text{пр}} = T_p - 100 = 60 - 100 = -40 \% .$$

Вывод таков: убытки предприятия в марте по сравнению с февралем снизились на 40 %.

Абсолютное содержание одного процента прироста  $A$  – всегда цепной показатель анализа динамики. Он определяется как отношение цепного абсолютного прироста к цепному темпу прироста, выраженному в процентах:

$$A = \frac{\Pi_{\text{ЦЕП}}}{100T_{\text{ПР}}} = \frac{\Pi_{\text{ЦЕП}}}{100 \frac{\Pi_{\text{ЦЕП}}}{Y_{i-1}}} = \frac{Y_{i-1}}{100}. \quad (1.4)$$

Иными словами, абсолютное содержание одного процента прироста – это сотая часть предшествующего уровня, что отвечает общей логике, т.к. предшествующий уровень принимается за базу сравнения, т.е. за 100 %. Следовательно, в одном проценте прироста содержится сотая часть базисного уровня. Показатель  $A$  измеряется в тех же единицах, что и уровни временного ряда.

В табл. 1.3 приведен расчёт важнейших цепных и базисных показателей анализа динамики прибыли предприятия по данным табл. 1.1.

Таблица 1.3

Показатели анализа динамики прибыли предприятия

| Месяцы | Прибыль (тыс. грн.) | $\Pi$ (тыс. грн.) |      | $T_p$   |         | $T_{\text{ПР}}$ (%) |         | $A$ (тыс. грн.) |
|--------|---------------------|-------------------|------|---------|---------|---------------------|---------|-----------------|
|        |                     | цеп.              | баз. | цеп.    | баз.    | цеп.                | баз.    |                 |
| 1      | 10,5                | -                 | -    | -       | 1,0     | -                   | -       | -               |
| 2      | 1,3                 | -9,2              | -9,2 | 0,12381 | 0,12381 | <b>-87,619</b>      | -87,619 | 0,105           |
| 3      | 15,8                | <b>14,5</b>       | 5,3  | 12,1538 | 1,50476 | <b>1115,38</b>      | 50,4761 | 0,013           |
| 4      | 12,4                | -3,4              | 1,9  | 0,78481 | 1,18095 | -21,519             | 18,0952 | 0,158           |
| 5      | 17,0                | 4,6               | 6,5  | 1,37096 | 1,61904 | 37,0967             | 61,9047 | 0,124           |
| 6      | 13,5                | -3,5              | 3,0  | 0,79411 | 1,28571 | -20,588             | 28,5714 | 0,17            |
| 7      | 19,2                | 5,7               | 8,7  | 1,42222 | 1,82857 | 42,2222             | 82,8571 | 0,135           |
| 8      | 16,6                | -2,6              | 6,1  | 0,86458 | 1,58095 | -13,542             | 58,0952 | 0,192           |
| 9      | 22,7                | 6,1               | 12,2 | 1,36747 | 2,16190 | 36,7470             | 116,191 | 0,166           |
| 10     | 9,9                 | <b>-12,8</b>      | -0,6 | 0,43612 | 0,94286 | -56,388             | -5,7143 | 0,227           |
| 11     | 24,3                | 14,4              | 13,8 | 2,45454 | 2,31429 | 145,455             | 131,429 | 0,099           |
| 12     | 27,4                | 3,1               | 16,9 | 1,12757 | 2,60952 | 12,7572             | 160,952 | <b>0,243</b>    |
| Всего  | 190,6               | 16,9              | -    | -       | -       | -                   | -       | -               |

Анализ данных табл. 1.3 показывает, что максимальная абсолютная скорость роста прибыли предприятия наблюдалась в марте месяце ( $\max \Pi_{\text{ЦЕП}} = 14,5$  тыс. грн.), а максимальная абсолютная скорость снижения прибыли имела место в октябре месяце ( $\min \Pi_{\text{ЦЕП}} = -12,8$  тыс. грн.) – выделено жирным.

Наибольшая относительная скорость роста прибыли предприятия наблюдалась в марте месяце ( $maxT_{\text{ПР.ЦЕП}} = 1115,4 \%$ ), а наибольшая относительная скорость снижения прибыли имела место в феврале месяце ( $minT_{\text{ПР.ЦЕП}} = -87,6 \%$ ). Максимальное значение 1 % прироста прибыли предприятия (А) наблюдалось в декабре месяце и составляло 243 грн.

**Замечание 2.** Периоды времени, в которых наблюдаются максимальные абсолютные и максимальные относительные скорости роста (снижения) изучаемого экономического показателя, могут не совпадать, т.к. их величина зависит от базы сравнения. Например, по данным табл. 1.3 месяцы с наибольшей абсолютной и относительной скоростью снижения прибыли предприятия разные – ноябрь (-12,8 тыс. грн.) и февраль (-87,6 %).

Таким образом, проведенный статистический анализ важнейших цепных и базисных показателей динамики прибыли фирмы по месяцам позволил получить общее представление об изменении изучаемого экономического признака на протяжении исследуемого года.

С течением времени изменяются не только уровни исследуемых экономических признаков предприятия, но и сами показатели анализа динамики. Поэтому целесообразно рассчитывать средние показатели динамики: средний уровень ряда, средний абсолютный прирост, средние темпы роста и прироста. Они характеризуют типичный уровень соответствующего показателя анализа динамики за изучаемый период времени.

*Средний уровень* интервального ряда определяется по формуле средней арифметической простой. При нахождении среднего уровня моментного временного ряда надо учитывать наличие информации об изменении уровней ряда динамики экономического показателя.

Если информация полная, исчерпывающая, то для расчета применяется формула средней арифметической взвешенной, где роль статистических весов  $f_j$  выполняют длины промежутков времени, на протяжении которых данный уровень ряда не изменялся.

При неполной информации возможны три случая:

1. Имеются данные только на начало и на конец изучаемого периода времени. Средний уровень временного ряда определяется как полусумма этих двух уровней.

2. Есть данные на начало и на конец изучаемого периода времени, а также на некоторые промежуточные моменты. При этом величины промежутков времени между ними не равняются друг другу. Средний уровень определяется по формуле

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{Y}_j f_j}{\sum_{j=1}^m f_j}, \quad (1.5)$$

где  $\bar{Y}_j$  – простая средняя арифметическая из двух соседних уровней моментного ряда;

$f_j$  – величины промежутков времени между двумя соседними наблюдениями.

3. Имеются данные на начало и на конец изучаемого периода времени, а также на некоторые промежуточные моменты времени. При этом величины промежутков времени между ними равняются друг другу. Средний уровень определяется по формуле

$$\bar{Y} = \frac{\frac{1}{2}Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N-1} + \frac{1}{2}Y_N}{N-1}, \quad (1.6)$$

которая называется средней *хронологической*. Здесь  $N - 1$  обозначает число промежутков времени между  $N$  моментами наблюдения.

*Средний абсолютный прирост* рассчитывается по формуле простой арифметической из цепных абсолютных приростов:

$$\bar{\Pi} = \frac{\sum \Pi_{цеп}}{N-1} = \frac{\Pi_{баз}}{N-1} = \frac{Y_i - Y_{i-t}}{N-1} \quad (1.7)$$

и показывает, на сколько единиц в среднем изменялся (в зависимости от знака  $\bar{\Pi}$ ) уровень ряда динамики в единицу времени (ежемесячно, ежеквартально, ежегодно и т.п.) за изучаемый период времени. Он отражает среднюю абсолютную скорость роста или снижения экономического показателя предприятия.

*Средний темп роста* определяется как средняя геометрическая простая из цепных темпов роста:

$$\bar{T}_P = \sqrt[N]{T_{P1} \times T_{P2} \times \dots \times T_{PN-1}}. \quad (1.8)$$

Величина  $\bar{T}_P$  показывает, во сколько раз в среднем изменялся уровень ряда динамики в единицу времени (ежемесячно, ежеквартально, ежегодно и т.п.) за изучаемый период времени. Он отражает среднюю относительную скорость роста или снижения экономического признака.

Принимая во внимание соотношение (1.2), формулу среднего темпа роста можно представить так:

$$\bar{T}_P = \sqrt[N]{T_{P1} \times T_{P2} \times \dots \times T_{PN1}} = \sqrt[N]{T_{PБАЗ}} = \sqrt[N]{\frac{Y_i}{Y_{i-t}}}, \quad (1.9)$$

которую часто удобно использовать, когда уже рассчитаны соответствующие базисные темпы роста, например, в табл. 1.3.

Однако, для характеристики средней относительной скорости изменения исследуемого экономического признака удобнее пользоваться *средним темпом прироста*, выраженным в процентах. Средний темп прироста  $\bar{T}_{пр} = (\bar{T}_P - 1) \times 100$  показывает, на сколько процентов в среднем изменялся (в зависимости от знака  $\bar{T}_{пр}$ ) уровень ряда динамики в единицу времени (ежемесячно, ежеквартально, ежегодно и т.п.) за изучаемый период времени.

В табл. 1.4 приведен расчёт средних показателей динамики прибыли предприятия за изучаемый год, осуществлённый по данным табл. 1.3.

Таблица 1.4

## Средние показатели динамики прибыли предприятия

| Показатель                                     | Формула показателя и расчёт  |
|--|--|
| 1. Средний уровень ряда $\bar{Y}$              | $\frac{\sum Y_i}{N} = \frac{190,6}{12} = 15,883 \text{ (тыс. грн.)}$   |
| 2. Средний абсолютный прирост $\bar{\Pi}$      | $\frac{\sum \Pi_{\text{цеп}}}{N-1} = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{N-1} = \frac{16,9}{11} = 1,536 \text{ (тыс. грн.)}$                |
| 3. Средний темп роста $\bar{T}_p$              | $\sqrt[N]{T_{p1} \times T_{p2} \times \dots \times T_{pN-1}} = \sqrt[N]{\frac{Y_i}{Y_{i-1}}} = \sqrt[11]{2,60952} = 1,09111$ |
| 4. Средний темп прироста $\bar{T}_{\text{пр}}$ | $\bar{T}_p - 1 = 1,09111 - 1,0 = 0,09111 \text{ или } 9,1\%$   |

Так, средний уровень ряда, найденный по простой средней арифметической, показывает, что среднемесячная прибыль предприятия в исследуемом году составляла 15,883 тыс. грн. При этом прибыль возрастала в среднем ежемесячно на 1,536 тыс. грн. или на 9,1 %. Ясно, что такой экономико-статистический анализ средних показателей динамики дополняет и обобщает представления об изменении прибыли предприятия, полученные при исследовании цепных и базисных показателей динамики из табл. 1.3.

В некоторых ситуациях, особенно когда уровни ряда динамики изучаемого экономического показателя сильно колеблются, возникает задача выявить основную *тенденцию* развития, под которой понимают общее направление к росту либо к снижению уровней временного ряда. Если уровни ряда динамики варьируют в случайном порядке вокруг некоторого среднего уровня, то говорят, что временной ряд тенденции не имеет и его уровни реализуют *стационарный* процесс.

Проиллюстрируем на примере рассмотренного выше ряда динамики прибыли предприятия главные статистические методы выявления основной тенденции развития.

1. Графический анализ временного ряда, который заключается в построении и визуальном исследовании изучаемой экономической динамики (рис. 1.3).

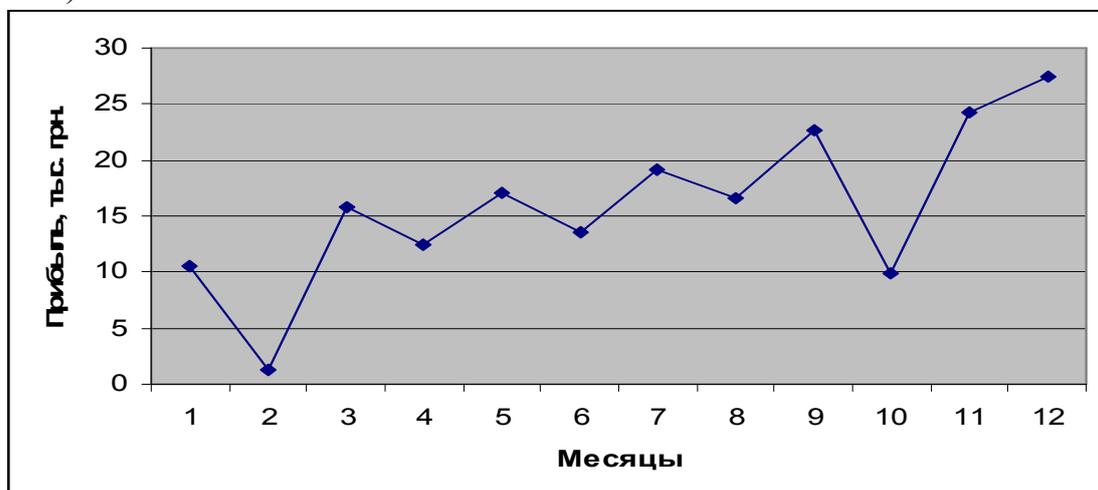


Рис. 1.3. Динамика показателя месячной прибыли предприятия

Визуальное изучение графика, отражающего вариацию прибыли предприятия по месяцам исследуемого года, показывает, что экономическая динамика характеризуется общей тенденцией к росту анализируемого показателя.

2. Укрупнение периодов, которое используется для выявления основной тенденции развития в интервальных рядах динамики, и заключается в переходе путём суммирования уровней к более продолжительным периодам времени (табл. 1.5).

Таблица 1.5

| Динамика прибыли предприятия по кварталам года |      |      |      |      |
|--|------|------|------|------|
| Кварталы                                       | 1    | 2    | 3    | 4    |
| Прибыль (тыс. грн.)                            | 27,6 | 42,9 | 58,5 | 61,6 |

На рис. 1.4 чётко видно, что динамика квартальных уровней прибыли предприятия имеет четко выраженную тенденцию к росту. Дело в том, что суммирование месячных уровней приводит к взаимной компенсации положительных и отрицательных случайных отклонений (*флуктуаций*) изучаемого экономического показателя.

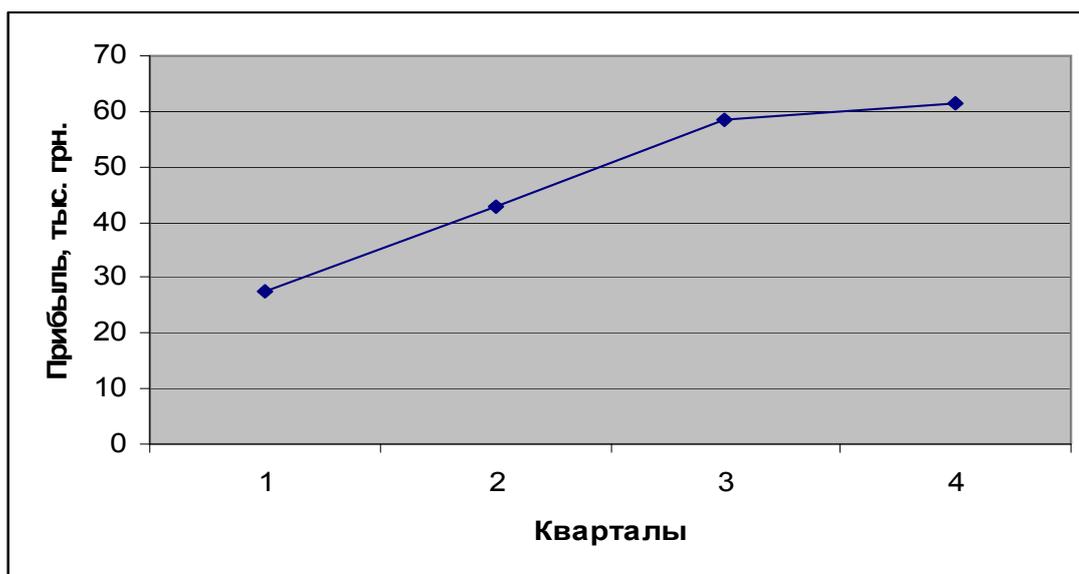


Рис. 1.4. Динамика показателя квартальной прибыли предприятия

3. Выравнивание уровней ряда с помощью скользящей средней. Данный метод заключается в замене отдельных значений  $Y_i$  простыми средними арифметическими из  $m$  соответствующих уровней временного ряда:

$$\bar{Y}_m = \frac{\sum_{j=1}^m Y_j}{m}. \quad (1.10)$$

Число  $m$  определяется исследователем и называется *звеном* скользящей средней, которое как бы скользит по выравниваемому ряду динамики слева направо (отсюда и название метода). Выбор звена скользящей средней  $m$  осуществляется с учётом следующих соображений:

- $m$  – нечётное число, начиная с 3;
- чем выше вариативность уровней изучаемого ряда экономической динамики, тем больше следует брать  $m$ ;
- применение метода скользящей средней приводит к потере  $(m - 1)$  уровня ряда, поэтому на коротких временных рядах  $m$  выбирают среди сравнительно малых чисел (3, 5, 7).

В табл. 1.6 приведены результаты выравнивания с помощью трёхзвенной скользящей средней рассматриваемого ряда динамики.

Таблица 1.6

Выровненная с помощью трёхзвенной скользящей средней динамика показателя месячная прибыли предприятия

| Уровни ряда                     | 2    | 3    | 4     | 5    | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    |
|---------------------------------|------|------|-------|------|-------|-------|------|------|------|-------|
| Прибыль $\bar{Y}_m$ (тыс. грн.) | 9,20 | 9,83 | 15,07 | 14,3 | 16,57 | 16,43 | 19,5 | 16,4 | 19,0 | 20,53 |

Выбор  $m = 3$  обусловлен тем, что вариативность уровней изучаемого временного ряда невелика. Процедура расчёта выровненных значений  $\bar{Y}_m$  такова. Из первых трёх уровней исходного ряда находится простая средняя арифметическая  $(10,5 + 1,3 + 15,8)/3 = 9,2$ , которая записывается на месте второго уровня. Затем звено скользящей средней сдвигается вправо на один уровень и вновь находится средняя арифметическая из 2-го, 3-го и 4-го уровней  $(1,3 + 15,8 + 12,4)/3 = 9,83$ , которая записывается на месте третьего уровня и т.д.

Отметим, что вновь полученный ряд динамики не содержит первый и последний уровни, потеря которых  $(m - 1 = 3 - 1 = 2)$  при расчёте скользящей средней является своеобразной «платой» за выравнивание исходного временного ряда. Графическое изображение данных табл. 1.6 показано на рис. 1.5.



Рис. 1.5. Выровненные с помощью трёхзвенной скользящей средней уровни прибыли предприятия

Визуальный анализ графика на рис. 1.5 и его сравнение с графиком исходных уровней (рис. 1.3) показывает, что выровненная с помощью трёхзвенной скользящей средней динамика прибыли предприятия имеет существенно меньшую вариативность. А тенденция к росту изучаемого показателя проявляется более отчётливо.

Если принять  $m = 5$ , то указанные свойства проявятся ещё более чётче. Однако при этом будут потеряны уже четыре уровня ряда – два первых и два последних.

4. Аналитическое выравнивание представляет собой применение методов корреляционно-регрессионного анализа к временным рядам и заключается в построении уравнения *тренда*, в котором в качестве обобщающего факторного признака  $X$  выступает время. При этом трендовые модели могут быть в форме прямой или кривой, ординаты которой принимаются за выровненные уровни временного ряда. На рис. 1.6 показаны результаты такого выравнивания с помощью простейшего линейного тренда

$$\hat{Y} = a_0 + a_1X, \quad X = 1, 2, \dots, N. \quad (1.11)$$

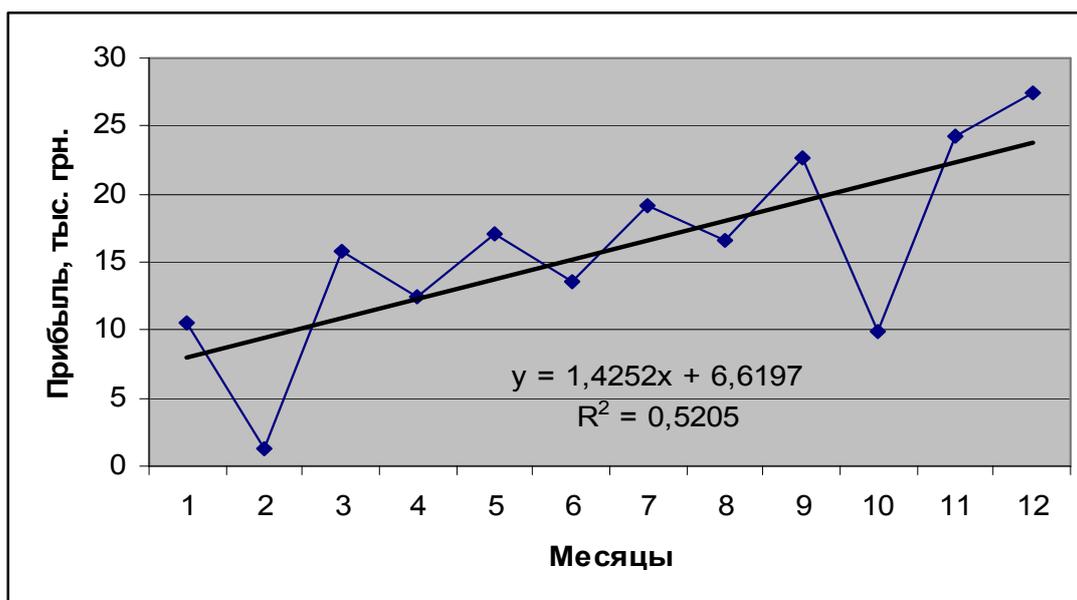


Рис. 1.6. Фактические и выровненные по линейному тренду значения показателя месячной прибыли предприятия

В данном примере модель линейного тренда имеет вид:  $\hat{Y} = 6,6197 + 1,4252X$ . Знак «плюс» коэффициента  $a_1$  указывает на наличие тенденции к росту прибыли предприятия за изучаемый период времени, а его величина примерно равна среднемесячному абсолютному приросту экономического показателя (в табл. 1.4  $\bar{\Pi} = 1,536$  тыс. грн.).

Свободный член  $a_0 = 6,6197$  (точка пересечения линии тренда с осью ординат) может интерпретироваться как уровень прибыли в месяце, предшествующему первому месяцу ряда, т.е. в декабре предыдущего года.

Коэффициент детерминации  $R^2 = 0,5205$  характеризует точность построенной трендовой модели. В данном случае она не очень высока: всего 52,1 % вариации уровней прибыли предприятия объясняется выбранной линейной функцией.

**Замечание 3.** Следует иметь в виду, что коэффициент тренда  $a_1 = 1,425$  более точно характеризует среднюю абсолютную скорость роста прибыли предприятия по сравнению с показателем  $\bar{P} = 1,536$  тыс. грн., т.к. расчет последнего базируется только на двух крайних уровнях ряда динамики – первом и последнем (см. формулу (1.7)). В то время как при нахождении коэффициента тренда  $a_1 = 1,4252$  учитываются все, без исключения, уровни временного ряда. Если крайние уровни  $Y_1, Y_N$  сильно искажены, то это может привести к искажению величины  $\bar{P}$ , вплоть до изменения её знака и получения ошибочных выводов относительно направления общей тенденции развития изучаемого ряда динамики.

Расчёт скользящих средних, а также трендовых моделей удобно вести на персональном компьютере в редакторе *Excel*. Для этого необходимо выполнить следующие действия и команды:

- открыть рабочий лист и создать массив исходных экономических данных  $Y_i$  в виде столбца или строки;
- построить график ряда динамики с помощью инструмента «Мастер диаграмм»;
- на ломаной линии графика щёлкнуть сначала левой, а затем правой мышью;
- в появившемся контекстном меню активизировать опцию «Добавить линию тренда»;
- в открывшемся окне выбрать тип тренда (всего 6 типов);
- с помощью кнопки «Параметры» задать опции «Прогноз», «Показать уравнение на диаграмме», «Поместить на диаграмме показатель  $R^2$ »;
- ОК.

После выявления основной тенденции развития ряд динамики изучаемого экономического показателя часто полезно разбить на отдельные этапы (если таких локальных тенденций несколько). Например, выделяют этапы роста, этапы снижения исследуемого явления, этапы стационарного процесса. При этом для этапов с *одинаково направленной* тенденцией развития появляется возможность проведения сравнительного анализа средней абсолютной и средней относительной скорости роста (снижения) уровней временного ряда.

С этой целью на каждом этапе по формулам (1.7) – (1.9) рассчитываются средние показатели динамики, а затем на их основе определяются относительные величины сравнения – так называемые коэффициенты ускорения (замедления) средней абсолютной или средней относительной скорости роста (снижения)  $Y_i$ .

Например, разобьём ряд динамики прибыли предприятия на два этапа, выделив в нём первое и второе полугодие. Рассчитаем на каждом из

выделенных этапов средние абсолютные приросты и средние темпы роста прибыли:

$$\bar{\Pi}_{1 \text{ ПОЛУГОДИЕ}} = \sum \Pi_{\text{ЦЕП}} / (N - 1) = \Pi_{\text{БАЗ}} / 5 = 3,0 / 5 = 0,6 \text{ (тыс. грн.)};$$

$$\bar{\Pi}_{2 \text{ ПОЛУГОДИЕ}} = \sum \Pi_{\text{ЦЕП}} / (N - 1) = \Pi_{\text{БАЗ}} / 5 = (16,9 - 3,0) / 5 = 2,78 \text{ (тыс. грн.)};$$

$$\bar{T}_{\text{Р } 1 \text{ ПОЛУГОДИЕ}} = \sqrt[6-1]{\frac{Y_6}{Y_1}} = \sqrt[5]{1,28571} = 1,05155 ;$$

$$\bar{T}_{\text{Р } 2 \text{ ПОЛУГОДИЕ}} = \sqrt[5]{\frac{\dot{\Delta}_{\text{ААЦ12}}}{\dot{\Delta}_{\text{ААЦ6}}}} = \sqrt[5]{\frac{2,60952}{1,28571}} = 1,152082.$$

**Замечание 4.** При нахождении базисных показателей анализа динамики прибыли предприятия во втором полугодии использовалось следующее свойство: если исходный временной ряд разбит на два этапа, то базисные показатели динамики 1-го этапа остаются неизменными, а базисные абсолютные приросты 2-го этапа находятся как разности между соответствующими показателями всего ряда и первого этапа. А базисные темпы роста 2-го этапа – как частные от деления соответствующих показателей всего ряда и первого этапа.

Поскольку оба этапа имеют однонаправленную тенденцию к росту уровней изучаемого экономического явления, то можно рассчитать следующую относительную величину сравнения:

$$K = \bar{\Pi}_{\text{ЭТАП } 2} / \bar{\Pi}_{\text{ЭТАП } 1}, \quad (1.12)$$

которая представляет собой коэффициент ускорения (при  $K > 1$ ) или замедления (при  $K < 1$ ) средней абсолютной скорости роста уровней экономического показателя. В данном примере

$$K = \bar{\Pi}_{2 \text{ ПОЛУГОДИЕ}} / \bar{\Pi}_{1 \text{ ПОЛУГОДИЕ}} = 2,78 / 0,6 = 4,633 > 1 \text{ (} K_{\text{УСК}} \text{)}.$$

Это означает, что средняя абсолютная скорость роста прибыли предприятия во 2-м полугодии была в 4,6 раза выше по сравнению с аналогичным показателем 1-го полугодия.

Кроме того, можно сопоставить средние относительные скорости роста прибыли предприятия по полугодиям:

$$K = \bar{T}_{\text{Р } \text{ЭТАП } 2} / \bar{T}_{\text{Р } \text{ЭТАП } 1} = 1,152 / 1,052 = 1,095 > 1 \text{ (} K_{\text{УСК}} \text{)}. \quad (1.13)$$

Это означает, что средняя относительная скорость роста прибыли во 2-м полугодии была почти в 1,1 раза выше по сравнению с аналогичным показателем 1-го полугодия.

**Замечание 5.** Если сравниваемые этапы развития имеют тенденцию к снижению уровней ряда динамики, то при сопоставлении средней

*относительной скорости следует использовать не средние темпы роста, а средние темпы прироста с указанием того, что соответствующий коэффициент ускорения (замедления) найден на основе среднего темпа прироста.*

В самом деле, рассмотрим такую ситуацию:  $\bar{T}_{P \text{ ЭТАП } 1} = 0,9$ ;  $\bar{T}_{P \text{ ЭТАП } 2} = 0,8$ . Воспользовавшись формулой (1.13), получим  $K < 1$ , т.е. замедление снижения уровней ряда во втором полугодии по сравнению с первым. Но в действительности это не так, поскольку среднемесячное снижение уровней ряда на первом этапе составляло 10 %, а на втором этапе 20 %. Поэтому правильным будет следующий расчёт данного коэффициента:

$$K = \bar{T}_{ПР \text{ ЭТАП } 2} / \bar{T}_{ПР \text{ ЭТАП } 1} = (-0,2)/(-0,1) = 2 > 1 \quad (K_{УСК}).$$

То есть можно сделать вывод о том, что средняя относительная скорость снижения уровней ряда динамики во втором полугодии (рассчитанная по среднему темпу прироста) была в 2 раза выше аналогичного показателя первого полугодия. Следовательно, наблюдалось ускорение относительного падения уровней ряда.

В некоторых ситуациях возникает задача сравнения абсолютных и относительных скоростей роста (снижения) уровней двух или нескольких изучаемых экономических показателей предприятия, представленных в виде соответствующих рядов динамики за один и тот же промежуток времени. Например, производительности труда и средней заработной платы. При этом для рядов с однонаправленной тенденцией появляется возможность найти так называемые коэффициенты опережения, которые строятся по аналогии с формулами (1.12), (1.13).

**Замечание 6.** *Следует помнить, что при расчёте коэффициентов опережения в числителе соответствующей дроби всегда берётся больший по абсолютной величине средний показатель динамики, т.е. речь идет всегда только об опережении ( $K > 1$ ), а не об отставании. Полученный коэффициент показывает, во сколько раз средняя абсолютная (относительная) скорость изменения уровней одного ряда опережает соответствующую скорость изменения уровней другого ряда.*

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Имеются следующие месячные данные о динамике выпуска товарной продукции предприятия (табл. 1.7).

Таблица 1.7

Динамика выпуска товарной продукции предприятия, тыс. грн.

| Месяц     | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Вариант 1 | 274 | 276 | 330 | 388 | 445 | 463 | 478 | 483 | 524 | 547 | 603 | 579 |
| Вариант 2 | 981 | 921 | 954 | 921 | 876 | 864 | 840 | 825 | 849 | 822 | 804 | 816 |
| Вариант 3 | 204 | 266 | 308 | 320 | 414 | 418 | 460 | 512 | 618 | 720 | 822 | 914 |
| Вариант 4 | 654 | 648 | 639 | 636 | 642 | 645 | 618 | 609 | 591 | 573 | 564 | 561 |
| Вариант 5 | 604 | 632 | 640 | 660 | 808 | 696 | 868 | 904 | 952 | 880 | 992 | 999 |
| Вариант 6 | 344 | 350 | 376 | 370 | 394 | 434 | 480 | 504 | 514 | 548 | 576 | 620 |
| Вариант 7 | 681 | 615 | 592 | 511 | 487 | 499 | 452 | 436 | 380 | 337 | 334 | 321 |
| Вариант 8 | 640 | 630 | 650 | 660 | 745 | 770 | 810 | 840 | 835 | 855 | 900 | 935 |
| Вариант 9 | 398 | 436 | 425 | 434 | 455 | 457 | 478 | 509 | 512 | 523 | 566 | 578 |
| Вариант10 | 489 | 450 | 444 | 453 | 441 | 411 | 372 | 375 | 351 | 360 | 354 | 339 |
| Вариант11 | 149 | 156 | 169 | 166 | 178 | 198 | 205 | 206 | 208 | 225 | 249 | 312 |
| Вариант12 | 175 | 173 | 170 | 169 | 171 | 163 | 138 | 150 | 142 | 139 | 133 | 129 |
| Вариант13 | 474 | 477 | 600 | 651 | 660 | 729 | 774 | 807 | 840 | 882 | 879 | 975 |
| Вариант14 | 805 | 825 | 790 | 775 | 735 | 715 | 700 | 760 | 685 | 660 | 640 | 655 |
| Вариант15 | 365 | 388 | 409 | 423 | 455 | 451 | 468 | 512 | 546 | 574 | 599 | 613 |
| Вариант16 | 444 | 448 | 540 | 556 | 560 | 632 | 556 | 656 | 684 | 708 | 744 | 812 |
| Вариант17 | 450 | 474 | 486 | 501 | 516 | 513 | 534 | 528 | 552 | 537 | 543 | 588 |
| Вариант18 | 936 | 950 | 916 | 890 | 904 | 854 | 848 | 840 | 834 | 848 | 836 | 820 |
| Вариант19 | 479 | 504 | 525 | 540 | 558 | 544 | 563 | 562 | 564 | 570 | 569 | 572 |
| Вариант20 | 181 | 189 | 176 | 175 | 167 | 158 | 159 | 147 | 130 | 134 | 121 | 111 |
| Вариант21 | 218 | 221 | 228 | 237 | 248 | 256 | 258 | 292 | 294 | 303 | 307 | 321 |
| Вариант22 | 507 | 516 | 499 | 486 | 491 | 485 | 481 | 473 | 468 | 465 | 469 | 462 |
| Вариант23 | 340 | 363 | 382 | 398 | 416 | 408 | 420 | 417 | 422 | 428 | 430 | 431 |
| Вариант24 | 395 | 402 | 415 | 412 | 424 | 444 | 451 | 452 | 454 | 471 | 465 | 478 |
| Вариант25 | 750 | 700 | 694 | 672 | 656 | 634 | 620 | 610 | 606 | 592 | 590 | 580 |
| Вариант26 | 153 | 165 | 174 | 179 | 187 | 198 | 199 | 234 | 248 | 249 | 266 | 277 |
| Вариант27 | 273 | 281 | 268 | 267 | 259 | 250 | 251 | 239 | 222 | 226 | 213 | 203 |
| Вариант28 | 768 | 777 | 801 | 813 | 840 | 852 | 858 | 870 | 861 | 885 | 894 | 900 |
| Вариант29 | 520 | 529 | 512 | 499 | 504 | 498 | 494 | 486 | 481 | 478 | 482 | 475 |
| Вариант30 | 303 | 390 | 456 | 495 | 564 | 561 | 582 | 597 | 618 | 651 | 735 | 750 |
| Вариант31 | 452 | 455 | 462 | 471 | 482 | 490 | 492 | 526 | 528 | 537 | 541 | 555 |
| Вариант32 | 666 | 675 | 658 | 645 | 650 | 644 | 640 | 632 | 627 | 624 | 628 | 621 |
| Вариант33 | 908 | 931 | 950 | 966 | 984 | 976 | 988 | 985 | 990 | 996 | 998 | 999 |
| Вариант34 | 768 | 775 | 788 | 785 | 797 | 817 | 824 | 825 | 827 | 844 | 838 | 851 |
| Вариант35 | 375 | 350 | 347 | 336 | 328 | 317 | 310 | 305 | 303 | 296 | 295 | 290 |
| Вариант36 | 474 | 486 | 495 | 500 | 508 | 519 | 520 | 555 | 569 | 570 | 587 | 598 |
| Вариант37 | 518 | 526 | 513 | 512 | 504 | 495 | 496 | 484 | 467 | 471 | 458 | 448 |
| Вариант38 | 256 | 259 | 267 | 271 | 280 | 284 | 286 | 290 | 287 | 295 | 298 | 300 |
| Вариант39 | 666 | 675 | 658 | 645 | 650 | 644 | 640 | 632 | 627 | 624 | 628 | 621 |
| Вариант40 | 101 | 130 | 152 | 165 | 188 | 187 | 194 | 199 | 206 | 217 | 245 | 250 |
| Вариант41 | 448 | 430 | 434 | 432 | 426 | 412 | 390 | 386 | 380 | 378 | 374 | 368 |

На основании данных табл. 1.7, соответствующих номеру Вашего варианта, осуществить:

1. Анализ динамики выпуска товарной продукции предприятия путём расчёта абсолютных приростов, темпов роста и прироста (цепных и базисных), абсолютного значения 1 % прироста (результаты оформить в виде табл. 1.3).
2. Определение тех месяцев изучаемого периода, в которых наблюдалась:
  - а) максимальная абсолютная скорость роста (снижения) выпуска товарной продукции предприятия;
  - б) максимальная относительная скорость роста (снижения) выпуска товарной продукции предприятия;
  - в) максимальное содержание 1 % прироста выпуска товарной продукции предприятия.
3. Расчёт средних показателей динамики выпуска товарной продукции предприятия (среднего уровня, среднего абсолютного прироста, средних темпов роста и прироста) за весь изучаемый период.
4. Выявление основной тенденции развития выпуска товарной продукции предприятия с помощью графического метода, укрупнения периодов (перехода к квартальным данным), скользящей средней и аналитического выравнивания (построения трендовой модели).
5. Выделение двух главных этапов развития (1-го и 2-го полугодия) и расчёт для них коэффициентов ускорения или замедления средней абсолютной и средней относительной скорости изменения выпуска товарной продукции предприятия.
6. Нахождение коэффициента опережения путем сравнения средней абсолютной и средней относительной скорости изменения уровней Вашего временного ряда с соответствующими показателями любого другого ряда динамики, имеющего с Вашим рядом однонаправленную тенденцию развития.

По каждому пункту дать краткие экономико-статистические пояснения и выводы.

## ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 1

1. Боровиков В. П. Популярное введение в программу *STATISTICA*. – М.: КомпьютерПресс, 1998. – 267 с.
2. Боровиков В. П., Боровиков И. П. Статистический анализ и обработка данных в среде *Windows*. – М.: Филинь, 1998. – 608 с.
3. Боровиков В. П., Ивченко Г. И. Прогнозирование в системе *STATISTICA* в среде *Windows*. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 384 с.
4. Економетрія // Навч. посібник за ред. А. Ф. Кабака, О. В. Проценка. – Одеса : НМЦО-ОДЕУ, 2003. – 562 с.
5. Кендэл М. Временные ряды / Пер. с англ. Ю. П. Лукашина. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 199 с.
6. Кравець О. С. Статистика : Навч. посібник. – Одеса : ПАЛЬМІРА, 2008. – 266 с.
7. Лук'яненко І. Г., Краснікова Л. І. Економетрика. – К.: Знання, КОО, 1998. – 494 с.
8. Методологія статистичного забезпечення розвитку регіону : Монографія / За ред. А. З. Підгорного. – Одеса : Атлант, 2012. – 303 с.
9. Статистика : Учебное пособие для иностранных студентов / А. З. Подгорный, О. Г. Мылашко, С. М. Киршо, Н. М. Шилофост. – Одесса : Атлант, 2012. – 194 с.
10. Статистика / За ред. С. С. Герасименка. – К.: КНЕУ, 2000. – 467 с.
11. Теория и практика статистического моделирования экономики / Под ред. Е. М. Четыркина, А. Класа. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 272 с.
12. Толбатов Ю. А. Загальна теорія статистики засобами Excel. – К.: Четверта хвиля, 1999. – 224 с.
13. Уманець Т. В. Загальна теорія статистики : Навч. посібник. – К.: Знання, 2006. – 239 с.
14. Янковой О. Г. Моделювання парних зв'язків в економіці. – Одеса : Оптимум, 2001. – 198 с.
15. Янковой О. Г. Моделювання та прогнозування S-подібних соціально-економічних процесів // Ринкова економіка : Сучасна теорія і практика управління, т. 4. – Одеса : Астропринт, 2001, С. 47-63.
16. Янковий О. Г., Яшкіна О. І. До проблеми вибору математичної форми трендів при прогнозуванні соціально-економічних показників // Вісник соціально-економічних досліджень ОДЕУ. – Одеса, 2003, № 14, С. 341-346.
17. Янковой А. Г. Основы эконометрического моделирования : Учеб. пособие. – Одесса, ОГЭУ, 2006. – 133 с.
18. Янковой А. Г. Основы теории статистики : Учеб. пособие. – Одеса, ОИФ УГУФМТ, 2007. – 111 с.

## 2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ ТРЕНДОВ И МОДЕЛЕЙ СЕЗОННОЙ ВОЛНЫ

Важным этапом, следующим за проведением анализа динамики показателей хозяйственной деятельности предприятия, является их прогнозирование (от греч. *prognosis* – знание наперед). Прогнозирование представляет собой вероятностное оценивание будущих значений изучаемых производственно-финансовых показателей предприятия и является главной предшествующей стадией их планирования.

Прогнозы классифицируются по различным признакам. Одна из возможных классификаций приведена на рис. 2.1.

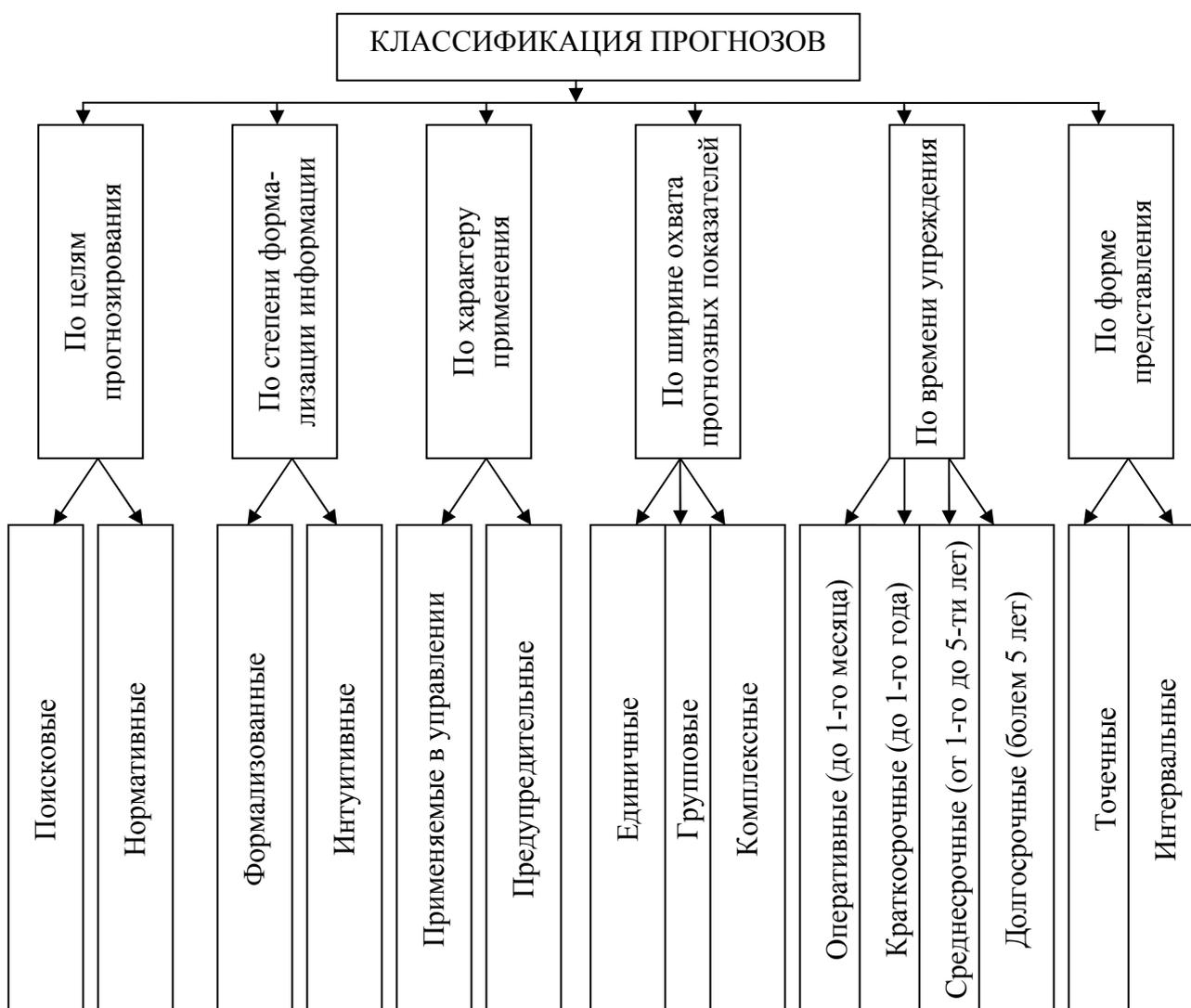


Рис. 2.1. Классификация прогнозов производственно-финансовых показателей предприятия

Прогнозы, построенные на основе рядов экономической динамики показателей предприятия, обычно относятся к поисковым формализованным прогнозам, которые базируются на существующей тенденции. Что касается

других признаков классификации, то они будут отличаться друг от друга в каждом конкретном случае прогнозирования. Характерной особенностью формализованных прогнозов является предварительная формализация имеющейся информации в виде модели или формулы, описывающей основную тенденцию развития уровней изучаемого ряда динамики.

Так, построенную на этапе аналитического выравнивания трендовую модель (1.11) можно использовать в качестве инструмента прогнозирования будущих значений уровней прибыли изучаемого предприятия. При этом в основе прогнозирования лежит экстраполяция найденной тенденции, т.е. распространение выявленных в периоде *предыстории* (на отрезке времени  $X = 1, 2, \dots, N$ ) закономерностей и связей на будущее – на период *упреждения* (прогнозирования)  $L$ .

Экстраполяция основана на гипотезе об инерционности развития экономических систем, т.е. на предположении о том, что в недалекой перспективе выявленные в прошлом связи и закономерности кардинально не изменятся и будут действовать некоторое время и в будущем. Следует отметить, что такое предположение достаточно реально, особенно для краткосрочного периода, поскольку коренные изменения показателей производственно-финансовой деятельности предприятия обычно требуют значительных усилий, средств и достаточно длительного времени.

**Замечание 1.** *Если уравнение тренда строится с целью прогнозирования будущих значений уровней изучаемого ряда экономической динамики, то необходимо следить, чтобы среди наблюдаемых значений  $Y_i$  не было так называемых аномальных или резко выделяющихся наблюдений в виде пиков или, наоборот, резких падений уровней ряда. Дело в том, что аномальные наблюдения обычно свидетельствуют о действии каких-то случайных факторов, не характерных для остальных периодов (моментов) времени. Поэтому при их наличии средняя  $\bar{Y}$  будет искажена и, как следствие, коэффициенты линейного тренда  $a_0, a_1$  будут содержать смещение, т.е. систематическую ошибку. Это в конечном итоге повлечет за собой неверную прогнозную оценку, например, сильно завышенную или заниженную.*

Существуют объективные взаимосвязи между числом оцениваемых коэффициентов тренда и длиной изучаемого ряда экономической динамики  $N$ , а также между величиной  $N$  и периодом упреждения  $L$ . Доказано, что число  $N$  должно в 3-4 раза превышать число оцениваемых коэффициентов тренда. Для линейного уравнения это число равно двум ( $a_0, a_1$ ), поэтому, чтобы построить линейный тренд  $\hat{Y} = a_0 + a_1X$ , необходимо располагать не менее 6-8 уровнями временного ряда. При этом должно выполняться условие:  $L \leq N/3$ , т.е. длина периода упреждения не может превышать трети длины периода предыстории. Нарушение указанных соотношений приводит к получению ненадёжных трендовых моделей и, соответственно, ошибочных прогнозных оценок.

К количественному прогнозу любого экономического показателя предприятия выдвигаются два главных требования: точность и

достоверность. Точность характеризуется степенью варьирования прогнозного значения  $\hat{Y}_{N+L}$ , которая измеряется *предельной ошибкой* прогноза  $\Delta$ . Чем меньше  $\Delta$ , тем точнее прогноз, и наоборот. Нулевое значение  $\Delta$  отвечает так называемому *точечному* прогнозу (в виде одного числа – точки на числовой оси). Точечный прогноз считается максимально точным.

Достоверность прогноза отображает вероятность совпадения будущего фактического значения  $Y_{N+L}$  с прогнозным значением  $\hat{Y}_{N+L}$ . Очевидно, что с ростом предельной ошибки прогноза  $\Delta$  его достоверность, напротив, увеличивается, а снижение  $\Delta$  (рост точности прогноза) приводит к уменьшению достоверности прогноза. Следовательно, точечный прогноз ( $\Delta = 0$ ) имеет минимальную достоверность, т.к. точное совпадение фактического будущего значения  $Y_{N+L}$  с прогнозным значением  $\hat{Y}_{N+L}$  является маловероятным. Это означает, что точность и достоверность прогноза находятся между собой в обратно пропорциональной зависимости: рост одного параметра вызывает уменьшение другого, и наоборот.

Точечные прогнозы находятся на базе уравнения тренда путем подстановки вместо  $X$  будущего значения фактора времени  $X = N + L$ , которое соответствует периоду упреждения  $L$ . Например, для линейного тренда  $\hat{Y} = a_0 + a_1X$  точечный прогноз имеет следующий общий вид:

$$\hat{Y}_{N+L} = a_0 + a_1(N + L). \quad (2.1)$$

Рассчитаем по данным примера из раздела 1.1 точечный прогноз прибыли предприятия на январь следующего года ( $L = 1$ ;  $X = N + L = 12 + 1 = 13$ ):

$$\hat{Y}_{N+L} = 6,619697 + 1,425175 \times 13 = 25,14697 \text{ (тыс. грн.)}$$

Таким образом, если выявленные за изучаемый период времени закономерности изменения прибыли предприятия не претерпят серьезных изменений в ближайшем будущем, то в январе следующего года финансовый результат деятельности следует ожидать на уровне 25,15 тыс. грн.

Как было отмечено выше, полученный точечный прогноз прибыли  $\hat{Y}_{N+L}$  отличается максимальной точностью и минимальной достоверностью. Поэтому в практике прогнозирования экономических показателей, в том числе и прибыли, обычно идут на компромисс: на основе точечного прогноза строят *интервальный* прогноз в виде двух чисел – нижней и верхней границ доверительного интервала с заранее заданной достоверностью  $P$  попадания в него фактического значения  $Y_{N+L}$ . Границы доверительного интервала прогноза рассчитываются по следующей общей схеме:

$$\hat{Y}_{N+L} \pm \Delta. \quad (2.2)$$

Иными словами, в центре доверительного интервала находится точечный прогноз  $\hat{Y}_{N+L}$ , а его ширина равняется  $2\Delta$ . В результате получения доверительного интервала по схеме (2.2) точность прогноза падает, поскольку расширяются его границы, но при этом обеспечивается заранее заданная достоверность прогноза  $P$ .

Возникает вопрос: как рассчитать величину предельной ошибки прогноза  $\Delta$ ? Теория статистического моделирования и прогнозирования дает на него следующий ответ. Для линейного тренда  $\hat{Y} = a_0 + a_1X$  формула предельной ошибки прогноза с достоверностью  $P = (1 - \alpha) \times 100$  % попадания в доверительный интервал будущего фактического значения прибыли имеет следующий вид:

$$\Delta = t_{\alpha;k} \times S_Y \times \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(N+L-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}}, \quad (2.3)$$

где  $t_{\alpha;k}$  – коэффициент доверия ( $\alpha$ -квантиль  $t$ -распределения Стьюдента с уровнем значимости  $\alpha$  и  $k = N - m - 1$  степенями свободы, где  $m$  – число факторов в модели тренда);  
 $S_Y$  – стандартная ошибка тренда;  
 $\bar{X}$  – среднее значение фактора времени.

Следует отметить, что уровень значимости  $\alpha$  определяется, исходя из необходимой и заранее заданной достоверности  $P$  (в %) из следующего соотношения:  $\alpha = 1 - P/100$ . Например, при необходимой достоверности попадания в доверительный интервал будущего фактического значения  $Y_{N+L}$   $P = 95$  %  $\alpha = 0,05$ ; при  $P = 90$  %  $\alpha = 0,10$ ; при  $P = 99$  %  $\alpha = 0,01$  и т.д.

Число степеней свободы  $k = N - m - 1$  для линейного тренда ( $m = 1$ ) равняется  $N - 2$ . А величина коэффициента доверия ( $\alpha$ -квантиль  $t$ -распределения Стьюдента) находится с помощью редактора *Excel* (команда = стьюдраспобр ( $\alpha$ ;  $N - m - 1$ ) – Enter).

Стандартная ошибка тренда  $S_Y$  определяется по формуле

$$S_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N - m - 1}} \quad (2.4)$$

и рассчитывается автоматически в процессе построения модели тренда (см. первый блок, четвертую строку результатов расчета уравнения регрессии, построенного с помощью стандартной программы «Регрессия» редактора *Excel*). Она характеризует абсолютную точность найденного уравнения тренда: чем меньше  $S_Y$ , тем более точен тренд, и наоборот.

Третий множитель (радикал) в выражении (2.3) отображает выбранную форму математической зависимости между уровнями ряда динамики прибыли предприятия и временем  $X$ . В данном случае для линейного тренда выражение под корнем не слишком сложно, но при переходе к криволинейным функциям связи оно существенно усложняется.

Так, при параболической (2-й степени) форме тренда третий сомножитель в выражении (2.3) приобретает вид:

$$\sqrt{\frac{(N+L)^2 + \frac{\sum_{i=1}^N X_i^4 - (2\sum_{i=1}^N X_i^2)(N+L)^2 + N(N+L)^4}{\sum_{i=1}^N X_i^2}}{N\sum_{i=1}^N X_i^2 - (\sum_{i=1}^N X_i^2)^2}}. \quad (2.5)$$

Следует иметь в виду, что автоматический расчёт величины предельной ошибки прогноза  $\Delta$  в стандартных программах корреляционно-регрессионного анализа редактора *Excel* не предусмотрен. А вручную осуществить указанные расчёты при больших  $m$  не представляется возможным. Поэтому в реальных экономических исследованиях с этой целью обычно пользуются системой программ *STATISTICA*.

Проиллюстрируем её применение на примере использования линейного тренда  $\hat{Y} = 6,6197 + 1,4252X$  для построения доверительного интервала прогноза прибыли предприятия на январь месяц следующего года с достоверностью  $P = 95\%; 99\%$ . Для этого после построения регрессионной модели в нижней средней части панели «Результатов множественной регрессии» (*Multiple Regression Results*) необходимо активизировать опцию «Прогноз зависимой переменной» (*Predict dependent var.*), предварительно указав уровень значимости  $\alpha$  и будущее значения фактора времени  $X = N + L$ . После команды *OK* появляются табл. 2.1, 2.2, в которых точечные и интервальные прогнозы находятся в 3-х последних строках (выделено жирным).

Таблица 2.1

Точечный прогноз и 95-процентный интервал прогноза прибыли предприятия на январь следующего года

| Predicting Values for (new.sta) |          |       |                  |
|---------------------------------|----------|-------|------------------|
|                                 | B-Weight | Value | B-Weight * Value |
| VAR5                            | 1,425175 | 13    | 18,52727         |
| Intercept                       |          |       | 6,619697         |
| <b>Predicted</b>                |          |       | <b>25,14697</b>  |
| <b>-95,0%CL</b>                 |          |       | <b>18,05408</b>  |
| <b>+95,0%CL</b>                 |          |       | <b>32,23986</b>  |

Таблица 2.2

Точечный прогноз и 99-процентный интервал прогноза прибыли предприятия на январь следующего года

| Predicting Values for (new.sta) |          |       |                  |
|---------------------------------|----------|-------|------------------|
|                                 | B-Weight | Value | B-Weight * Value |
| VAR5                            | 1,425175 | 13    | 18,52727         |
| Intercept                       |          |       | 6,619697         |
| <b>Predicted</b>                |          |       | <b>25,14697</b>  |
| <b>-99,0%CL</b>                 |          |       | <b>15,05814</b>  |
| <b>+99,0%CL</b>                 |          |       | <b>35,2358</b>   |

Полученные результаты прогнозирования можно представить графически на рис. 2.2.

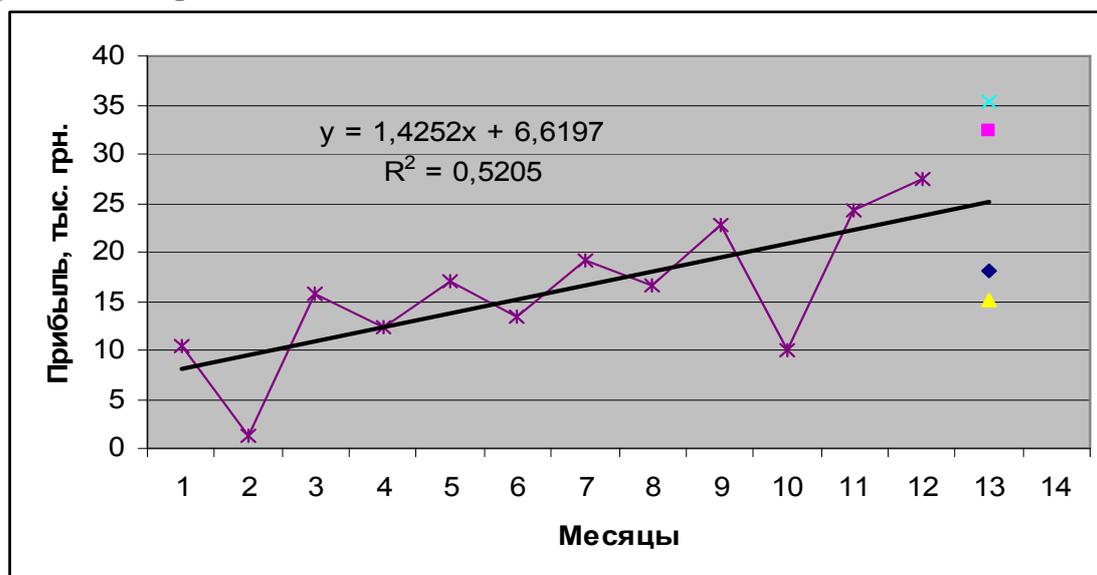


Рис. 2.2. Фактические, выровненные по линейному тренду и прогнозные значения прибыли предприятия на 13-й месяц

Визуальный анализ рис. 2.2 показывает, что 95-процентный интервал прогноза прибыли предприятия на январь следующего года (табл. 2.1) является уже по сравнению с соответствующим 99-процентным доверительным интервалом из табл. 2.2.

Математическое исследование выражения (2.3) показывает, что величина  $\Delta$  прямо зависит от трех факторов и обратно от одного. А именно:

1. Рост необходимой достоверности прогноза  $P = (1 - \alpha) \times 100\%$ , т.е. вероятности попадания в доверительный интервал будущего фактического значения прибыли предприятия приводит к снижению уровня значимости  $\alpha$  и к повышению коэффициенту доверия ( $\alpha$ -квантиля распределения Стьюдента) и, следовательно, к росту величины предельной ошибки прогноза  $\Delta$ . Это подтверждает сделанный выше вывод об обратной пропорциональной зависимости между характеристиками достоверности и точности прогнозных оценок. Рис. 2.2 иллюстрирует эту взаимосвязь.

2. Величина стандартной ошибки тренда  $S_Y$  прямо влияет на размер  $\Delta$ . Очевидно, что чем более точна модель тренда, тем точнее построенный интервальный прогноз. Это означает, что для получения наиболее точных прогнозных оценок прибыли предприятия следует стремиться применять наиболее точные модели трендов с минимальным значением  $S_Y$ .

3. С ростом  $L$  (выхода за рамки исследуемого ряда динамики прибыли) растет числитель второй дроби  $(N + L - \bar{X})^2$ , которая находится под корнем (2.3), а, следовательно, и величина самой предельной ошибки прогноза  $\Delta$  (рис. 2.3). Поэтому, наиболее точный прогноз при всех прочих равных условиях можно получить не при экстраполяции тренда, а при его интерполяции, если  $N + L = \bar{X}$ .

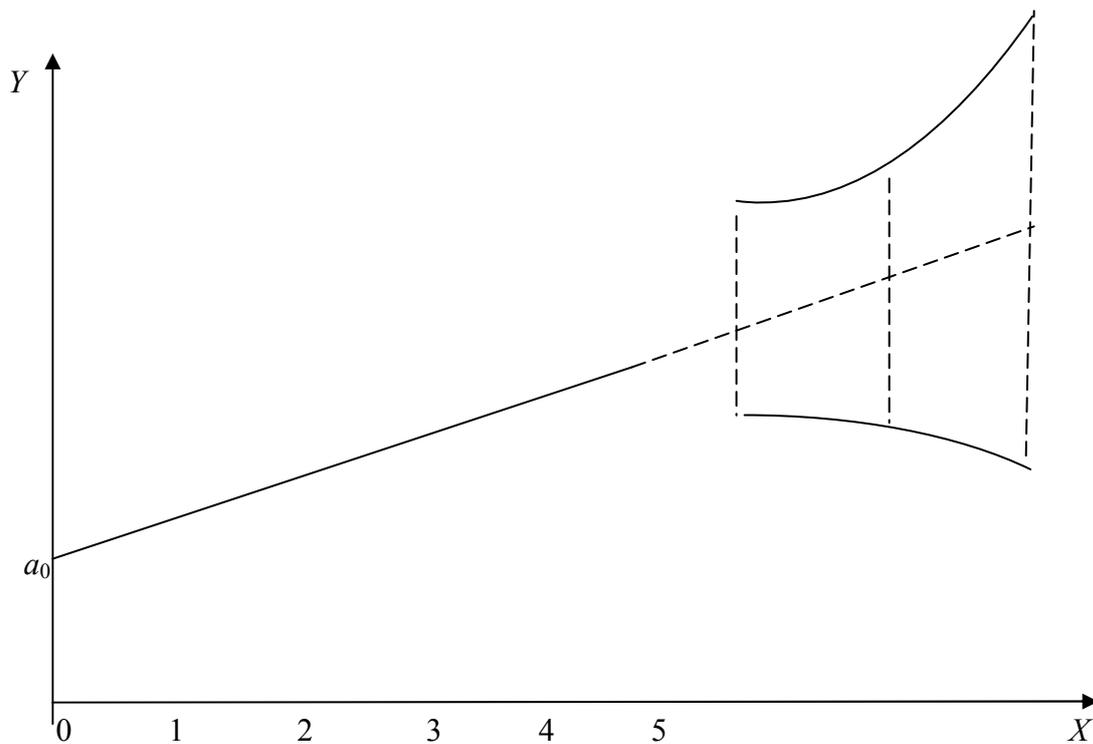


Рис. 2.3. Доверительные интервалы прогноза (заштрихованные вертикальные линии) для разных периодов упреждения ( $L = 1, 2, 3$ )

4. При росте длины временного ряда  $N$  величина  $1/N$  под корнем снижается и растет число степеней свободы  $k$  в первом сомножителе (2.3). Это приводит к уменьшению коэффициента доверия  $t_{\alpha,k}$ . Следовательно, повышение длины временного ряда  $N$  при всех прочих неизменных условиях уменьшает размер  $\Delta$ .

Приведенные выше рассуждения справедливы для любой линейной и криволинейной модели тренда. Они показывают, что стремление исследователя к получению наиболее достоверных прогнозных оценок ведет к росту предельной ошибки прогноза  $\Delta$  и падению их точности. И наоборот – менее достоверным оценкам отвечают более точные прогнозы.

Одновременное увеличение достоверности и точности прогнозов производственно-финансовых показателей предприятия можно достичь лишь при увеличении длины ряда динамики  $N$ . Поэтому в практике прогнозирования при фиксированном значении  $N$  всегда приходится искать компромисс между двумя взаимобратными характеристиками – точностью и достоверностью прогноза.

Очевидно также то, что наиболее точные прогнозы можно получить лишь на основе наиболее точных уравнений трендов, для которых выполняется условие  $\min S_Y$ . При этом, чем дальше исследователь стремится заглянуть в будущее, тем менее точными оказываются прогнозные оценки изучаемого экономического показателя предприятия. Будущее всегда неопределенно: большинство параметров экономических систем ведут себя как случайные величины, предвидение которых на длительный период времени сильно затруднено.

**Замечание 2.** Увеличение длины ряда динамики  $N$  возможно осуществить лишь двумя способами: 1) добавить более ранние наблюдения; 2) дезагрегировать наблюдения, т.е. перейти к уровням за более мелкие промежутки времени, например, заменить годовые данные полугодовыми, квартальными, месячными и т.д. Однако при этом возникают новые проблемы и трудности, о которых забывать нельзя. Первый путь вызывает усиление старых тенденций, т.к. увеличивается объем старой информации, относящейся к начальным уровням ряда динамики. Это не совсем желательно, особенно при оперативном и краткосрочном прогнозировании. Второй путь ведёт к фактическому затушёвыванию основной тенденции развития экономической динамики (вспомним один из методов ее выявления – метод укрупнения периодов). Дезагрегирование наблюдений фактически приводит к усилению действия случайных факторов в уровнях ряда динамики и сокрытию его основной тенденции развития.

И все же, среди указанных четырех факторов, влияющих на величину предельной ошибки прогноза  $\Delta$ , существует один, который непосредственно зависит от знаний, опыта и интуиции самого исследователя. Это второй фактор – величина стандартной ошибки тренда  $S_Y$ , определяемая выбором наиболее точной модели тренда.

Очевидно, что если динамика изучаемого экономического показателя характеризуется не прямолинейной, а криволинейной тенденцией развития – наличием экстремумов (максимумов или минимумов), точек перегиба или асимптот, то правильный выбор математической формы тренда может существенно снизить величину  $S_Y$ . Например, в случае нелинейной тенденции динамики показателя прибыли  $S_Y$  ПАРАБОЛА  $\approx S_Y$  ЛИНЕЙН / 4 (рис. 2.4).

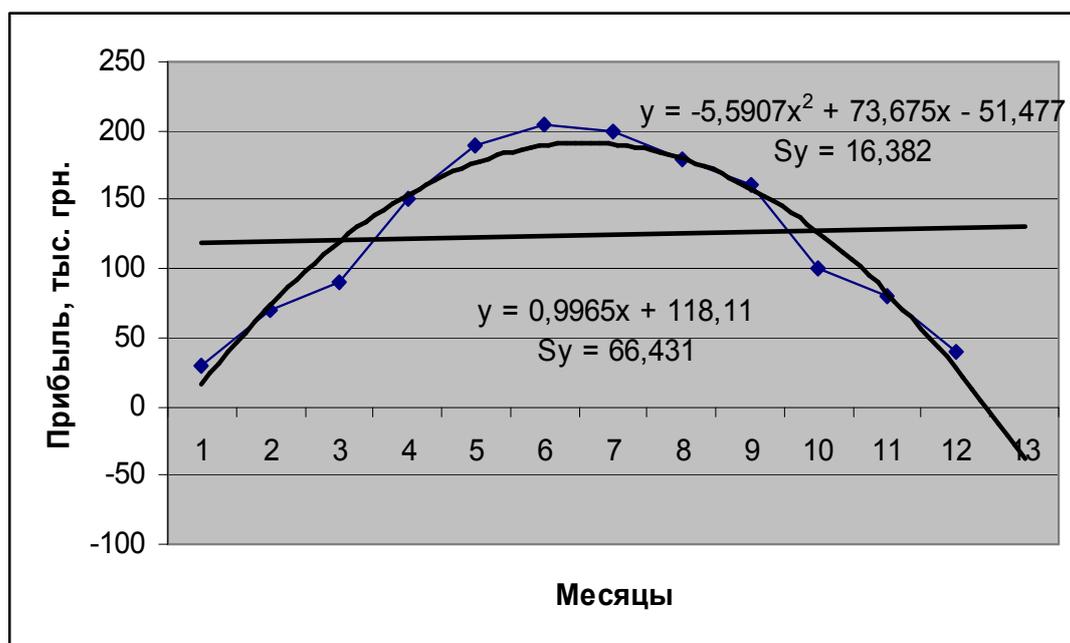


Рис. 2.4. Стандартные ошибки линейного и параболического трендов

Правильному выбору математической формы тренда в значительной мере способствует визуальный анализ графика ряда экономической динамики. Сравнение его с графиками известных нелинейных математических функций позволяет осуществить такой выбор (см. рис. 2.5 – 2.7).

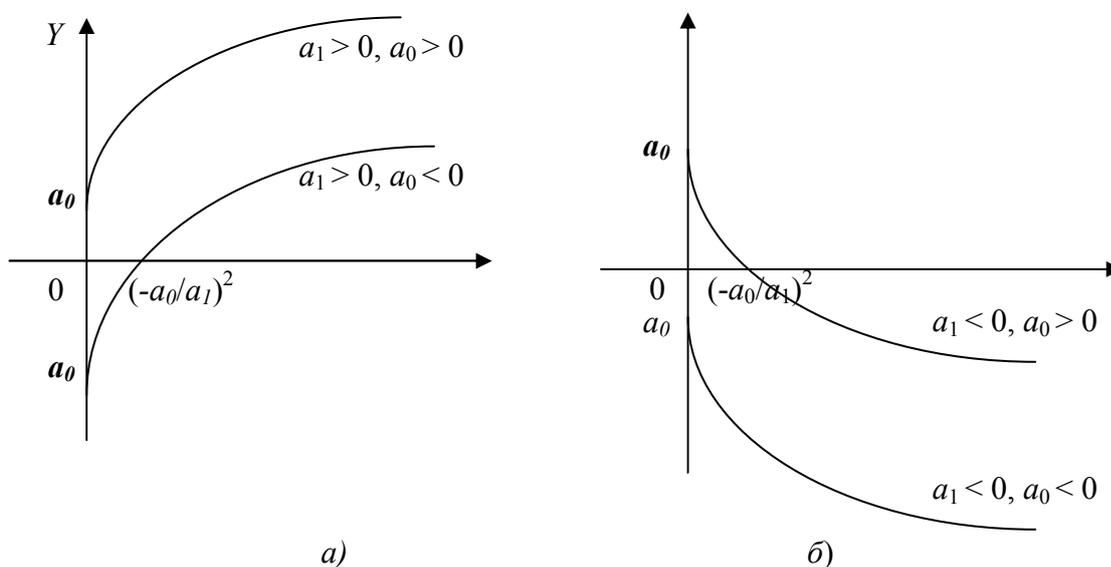


Рис. 2.5. Графики функции  $Y = a_0 + a_1 \sqrt{\tilde{O}}$

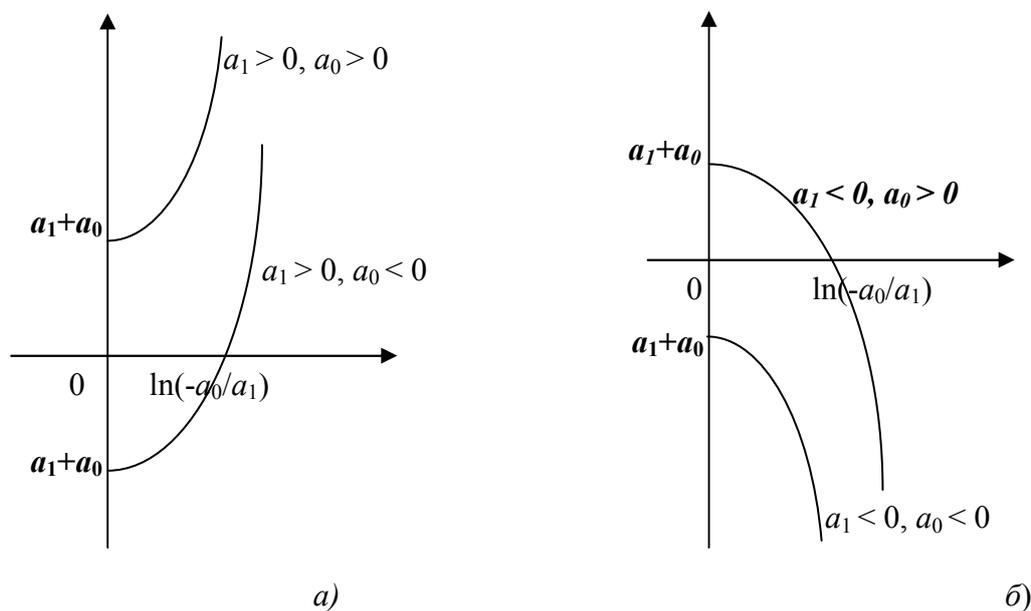


Рис. 2.6. Графики линейной экспоненты  $Y = a_0 + a_1 e^x$

Для динамики экономических показателей, описываемых функцией  $Y = a_0 + a_1 \sqrt{\tilde{O}}$ , характерен замедленный рост (рис. 2.5, а) или замедленное снижение (рис. 2.5, б), в то время как экспонента (рис. 2.6, а и б) хорошо аппроксимирует лавинообразно развивающиеся процессы, т.е. динамику с ускорением.

При моделировании и прогнозировании развития типа «жизненный цикл товара» отлично зарекомендовали себя так называемые S-образные кривые (синусоида, логистическая функция, кривая Гомперца и др. (рис. 2.7).

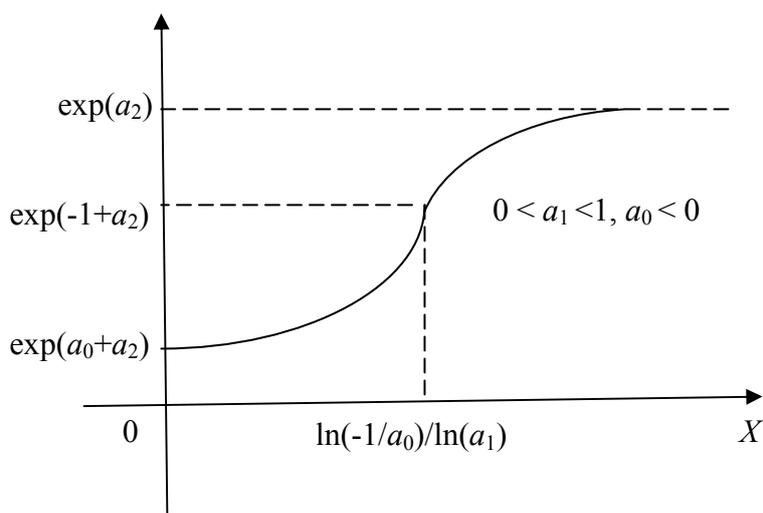


Рис. 2.7. График функции Гомперца  $Y = \exp(a_0 a_1^X + a_2)$

Довольно часто экономические показатели предприятия подвержены сезонным и циклическим колебаниям, связанным с переработкой сельскохозяйственного сырья и реализацией соответствующей продукции, с общими колебаниями спроса и предложения на товары (работы, услуги) в условиях рыночного производства. Кроме того, сезонность может возникать из-за сезонного характера спроса на товары, производимые промышленными предприятиями.

Сезонная волна представляет собой более или менее регулярные изменения временного ряда, возникающие с наступлением данного времени года и повторяющиеся с небольшими отклонениями из года в год. К циклическим колебаниям относятся изменения, не связанные с временами года, но регулярно повторяющиеся через определенные периоды времени. Сезонные и циклические колебания обычно имеют постоянный период.

Как бы ни проявлялись сезонность и цикличность, они наносят ущерб деятельности предприятий, который заключается в неравномерном использовании технологического оборудования, рабочей силы и транспорта. Анализ, моделирование и прогнозирование сезонных колебаний в пределах года необходимы для организации ритмичной работы предприятий. А исследование цикличности позволяет им успешно адаптироваться к изменениям внешней среды в долгосрочной перспективе при разработке и реализации стратегических планов развития.

Первым шагом на пути изучения сезонности является измерения силы и характера ее проявления. Наиболее известным и распространенным показателем такого проявления считается *индекс сезонности*, характеризующий результаты сравнения фактических уровней данного квартала (месяца) с уровнями ряда динамики, выровненными с помощью

линейного тренда (см. раздел 1 данного учебного пособия) для того же квартала (месяца).

Пусть фактический квартальный выпуск, а также выровненные по линейному тренду значения квартального выпуска мороженого на предприятии молочной отрасли пищевой промышленности (см. рис. 2.8) характеризуется следующими данными за последние 3 года (табл. 2.3). Рассчитаем в последней строке табл. 2.3 квартальные индексы сезонности.

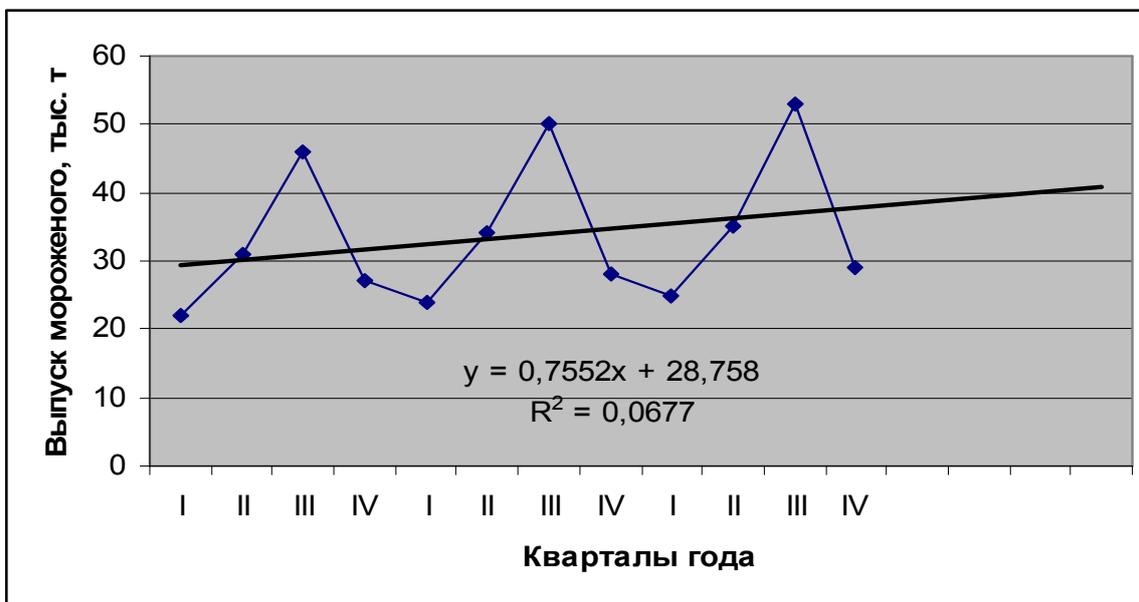


Рис. 2.8. Фактические и выровненные по линейному тренду значения квартального выпуска мороженого на предприятии

Таблица 2.3

Исходные данные для проведения анализа, моделирования и прогнозирования сезонности выпуска мороженого на предприятии

| Годы  | 1-й  |      |      |      | 2-й  |      |      |      | 3-й  |      |      |      |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|   | I    | II   | III  | IV   | I    | II   | III  | IV   | I    | II   | III  | IV   |
| 1. Фактический выпуск продукции, тыс. т                 | 22   | 31   | 46   | 27   | 24   | 34   | 50   | 28   | 25   | 35   | 53   | 29   |
| 2. Выровн. по линейному тренду выпуск продукции, тыс. т | 29,5 | 30,3 | 31,0 | 31,8 | 32,5 | 33,3 | 34,0 | 34,8 | 35,6 | 36,3 | 37,1 | 37,8 |
| 3. Индекс сезонности (стр. 1 : стр. 2)                  | 0,75 | 1,02 | 1,48 | 0,85 | 0,74 | 1,02 | 1,47 | 0,80 | 0,70 | 0,96 | 1,43 | 0,77 |

Поскольку квартальные индексы сезонности найдены за последние 3 года (см. строку 3 табл. 2.4), то окончательные выводы о степени изучаемого явления лучше выносить не по индивидуальным, а по средним значениям индексов сезонности:

$$I_{I\text{CEЗ}} = (0,75 + 0,74 + 0,70)/3 = 0,73;$$

$$I_{II\text{CEЗ}} = (1,02 + 1,02 + 0,96)/3 = 1,00;$$

$$I_{III\text{CEЗ}} = (1,48 + 1,47 + 1,43)/3 = 1,46;$$

$$I_{IVCE3} = (0,85 + 0,80 + 0,77)/3 = 0,81.$$

$I_{jCE3} = 1$  означает полное отсутствие сезонности. Обобщающей характеристикой сезонности временного ряда служит стандартное (среднее квадратическое) отклонение средних индексов сезонности от 1:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m ({}^2_{j\tilde{N}A\zeta} - 1)^2}{m}}, \quad (2.5)$$

где  $j$  – номер соответствующего квартала или месяца ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

В данном примере  $m = 4$  (четыре квартала в году) и стандартное отклонение средних индексов сезонности от 1 равно:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^4 ({}^2_{j\tilde{N}A\zeta} - 1)^2}{4}} = \sqrt{\frac{(0,73-1)^2 + (1-1)^2 + (1,46-1)^2 + (0,81-1)^2}{4}} = 0,283.$$

Следовательно, можно утверждать, что 28,3 % вариации во времени выпуска мороженого на изучаемом предприятии объясняется фактором сезонности, т.е. данное явление оказывает довольно существенное влияние на динамику величины  $Y$ .

В общем виде модель прогноза уровней ряда динамики экономического показателя предприятия с учетом сезонности записывается так:

$$\hat{Y}_j = I_{jCE3} \times \hat{Y}_{N+L}, \quad (2.6)$$

где  $\hat{Y}_j$  – прогнозное значение уровня ряда динамики в  $j$ -м квартале (месяце);  
 $\hat{Y}_{N+L}$  – прогнозное значение уровня ряда, найденное по трендовой модели.

Ниже приведены модели и расчет прогнозных значений выпуска мороженого на предприятии в следующем 4-м году по кварталам по данным предыдущего примера (см. рис. 2.9):

$$\begin{aligned} \hat{Y}_I &= I_{ICE3} \times (0,7552X + 28,758) = 0,73 \times (0,7552 \times 13 + 28,758) = 28,16019 \text{ (тыс. т)}; \\ \hat{Y}_{II} &= I_{II CE3} \times (0,7552X + 28,758) = 1,00 \times (0,7552 \times 14 + 28,758) = 39,33080 \text{ (тыс. т)}; \\ \hat{Y}_{III} &= I_{III CE3} \times (0,7552X + 28,758) = 1,46 \times (0,7552 \times 15 + 28,758) = 58,52556 \text{ (тыс. т)}; \\ \hat{Y}_{IV} &= I_{IV CE3} \times (0,7552X + 28,758) = 0,81 \times (0,7552 \times 16 + 28,758) = 33,08137 \text{ (тыс. т)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получены точечные квартальные прогнозы изучаемого показателя предприятия на 4-й год с учетом действия сезонных колебаний. Возникает вопрос: как построить доверительные интервалы квартальных прогнозов с заранее заданной вероятностью попадания в них фактических значений выпуска мороженого? Для этого, как и в случае прогнозирования по линейному тренду, границы доверительного интервала прогноза рассчитываются по общей схеме (2.2).

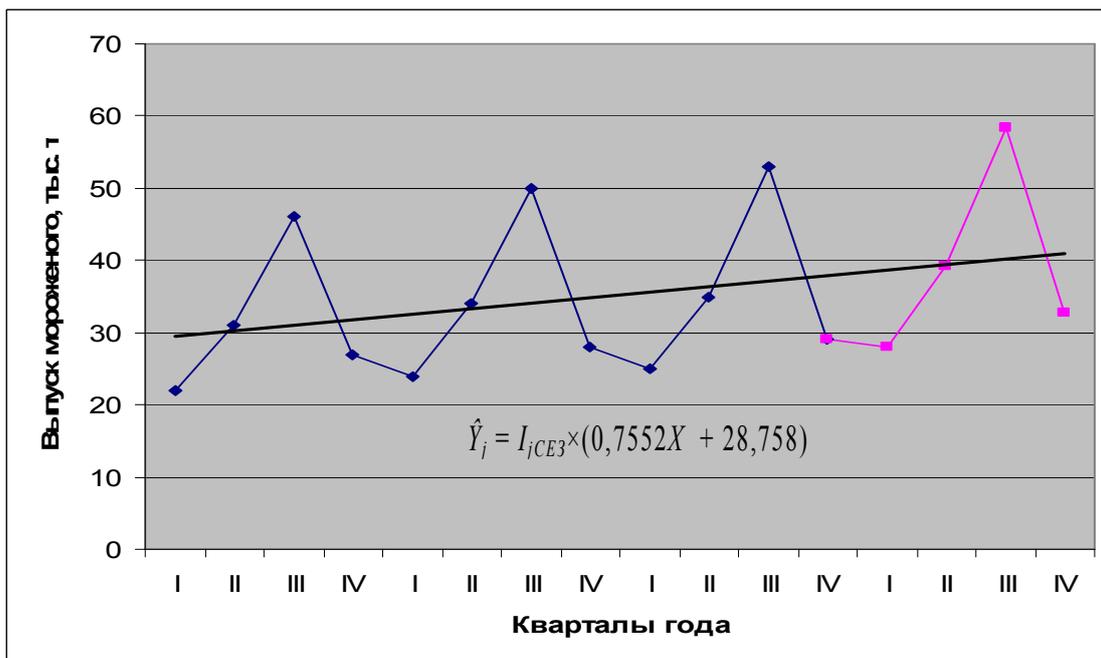


Рис. 2.9. Фактические, выровненные по линейному тренду и прогнозные значения квартального выпуска мороженого на предприятии

Доказано, что предельная ошибка прогноза сезонной волны  $\Delta$  находится по следующей формуле:

$$\Delta_j = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma_{jq}}{\sqrt{n}}, \quad (2.7)$$

где  $Z_{\alpha/2}$  – коэффициент доверия ( $\alpha$ -квантиль нормального распределения);  
 $\sigma_{jq}$  – стандартное отклонение остатков модели (2.6) для  $j$ -го квартала (месяца), найденных по данным периода предыстории;  
 $n$  – число лет периода предыстории.

Как и в формуле (2.3), коэффициент доверия  $Z_{\alpha/2}$  находится с учётом уровня значимости  $\alpha$ , который, в свою очередь, определяется, исходя из необходимой и заранее заданной достоверности  $P$  (в %) из следующего соотношения:  $\alpha = 1 - P/100$ . Например, при  $P = 95\%$   $\alpha/2 = 0,025$   $Z_{0,025} = 1,96$ ; при  $P = 90\%$   $\alpha/2 = 0,05$   $Z_{0,05} = 1,64$ ; при  $P = 99\%$   $\alpha/2 = 0,005$   $Z_{0,005} = 2,58$  и т.д. В общем случае коэффициент доверия  $Z_{\alpha/2}$  рассчитывается в редакторе *Excel* с помощью команды =НОРМСТОБР( $\alpha/2$ ) – ОК. Полученное отрицательное значение (так называемый левый  $\alpha$ -квантиль) берётся по абсолютной величине.

Под остатками модели  $e_i$  понимают разности фактических значений  $Y_i$  и расчётных  $\hat{Y}_i$ , найденных по уравнению (2.6). Для нахождения величин  $\sigma_{jq}$  осуществим расчёт величин  $e_i$  модели (2.6) для каждого квартала по данным периода предыстории, т.е. за первые три года (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Расчёт остатков модели (2.6) для каждого квартала  
по данным периода предыстории

| Год | Квартал | Порядко-<br>вый номер<br>квартала<br>(i) | Фактический<br>выпуск<br>продукции,<br>тыс. т ( $Y_i$ ) | Расчётный по<br>модели выпуск<br>продукции,<br>тыс. т ( $\hat{Y}_i$ ) | Остатки<br>модели<br>(гр. 4 – гр. 5) |
|-----|---------|--|---|---|--------------------------------------|
| 1   | 2       | 3  | 4   | 5   | 6                                    |
| 1-й | I       | 1  | 22  | 21,54464  | 0,45536                              |
|     | II      | 2  | 31  | 30,2684   | 0,7316                               |
|     | III     | 3  | 46  | 45,29446  | 0,70554                              |
|     | IV      | 4  | 27  | 25,74083  | 1,25917                              |
| 2-й | I       | 5  | 24  | 23,74982  | 0,25018                              |
|     | II      | 6  | 34  | 33,2892   | 0,7108                               |
|     | III     | 7  | 50  | 49,70482  | 0,29518                              |
|     | IV      | 8  | 28  | 28,18768  | -0,18768                             |
| 3-й | I       | 9  | 25  | 25,955  | -0,955                               |
|     | II      | 10                                       | 35  | 36,31   | -1,31                                |
|     | III     | 11                                       | 53  | 54,11519  | -1,11519                             |
|     | IV      | 12                                       | 29  | 30,63452  | -1,63452                             |

Определив в табл. 2.4 остатки модели (2.6), можно перейти к расчёту стандартных отклонений  $\sigma_{jq}$  остатков для каждого из четырёх кварталов по следующей формуле:

$$\sigma_{jq} = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^n (e_{jq} - \bar{e}_j)^2}{n}}, \quad (2.8)$$

Для первого квартала  $\bar{e}_I = (0,45536 + 0,25018 - 0,955)/3 = -0,08315$ , а стандартное отклонений  $\sigma_{Iq}$  остатков равняется

$$\sigma_{Iq} = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^3 (e_{Iq} - \bar{e}_I)^2}{3}} = \sqrt{\frac{(0,45536 + 0,08315)^2 + (0,25018 + 0,08315)^2 + (-0,955 + 0,08315)^2}{3}} = 0,62215.$$

Аналогичные расчёты проведены и для остальных трёх кварталов года:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{II} &= 0,04413; & \sigma_{IIq} &= 0,95755; \\ \bar{e}_{III} &= -0,03816; & \sigma_{IIIq} &= 0,77979; \\ \bar{e}_{IV} &= -0,18768; & \sigma_{IVq} &= 1,18134. \end{aligned}$$

Подстановка найденных значений  $\sigma_{jq}$  в формулу (2.7), даёт величины предельной ошибки прогноза сезонной волны  $\Delta_j$  для достоверности  $P = 95\%$  ( $Z_{0,025} = 1,96$ ):

$$\begin{aligned} \Delta_I &= 1,96 \frac{0,62215}{\sqrt{3}} = 0,71549; & \Delta_{II} &= 1,96 \frac{0,95755}{\sqrt{3}} = 1,09853; \\ \Delta_{III} &= 1,96 \frac{0,77979}{\sqrt{3}} = 0,87982; & \Delta_{IV} &= 1,96 \frac{1,18134}{\sqrt{3}} = 1,32727. \end{aligned}$$

Отсюда, для найденных выше точечных прогнозов квартального выпуска продукции на 4-й год по схеме (2.2) находятся границы 95-процентных доверительных интервалов (табл. 2.5).

Таблица 2.5

Точечный и интервальный прогноз квартальных уровней выпуска мороженого предприятием в 4-м году

| Год | Квартал | Порядковый номер квартала (i) | Нижняя граница доверительного интервала прогноза, тыс. т | Точечный прогноз по модели (2.6), тыс. т ( $\hat{Y}_i$ ) | Верхняя граница доверительного интервала прогноза, тыс. т |
|-----|---------|-------------------------------|--|--|---|
| 4-й | I       | 13                            | 28,02470   | 28,16019   | 28,29568  |
|     | II      | 14                            | 39,12227   | 39,3308  | 39,53933  |
|     | III     | 15                            | 58,35574   | 58,52556   | 58,69538  |
|     | IV      | 16                            | 32,82410   | 33,08137   | 33,33864  |

Таким образом, если выявленные в периоде предыстории тенденции в динамике выпуска продукции на изучаемом предприятии не претерпят в ближайшем будущем существенных изменений, то в I квартале 4-го года объём производства мороженого следует ожидать на уровне 28,16019 тыс. т. Причём, с достоверностью 95 % будущее фактическое значение выпуска продукции предприятия попадёт в интервал от 28,0247 тыс. т до 28,29568 тыс. т. Аналогичные выводы на основе данных табл. 2.5 можно получить относительно объёма производства мороженого в II – IV кварталах 4-го года.

Изменяя требуемую достоверность, получают 90-, 99-процентные и др. доверительные интервалы прогноза выпуска продукции на исследуемом предприятии.

При моделировании сезонных и циклических колебаний в динамике экономических показателей предприятия при условии отсутствия тенденции в их развитии используется аппроксимация временного ряда тригонометрическими многочленами, в частности, рядами Фурье. Так, функцию, заданную в каждой точке изучаемого интервала времени, можно представить бесконечным рядом пар синусов и косинусов – так называемых *гармоник*. Нахождение конечной суммы членов с синусами и косинусами называется *гармоническим анализом*.

Каждый член суммы представляет собой гармонику с определенным периодом. Первая гармоника имеет период, равный длине исследуемого периода  $N$ . Вторая равна половине основного, т.е.  $N/2$ . Третья – одной трети основного  $N/3$  и т.д.

Вообще, если длина периода предыстории  $N$ , то число гармоник не будет превышать  $N/2$ . Для ряда динамики, носящего синусоидальный характер, обычно не требуется определять все  $N/2$  гармоник. Его вариация обычно хорошо описывается несколькими первыми гармониками ряда Фурье.

Если величину аргументов тригонометрических функций записать как

$$1 \frac{2\pi}{N}, 2 \frac{2\pi}{N}, \dots, i \frac{2\pi}{N}, \dots, N \frac{2\pi}{N}, \quad (2.9)$$

т.е. представить в виде части длины окружности, то зависимость соответствующих им значений экономического показателя может быть выражена в виде следующей суммы, которая суть конечный ряд Фурье:

$$\hat{Y} = a_0 + \sum_{t=1}^{N/2} [a_t \sin(\frac{2\pi}{N} ti) + b_t \cos(\frac{2\pi}{N} ti)], \quad (2.10)$$

где  $i$  – номер наблюдения;

$\frac{2\pi t}{N}$  – номер гармоники ( $t = 1, 2, \dots, N/2$ );

$\frac{2\pi}{N} i$  – аргумент тригонометрических функций;

$a_t, b_t$  – коэффициенты гармоник.

Коэффициенты ряда Фурье определяются по методу наименьших квадратов. Их оценками служат следующие выражения:

$$a_0 = \bar{Y}; \quad a_t = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \sin(\frac{2\pi}{N} ti); \quad b_t = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \cos(\frac{2\pi}{N} ti). \quad (2.11)$$

Как отмечалось выше, число гармоник не может превышать  $N/2$ . Поэтому по формулам (2.11) необходимо рассчитывать коэффициенты для  $(N/2 - 1)$  гармоник. Для последней гармоники ( $t = N/2$ ) выполняются соотношения:

$$a_{N/2} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \sin(\pi i) = 0; \quad b_{N/2} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \cos(\pi i). \quad (2.12)$$

При этом  $\sin(\pi i) = 0$ ,  $\cos(\pi i) = \pm 1$ . Если рассчитываются менее  $N/2$  гармоник, то соответственно будет получено одинаковое количество коэффициентов при синусах и косинусах.

Рассмотрим применение гармонического анализа на предыдущем примере данных о квартальном выпуске мороженого на предприятии молочной отрасли пищевой промышленности (см. табл. 2.3).

Поскольку  $N = 12$ , то наибольшее число гармоник, которые можно рассчитать для данного ряда, равно 6. При этом следует учитывать выявленный линейный тренд (см. рис. 2.8). Следовательно, модель гармонического анализа в данном случае имеет следующий общий вид:

$$\hat{Y} = A_0 + A_1 \tilde{O} + \sum_{t=1}^{N/2} [a_t \sin(\frac{2\pi}{N} ti) + b_t \cos(\frac{2\pi}{N} ti)], \quad (2.13)$$

где  $A_0, A_1$  – коэффициенты линейного тренда.

Очевидно, что прежде чем переходить к оценке коэффициентов ряда Фурье, необходимо из исходных данных  $Y_i$  удалить линейный тренд, т.е. вычесть из них значения  $\hat{Y}_i$ , найденные по уравнению  $\hat{Y} = 0,7552X + 28,758$  (см. гр. 6 табл. 2.6, рис. 2.10).

График сезонных колебаний выпуска продукции на предприятии после удаления линейного тренда (рис. 2.10) свидетельствует о том, что вариация

изучаемого временного ряда носит ярко выраженный синусоидальный характер. Поэтому для её моделирования можно определять не все 6 гармоник, а ограничиться лишь первыми четырьмя.

Таблица 2.6

Расчёт исходных данных для проведения гармонического анализа

| Год   | Квартал | Порядковый номер квартала (i) | Фактический выпуск продукции, тыс. т ( $Y_i$ ) | Расчётный по линейному тренду выпуск продукции, тыс. т ( $\hat{Y}_i$ ) | Исходные данные $\hat{Y}_i$ для гармонического анализа (гр. 4 – гр. 5) |
|-------|---------|-------------------------------|--|--|--|
| 1     | 2       | 3                             | 4  | 5  | 6  |
| 1-й   | I       | 1                             | 22   | 29,5132  | -7,5132  |
|       | II      | 2                             | 31   | 30,2684  | 0,7316   |
|       | III     | 3                             | 46   | 31,0236  | 14,9764  |
|       | IV      | 4                             | 27   | 31,7788  | -4,7788  |
| 2-й   | I       | 5                             | 24   | 32,534   | -8,534   |
|       | II      | 6                             | 34   | 33,2892  | 0,7108   |
|       | III     | 7                             | 50   | 34,0444  | 15,9556  |
|       | IV      | 8                             | 28   | 34,7996  | -6,7996  |
| 3-й   | I       | 9                             | 25   | 35,5548  | -10,5548   |
|       | II      | 10                            | 35   | 36,31  | -1,31  |
|       | III     | 11                            | 53   | 37,0652  | 15,9348  |
|       | IV      | 12                            | 29   | 37,8204  | -8,8204  |
| Всего |         | -                             | 404  | 404  | 0  |

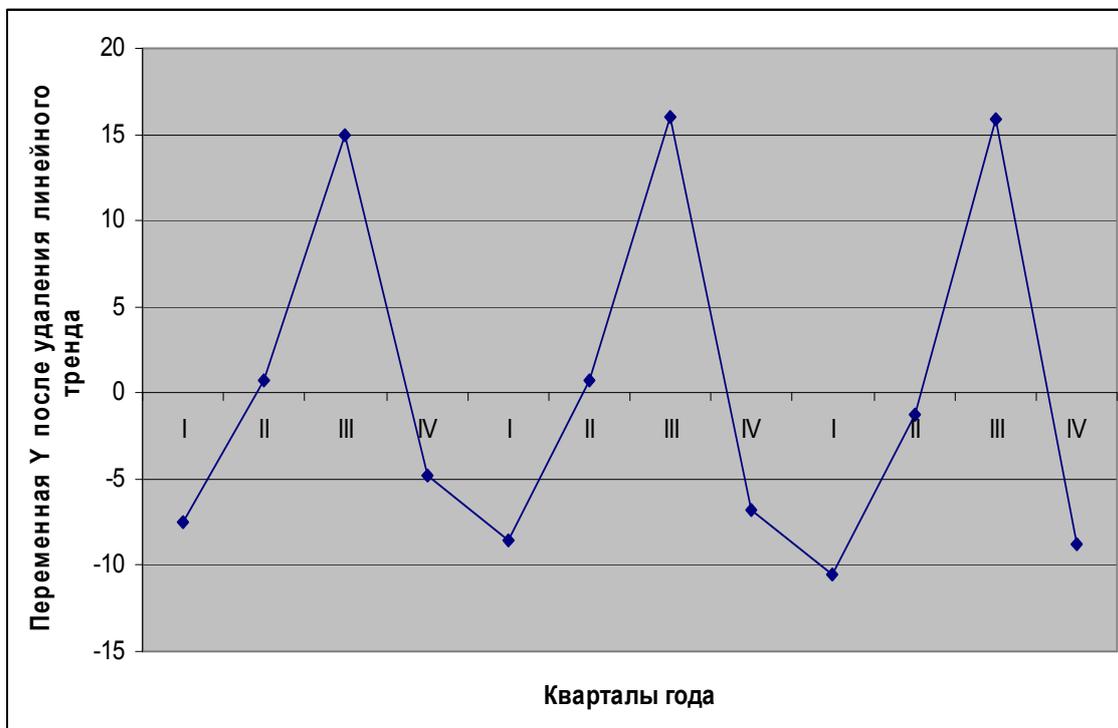


Рис. 2.10. Сезонные колебания квартального выпуска мороженого на предприятии после удаления линейного тренда

По данным табл. 2.6 с учётом формул (2.11) действительно находим  $a_0 = \bar{Y} = 0$ . Расчёт коэффициентов четырёх гармоник  $a_t, b_t$  показан в табл. 2.7, в которой приведены множители гармонического анализа. Они представляют собой исходные данные  $\hat{Y}_i$  из гр. 6 табл. 2.6, а также значения тригонометрических функций  $\sin x$  и  $\cos x$  для различных кварталов  $i$  и гармоник  $t$  (число  $\pi = 3,141592654$ ). В последних восьми столбцах табл. 2.7 приведен расчёт коэффициентов искомым гармоник  $a_t, b_t$  в соответствие с формулами (2.11). Их значения, найденные путём деления чисел итоговой строки на 6, находятся в последней строке табл. 2.7.

Таким образом, получаются следующие коэффициенты первых четырёх гармоник:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,84677; & b_1 &= -0,52753; \\ a_2 &= 0,15334; & b_2 &= 0,24483; \\ a_3 &= -12,2448; & b_3 &= -3,42187; \\ a_4 &= 0,14734; & b_4 &= -0,9219. \end{aligned}$$

Следовательно, модель сезонной волны в данном примере может быть записана в явном виде:

$$\hat{Y} = (0,7552X + 28,758) + (0,846773\sin x - 0,52753\cos x) + (0,15334\sin 2x + 0,24483\cos 2x) + (-12,2448\sin 3x - 3,42187\cos 3x) + (0,14734\sin 4x - 0,9219\cos 4x). \quad (2.14)$$

Дисперсия уровней ряда динамики экономического показателя  $\sigma^2_Y$  находится по обычной формуле как средний квадрат отклонений  $Y_i$  от среднего значения  $\bar{Y}$ . В данном примере  $\sigma^2_Y = 100,3889$ . Возникает вопрос: какая часть общей дисперсии  $\sigma^2_Y$  объясняется каждой гармоникой, и какая часть – всеми шестью гармониками?

Дисперсия, объясняемая  $t$ -й гармоникой, определяется по формуле

$$\sigma^2_t = (a^2_t + b^2_t)/2. \quad (2.15)$$

Часть дисперсии, объясняемая  $t$ -й гармоникой, представляется в виде отношения  $\sigma^2_t/\sigma^2_Y$  и выражается в процентах. Благодаря свойству ортогональности (любые две гармоники линейно независимы, т.е. не коррелированы между собой) гармоники не объясняют одну и ту же часть общей дисперсии  $\sigma^2_Y$ . Поэтому доли общей дисперсии, объясняемые всеми гармониками, складываются. Части общей дисперсии, объясняемые четырьмя найденными гармониками (2.14), рассчитаны в табл. 2.8.

Данные табл. 2.8 показывают, что выделенные четыре гармоники ряда Фурье объясняют 81,48 % сезонных колебаний выпуска продукции на изучаемом предприятии. При этом наиболее важной является третья гармоника, период которой ( $N/3 = 12/3 = 4$ ) совпадает с периодом сезонности исследуемого ряда. Её вклад в описание вариации  $Y$  составляет 80,5 %.

Таблица 2.7

Множители гармонического анализа и расчёт коэффициентов четырёх гармоник  $a_t, b_t$ 

| $i$        | $Y_i$   | $x = \pi i/6$ | $\sin x$ | $\sin 2x$ | $\sin 3x$ | $\sin 4x$ | $\cos x$ | $\cos 2x$ | $\cos 3x$ | $\cos 4x$ | $Y_i \sin x$ | $Y_i \sin 2x$ | $Y_i \sin 3x$ | $Y_i \sin 4x$ | $Y_i \cos x$ | $Y_i \cos 2x$ | $Y_i \cos 3x$ | $Y_i \cos 4x$ |
|------------|---------|---------------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|--------------|---------------|---------------|---------------|--------------|---------------|---------------|---------------|
| 1          | -7,5132 | $\pi/6$       | 0,5      | 0,866     | 1         | 0,866     | 0,866    | 0,5       | 0         | -0,5      | -3,7566      | -6,50643      | -7,5132       | -6,50643      | -6,50643     | -3,7566       | 0             | 3,7566        |
| 2          | 0,7316  | $\pi/3$       | 0,866    | 0,866     | 0         | -0,866    | 0,5      | -0,5      | -1        | -0,5      | 0,6336       | 0,633566      | 0             | -0,63357      | 0,3658       | -0,3658       | -0,7316       | -0,3658       |
| 3          | 14,9764 | $\pi/2$       | 1        | 0         | -1        | 0         | 0        | -1        | 0         | 1         | 14,9764      | 0             | -14,9764      | 0             | 0            | -14,9764      | 0             | 14,9764       |
| 4          | -4,7788 | $2\pi/3$      | 0,866    | -0,866    | 0         | 0,866     | -0,5     | -0,5      | 1         | -0,5      | -4,1384      | 4,138441      | 0             | -4,13844      | 2,3894       | 2,3894        | -4,7788       | 2,3894        |
| 5          | -8,534  | $5\pi/6$      | 0,5      | -0,866    | 1         | -0,866    | -0,866   | 0,5       | 0         | -0,5      | -4,267       | 7,390444      | -8,534        | 7,39044       | 7,390444     | -4,267        | 0             | 4,267         |
| 6          | 0,7108  | $\pi$         | 0        | 0         | 0         | 0         | -1       | 1         | -1        | 1         | 0            | 0             | 0             | 0             | -0,7108      | 0,7108        | -0,7108       | 0,7108        |
| 7          | 15,9556 | $7\pi/6$      | -0,5     | 0,866     | -1        | 0,866     | -0,866   | 0,5       | 0         | -0,5      | -7,9778      | 13,81755      | -15,9556      | 13,8176       | -13,8175     | 7,9778        | 0             | -7,9778       |
| 8          | -6,7996 | $4\pi/3$      | -0,866   | 0,866     | 0         | -0,866    | -0,5     | -0,5      | 1         | -0,5      | 5,88845      | -5,88845      | 0             | 5,88845       | 3,3998       | 3,3998        | -6,7996       | 3,3998        |
| 9          | -10,555 | $3\pi/2$      | -1       | 0         | 1         | 0         | 0        | -1        | 0         | 1         | 10,555       | 0             | -10,555       | 0             | 0            | 10,555        | 0             | -10,555       |
| 10         | -1,31   | $5\pi/3$      | -0,866   | -0,866    | 0         | 0,866     | 0,5      | -0,5      | -1        | -0,5      | 1,13446      | 1,13446       | 0             | -1,13446      | -0,655       | 0,655         | 1,31          | 0,655         |
| 11         | 15,9348 | $11\pi/6$     | -0,5     | -0,866    | -1        | -0,866    | 0,866    | 0,5       | 0         | -0,5      | -7,9674      | -13,7995      | -15,9348      | -13,7995      | 13,79954     | 7,9674        | 0             | -7,9674       |
| 12         | -8,8204 | $2\pi$        | 0        | 0         | 0         | 0         | 1        | 1         | 1         | 1         | 0            | 0             | 0             | 0             | -8,8204      | -8,8204       | -8,8204       | -8,8204       |
| $\Sigma$   | 0       | -             | -        | -         | -         | -         | -        | -         | -         | -         | 5,0806       | 0,920038      | -73,469       | 0,88403       | -3,1652      | 1,469         | -20,5312      | -5,5314       |
| $a_t, b_t$ | -       | -             | -        | -         | -         | -         | -        | -         | -         | -         | 0,8468       | 0,15334       | -12,2448      | 0,1473        | -0,52753     | 0,24483       | -3,4219       | -0,9219       |

Таблица 2.8

Расчёт вклада четырёх гармоник в объяснение вариации уровней ряда  $Y$ 

| $t$   | $\sigma_t^2$                           | $\sigma_Y^2$ | $\sigma_t^2/\sigma_Y^2, \%$ |
|-------|--|--------------|-----------------------------|
| 1     | $(0,846773^2 + 0,52753^2)/2 = 0,49766$ | 100,3889     | 0,495728                    |
| 2     | $(0,15334^2 + 0,244833^2)/2 = 0,04173$ | 100,3889     | 0,041567                    |
| 3     | $(12,2448^2 + 3,42187^2)/2 = 80,8222$  | 100,3889     | 80,50906                    |
| 4     | $(0,147335^2 + 0,9219^2)/2 = 0,4358$   | 100,3889     | 0,434115                    |
| Всего | 81,79735                               | 100,3889     | 81,48046                    |

Очевидно, что не имеет смысла сохранять в модели (2.14) первую, вторую и четвертую гармоники, т.к. их совокупный вклад в объяснение сезонных колебаний выпуска продукции на предприятии составляет менее 1 %. Поэтому решено было исключить их из гармонического анализа. В результате модель сезонной волны окончательно выглядит так:

$$\hat{Y} = (0,7552X + 28,758) + (-12,2448\sin 3x - 3,42187\cos 3x). \quad (2.16)$$

Теперь рассмотрим уравнение (2.16) с точки зрения возможности прогнозирования выпуска мороженого на предприятии на будущий год.

Если предположить, что в недалёком будущем сохранится та же амплитуда колебаний выпуска мороженого на изучаемом предприятии, которая наблюдалась в предыдущий период времени, то модель (2.16) может быть использована в целях оценки исследуемого экономического показателя на перспективу, т.е. для нахождения точечного прогноза  $\hat{Y}_{N+L}$ . При этом предельная ошибка прогноза сезонной волны  $\Delta$  рассчитывается по формулам (2.7), (2.8).

В табл. 2.9 приведены результаты расчётов по модели (2.16) уровней квартального выпуска продукции на предприятии за три года периода предыстории, точечный прогноз на четвертый год (выделено жирным), остатки и предельные ошибки прогноза сезонной волны  $\Delta$  (выделено жирным). На рис. 2.11 показано графическое представление результатов проведенного гармонического анализа.

Выводы по найденным точечным и интервальным прогнозам квартального выпуска мороженого на предприятии аналогичны тем, которые сделаны по итогам моделирования и прогнозирования сезонной волны с учётом индексов сезонности (см. рис. 2.8, 2.9, формулы (2.5) – (2.8), табл. 2.3 – 2.5). При этом обращает на себя внимание величина предельных ошибок прогноза, полученных разными методами. Сравнение  $\Delta$  показывает, что прогнозирование на базе индексов сезонности обеспечивает в данном примере существенно более точные оценки будущих значений изучаемого экономического показателя  $Y$  по сравнению с результатами гармонического анализа. Причины подобного явления, возможно, кроются в том, что модель (2.16) содержит только одну гармонику, объясняющую всего 80,5 % сезонных колебаний выпуска продукции на исследуемом предприятии.

Таблица 2.9

Расчётные уровни квартального выпуска мороженого на предприятии по модели (2.16) за 3 года периода предыстории и прогноз на 4-й год

| Год | Квартал | Порядковый номер квартала (i) | Фактический выпуск продукции, тыс. т ( $Y_i$ ) | Расчётный выпуск продукции, тыс. т ( $\hat{Y}_i$ ) | Остатки модели и $\Delta$ прогноза на 4-й год |
|-----|---------|-------------------------------|--|--|---|
| 1   | 2       | 3                             | 4  | 5  |   |
| 1-й | I       | 1                             | 22   | 17,2684  | 4,7316  |
|     | II      | 2                             | 31   | 33,6903  | -2,6903                                       |
|     | III     | 3                             | 46   | 43,2684  | 2,7316  |
|     | IV      | 4                             | 27   | 28,3569  | -1,3569                                       |
| 2-й | I       | 5                             | 24   | 20,2892  | 3,7108  |
|     | II      | 6                             | 34   | 36,7111  | -2,7111                                       |
|     | III     | 7                             | 50   | 46,2892  | 3,7108  |
|     | IV      | 8                             | 28   | 31,3777  | -3,3777                                       |
| 3-й | I       | 9                             | 25   | 23,310   | 1,69  |
|     | II      | 10                            | 35   | 39,7319  | -4,7319                                       |
|     | III     | 11                            | 53   | 49,310   | 3,69  |
|     | IV      | 12                            | 29   | 34,3985  | -5,3985                                       |
| 4-й | I       | 13                            | -  | <b>26,3308</b>                                     | <b>1,4302</b>                                 |
|     | II      | 14                            | -  | <b>42,7527</b>                                     | <b>1,0836</b>                                 |
|     | III     | 15                            | -  | <b>52,3308</b>                                     | <b>0,5169</b>                                 |
|     | IV      | 16                            | -  | <b>37,4193</b>                                     | <b>1,8671</b>                                 |

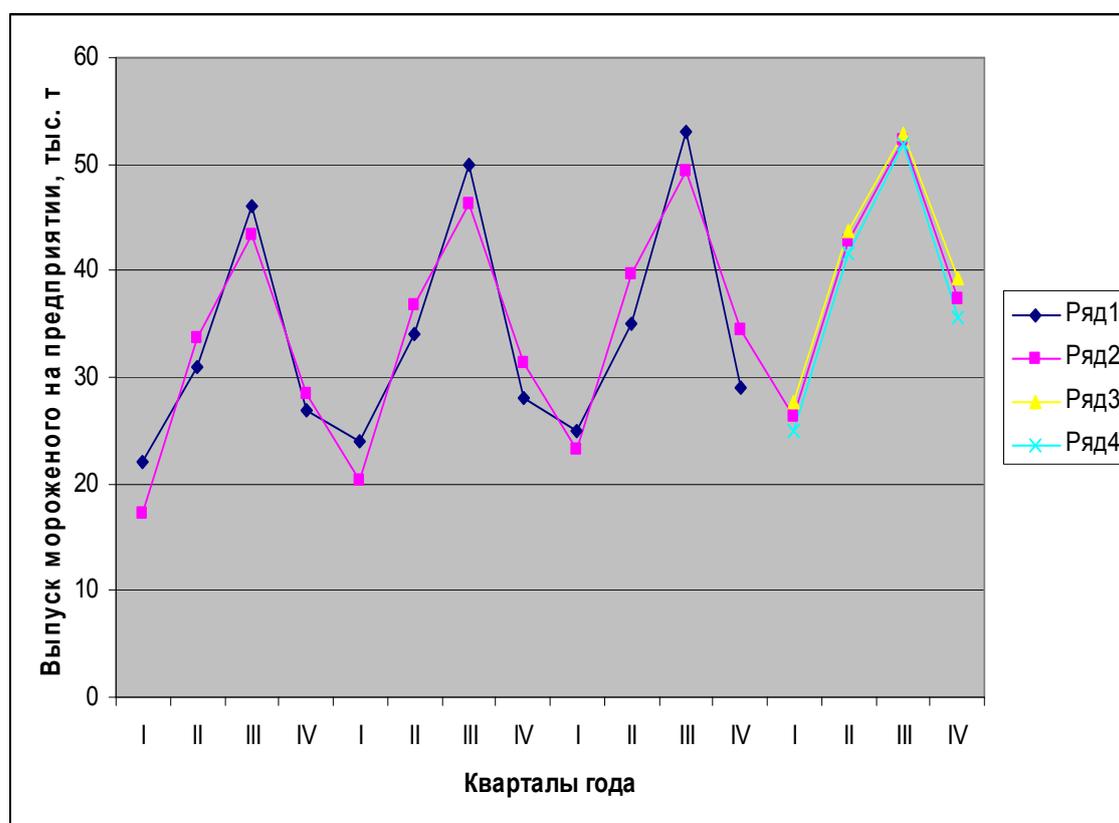


Рис. 2.11. Фактические (ряд 1), выровненные по модели и прогнозные уровни выпуска продукции на предприятии (ряд 2), верхние (ряд 3) и нижние границы (ряд 4) 95-процентных доверительных интервалов прогноза

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 2.1

По данным индивидуального задания из раздела 1 (см. табл. 1.7) осуществить:

7. Точечное прогнозирование (с периодом упреждения  $L = 3$ ) выпуска товарной продукции предприятия на основе:
  - 1) среднего абсолютного прироста;
  - 2) среднего темпа роста;
  - 3) построенной трендовой модели.
8. Интервальное прогнозирование (с достоверностью 95 %; 99%) выпуска товарной продукции предприятия на базе точечного прогноза, полученного с помощью трендовой модели. Проанализировать результаты прогнозирования с позиции точности найденных интервальных оценок.
9. Изобразить на одном графике исходные месячные уровни ряда динамики выпуска товарной продукции, выровненные уровни с помощью трендовой модели, а также точечный прогноз и 95- и 99-процентные доверительные интервалы прогноза.

По каждому пункту дать краткие экономико-статистические пояснения и выводы.

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 2.2

Имеются следующие квартальные данные о динамике выпуска продукции предприятия за три года.

Таблица 2.10

Динамика выпуска продукции предприятия, тыс. т

| Годы      | 1-й  |      |      |      | 2-й  |      |      |      | 3-й  |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|           | I    | II   | III  | IV   | I    | II   | III  | IV   | I    | II   | III  | IV   |
| Вариант 1 | 27,7 | 39   | 44,1 | 32,5 | 32,7 | 42,1 | 47,6 | 36,5 | 38,7 | 44,2 | 49,9 | 42,5 |
| Вариант 2 | 18,8 | 25,4 | 29,5 | 23,0 | 22,9 | 29,3 | 33,4 | 27,0 | 26,1 | 32,3 | 37,7 | 30,8 |
| Вариант 3 | 33,5 | 47,8 | 54,3 | 40,4 | 40,9 | 53   | 60,5 | 46,7 | 49,9 | 57,4 | 65,4 | 56,1 |
| Вариант 4 | 9,08 | 9,3  | 5,7  | 8,3  | 10,8 | 24,6 | 6,8  | 13,7 | 15,2 | 16,2 | 7,6  | 16,3 |
| Вариант 5 | 15,2 | 15,4 | 8,3  | 15,6 | 18,6 | 29,7 | 7,3  | 15,4 | 17,8 | 17,8 | 8,6  | 15,8 |
| Вариант 6 | 15,9 | 17,9 | 9,7  | 18,8 | 21,9 | 33,6 | 10,1 | 20,2 | 24,4 | 22,2 | 12,3 | 21,5 |
| Вариант 7 | 33,3 | 33,9 | 17,5 | 14,5 | 23,3 | 37,2 | 32,6 | 26,5 | 41,3 | 29,5 | 39,1 | 29,7 |
| Вариант 8 | 39,4 | 39,9 | 20,7 | 15,6 | 27,4 | 42,3 | 32,7 | 28,4 | 41,9 | 30,8 | 38,8 | 29,4 |
| Вариант 9 | 40,1 | 42,3 | 22   | 18,8 | 30,6 | 46,2 | 35,1 | 33,0 | 45   | 35,3 | 42,4 | 34,2 |
| Вариант10 | 57,1 | 77,4 | 90,8 | 71,5 | 71,5 | 92,4 | 106  | 86,5 | 84,1 | 105  | 124  | 102  |
| Вариант11 | 36,8 | 59,9 | 66,7 | 50   | 55,5 | 73,2 | 83,8 | 69,5 | 76,6 | 82,9 | 101  | 84,6 |
| Вариант12 | 18,2 | 18,7 | 10,3 | 16,6 | 21,5 | 49,1 | 13,2 | 27,3 | 30,4 | 32,5 | 15,2 | 32,4 |
| Вариант13 | 30,5 | 33,9 | 16,7 | 31,2 | 37,3 | 59,5 | 14,3 | 31,9 | 35,6 | 35,6 | 17,3 | 31,8 |
| Вариант14 | 31,7 | 35,8 | 19,4 | 37,7 | 43,8 | 67,3 | 20,3 | 40,5 | 48,8 | 44,6 | 24,6 | 43,0 |
| Вариант15 | 66,6 | 67,5 | 34,9 | 29   | 46,5 | 74,3 | 64,2 | 52,9 | 82   | 58,5 | 78,1 | 59,4 |
| Вариант16 | 78,9 | 79,7 | 41,3 | 31,2 | 54,8 | 84,7 | 65,5 | 57,0 | 82   | 61,6 | 77,6 | 58,8 |
| Вариант17 | 80,1 | 84,6 | 44   | 37,7 | 61,3 | 92,5 | 71,6 | 66,0 | 90   | 70,4 | 84,9 | 69,4 |
| Вариант18 | 55,4 | 78,2 | 88,3 | 65,1 | 65,4 | 84,2 | 95,3 | 73,1 | 77,4 | 88,4 | 99,8 | 85,1 |

|           |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Вариант19 | 47,2 | 63,5 | 73,8 | 57,7 | 57,2 | 73,3 | 83,5 | 67,6 | 65,2 | 80,9 | 94,4 | 77   |
| Вариант20 | 30,4 | 48,6 | 54,2 | 40,3 | 44,4 | 58,1 | 66   | 54,3 | 59,4 | 63,8 | 77,2 | 64,1 |
| Вариант21 | 27,5 | 27,7 | 14,2 | 11,7 | 18,6 | 29,5 | 25,4 | 20,7 | 31,8 | 22,5 | 29,8 | 22,4 |
| Вариант22 | 32,6 | 32,7 | 16,8 | 12,6 | 21,9 | 33,6 | 25,8 | 22,3 | 31,8 | 23,6 | 29,6 | 22   |
| Вариант23 | 33,1 | 34,7 | 17,9 | 15,2 | 24,5 | 36,7 | 28,2 | 25,8 | 34,9 | 27,1 | 32,4 | 26,3 |
| Вариант24 | 7,5  | 7,7  | 4,2  | 6,7  | 8,6  | 19,5 | 5,4  | 10,7 | 11,8 | 12,5 | 5,8  | 12,4 |
| Вариант25 | 12,6 | 12,7 | 6,8  | 12,6 | 14,9 | 23,6 | 5,8  | 12,3 | 13,8 | 13,6 | 6,6  | 12   |
| Вариант26 | 13,1 | 14,7 | 7,9  | 15,2 | 17,5 | 26,7 | 8,2  | 15,8 | 18,9 | 17,1 | 9,4  | 16,3 |
| Вариант27 | 35,4 | 58   | 68,3 | 45,1 | 45,4 | 64,2 | 75,3 | 53,1 | 57,4 | 68,4 | 79,8 | 65,1 |
| Вариант28 | 42,4 | 69,6 | 81,9 | 54,2 | 54,8 | 77,0 | 90,6 | 63,7 | 68,8 | 82,3 | 95,6 | 78,1 |
| Вариант29 | 55,4 | 78   | 88,3 | 65,1 | 65,4 | 84,2 | 95,3 | 73,1 | 77,4 | 88,4 | 99,8 | 85,1 |
| Вариант30 | 49,7 | 64,4 | 76,1 | 60,8 | 50,1 | 77,7 | 89,5 | 73,0 | 71,1 | 88,9 | 105  | 86,2 |

На основании данных табл. 2.10, соответствующих номеру Вашего варианта, осуществить:

1. Выравнивание по линейному тренду значения выпуска продукции сезонного характера (результаты представить в виде графика типа графика на рис. 2.8).
2. Расчёт квартальных индексов сезонности (результаты представить в виде табл. типа табл. 2.3).
3. Расчёт средних индексов сезонности, а также величины стандартного отклонения средних индексов сезонности от 1.
4. Моделирование и точечное прогнозирование значений выпуска продукции на предприятии на I, II, III, IV кварталы 4-го года.
5. Расчёт предельных ошибок прогноза выпуска продукции на предприятии на I, II, III, IV кварталы 4-го года.
6. Интервальное прогнозирование (с достоверностью 95 %) выпуска продукции предприятия на базе точечного прогноза, полученного с помощью модели сезонной волны (результаты представить в виде таблицы типа табл. 2.5).
7. Построение на одном графике исходных квартальных уровней ряда динамики выпуска продукции, выровненных уровней с помощью линейного тренда, модели сезонной волны вместе с точечным прогнозом, а также с 95-процентными доверительными интервалами прогноза.

По каждому пункту дать краткие экономико-статистические пояснения и выводы.

### ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 2.3

На основании данных табл. 2.10, соответствующих номеру Вашего варианта, осуществить:

1. Выравнивание по линейному тренду значения выпуска продукции сезонного характера (результаты представить в виде графика типа графика на рис. 2.8).

2. Расчёт «очищенных» от тренда уровней временного ряда (результаты представить в виде таблицы типа табл. 2.6).
3. Представление сезонных колебаний квартального выпуска продукции на предприятии после удаления линейного тренда в виде графика типа графика на рис. 2.10.
4. Гармонический анализ сезонных колебаний выпуска продукции на предприятии после удаления линейного тренда на основе расчёта коэффициентов гармоник (результаты представить в виде таблицы типа табл. 2.7).
5. Оценку вклада каждой гармоники в объяснение вариации выпуска продукции на предприятии и обоснование их числа в модели сезонной волны (результаты представить в виде таблицы типа табл. 2.8).
6. Моделирование, точечное прогнозирование значений выпуска продукции на предприятии на I, II, III, IV кварталы 4-го года, а также расчёт предельных ошибок прогноза (результаты представить в виде таблицы типа табл. 2.9).
7. Интервальное прогнозирование (с достоверностью 95 %) выпуска продукции предприятия на базе точечного прогноза, полученного с помощью модели гармонического анализа (результаты представить в виде таблицы типа табл. 2.5).
8. Построение на одном графике исходные квартальные уровни ряда динамики выпуска продукции, выровненные уровни с помощью линейного тренда, модели сезонной волны вместе с точечным прогнозом, а также с 95-процентными доверительными интервалами прогноза.
9. Сравнительный анализ результатов моделирования и прогнозирования выпуска продукции предприятия с учётом сезонных колебаний, полученных на основе индексов сезонности и разложения в ряд Фурье.

По каждому пункту дать краткие экономико-статистические пояснения и выводы.

## ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 2

19. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 378 с.
20. Боровиков В. П., Боровиков И. П. Статистический анализ и обработка данных в среде *Windows*. – М.: Филинь, 1998. – 608 с.
21. Боровиков В. П., Ивченко Г. И. Прогнозирование в системе *STATISTICA* в среде *Windows*. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 384 с.
22. Геєць В. М., Клебанова Т. С., Черняк О. І., Іванов В. В., Дубровіна Н. А., Ставицький А. В. Моделі і методи соціально-економічного прогнозування / Підручник. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2005. – 396 с.
23. Економетрія // Навч. посібник за ред. А. Ф. Кабака, О. В. Проценка. – Одеса : НМЦО-ОДЕУ, 2003. – 562 с.
24. Канторович Г. Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ. – № 1. – 2002. – С. 85-116.
25. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel. Пер. с англ. - К.: Диалектика, 1997, с. 167-195.
26. Кендэл М. Временные ряды / Пер. с англ. Ю. П. Лукашина. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 199 с.
27. Кильдишев Г. С., Френкель А. А. Анализ временных рядов и прогнозирование. – М.: Статистика, 1973. – 104 с.
28. Ковалёва Л. И. Многофакторное прогнозирование на основе рядов динамики. – М.: Статистика, 1980. – 102 с.
29. Костіна Н. І., Алексєєв А. А., Василик О. Д. Фінанси : система моделей і прогнозів. – К.: Четверта хвиля, 1998. – 304 с.
30. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы прогнозирования / Ю. П. Лукашин. – М.: Статистика, 1979. – 254 с.
31. Лук'яненко І. Г., Краснікова Л. І. Економетрика. – К.: Знання, КОО, 1998. – 494 с.
32. Льюис К. Д. Методы прогнозирования экономических показателей. Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 133 с.
33. Теория и практика статистического моделирования экономики / Под ред. Е. М. Четыркина, А. Класа. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 272 с.
34. Толбатов Ю. А. Економетрика. – К.: Четверта хвиля, 1997. – 320 с.
35. Рабочая книга по прогнозированию / Под ред. И. В. Бестужева-Лады. – М.: Мысль, 1982. – 430 с.
36. Френкель А. А. Прогнозирование производительности труда : методы и модели. – М.: Экономика, 1989. – 214 с.
37. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. – М.: Статистика, 1977. – 200 с.
38. Янковой А. Г. Прогнозирование социально-экономических показателей на основе принципа баланса переменных. – Экономика и математические методы, т. 29, вып. 1, 1993, С. 108-118.

39. Янковой О. Г. Моделирование парных зв'язків в економіці. – Одеса : Оптимум, 2001. – 198 с.
40. Янковой О. Г. Моделирование та прогнозування S-подібних соціально-економічних процесів // Ринкова економіка: Сучасна теорія і практика управління, т. 4. – Одеса : Астропринт, 2001, С. 47-63.
41. Янковой А. Г. Прогнозирование демографических показателей Украины // Ринкова економіка : Сучасна теорія і практика управління, т. 5. – Одеса : Астропринт, 2002, С. 34-49.
42. Янковий О. Г., Яшкіна О.І. До проблеми вибору математичної форми трендів при прогнозуванні соціально-економічних показників // Вісник соціально-економічних досліджень ОДЕУ. – 2003. – № 14. – С. 341-346.
43. Янковой А.Г., Яшкина О.И. Совершенствование методологической базы прогнозирования реализации зерновых продуктов // Зерновые продукты и комбикорма. 2003, № 2, С. 5-10.
44. Янковой А. Г., Яшкина О. И., Янковая Е. Д. Статистическое моделирование и прогнозирование динамики производства комбикормов // Зерновые продукты и комбикорма. 2004, № 1, С. 7-11.
45. Янковой А. Г. Основы эконометрического моделирования. – Одесса, ротапринт ОГЭУ, 2006. – 133 с.
46. Янковий О. Г., Яшкіна О. І. Прогнозування взаємопов'язаних показників соціально-економічного розвитку України // Статистика України, № 3, 2006, С. 61-65.
47. Янковой О. Г., Гура О. Л. Моделирование та прогнозування життєвого циклу товару / Зб. наукових праць ХДУХТ. – Харків, 2007. – Вип. 1 (5), т. 2, С. 185-190.
48. Янковой О. Г., Гура О. Л. Прогнозування збуту ковбасних виробів при складанні маркетингової програми / Наукові праці ОНАХТ, 2007, вип. 31, т. 2, С.229-233.
49. Янковой О. Г., Гура О. Л. Щодо вдосконалення планування на підприємстві за допомогою математико-статистичних методів прогнозування // Актуальні питання економіки, 2009, № 1, С. 229-238.

### 3. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ И АВТОРЕГРЕССИИ

Одним из фундаментальных понятий анализа и прогнозирования рядов динамики является *автокорреляция*, которая рассматривается как частный случай обычной корреляционной связи между экономическими показателями предприятия, когда величина последующих уровней временного ряда зависит от значений предыдущих уровней этого же ряда.

Так, в условиях жесткого централизованного управления экономикой планирование на многих предприятиях осуществлялось на основе метода «от достигнутого». Это означает, что если в отчетном периоде предприятие произвело продукции, условно говоря, 1000 единиц, то в плановом периоде оно должно произвести данной продукции уже 1100 единиц, т.е. с примерно постоянным темпом роста или прироста. Ясно, что при таком подходе к планированию уровень производства в  $i$ -м периоде будет зависеть от уровня производства в  $(i - 1)$ -м периоде, который, в свою очередь, будет определяться уровнем производства в  $(i - 2)$ -м периоде и т.д.

Под автокорреляцией понимают корреляционную связь между двумя производными рядами динамики экономических показателей, которые образованы из уровней одного исходного ряда длиной  $N$  и смещены один относительно другого на  $\tau$  уровней (см. рис. 3.1). При моделировании вариации признаков во времени на основе рядов динамики экономических показателей такой сдвиг  $\tau$  называется временным *лагом* или запаздыванием.

Теснота автокорреляционной связи характеризуется коэффициентом автокорреляции  $r(\tau)$ , который рассчитывается как обычный коэффициент парной корреляции. Здесь надо иметь в виду, что величина  $\tau$  определяет порядок коэффициента автокорреляции, указанный в скобках, и число уровней ряда  $(N - \tau)$ , которое при этом учитывается.

Поэтому лаг не может быть слишком большим ( $\tau = 1, 2, \dots, N/2$ ), т.к. при  $\tau = 1$  исключается последний уровень исходного ряда динамики и первый уровень сдвинутого временно□го ряда (см. рис. 3.1, *а*). При  $\tau = 2$  исключаются два последних уровня исходного ряда динамики и два первых уровня сдвинутого временного ряда (см. рис. 3.1, *б*). А при  $\tau = N/2$  исключается последняя половина уровней исходного ряда динамики и первая половина уровней сдвинутого временного ряда (см. рис. 3.1, *в*). И дальнейший сдвиг уровней уже становится практически невозможным.

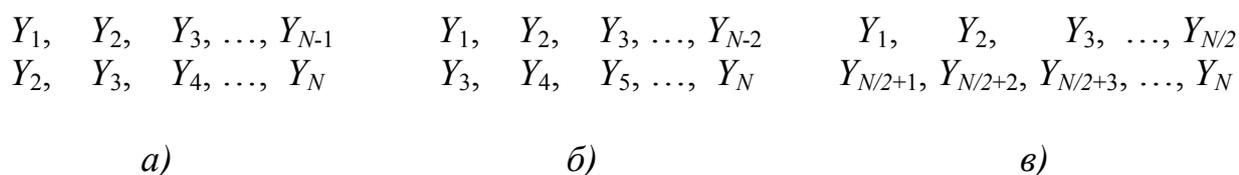


Рис. 3.1. Схема образования производных рядов динамики при измерении автокорреляции в исходном временном ряду

Приведём формулы расчёта коэффициентов автокорреляции различных порядков для динамики экономического показателя предприятия  $Y$ :

$$r(1) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (Y_i - \bar{Y}_i)(Y_{i+1} - \bar{Y}_{i+1})}{(N-1)\sigma_i\sigma_{i+1}}, r(2) = \frac{\sum_{i=1}^{N-2} (Y_i - \bar{Y}_i)(Y_{i+2} - \bar{Y}_{i+2})}{(N-2)\sigma_i\sigma_{i+2}}, \dots, r(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} (Y_i - \bar{Y}_i)(Y_{i+\tau} - \bar{Y}_{i+\tau})}{(N-\tau)\sigma_i\sigma_{i+\tau}}. \quad (3.1)$$

Множество значений  $r(\tau)$  для  $\tau = 1, 2, \dots, N/2$  образует автокорреляционную функцию (АКФ), которая задается обычно в виде графика, который называется *коррелограммой*.

Рассмотрим временной ряд месячных продаж продукции предприятия за три года (табл. 3.1) с целью нахождения АКФ и построения коррелограммы.

Таблица 3.1

Динамика месячных продаж продукции предприятия (тыс. грн.)

| Месяцы | Объем продаж | Месяцы | Объем продаж | Месяцы | Объем продаж |
|--------|--------------|--------|--------------|--------|--------------|
| 1      | 2014         | 13     | 2053         | 25     | 2563         |
| 2      | 2008         | 14     | 2091         | 26     | 2667         |
| 3      | 1516         | 15     | 1949         | 27     | 3016         |
| 4      | 1494         | 16     | 1962         | 28     | 3113         |
| 5      | 1584         | 17     | 1895         | 29     | 3058         |
| 6      | 1609         | 18     | 1903         | 30     | 3434         |
| 7      | 1730         | 19     | 1875         | 31     | 3799         |
| 8      | 1968         | 20     | 1796         | 32     | 3776         |
| 9      | 1962         | 21     | 1899         | 33     | 3787         |
| 10     | 1915         | 22     | 1968         | 34     | 4024         |
| 11     | 2129         | 23     | 2030         | 35     | 4071         |
| 12     | 2107         | 24     | 2461         | 36     | 4302         |

На рис. 3.2 показан график ряда динамики изучаемого показателя.

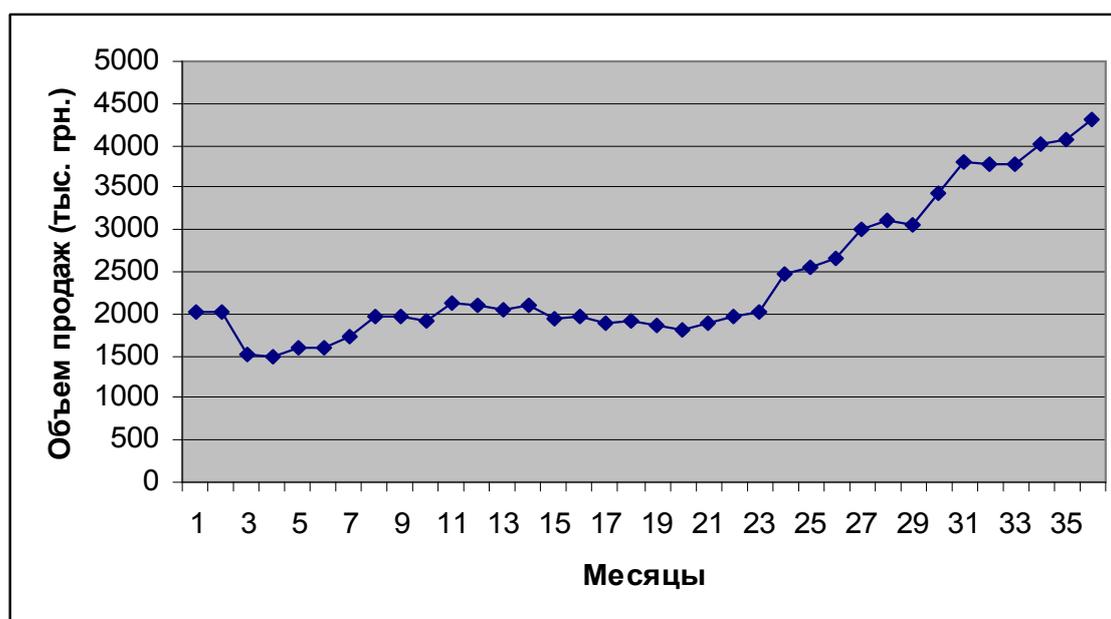


Рис. 3.2. Динамика месячных продаж продукции предприятия

На рис. 3.3 приведена коррелограмма ряда динамики изучаемого показателя, построенная с помощью системы STATISTICA, модуль «Анализ временных рядов/прогнозирование» (*Time Series Analysis/Forecasting*).

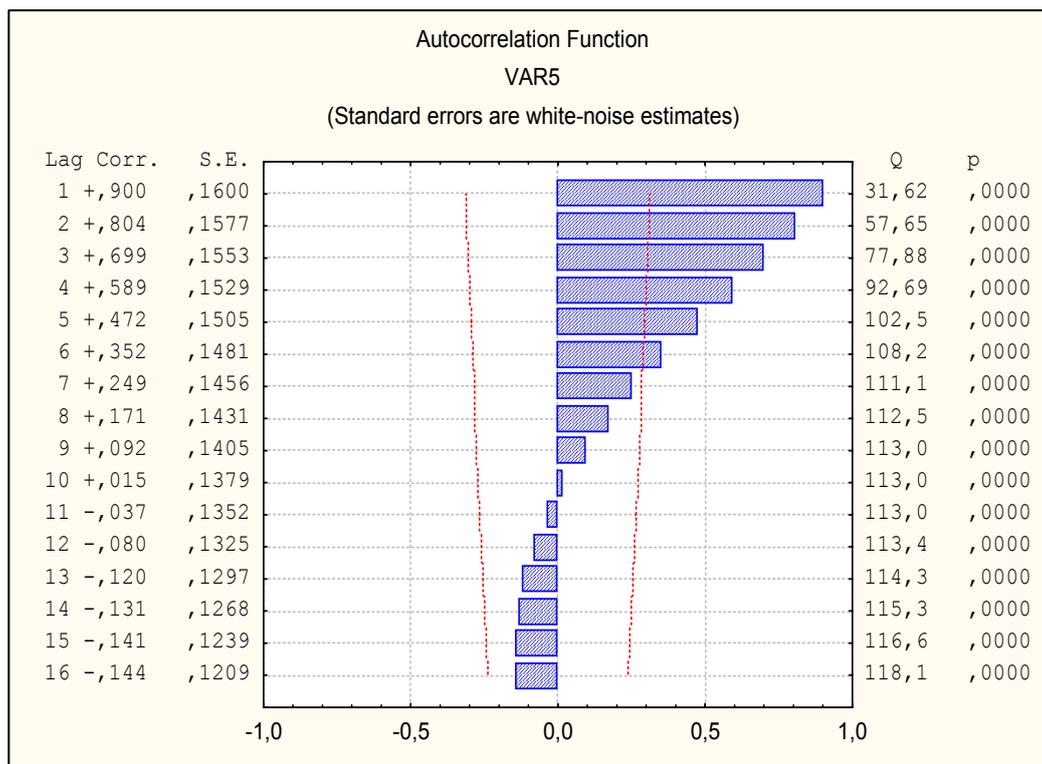


Рис. 3.3. Коррелограмма месячных продаж продукции предприятия за три года для лага  $\tau = 1, 2, \dots, 16$  (штрихом показана область, внутри которой  $r(\tau)$  статистически незначимы)

Здесь по оси абсцисс откладывается величина коэффициента автокорреляции  $r(\tau)$ , а по оси ординат – лаг  $\tau$ . В левой части графика в столбце показаны значения  $\tau$  (*Lag*) и  $r(\tau)$  (*Corr.*):  $r(1) = 0,900$ ;  $r(2) = 0,804$ ;  $r(3) = 0,699$  и т.д.

Как и обычный коэффициент парной корреляции, величина  $r(\tau)$  изменяется в интервале от -1 до +1. Значение  $r(\tau) \approx 1$  указывает на тесную положительную зависимость между рядом динамики и тем же рядом, сдвинутым на  $\tau$  уровней. В этом случае наблюдения в парах будут близки между собой. Если же при сдвиге бо́льший уровень временного ряда образует пару с меньшим уровнем, то, как правило, коэффициент автокорреляции отрицательный. Кроме того, справедливо равенство  $r(-\tau) = r(\tau)$ , т.е. исходный и производный ряд динамики можно менять местами.

Наряду с автокорреляцией, важным понятием анализа и прогнозирования рядов динамики является *частная автокорреляция*. Это корреляция между исходным и производным временным рядом экономического показателя, образованным из уровней исходного ряда длиной  $N$  и смещенным относительно него на  $\tau$  уровней. При этом элиминируется зависимость исходного и производного рядов динамики от других

временных рядов экономических показателей, сдвинутых на  $1, 2, \dots, \tau - 1, \tau + 1, \dots, N/2$  наблюдений. Понятие частной автокорреляции аналогично понятию частной корреляции в множественном корреляционно-регрессионном анализе.

Для малых  $\tau$  значения частной автокорреляционной функции (ЧАКФ) могут быть получены из формул, которые выражают в явном виде её зависимость от коэффициентов автокорреляции  $r(\tau)$ . Так, коэффициенты частной автокорреляции  $R(\tau)$  первых двух порядков равняются:

$$R(1) = r(1); \quad R(2) = [r(2) - r^2(1)]/[1 - r^2(1)]. \quad (3.2)$$

Для  $\tau > 2$  значения ЧАКФ рассчитываются на базе алгебраических дополнений матрицы коэффициентов автокорреляции, размера  $(\tau+1) \times (\tau+1)$ . Коэффициенты частной автокорреляции  $R(\tau)$  также наносятся на график в зависимости от  $\tau$  для получения частной коррелограммы.

На рис. 3.4 приведена частная коррелограмма ряда динамики изучаемого показателя, построенная с помощью системы *STATISTICA*, модуль «Анализ временных рядов/прогнозирование» (*Time Series Analysis/Forecasting*).

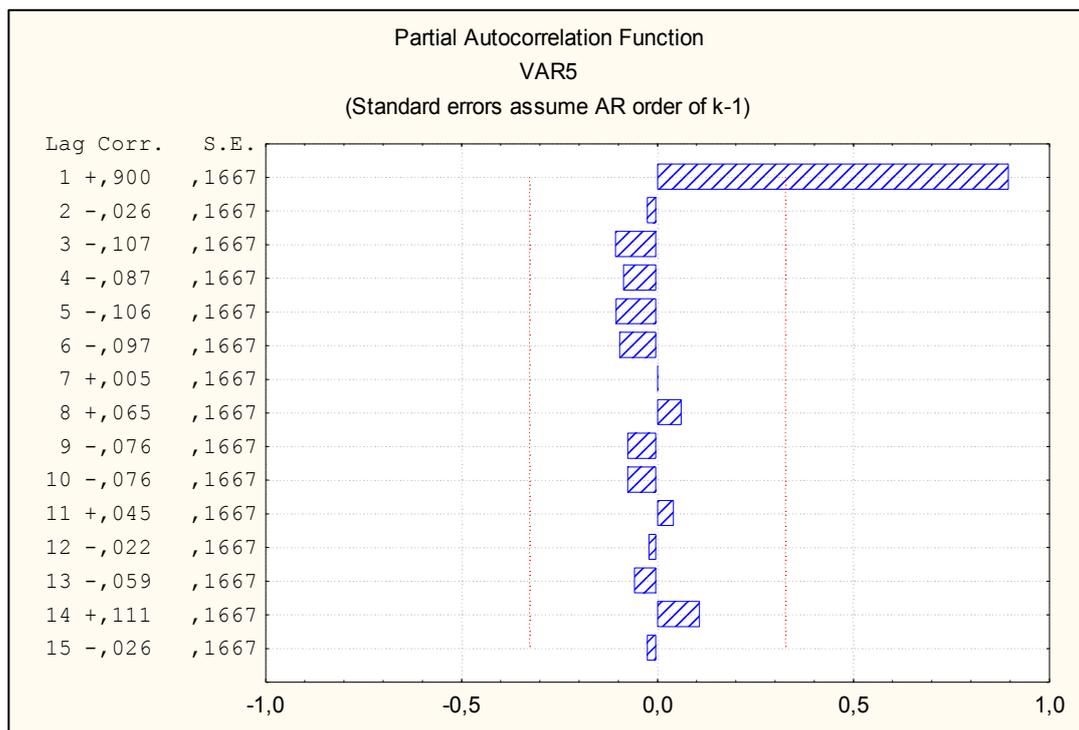


Рис. 3.4. Частная коррелограмма месячных продаж продукции предприятия за три года для лага  $\tau = 1, 2, \dots, 15$

В левой части графика в столбце показаны значения  $\tau$  (*Lag*) и  $R(\tau)$  (*Corr.*). Из графика на рис. 3.4 видно, что статистически значимым является лишь коэффициент частной автокорреляции первого порядка  $R(1) = r(1) =$

0,900. Все остальные  $R(\tau)$  находятся внутри заштрихованной области, т.е. являются статистически незначимыми.

При изучении рядов динамики экономических показателей предприятия довольно широкое распространение получили авторегрессионные модели. Они описывают зависимости внутри ряда динамики, которые отражают связь последующих уровней временного ряда с предыдущими уровнями.

Подобно тому, как автокорреляция является частным случаем обычной корреляционной связи между экономическими переменными, так и авторегрессия может рассматриваться как частный случай обычной регрессии рядов динамики, когда роль аргумента выполняет тот же временной ряд, но сдвинутый на  $\tau$  уровней – на величину временного лага.

Говорят, что ряд динамики экономического показателя реализует авторегрессионный процесс, если каждый его уровень в значительной мере определяется конечным числом предыдущих уровней ряда. Иными словами, если из предыдущего анализа известно, что изучаемый процесс зависит от развития этого же процесса в прошлые периоды (моменты) времени. Авторегрессионный процесс является разновидностью стационарного процесса и проявляется в рядах экономической динамики достаточно большой длины ( $N \geq 30$ ).

Временной ряд экономический показатель предприятия, который реализует авторегрессионный процесс, в общем виде представляется так:

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (3.3)$$

где  $p$  – число предшествующих уровней ряда ( $p < N$ ), которые определяют порядок авторегрессионного процесса;  
 $a_1, a_2, \dots, a_p$  – неизвестные параметры авторегрессионного процесса;  
 $\varepsilon_t$  – случайная компонента, отражающая действие всех прочих неучтённых факторов.

Для оценки неизвестных коэффициентов авторегрессионной модели (3.3) используется система уравнений Юла-Уокера:

$$\begin{cases} r(1) = a_1 + a_2 r(1) + a_3 r(2) + \dots + a_p r(p-1) \\ r(2) = a_1 r(1) + a_2 + a_3 r(1) + \dots + a_p r(p-2) \\ r(3) = a_1 r(2) + a_2 r(1) + a_3 + \dots + a_p r(p-3) \\ \dots \\ r(p) = a_1 r(p-1) + a_2 r(p-2) + a_3 r(p-3) + \dots + a_p. \end{cases} \quad (3.4)$$

При  $p = 1$  получают простейший авторегрессионный процесс первого порядка, который называется марковским (по имени его первооткрывателя А.А. Маркова) и адекватно описывается авторегрессионным уравнением первого порядка:

$$\hat{Y}_t = a_1 Y_{t-1}. \quad (3.5)$$

Здесь  $a_1 = r(1)$ , что непосредственно вытекает из первого уравнения системы (3.4).

Доказано, что все коэффициенты автокорреляции марковского процесса выражаются через коэффициент автокорреляции первого порядка:

$$r(\tau) = r^{\tau}(1). \quad (3.6)$$

Отсюда вытекает, что  $r(1) = r(1)$ ,  $r(2) = r^2(1)$ ,  $r(3) = r^3(1)$  и т.д. Поскольку  $|r(1)| \leq 1$ , то справедливо соотношение

$$|r(1)| \geq |r(2)| \geq \dots \geq |r(N/2)|, \quad (3.7)$$

т.е. АКФ марковского процесса с ростом  $\tau$  затухает.

При  $r(1) > 0$  коррелограмма марковского процесса имеет вид затухающей экспоненты (рис. 3.5).

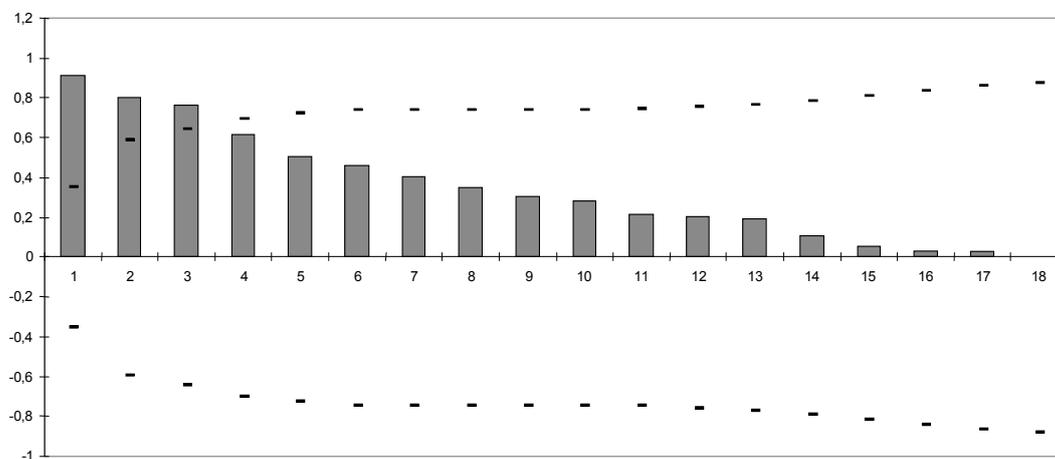


Рис. 3.5. Коррелограмма авторегрессионного марковского процесса при  $r(1) > 0$  (по оси абсцисс отложены значения временного лага  $\tau$ )

В случае  $r(1) < 0$  коррелограмма марковского процесса имеет вид затухающей синусоиды (рис. 3.6).

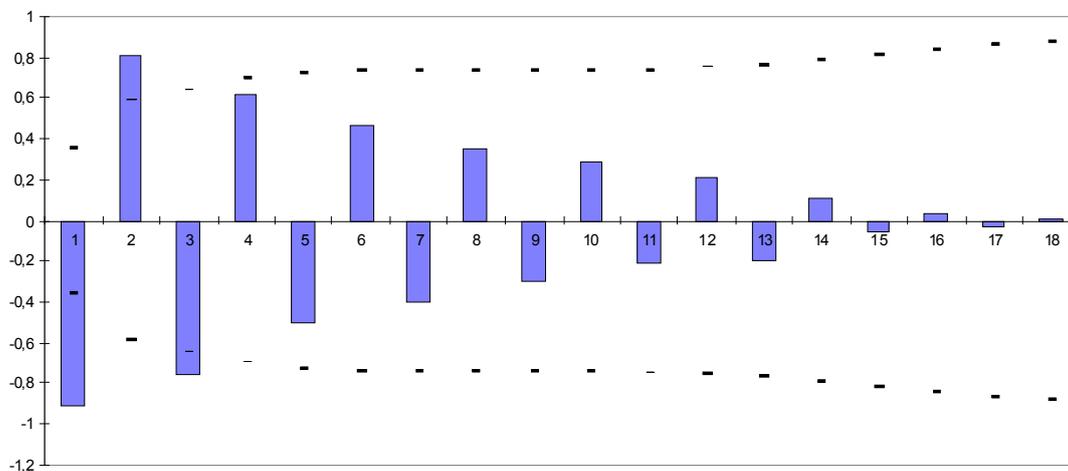


Рис. 3.6. Коррелограмма авторегрессионного марковского процесса при  $r(1) < 0$  (по оси абсцисс отложены значения временного лага  $\tau$ )

Рис. 3.5, 3.6 демонстрируют затухания АКФ марковских авторегрессионных процессов с ростом лага  $\tau$  и могут использоваться для распознавания процесса Маркова, описываемого уравнением (3.5).

Точность построенной модели (3.3) может быть оценена с помощью стандартной ошибки авторегрессии  $S(p)$ , которая находится по формуле

$$S(p) = \sqrt{\frac{\sum_{t=p+1}^N (Y_t - \sum_{i=1}^p a_i Y_{t-i})^2}{N-p}}. \quad (3.8)$$

Для модели марковского процесса ( $p = 1$ ) формула стандартной ошибки авторегрессии приобретает следующий вид:

$$S(1) = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^N (Y_t - a_1 Y_{t-1})^2}{N-1}}. \quad (3.9)$$

При  $p = 2$  получают авторегрессионный процесс второго порядка, который впервые описан Д. Юлом. В этом случае авторегрессионное уравнение записывается так:

$$\hat{Y}_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2}. \quad (3.10)$$

Для неё система уравнений Юла-Уокера имеет вид:

$$\begin{cases} r(1) = a_1 + a_2 r(1) \\ r(2) = a_1 r(1) + a_2, \end{cases} \quad (3.11)$$

решение которой даёт следующие значения коэффициентов авторегрессии:

$$a_1 = \frac{r(1)[1-r(2)]}{1-r^2(1)}; \quad a_2 = \frac{r(2)-r^2(1)}{1-r^2(1)}. \quad (3.12)$$

Для модели Юла ( $p = 2$ ) формула стандартной ошибки авторегрессии выглядит следующим образом:

$$S(2) = \sqrt{\frac{\sum_{t=3}^N (Y_t - a_1 Y_{t-1} - a_2 Y_{t-2})^2}{N-2}}. \quad (3.13)$$

Коррелограмма авторегрессионного процесса второго порядка обычно имеет вид затухающей гармоники (рис. 3.7).

**Замечание.** Если из априорного экономического анализа известно, что: 1) уровни изучаемого ряда динамики в значительной мере зависят от значений предшествующих уровней ряда; 2) коррелограмма временного ряда имеет вид, схожий с графиками на рис. 3.5 – 3.7 (затухающие экспонента, синусоида, гармоника); 3) частная коррелограмма ряда динамики имеет несколько пиков в начале графика с резким затуханием последующих значений (рис. 3.4), то временной ряд реализует авторегрессионный процесс, порядок  $p$  которого определяется числом первых значимых пиков ЧАКФ.

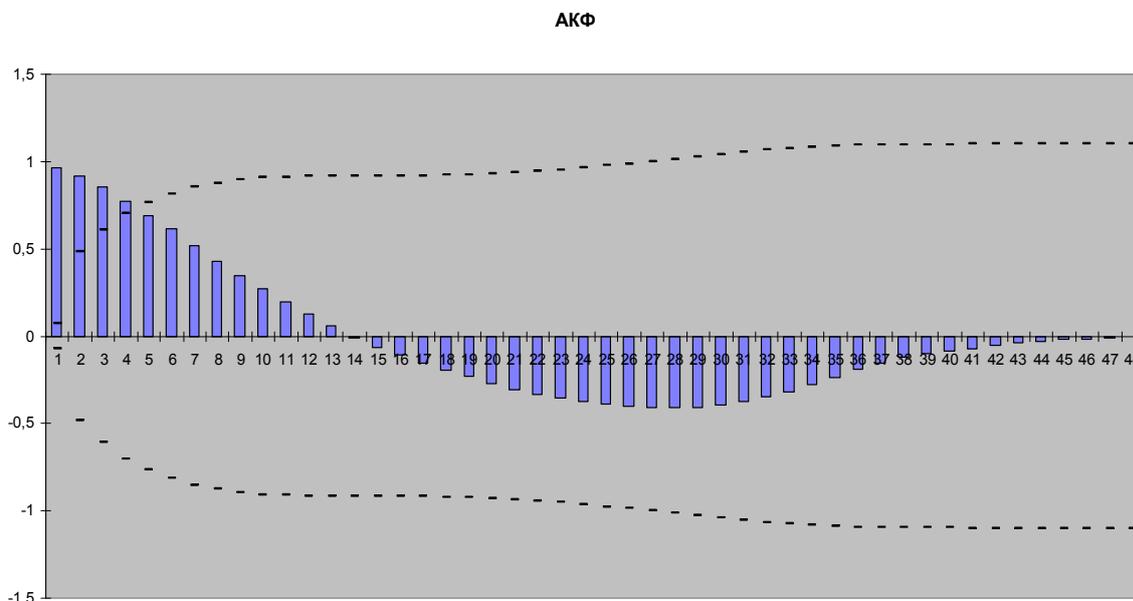


Рис. 3.7. Коррелограмма авторегрессионного процесса Юла

Сравнивая рис. 3.3 и 3.7, нетрудно видеть их сходство. Поэтому с учётом вида частной коррелограммы на рис. 3.4 (один значимый пик в начале ЧАКФ) есть все основания полагать, что рассмотренный выше ряд динамики месячных продаж продукции предприятия за три года (табл. 3.1) реализует марковский авторегрессионный процесс первого порядка и может быть адекватно описан уравнением (3.5), в котором  $a_1 = r(1) = 0,9$ .

Следовательно, авторегрессионная модель Маркова для обсуждаемого примера имеет следующий явный вид

$$\hat{Y}_t = 0,9Y_{t-1}. \quad (3.14)$$

В соответствие с формулой (3.9) по данным табл. 3.2 для уравнения (3.14) рассчитана величина стандартной ошибки авторегрессии  $S(1)$ .

Таблица 3.2

Фактические и расчетные по модели (3.14) месячные продажи продукции предприятия (тыс. грн.)

| Месяцы | Объём продаж |        |        | Месяцы | Объём продаж |        |       | Месяцы | Объём продаж |        |       |
|--------|--------------|--------|--------|--------|--------------|--------|-------|--------|--------------|--------|-------|
|        | факт.        | расч.  | откл.  |        | факт.        | расч.  | откл. |        | факт.        | расч.  | откл. |
| 1      | 2014         | -      | -      | 13     | 2053         | 1896,3 | 156,7 | 25     | 2563         | 2214,9 | 348,1 |
| 2      | 2008         | 1812,6 | 195,4  | 14     | 2091         | 1847,7 | 243,3 | 26     | 2667         | 2306,7 | 360,3 |
| 3      | 1516         | 1807,2 | -291,2 | 15     | 1949         | 1881,9 | 67,1  | 27     | 3016         | 2400,3 | 615,7 |
| 4      | 1494         | 1364,4 | 129,6  | 16     | 1962         | 1754,1 | 207,9 | 28     | 3113         | 2714,4 | 398,6 |
| 5      | 1584         | 1344,6 | 239,4  | 17     | 1895         | 1765,8 | 129,2 | 29     | 3058         | 2801,7 | 256,3 |
| 6      | 1609         | 1425,6 | 183,4  | 18     | 1903         | 1705,5 | 197,5 | 30     | 3434         | 2752,2 | 681,8 |
| 7      | 1730         | 1448,1 | 281,9  | 19     | 1875         | 1712,7 | 162,3 | 31     | 3799         | 3090,6 | 708,4 |
| 8      | 1968         | 1557   | 411    | 20     | 1796         | 1687,5 | 108,5 | 32     | 3776         | 3419,1 | 356,9 |
| 9      | 1962         | 1771,2 | 190,8  | 21     | 1899         | 1616,4 | 282,6 | 33     | 3787         | 3398,4 | 388,6 |
| 10     | 1915         | 1765,8 | 149,2  | 22     | 1968         | 1709,1 | 258,9 | 34     | 4024         | 3408,3 | 615,7 |
| 11     | 2129         | 1723,5 | 405,5  | 23     | 2030         | 1771,2 | 258,8 | 35     | 4071         | 3621,6 | 449,4 |

|    |      |        |       |    |      |      |     |    |      |        |       |
|----|------|--------|-------|----|------|------|-----|----|------|--------|-------|
| 12 | 2107 | 1916,1 | 190,9 | 24 | 2461 | 1827 | 634 | 36 | 4302 | 3663,9 | 638,1 |
|----|------|--------|-------|----|------|------|-----|----|------|--------|-------|

Возводя в квадрат значения столбца «отклонения» табл. 3.2, суммируя и извлекая корень квадратный, получим следующую величину:

$$S(1) = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^N (Y_t - a_1 Y_{t-1})^2}{N-1}} = \sqrt{4629516,58} = 363,69 \text{ (тыс. грн.)}.$$

Это означает, что фактические уровни продаж продукции предприятия отклоняются от расчётных, найденных по авторегрессионной модели Маркова, в среднем на 363,7 грн.

Авторегрессионные процессы более высоких порядков (3-го, 4-го и т.д.) в практике исследования временных рядов экономических показателей предприятия встречаются крайне редко, поэтому ограничимся рассмотрением применения моделей Маркова и Юла в задачах прогнозирования экономической динамики.

Точечное прогнозирование временного ряда экономического показателя предприятия на период упреждения  $L$  с помощью авторегрессионных моделей (3.5), (3.10) осуществляется по следующей схеме, которая будет проиллюстрирована на примере модели Маркова (3.5).

Сначала рассчитывают прогнозное значение  $\hat{Y}_{N+1}$  на период упреждения  $L = 1$  по формуле

$$\hat{Y}_{N+1} = a_1 Y_N. \quad (3.15)$$

Затем в эту же модель подставляют найденное прогнозное значение  $\hat{Y}_{N+1}$  и определяют прогнозную величину  $\hat{Y}_{N+2}$  на период упреждения  $L = 2$ :

$$\hat{Y}_{N+2} = a_1 \hat{Y}_{N+1} \quad (3.16)$$

и т.д.

Доверительный интервал прогноза строится по обычной схеме  $\hat{Y}_{N+L} \pm \Delta$ , а предельная ошибка  $\Delta$  рассчитывается так:

$$\Delta = t_{\alpha; N-1} S(1). \quad (3.17)$$

Отметим здесь, что как и при прогнозировании стационарных процессов, предельная ошибка прогноза (3.17) авторегрессионного процесса не зависит от длины периода упреждения  $L$ .

Обычно уровень значимости  $\alpha$  выбирают в интервале от 0,01 до 0,05. При этом, естественно, большему значению достоверности  $(1 - \alpha)$  соответствует более широкий доверительный интервал  $\Delta$ , в который с заданной вероятностью попадёт будущее значение прогнозируемого показателя. При этом справедливы все рассуждения из раздела 1 относительно величины предельной ошибки прогноза на базе линейной модели.

Рассчитаем точечный и 95-процентный интервальный прогнозы объёма продаж продукции предприятия на два месяца четвертого года ( $L = 1, 2$ ) с

помощью уравнения (3.14). Поскольку  $Y_{36} = 4302$ , то точечный прогноз на 1-й месяц четвертого года ( $L = 1$ ) равен:

$$\hat{Y}_{36+1} = 0,9Y_{36} = 0,9 \times 4302 = 3871,8 \text{ тыс. грн.}$$

Точечный прогноз на 2-й месяц четвертого года ( $L = 2$ ) равен:

$$\hat{Y}_{36+2} = 0,9\hat{Y}_{36+1} = 0,9 \times 3871,8 = 3484,6 \text{ тыс. грн.}$$

Найдем предельную ошибку прогноза, учитывая, что  $t_{\alpha;N-1} = t_{0,05;35} = 2,03$  и  $S(1) = 363,69$  тыс. грн.:

$$\Delta = t_{\alpha;N-1}S(1) = 2,03 \times 363,69 = 738,3 \text{ тыс. грн.}$$

Предельная ошибка прогноза довольно велика (738,3 тыс. грн.) вследствие высокого значения стандартной ошибки авторегрессии (363,69 тыс. грн.).

Следовательно, если процесс реализации продукции предприятия будет и дальше развиваться плавно, без внезапных воздействий внешних факторов, то в 1-м месяце четвертого года объём продаж продукции предприятия можно ожидать на уровне 3871,8 тыс. грн. Причём с достоверностью 95 % он окажется в пределах от 3133,5 тыс. грн. ( $3871,8 - 738,3$ ) и до 4610,1 тыс. грн. ( $3871,8 + 738,3$ ).

Аналогично, во 2-м месяце четвертого года объём продаж продукции предприятия следует ожидать на уровне 3484,6 тыс. грн. Причём с достоверностью 95 % он окажется в пределах от 2746,29 тыс. грн. ( $3484,6 - 738,3$ ) и до 4222,9 тыс. грн. ( $3484,6 + 738,3$ ).

В табл. 3.3 приведены результаты прогнозных расчётов, полученных на основе проведенного автокорреляционного и авторегрессионного анализа.

Таблица 3.3

Точечный и интервальный прогнозы объёма продаж продукции предприятия на период упреждения  $L = 1, 2$

| Период упреждения | Точечный прогноз | Предельная ошибка | 95 %-й доверительный интервал |                 |
|-------------------|------------------|-------------------|-------------------------------|-----------------|
|                   |                  |                   | нижняя граница                | верхняя граница |
| $L = 1$           | 2756,2           | 381,9             | 2374,3                        | 3138,2          |
| $L = 2$           | 2670,2           | 381,9             | 2288,3                        | 3052,2          |

Рассмотренный выше теоретический материал, а также пример использования на практике методов автокорреляции и авторегрессии позволяют выделить ряд последовательных этапов процедуры моделирования и прогнозирования временного ряда экономического показателя предприятия, важнейшими из которых являются следующие.

1. Расчёт коэффициентов автокорреляции и частной автокорреляции изучаемого ряда динамики, а также построение АКФ и ЧАКФ.

2. Определение порядка авторегрессионного процесса  $p$  в обобщённой модели (3.3).

3. Оценка неизвестных параметров авторегрессионной модели  $a_1, a_2, \dots, a_p$ .

4. Построение точечного и интервального прогнозов.

Если первый и четвёртый этапы процедуры представляются в значительной степени техническими вследствие наличия соответствующих компьютерных программ, в частности, системы *STATISTICA* (модуль «Анализ временных рядов/прогнозирование»), и известного алгоритма нахождения прогнозных оценок, то второй и третий этапы взаимосвязаны между собой и носят творческий, поисковый характер.

Дело в том, что в некоторых ситуациях графический автокорреляционный анализ временного ряда не обеспечивает чётких рекомендаций относительно порядка  $p$  авторегрессионной модели (3.3) и идентификация конкретного инструмента прогнозирования становится неопределённой вследствие того, что в общем случае коррелограмма (частная коррелограмма) может иметь любой вид, например, такой, как показано на рис. 3.8.

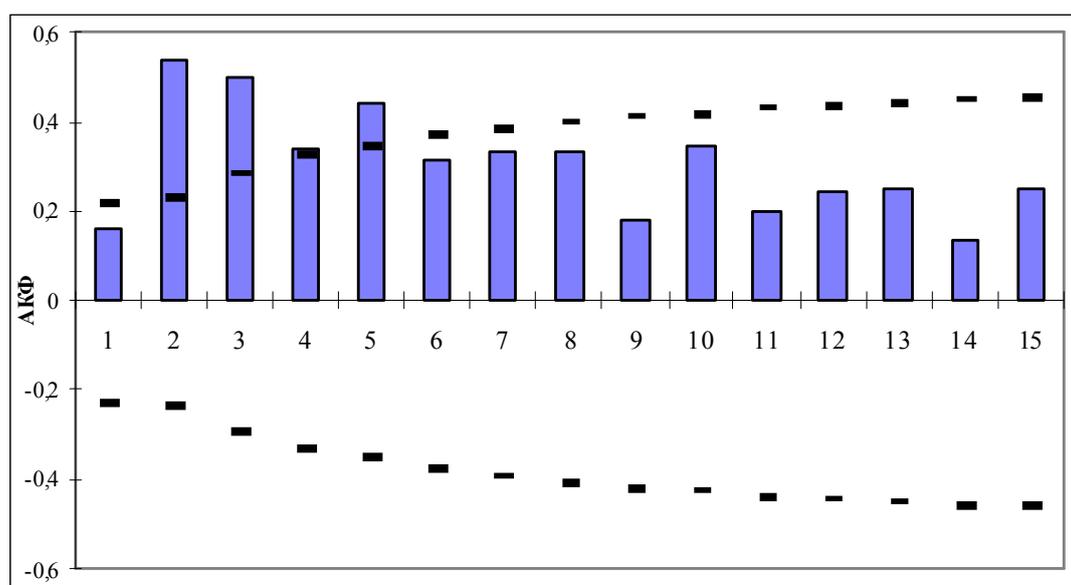


Рис. 3.8. Коррелограмма (частная коррелограмма) авторегрессионного процесса порядка  $\tau$

Кроме того, графическая идентификация порядка  $p$  авторегрессионной модели существенно зависит от субъективного мнения исследователя, его опыта и навыков, а также от количества реализаций авторегрессионного процесса, т.е. от длины ряда динамики экономического показателя предприятия  $N$  и от порядка коэффициентов автокорреляции  $\tau$ , который, как было установлено выше, находится в пределах от 1 до  $N/2$ . Поэтому нет смысла говорить об авторегрессионных моделях 10-го, 11-го и т.д. порядка, если длина временного ряда  $N \leq 20$ . А именно такие (короткие) ряды характерны для экономических показателей предприятия. Достаточно

вспомнить, что денежная единица гривна была в Украине введена в обращение в 1996 г.

В то же время, следует иметь в виду тот факт, что этапы определения порядка авторегрессионного процесса и оценки параметров авторегрессионной модели  $a_1, a_2, \dots, a_p$  взаимосвязаны между собой: часто осуществить правильный выбор  $p$  можно лишь после нахождения коэффициентов авторегрессии. При этом необоснованный рост  $p$  не всегда добавляет точности модели и прогнозу, т.к. расчёт большого числа  $a_1, a_2, \dots, a_p$  в условиях неизменности длины ряда динамики  $N$  снижает достоверность оценки каждого коэффициента. А недостаточная сложность авторегрессионной модели вследствие низкого порядка  $p$  не позволяет в полной мере отразить характер и структуру изучаемого процесса и верно оценить его дальнейшие изменения в будущем.

Поэтому, наряду с графическим автокорреляционным анализом временного ряда с целью идентификации порядка  $p$  авторегрессионной модели рекомендуется применять более точные количественные подходы, к которым относится аппроксимационный метод. Его сущность заключается в последовательном усложнении авторегрессионной модели ( $p = 1, 2, \dots$ ) и расчёте для каждой из них так называемой финальной ошибки прогнозирования (ФОП) по следующей формуле:

$$\text{ФОП}(p) = S^2(p)(N + p + 1)/(N - p). \quad (3.18)$$

Порядок авторегрессионной модели  $p'$  выбирается из условия

$$\text{ФОП}(p') = \min_p \text{ФОП}(p). \quad (3.19)$$

Найдём для построенной выше марковской модели авторегрессии (3.14), описывающей динамику объёма продаж продукции предприятия за три года, ФОП по формуле (3.18):

$$\text{ФОП}(1) = S^2(1)(N + 1 + 1)/(N - 1) = 4629516,58 \times 38/35 = 5026332.$$

В ряде случаев, если уже построена модель авторегрессии порядка  $p$  и необходимо перейти к модели порядка  $p+1$ , полезно использовать рекуррентные формулы Дарбина:

$$a_{p+1}(p+1) = \frac{r(p+1) - \sum_{i=1}^p a_i r(p+1-i)}{1 - \sum_{i=1}^p a_i(p)r(i)}; \quad a_i(p+1) = a_i(1) - a_{p+1}(p+1)a_{p-i+1}(p), \quad (3.20)$$

где  $a_i(p+1), a_i(p)$  – соответствующие коэффициенты авторегрессии порядка  $p+1$  и  $p$ .

Например, необходимо перейти от модели Маркова ( $p = 1$ ) к модели Юла ( $p = 2$ ) с помощью рекуррентных формул Дарбина. Согласно (3.20) имеем:

$$a_2(2) = [r(2) - a_1(1)r(1)]/[1 - a_1(1)r(1)]; \quad a_1(2) = a_1(1) - a_2(2)a_1(1), \quad (3.21)$$

где  $a_1(1) = r(1)$  – известный коэффициент модели Маркова;  
 $a_1(2), a_2(2)$  – неизвестные коэффициенты модели Юла.

Выполняя в формулах (3.21) элементарные преобразования, окончательно получим:

$$a_2(2) = [r(2) - r^2(1)]/[1 - r^2(1)]; \quad a_1(2) = r(1)[1 - r(2)]/[1 - r^2(1)], \quad (3.22)$$

что непосредственно совпадает с выражениями (3.12), найденными из системы уравнений Юла-Уокера.

По данным рассмотренного выше примера о динамике месячных продаж продукции предприятия за три года с помощью формул (3.21) перейдём от модели Маркова к модели Юла ( $a_1(1) = r(1) = 0,9; r(2) = 0,804$ ):

$$\begin{aligned} a_2(2) &= [r(2) - a_1(1)r(1)]/[1 - a_1(1)r(1)] = [0,804 - 0,9 \times 0,9]/[1 - 0,9 \times 0,9] = \\ &= -0,03158; \\ a_1(2) &= a_1(1) - a_2(2)a_1(1) = 0,9 - (-0,03158) \times 0,9 = 0,9284. \end{aligned}$$

Следовательно, модель Юла для обсуждаемого примера имеет вид:

$$Y_t = 0,9284Y_{t-1} - 0,03158Y_{t-2}. \quad (3.23)$$

Применение рекуррентных формул Дарбина для перехода от модели Юла к модели авторегрессии 3-го порядка даёт следующие результаты:

$$\begin{aligned} a_3(3) &= [r(3) - a_1(2)r(2) - a_2(2)r(1)]/[1 - a_1(2)r(1) - a_2(2)r(2)]; \\ a_1(3) &= a_1(2) - a_3(3)a_2(2); \quad a_2(3) = a_2(2) - a_3(3)a_1(2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где  $a_1(2), a_2(2)$  – известные коэффициенты модели Юла;  
 $a_1(3), a_2(3), a_3(3)$  – неизвестные коэффициенты авторегрессии 3-го порядка.

С помощью формул (3.21) перейдём теперь от модели Юла (3.23) к модели авторегрессии 3-го порядка ( $a_1(2) = 0,9284; a_2(2) = -0,03158; r(1) = 0,9; r(2) = 0,804; r(3) = 0,699$ ):

$$\begin{aligned} a_3(3) &= [r(3) - a_1(2)r(2) - a_2(2)r(1)]/[1 - a_1(2)r(1) - a_2(2)r(2)] = \\ &= [0,699 - 0,9284 \times 0,804 + 0,03158 \times 0,9]/[1 - 0,9284 \times 0,9 + 0,03158 \times 0,804] = \\ &= -0,1; \end{aligned}$$

$$a_1(3) = a_1(2) - a_3(3)a_2(2) = 0,9284 - (-0,1) \times (-0,03158) = 0,9252;$$

$$a_2(3) = a_2(2) - a_3(3)a_1(2) = -0,03158 - (-0,1) \times 0,9284 = 0,0613.$$

Таким образом, авторегрессионная модель 3-го порядка для данного примера имеет вид:

$$Y_t = 0,9252Y_{t-1} + 0,0613Y_{t-2} - 0,1Y_{t-3}. \quad (3.25)$$

В заключение в табл. 3.4 приведём результаты сравнительного анализа всех трёх построенных моделей авторегрессии на основе величины ФОП( $p$ ).

Таблица 3.4

Сравнение моделей авторегрессии (3.14), (3.23), (3.25) динамики объёма продаж продукции предприятия различных порядков

| Порядок модели | Уравнение авторегрессии                            | $S^2(p)$   | ФОП( $p$ ) |
|----------------|--|------------|------------|
| $p = 1$        | $\hat{Y}_t = 0,9Y_{t-1}$                           | 4629516,58 | 5026332    |
| $p = 2$        | $Y_t = 0,9284Y_{t-1} - 0,03158Y_{t-2}$             | 4747822,87 | 5446032,12 |
| $p = 3$        | $Y_t = 0,9252Y_{t-1} + 0,0613Y_{t-2} - 0,1Y_{t-3}$ | 5105234,61 | 6188163,16 |

Данные табл. 3.4 показывают, что по мере усложнения авторегрессионной модели растет и финальная ошибка прогноза. Её минимальное значение соответствует модели Маркова ( $p = 1$ ; ФОП(1) = 5026332), которая и была изначально идентифицирована на базе графического автокорреляционного анализа.

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

По данным временных рядов экономических показателей предприятия (табл. 3.5, 3.6), соответствующих номеру Вашего варианта, осуществить следующие этапы моделирования и прогнозирования:

1) расчёт коэффициентов автокорреляции, частной автокорреляции изучаемого ряда динамики и построение АКФ и ЧАКФ с целью графической идентификации порядка ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ) будущей авторегрессионной модели;

2) расчёт коэффициентов авторегрессии  $a_1, a_2, \dots, a_p$  модели порядка  $p$ , идентифицированного на первом этапе решения задания;

3) оценку точности построенной модели с помощью нахождения стандартной ошибки авторегрессии  $S(p)$ ;

4) точечное и интервальное (с достоверностью 95 %) прогнозирование экономического показателя предприятия на период упреждения  $L = 2, 3, 4$  на базе построенной авторегрессионной модели (результаты представить в таблице типа табл. 3.3);

5) проверку правильности идентификации порядка модели авторегрессии  $p$  с помощью аппроксимационного метода, построив с помощью рекуррентных формул Дарбина дополнительно не менее двух моделей и сравнив их по величине финальной ошибки прогнозирования  $\Phi\Pi(p)$  (результаты представить в таблице типа табл. 3.4);

6) пересчёт точечных и интервальных прогнозов, полученных на этапе 4, в случае обнаружения на этапе 5 ошибки идентификации порядка модели авторегрессии  $p$ .

По каждому этапу дать краткие математико-статистические и экономические выводы.

Таблица 3.5

Динамика объёма продаж товаров № 1 – 8 предприятия (тыс. грн.)

| Время t | № 1   | №2    | №3    | № 4   | № 5   | № 6  | № 7  | № 8  |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| 1       | 16,71 | 17,19 | 16,04 | 14,67 | 13,29 | 2014 | 1609 | 2129 |
| 2       | 17,06 | 16,98 | 15,80 | 14,30 | 12,99 | 2008 | 1730 | 2107 |
| 3       | 17,25 | 16,89 | 15,70 | 14,19 | 12,84 | 1516 | 1968 | 2053 |
| 4       | 17,22 | 16,87 | 15,27 | 13,88 | 12,86 | 1494 | 1962 | 2091 |
| 5       | 17,28 | 16,44 | 15,07 | 13,45 | 12,74 | 1584 | 1915 | 1949 |
| 6       | 17,19 | 16,04 | 14,67 | 13,29 | 12,44 | 1609 | 2129 | 1962 |
| 7       | 16,98 | 15,80 | 14,30 | 12,99 | 12,30 | 1730 | 2107 | 1895 |
| 8       | 16,89 | 15,70 | 14,19 | 12,84 | 12,19 | 1968 | 2053 | 1903 |
| 9       | 16,87 | 15,27 | 13,88 | 12,86 | 11,97 | 1962 | 2091 | 1875 |
| 10      | 16,44 | 15,07 | 13,45 | 12,74 | 11,59 | 1915 | 1949 | 1796 |
| 11      | 16,04 | 14,67 | 13,29 | 12,44 | 11,01 | 2129 | 1962 | 1899 |
| 12      | 15,80 | 14,30 | 12,99 | 12,30 | 10,34 | 2107 | 1895 | 1968 |
| 13      | 15,70 | 14,19 | 12,84 | 12,19 | 9,84  | 2053 | 1903 | 2030 |
| 14      | 15,27 | 13,88 | 12,86 | 11,97 | 9,55  | 2091 | 1875 | 2461 |
| 15      | 15,07 | 13,45 | 12,74 | 11,59 | 9,41  | 1949 | 1796 | 2563 |
| 16      | 14,67 | 13,29 | 12,44 | 11,01 | 9,25  | 1962 | 1899 | 2667 |
| 17      | 14,30 | 12,99 | 12,30 | 10,34 | 9,11  | 1895 | 1968 | 3016 |
| 18      | 14,19 | 12,84 | 12,19 | 9,84  | 9,03  | 1903 | 2030 | 3113 |

|    |       |       |       |       |       |      |      |      |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| 19 | 13,88 | 12,86 | 11,97 | 9,55  | 8,92  | 1875 | 2461 | 3058 |
| 20 | 13,45 | 12,74 | 11,59 | 9,41  | 9,06  | 1796 | 2563 | 3434 |
| 21 | 13,29 | 12,44 | 11,01 | 9,25  | 9,25  | 1899 | 2667 | 3799 |
| 22 | 12,99 | 12,30 | 10,34 | 9,11  | 9,37  | 1968 | 3016 | 3776 |
| 23 | 12,84 | 12,19 | 9,84  | 9,03  | 9,32  | 2030 | 3113 | 3787 |
| 24 | 12,86 | 11,97 | 9,55  | 8,92  | 9,41  | 2461 | 3058 | 4024 |
| 25 | 12,74 | 11,59 | 9,41  | 9,06  | 9,61  | 2563 | 3434 | 4071 |
| 26 | 12,44 | 11,01 | 9,25  | 9,25  | 9,66  | 2667 | 3799 | 4302 |
| 27 | 12,30 | 10,34 | 9,11  | 9,37  | 9,80  | 3016 | 3776 | 4382 |
| 28 | 12,19 | 9,84  | 9,03  | 9,32  | 9,75  | 3113 | 3787 | 3961 |
| 29 | 11,97 | 9,55  | 8,92  | 9,41  | 9,66  | 3058 | 4024 | 3536 |
| 30 | 11,59 | 9,41  | 9,06  | 9,61  | 9,76  | 3434 | 4071 | 3379 |
| 31 | 11,01 | 9,25  | 9,25  | 9,66  | 9,88  | 3799 | 4302 | 3110 |
| 32 | 10,34 | 9,11  | 9,37  | 9,80  | 9,97  | 3776 | 4382 | 3137 |
| 33 | 9,84  | 9,03  | 9,32  | 9,75  | 10,01 | 3787 | 3961 | 3225 |
| 34 | 9,55  | 8,92  | 9,41  | 9,66  | 10,14 | 4024 | 3536 | 3185 |
| 35 | 9,41  | 9,06  | 9,61  | 9,76  | 10,25 | 4071 | 3379 | 2942 |
| 36 | 9,25  | 9,25  | 9,66  | 9,88  | 10,44 | 4302 | 3110 | 2806 |
| 37 | 9,11  | 9,37  | 9,80  | 9,97  | 10,64 | 4382 | 3137 | 2843 |
| 38 | 9,03  | 9,32  | 9,75  | 10,01 | 11,66 | 3961 | 3225 | 2818 |
| 39 | 8,92  | 9,41  | 9,66  | 10,14 | 11,96 | 3536 | 3185 | 2845 |
| 40 | 9,06  | 9,61  | 9,76  | 10,25 | 12,00 | 3379 | 2942 | 3018 |

Таблица 3.6

Динамика объёма продаж товаров № 9 – 16 предприятия (тыс. грн.)

| Время t | № 9  | № 10 | № 11 | № 12 | № 13 | № 14 | № 15 | № 16 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1       | 1962 | 1899 | 2667 | 3799 | 4302 | 3110 | 2806 | 3133 |
| 2       | 1895 | 1968 | 3016 | 3776 | 4382 | 3137 | 2843 | 3159 |
| 3       | 1903 | 2030 | 3113 | 3787 | 3961 | 3225 | 2818 | 2994 |
| 4       | 1875 | 2461 | 3058 | 4024 | 3536 | 3185 | 2845 | 3071 |
| 5       | 1796 | 2563 | 3434 | 4071 | 3379 | 2942 | 3018 | 3365 |
| 6       | 1899 | 2667 | 3799 | 4302 | 3110 | 2806 | 3133 | 3643 |
| 7       | 1968 | 3016 | 3776 | 4382 | 3137 | 2843 | 3159 | 3638 |
| 8       | 2030 | 3113 | 3787 | 3961 | 3225 | 2818 | 2994 | 3306 |
| 9       | 2461 | 3058 | 4024 | 3536 | 3185 | 2845 | 3071 | 3159 |
| 10      | 2563 | 3434 | 4071 | 3379 | 2942 | 3018 | 3365 | 2856 |
| 11      | 2667 | 3799 | 4302 | 3110 | 2806 | 3133 | 3643 | 2608 |
| 12      | 3016 | 3776 | 4382 | 3137 | 2843 | 3159 | 3638 | 2790 |
| 13      | 3113 | 3787 | 3961 | 3225 | 2818 | 2994 | 3306 | 3005 |
| 14      | 3058 | 4024 | 3536 | 3185 | 2845 | 3071 | 3159 | 3252 |
| 15      | 3434 | 4071 | 3379 | 2942 | 3018 | 3365 | 2856 | 3529 |
| 16      | 3799 | 4302 | 3110 | 2806 | 3133 | 3643 | 2608 | 3685 |
| 17      | 3776 | 4382 | 3137 | 2843 | 3159 | 3638 | 2790 | 3600 |
| 18      | 3787 | 3961 | 3225 | 2818 | 2994 | 3306 | 3005 | 3642 |
| 19      | 4024 | 3536 | 3185 | 2845 | 3071 | 3159 | 3252 | 3802 |
| 20      | 4071 | 3379 | 2942 | 3018 | 3365 | 2856 | 3529 | 3755 |
| 21      | 4302 | 3110 | 2806 | 3133 | 3643 | 2608 | 3685 | 3689 |
| 22      | 4382 | 3137 | 2843 | 3159 | 3638 | 2790 | 3600 | 3898 |
| 23      | 3961 | 3225 | 2818 | 2994 | 3306 | 3005 | 3642 | 4030 |

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 24 | 3536 | 3185 | 2845 | 3071 | 3159 | 3252 | 3802 | 4144 |
| 25 | 3379 | 2942 | 3018 | 3365 | 2856 | 3529 | 3755 | 4216 |
| 26 | 3110 | 2806 | 3133 | 3643 | 2608 | 3685 | 3689 | 4418 |
| 27 | 3137 | 2843 | 3159 | 3638 | 2790 | 3600 | 3898 | 4244 |
| 28 | 3225 | 2818 | 2994 | 3306 | 3005 | 3642 | 4030 | 4003 |
| 29 | 3185 | 2845 | 3071 | 3159 | 3252 | 3802 | 4144 | 3984 |
| 30 | 2942 | 3018 | 3365 | 2856 | 3529 | 3755 | 4216 | 3930 |
| 31 | 2806 | 3133 | 3643 | 2608 | 3685 | 3689 | 4418 | 3838 |
| 32 | 2843 | 3159 | 3638 | 2790 | 3600 | 3898 | 4244 | 3778 |
| 33 | 2818 | 2994 | 3306 | 3005 | 3642 | 4030 | 4003 | 3774 |
| 34 | 2845 | 3071 | 3159 | 3252 | 3802 | 4144 | 3984 | 3874 |
| 35 | 3018 | 3365 | 2856 | 3529 | 3755 | 4216 | 3930 | 3959 |
| 36 | 3133 | 3643 | 2608 | 3685 | 3689 | 4418 | 3838 | 3584 |
| 37 | 3159 | 3638 | 2790 | 3600 | 3898 | 4244 | 3778 | 3057 |
| 38 | 2994 | 3306 | 3005 | 3642 | 4030 | 4003 | 3774 | 2982 |
| 39 | 3071 | 3159 | 3252 | 3802 | 4144 | 3984 | 3874 | 3076 |
| 40 | 3365 | 2856 | 3529 | 3755 | 4216 | 3930 | 3959 | 3039 |

### ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 3

- 50.Боровиков В. П., Ивченко Г. И. Прогнозирование в системе *STATISTICA* в среде *Windows*. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 384 с.
- 51.Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью *Excel*. Пер. с англ. – К.: Диалектика, 1997. 448 с.
- 52.Кендэл М. Временные ряды / Пер. с англ. Ю. П. Лукашина. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 199 с.
- 53.Кильдишев Г. С., Френкель А. А. Анализ временных рядов и прогнозирование. – М.: Статистика, 1973. – 104 с.
- 54.Льюис К. Д. Методы прогнозирования экономических показателей. Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 133 с.
- 55.Френкель А. А. Прогнозирование производительности труда : методы и модели. – М.: Экономика, 1989. – 214 с.
56. Янковий О. Г. Моделювання парних зв'язків в економіці / Янковий О. Г. – Одеса : Оптимум, 2001. – 198 с.
57. Янковой А. Г. Основы эконометрического моделирования / Янковой А. Г. – Одесса, ОГЭУ, ротапринт, 2006. – 133 с.
58. Янковий О. Г. Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з вивчення курсів «Статистика», «Статистичне моделювання та прогнозування». Розділ «Прогнозування на основі авторегресійних моделей» для студентів 3-4 курсів денної форми навчання усіх спеціальностей. – Одеса, ОДЕУ, ротапринт, 2000. – 38 с.

#### 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Производственные функции (ПФ) представляют собой важный класс множественных математико-статистических моделей, получивших широкое распространение при описании зависимостей объёмов производства от величины затрат основных ресурсов предприятия – труда и капитала. Отражая в сжатой форме процесс производства продукции, ПФ служат полезным инструментом, позволяющим проводить разнообразные аналитические расчёты, определять эффективность использования ресурсов и целесообразность их дополнительного вовлечения в производство, прогнозировать выпуск продукции (работ, услуг) и контролировать реальность плановых проектов предприятия.

Наиболее популярной в исследованиях экономической динамики предприятия является ПФ Кобба-Дугласа, которая имеет следующий вид:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad (4.1)$$

где  $A, \alpha, \beta$  – неизвестные параметры степенной функции;  
 $K, L$  – величина затрат капитала и труда в процессе производства продукции предприятия (производственные ресурсы);  
 $Y$  – объём произведенной продукции.

Объём произведенной продукции обычно измеряется стоимостными показателями, например, показателем товарной продукции. В условиях рыночной экономики все больше учёных и практиков применяют показатель выручки от реализации, поскольку «на склад» ни один товаропроизводитель старается не работать. Потому рекомендуется объём выпущенной продукции предприятия характеризовать стоимостными показателями – величиной товарной продукции или же доходом (выручкой от реализации).

Производственные ресурсы обычно представляются двумя агрегированными показателями, которые отражают затраты живого и овеществлённого труда на предприятии. Так, затраты овеществлённого труда выступают в виде агрегированного показателя – капитала и измеряются величиной его средней годовой стоимости. При этом под капиталом понимают как основной, так оборотный капитал, а также их суммарную величину.

В роли измерителя живого труда используется один из следующих показателей: 1) средняя списочная численность работников; 2) отработанное время (чел-дней, чел-часов); 3) фонд заработной платы работников или рабочих.

Математический аппарат моделирования основан на линеаризации ПФ путём логарифмирования исходных данных  $Y, K, L$ . Так, функция (4.1) в результате логарифмирования приобретает вид:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L. \quad (4.2)$$

Обозначив  $\ln Y = Y'$ ,  $\ln A = A'$ ,  $\ln K = K'$ ,  $\ln L = L'$ , получим обычную линейную модель

$$Y' = A' + \alpha K' + \beta L', \quad (4.3)$$

параметры которой легко оцениваются по методу наименьших квадратов с помощью редактора *Excel* (пакет анализа, стандартная программа «Регрессия»).

При этом необходимо обращать внимание на следующий момент: после оценки величины  $A'$  необходимо осуществлять её потенцирование для определения параметра  $A = \exp(A')$  искомой ПФ.

Рассмотрим порядок построения и использования ПФ Кобба-Дугласа в процессе моделирования экономической динамики предприятия по следующим исходным данным (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Исходные данные для расчёта ПФ предприятия, тыс. грн.

| Годы | Выручка от реализации ( $Y$ ) | Капитал ( $K$ ) | Фонд оплаты труда ( $L$ ) |
|------|-------------------------------|-----------------|---------------------------|
| 2006 | 38779                         | 10965           | 3881                      |
| 2007 | 44569                         | 11455           | 4578                      |
| 2008 | 40339                         | 10176           | 4188                      |
| 2009 | 40336                         | 10090           | 4481                      |
| 2010 | 43672                         | 11163           | 4573                      |
| 2011 | 41155                         | 10448           | 4417                      |
| 2012 | 40843                         | 10101           | 4429                      |
| 2013 | 42603                         | 11044           | 4609                      |

Логарифмированные данные для расчёта параметров ПФ Кобба-Дугласа приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Логарифмированные исходные данные

| Годы | $\ln Y$ | $\ln K$ | $\ln L$ |
|------|---------|---------|---------|
| 2006 | 10,5656 | 9,3025  | 8,2638  |
| 2007 | 10,7048 | 9,3462  | 8,4290  |
| 2008 | 10,6051 | 9,2278  | 8,3400  |
| 2009 | 10,6050 | 9,2193  | 8,4076  |
| 2010 | 10,6845 | 9,3204  | 8,4279  |
| 2011 | 10,6251 | 9,2542  | 8,3932  |
| 2012 | 10,6175 | 9,2204  | 8,3959  |
| 2013 | 10,6596 | 9,3096  | 8,4358  |

Расчёты параметров ПФ проводились на персональном компьютере с использованием стандартных программ «Корреляция» и «Регрессия»

редактора *Excel*. Определение матрицы коэффициентов парной корреляции между переменной  $\ln Y$  и  $\ln K$ ,  $\ln L$  (табл. 4.3) показало, что между ними существуют достаточно тесные линейные связи ( $r_{ij} > 0,638$ ).

Таблица 4.3

Матрица коэффициентов парной корреляции  
между переменными ПФ Кобба-Дугласа

|         | $\ln Y$ | $\ln K$ | $\ln L$ |
|---------|---------|---------|---------|
| $\ln Y$ | 1       |         |         |
| $\ln K$ | 0,6383  | 1       |         |
| $\ln L$ | 0,8114  | 0,1755  | 1       |

Это даёт основание считать, что будущая модель будет достаточно точно описывать вероятностные зависимости между исследуемыми экономическими показателями предприятия. В результате вычислений была получена следующая функция:

$$Y = 4,4572K^{0,4680}L^{0,5721}. \quad (4.4)$$

Здесь величина  $A$  находится путем потенцирования найденного значения  $\ln A = 1,4945$  ( $A = \exp(1,4945) = 4,4572$ ).

Статистический анализ ПФ (4.4) показал, что она достаточно точно описывает динамику производства изучаемого предприятия. Коэффициент детерминации  $R^2 = 0,9121$  указывает на то, что свыше 91 % вариации выручки от реализации продукции объясняется двумя факторами уравнения (4.4). Модель статистически надёжная: расчётное значение  $F$ -критерия Фишера 25,95 превышает критическое значение 13,27, найденное для уровня значимости 0,01 и числа степеней свободы  $k_1 = m = 2$ ;  $k_2 = N - m - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$  (здесь  $m$  – число факторов в модели,  $N$  – число наблюдений). Следовательно, с достоверностью 99 % можно утверждать, что полученная ПФ является высоко надёжной и статистически значимой.

Построенная ПФ позволяет рассчитать ряд важных экономико-математических показателей изучаемого производственного процесса (табл. 4.4), касающихся затрат капитала и рабочей силы. Например, капиталотдачу, производительность и капиталовооружённость труда, предельную отдачу ресурсов и др. Экономико-математический анализ процесса производства с помощью ПФ, а не по фактическим данным, предоставляет возможность элиминировать влияние на выручку от реализации продукции случайных условий, учесть взаимодействие производственных факторов, определить степень их взаимного замещения.

В табл. 4.5 приведены основные характеристики производства на исследуемом предприятии, найденные с помощью ПФ (4.4).

Так, формулы средней отдачи ресурсов  $Y/K$ ,  $Y/L$  (строка 1 табл. 4.5) позволяют рассчитать выровненную по модели (4.4) среднюю фондоотдачу и среднюю производительность труда на предприятии за каждый год изучаемого периода времени.

Таблица 4.4

Основные экономико-математические характеристики  
ПФ Кобба-Дугласа (4.1)

| Показатель  | $K$   | $L$   |
|---|---|---|
| 1. Средняя отдача                                   | $\frac{Y}{K} = \frac{AK^\alpha L^\beta}{K} = AK^{\alpha-1} L^\beta$   | $\frac{Y}{L} = \frac{AK^\alpha L^\beta}{L} = AK^\alpha L^{\beta-1}$ |
| 2. Предельная отдача                                | $\frac{\partial Y}{\partial K} = A \alpha K^{\alpha-1} L^\beta$   | $\frac{\partial Y}{\partial L} = A \beta K^\alpha L^{\beta-1}$      |
| 3. Эластичность выпуска продукции, %                | $\alpha$  | $\beta$   |
| 4. Потребность в ресурсах                           | $K = \left(\frac{Y}{AL^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$  | $L = \left(\frac{Y}{AK^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$            |
| 5. Замещение ресурсов (капиталовооружённость труда) | $\frac{K}{L} = \left(\frac{Y}{AL^\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} : L = A^{-\frac{1}{\alpha}} Y^{\frac{1}{\alpha}} L^{-1-\frac{\beta}{\alpha}}$ |   |
| 6. Предельная норма замещения ресурсов              | $h = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L}$  |   |
| 7. Эластичность замещения ресурсов, %               | $\delta = 1$  |   |
| 8. Степень однородности                             | $n = \alpha + \beta$  |   |
| 9. Идентификация ПФ                                 | 1. ПФ относится к неоклассическим, если $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ .<br>2. Неоклассическая ПФ относится к классическим, если $n = 1$ .     |   |

Таблица 4.5

Основные экономико-математические характеристики производства  
изучаемого предприятия, найденные с помощью ПФ (4.4)

| Показатель                             | $K$  | $L$   |
|--|--|---|
| 1. Средняя отдача                      | $Y/K = 4,4572K^{-0,5320} L^{0,5721}$   | $Y/L = 4,4572K^{0,4680} L^{-0,4279}$                    |
| 2. Предельная отдача                   | $\partial Y/\partial K = 2,0861 K^{-0,5320} L^{0,5721}$  | $\partial Y/\partial L = 2,5499 K^{0,4680} L^{-0,4279}$ |
| 3. Эластичность выпуска продукции, %   | 0,4680   | 0,5721  |
| 4. Потребность в ресурсах              | $K = \left(\frac{Y}{4,4572 L^{0,5721}}\right)^{2,1367}$  | $L = \left(\frac{Y}{4,4572 K^{0,468}}\right)^{1,748}$   |
| 5. Капиталовооружённость труда         | $K/L = 0,041 Y^{2,1367} L^{-2,2224}$   |   |
| 6. Предельная норма замещения ресурсов | $h = 1,2224 \frac{K}{L}$   |   |
| 7. Эластичность замещения ресурсов, %  | $\delta = 1$   |   |
| 8. Степень однородности                | $n = 0,4680 + 0,5721 = 1,0401$   |   |
| 9. Идентификация ПФ                    | 1. ПФ относится к неоклассическим, т.к. $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ .<br>2. ПФ относится к классическим, поскольку $n \approx 1$ . |   |

Формулы предельной отдачи ресурсов  $\partial Y/\partial K$ ,  $\partial Y/\partial L$  (строка 2 табл. 4.5) дают возможность определить, как изменялась выручка от реализации продукции при изменении соответствующего производственного фактора на единицу (на 1 тыс. грн.). Например, приведём расчёт предельной отдачи капитала и труда на предприятии по данным 2013 г. из табл. 4.1:

$$\begin{aligned}\partial Y/\partial K &= 2,0861K^{-0,5320}L^{0,5721} = 2,0861 \times 17644^{-0,532} \times 2409^{0,5721} = 0,9883 \text{ (тыс. грн.)}; \\ \partial Y/\partial L &= 2,5499K^{0,4680}L^{-0,4279} = 2,5499 \times 17644^{0,468} \times 2409^{-0,4279} = 8,8480 \text{ (тыс. грн.)}.\end{aligned}$$

Это означает, что каждая дополнительная тысяча гривен, вложенная в капитал предприятия, приносит 988,3 грн. дополнительного дохода, в то время как увеличение фонда оплаты труда, например, за счёт найма дополнительных работников или усиления материального стимулирования работающих на 1 тыс. грн., приводит к росту выручки от реализации на 88480 грн. Полученный результат указывает на определенный дефицит рабочей силы на предприятии по сравнению с капиталом, который находится в относительном избытке.

Для ПФ Кобба-Дугласа эластичности выпуска продукции по каждому ресурсу являются постоянными величинами, равными показателям степени соответствующего производственного фактора (строка 3 табл. 4.4), т.е.  $E_K = \alpha$ ,  $E_L = \beta$ . Согласно данным табл. 4.5 рост затрат капитала на исследуемом предприятии за изучаемый период времени на 1 % приводил в среднем к повышению выпуска продукции примерно на 0,468 %. А рост затрат на оплату труда на 1 % обеспечивал средний прирост производства на 0,572 %.

Как известно, коэффициент эластичности каждого производственного фактора отражает его относительное влияние на результаты хозяйственной деятельности. Поэтому можно констатировать, что на данном предприятии наибольшее относительное влияние на выпуск продукции наблюдалось со стороны фактора «труд».

Формулы потребности в ресурсах  $K$ ,  $L$  (строка 4 табл. 4.4) позволяют рассчитать необходимое количество одного из ресурсов по заданным значениям выпуска продукции и другого ресурса. Например, пусть необходимо увеличить доход изучаемого предприятия в 2014 г. по сравнению с 2013 г. на 30 %, т.е. довести его до уровня 55383,9 тыс. грн. при том же размере капитала. Возникает вопрос: каков должен быть фонд оплаты труда, чтобы обеспечить запланированный рост выручки от реализации продукции?

Тогда при условии  $Y = 55383,9$ ;  $K = 11044$  необходимо подставить эти значения в правую формулу строки 4 табл. 4.5. В результате расчётов получается:

$$L = \left( \frac{Y}{4,4572K^{0,468}} \right)^{1,748} = \left( \frac{55383,9}{4,4572 \times 11044^{0,468}} \right)^{1,748} = 7068,67 \text{ (тыс. грн.)}.$$

Следовательно, для решения поставленной производственной задачи необходимо располагать фондом оплаты труда в размере 7068,67 тыс. грн.

Аналогично по заданным величинам дохода и фонда оплаты труда можно определить необходимый размер капитала предприятия (левая формула строки 4 табл. 4.5).

Формула капиталовооружённости труда  $K/L$  (строка 5 табл. 4.5) позволяет рассчитать выровненную по модели (4.4) среднюю оснащённость рабочей силы орудиями труда, материальными и финансовыми ресурсами предприятия за каждый год изучаемого периода времени. Так, по данным 2013 г. из табл. 4.1 фактическая средняя капиталовооружённость труда составляла:

$$K/L = 11044/4609 = 2,396 \text{ (грн./грн.)}$$

Следовательно, на каждую гривну затрат живого труда в 2013 г. приходилось 2,396 грн. затрат капитала предприятия.

Формула из табл. 4.5 даёт следующий результат:

$$K/L = 0,041 Y^{2,1367} L^{-2,2224} = 0,041 \times 42603^{2,1367} \times 4609^{-2,2224} = 2,304 \text{ (грн./грн.)}$$

который незначительно отличается от фактической средней капиталовооружённости труда.

Взаимодействующие в рамках ПФ ресурсы могут в известной степени замещать друг друга, т.е. одну тысячу гривен затрат на оплату труда можно заменить некоторым количеством затрат капитала предприятия и, наоборот. При этом объём выпускаемой продукции (выручки от её реализации) не изменится. Предельная норма замещения ресурсов  $h$  (строка 6 табл. 4.5) показывает, на сколько единиц нужно увеличить один из ресурсов, например, затраты капитала, чтобы компенсировать уменьшение другого ресурса (затрат труда) на единицу (на 1 тыс. грн.) при неизменном выпуске продукции (доходе) предприятия. Очевидно, что величина  $h$  зависит как от параметров  $\alpha$  и  $\beta$  – коэффициентов эластичности выпуска продукции по каждому производственному ресурсу, так и от капиталовооружённости труда  $K/L$ .

На изучаемом предприятии по данным 2013 г. из табл. 3.1 фактическая средняя капиталовооружённость труда составляла 2,396 (грн./грн.). Поэтому предельная норма замещения ресурсов в данном году равнялась:

$$h = 1,2224 \frac{K}{L} = 1,2224 \times 2,396 = 2,929 \text{ грн./грн.}$$

Таким образом, снижение затрат на оплату труда работников предприятия на 1 тыс. грн. при неизменном выпуске продукции требовала в изучаемом году дополнительных затрат капитала в размере 2396 грн.

Эластичность замещения ресурсов  $\delta$  для ПФ Кобба-Дугласа (строка 7 табл. 4.5) постоянна и равна единице. Это означает, что изменению капиталово-

вооружённости труда  $K/L$  на 1 % соответствует изменение предельной нормы замещения затрат труда капиталом  $h$  тоже на 1 %.

Степень однородности ПФ (4.4)  $n = \alpha + \beta = 1,0401$  близка к единице (строка 8 табл. 4.5), поэтому построенную функцию можно считать линейно однородной. Однородность ПФ отражает эффективность производства при изменении его масштабов. Иными словами, она показывает, к какому увеличению выпуска продукции приводит рост объёма всех ресурсов в  $\lambda$  раз. Для предприятий, которые описываются линейно однородными функциями ( $n \approx 1$ ), эффективность функционирования системы не зависит от масштабов производства, потому что средние капиталотдача и производительность труда остаются постоянными.

Экономически это соответствует предположению, что, например, удвоение объёма затрат капитала и труда на исследуемом предприятии приводит к удвоению выпускаемой продукции. Нередко условие  $n = 1$  ставится заранее при нахождении параметров ПФ Кобба-Дугласа, т.е. она заведомо считается линейно однородной.

При расширении производства, создании новых рабочих мест на предприятии часто возникает вопрос: в каких пропорциях следует инвестировать средства в живой и овеществлённый труд? Иными словами, необходимо определить величину капиталовооружённости труда будущего инвестиционного проекта, обеспечивающую предприятию максимальный выпуск продукции.

Доказано, что для функции Кобба-Дугласа (4.1) оптимальная капиталовооружённость труда, максимизирующая выпуск продукции при заданном общем размере инвестируемого капитала  $C = K + L$ , равняется

$$\frac{K}{L} = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (4.5)$$

Следовательно, инвестировать средства в живой и овеществлённый труд следует пропорционально коэффициентам эластичности выпуска продукции по каждому ресурсу  $\alpha$  и  $\beta$ . Легко показать, что данному требованию соответствуют следующие доли общего инвестируемого капитала  $C$ :

$$K = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot C; \quad L = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot C. \quad (4.6)$$

В данном примере при инвестировании в изучаемое предприятие  $C$  денежных единиц 45 % ( $0,468 \times 100 / 1,0401$ ) из них следует направить на затраты капитала и 55 % ( $0,5721 \times 100 / 1,0401$ ) – на затраты труда.

При этом максимальный выпуск продукции составит

$$\max Y = \frac{A \alpha^\alpha \beta^\beta C^{\alpha+\beta}}{(\alpha + \beta)^{\alpha+\beta}}, \quad (4.7)$$

который зависит только от параметров данной ПФ Кобба-Дугласа.

Подставим в выражение (4.7) найденные параметры функции (4.4), принимая во внимание, что  $\alpha + \beta \approx 1$ :

$$\max Y = A\alpha^\alpha \beta^\beta C = 4,4572 \times 0,4680^{0,468} \times 0,5721^{0,5721} C \approx 2,27C.$$

Это означает, что инвестирование в данное предприятия является довольно выгодным мероприятием, т.к. оно обеспечивает более чем двойной «подъём» вложенных в производственные проекты денежных средств. Ясно, что если найденный коэффициент при  $C$  окажется меньше 1, то инвестиционный проект в условиях рыночной экономики должен быть отвергнут.

Не менее интересной представляется возможность использования построенной модели для отыскания границ величины  $C$  в зависимости от степени однородности ПФ (4.1)  $n = \alpha + \beta$ . Дело в том, что при различных типах реакции предприятия на изменение масштабов производства, будущие инвестиции могут быть ограничены либо снизу, либо сверху.

Так, при  $n = \alpha + \beta > 1$  рост размера производственных ресурсов в  $\lambda$  раз обеспечивает увеличение объёма производства более чем в  $\lambda$  раз. В этом случае говорят о положительном эффекте расширения масштабов производства и величина инвестиции  $C$  ограничена снизу точкой безубыточности.

Если же  $n = \alpha + \beta < 1$ , то рост размера производственных ресурсов в  $\lambda$  раз обеспечивает увеличение объёма производства менее чем в  $\lambda$  раз. Поэтому имеет место отрицательное влияние укрупнения производства на эффективность функционирования предприятия и величина инвестиции  $C$  ограничена точкой безубыточности сверху.

Доказано, что в условиях обеспечения оптимальной капиталовооружённости труда при инвестировании в производство возможны три случая в зависимости от степени однородности  $n$  ПФ Кобба-Дугласа (4.1):

1.  $n = \alpha + \beta > 1$  будущая инвестиция будет прибыльной если

$$C > \left[ \frac{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}}{A \cdot \alpha^\alpha \beta^\beta} \right]^{\frac{1}{\alpha + \beta - 1}}, \quad (4.8)$$

т.е. правая часть (4.8) определяет нижнюю границу инвестируемого капитала  $C_0$ , начиная с которой прибыль от реализации запланированного мероприятия на производстве будет положительной величиной.

2.  $n = \alpha + \beta < 1$  инвестиционный проект будет прибыльным если

$$C < \left[ \frac{A \cdot \alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}} \right]^{\frac{1}{1 - (\alpha + \beta)}}, \quad (4.9)$$

и можно найти верхнюю границу инвестируемого капитала  $C_0$ , до которой прибыль от внедрения производственного мероприятия будет положительной.

3.  $n = \alpha + \beta = 1$  (при линейной однородности ПФ Кобба-Дугласа)

прибыльность инвестиционного проекта не зависит от размера инвестированного капитала  $C$ . Дело в том, что при  $n = 1$  производственное мероприятие будет прибыльным при условии

$$A\alpha^\alpha\beta^\beta > 1, \quad (4.10)$$

т.е. при определенных значениях параметров построенной ПФ.

Отметим здесь, что величина  $A\alpha^\alpha\beta^\beta$ , которая является коэффициентом при размере инвестиции  $C$  в формуле (4.7) при  $n = 1$ , определяет её «подъём», т.е. экономическую целесообразность ( $A\alpha^\alpha\beta^\beta > 1$ ) или нецелесообразность ( $A\alpha^\alpha\beta^\beta < 1$ ) осуществления капиталовложения. Как было показано выше, для изучаемого предприятия  $A\alpha^\alpha\beta^\beta \approx 2,27 > 1$  и любая инвестиция будет экономически выгодной.

Следует иметь в виду, что при моделировании экономических показателей предприятия могут также применяться иные, отличные от (4.1), ПФ. Рассмотрим кратко некоторые из них.

1. *Динамическая ПФ Кобба-Дугласа.* Очевидно, что в реальной экономической действительности параметры  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ПФ (4.1) зависят от времени. С учётом этого обстоятельства динамическая функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y = A(t)K^{\alpha(t)}L^{\beta(t)}, \quad (4.11)$$

где  $t$  – переменная времени.

Однако, в практическом исследовании для нахождения зависимостей  $A(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  необходим настолько большой объем статистической информации, собранной на протяжении довольно длительного промежутка времени, что делает поставленную задачу практически неосуществимой. Также в (4.11) не нашла своего отображения возможность изменения эластичности взаимозаменяемости одного производственного ресурса другим.

2. *ПФ Кобба-Дугласа-Тинбергена.* Для коротких промежутков времени с целью учёта действия фактора времени  $t$ , которое проявляется в так называемом «нейтральном» научно-техническом прогрессе, т.е. в таком, который не относится непосредственно к ресурсам  $K$  и  $L$ , используется функция Кобба-Дугласа-Тинбергена:

$$Y = AK^\alpha L^\beta e^{\omega t}, \quad (4.12)$$

где  $\omega$  – коэффициент, отражающий влияние «нейтрального» научно-технического прогресса.

Рассмотрим для ПФ (4.12) важнейшие статистические характеристики

времени  $t$  как специфического производственного ресурса, который воплощает в себе влияние на переменную  $Y$  всех факторов, кроме  $K$  и  $L$ .

1) Абсолютная скорость роста выпуска продукции, которая происходит за счет действия факторов «нейтрального» научно-технического прогресса, определяется первой частной производной функции (4.12) по времени:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = A\omega K^\alpha L^\beta e^{\omega t} = \omega Y. \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) может интерпретироваться как своеобразная предельная «отдача времени», которая показывает, на сколько единиц в среднем изменится объём выпуска продукции при изменении времени  $t$  на единицу. Предельная «отдача времени» (4.13) является непрерывным аналогом цепного абсолютного прироста продукции  $\Pi_t$  при условии, что реальные производственные ресурсы предприятия  $K$ ,  $L$  не изменяются. В самом деле, можно записать:

$$\Delta_t = \omega Y_{t-1}. \quad (4.14)$$

2) Относительная скорость роста выпуска продукции, которая происходит за счёт действия факторов «нейтрального» научно-технического прогресса, определяется непрерывными аналогами цепных темпов роста ( $T_p$ ) и прироста ( $T_{np}$ ):

$$T_p = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \frac{Y_{t-1} + \dot{Y}_t}{Y_{t-1}} = \frac{Y_{t-1} + \omega Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = 1 + \omega; \quad (4.15)$$

$$T_{np} = T_p - 1 = 1 + \omega - 1 = \omega.$$

Отсюда становится понятным экономико-статистическое содержание параметра  $\omega$  ПФ (4.12) – это темп прироста продукции за единицу времени (например, за день, за месяц, за квартал и т.п.).

Если  $\omega > 0$ , то в единицу времени наблюдается повышение объёма выпуска продукции на  $\omega \times 100\%$  за счет действия всех факторов, кроме  $K$ ,  $L$ . При  $\omega < 0$  в единицу времени наблюдается снижение объёма выпуска продукции на  $\omega \times 100\%$  под влиянием «нейтрального» научно-технического прогресса.

Иными словами, в величине параметра  $\omega$  находят отражения все те качественные изменения, которые происходят в экономике предприятия и не связаны с производственными факторами «труд» и «капитал». Этот параметр характеризует общие экономические условия производства на конкретном предприятии в данном периоде времени.

ПФ Кобба-Дугласа-Тинбергена достаточно широко распространена в экономическом моделировании и прогнозировании экономических показателей предприятия. Оценка её параметров так же, как и параметров ПФ (4.1), предполагает предварительное логарифмирование всех исходных данных.

4. ПФ с постоянной эластичностью замещения (CES-функция), название которой происходит от английского выражения *constant elasticity substitution*:

$$Y = \gamma[(1 - \delta)K^{-p} + \delta L^{-p}]^{-v/p}, \quad (4.17)$$

где  $\gamma, \delta, p, v$  – неизвестные параметры ПФ.

Эластичность замещения ресурсов в рамках (4.17) хоть и постоянна (параметр  $\delta$ ), но может принимать любые значения, в том числе и отличные от единицы. Напомним, что для ПФ Кобба-Дугласа величина  $\delta$  фиксирована и равна 1.

Параметр  $v$  характеризует степень однородности CES-функции подобно параметру  $n = \alpha + \beta$  для ПФ Кобба-Дугласа (4.1). Здесь справедливы те же три варианта влияния масштаба производства на выпуск продукции предприятия, которые рассматривались выше.

Так же, как и ПФ Кобба-Дугласа, CES-функция является непрерывной и дважды дифференцированной. Классическая теория производства предполагает, что предельные отдачи ресурсов положительны, а их численные значения убывают. Математически это означает, что первые частные производные выпуска продукции по факторам  $K$  и  $L$  должны быть положительными, а вторые частные производные – отрицательными. Отсюда вытекают ограничения на параметры этих функций:

- 1) для ПФ Кобба-Дугласа (4.1)  $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ ;
- 2) для CES-функции (4.17)  $p/v > 0, 0 < \delta < 1, p > -1, \gamma > 0$ .

Выполнение указанных условий дает основание отнесения ПФ Кобба-Дугласа (4.1) и CES-функции (4.17) к неоклассическим. Данные неоклассические ПФ относятся к классическим функциям, если они линейно однородны, т.е. при  $n = 1, v = 1$ .

Однако, следует иметь в виду, что CES-функция вследствие своей сложности к линейному виду не приводится, поэтому расчёт её параметров осуществляется с помощью нелинейных методов оценивания – градиентных методов оптимизации, метода Маркуардта, методов прямого поиска и др. А это, естественно, требует соответствующего программного обеспечения.

5. ПФ с переменной эластичностью замещения (VES-функция) название которой происходит от английских слов *variable elasticity substitution*. Данный тип функций является модификацией CES-функции. В общем виде ПФ с переменной эластичностью ничем не отличается от формулы (4.17), однако эластичность замещения ресурсов  $\delta$  функционально зависит от определённых факторов и условий производства на предприятии.

Наиболее простым примером такой функциональной зависимости является линейная зависимость параметра  $\delta$  от капиталовооружённости труда  $K/L$ :

$$\delta = a + b(K/L), \quad (4.18)$$

где  $a, b$  – некоторые константы.

Поскольку при  $a \neq 1$  соответствующая *VES*-функция является весьма сложной и эмпирически тяжело оцениваемой, предполагают, обычно,  $a = 1$ . Результатом такого ограничения является односторонность движения параметра  $\delta$ : ни в одном направлении он не может пресечь единичной границы. При  $b > 0$  эластичность замещения производственных ресурсов предприятия больше единицы и с ростом  $K/L$  она растёт, для  $b < 0$  – наоборот, снижается.

6. *Линейная ПФ*. Данный вид функций является наиболее простым и описывается обычной множественной линейной регрессией  $Y = a_0 + a_1K + a_2L$ . Она предполагает неограниченные возможности замещения производственных ресурсов на предприятии, а эластичности замещения ресурсов равны бесконечности. Линейная ПФ представляет собой предельный случай функции с постоянной эластичностью замещения производственных ресурсов, когда все коэффициенты эластичности стремятся к бесконечности.

Следует иметь в виду, что данный тип ПФ используется в практике исследований экономической динамики довольно редко, поскольку гипотеза о линейной зависимости выпуска продукции (получения дохода) от величины  $K, L$  в большинстве случаев не является адекватной реальным производственно-экономическим процессам на предприятии.

7. *ПФ Леонтьева* имеет вид:

$$Y = \min\left(\frac{K}{a_K}, \frac{L}{a_L}\right), \quad (4.18)$$

где  $a_K$  – удельная норма затрат капитала;  
 $a_L$  – удельная норма затрат труда.

Данная ПФ отражает такие экономические ситуации, когда взаимное замещение ресурсов на предприятии является невозможным. Предельная норма замещения производственных ресурсов в рамках функции (4.18) равна бесконечности, а эластичность замещения ресурсов – нулю. Использование функции Леонтьева предполагает, что ресурсоемкость производства по каждому ресурсу фиксирована и, следовательно, объём выпуска продукции однозначно определяется количеством лимитирующего фактора.

Сущность ПФ Леонтьева заключается в том, что дополнительно привлеченный ресурс вызывает прямо пропорциональное увеличение объёма произведенной продукции (дохода) лишь до того момента, пока в наличии имеется резерв другого ресурса. Эта особенность обуславливает возможность применения данной ПФ в основном для исследования динамики экономических показателей предприятий с уже сформированной и устоявшейся структурой производства.

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

В табл. 4.6 приведены месячные данные о динамике выпуска товарной продукции и производственных ресурсов на предприятии (грн.).

Таблица 4.6

### Исходные данные для построения ПФ

| Вариант 1 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
|-----------|------------------------|-------------|-----------------------|
| Месяцы    |                        |             |                       |
| 1         | 25602                  | 449565      | 58215                 |
| 2         | 31392                  | 469655      | 68670                 |
| 3         | 27162                  | 417216      | 62820                 |
| 4         | 27159                  | 413690      | 67215                 |
| 5         | 30495                  | 457683      | 68595                 |
| 6         | 27978                  | 428368      | 66255                 |
| 7         | 27666                  | 414141      | 66435                 |
| 8         | 29426                  | 452804      | 69135                 |
| Вариант 2 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы    |                        |             |                       |
| 1         | 37462                  | 504390      | 97025                 |
| 2         | 43252                  | 526930      | 114450                |
| 3         | 39022                  | 468096      | 104700                |
| 4         | 39019                  | 464140      | 112025                |
| 5         | 42355                  | 513498      | 114325                |
| 6         | 39838                  | 480608      | 110425                |
| 7         | 39526                  | 464646      | 110725                |
| 8         | 41286                  | 508024      | 115225                |
| Вариант 3 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы    |                        |             |                       |
| 1         | 37265                  | 65790       | 166883                |
| 2         | 43055                  | 68730       | 196854                |
| 3         | 38825                  | 61056       | 180084                |
| 4         | 38822                  | 60540       | 192683                |
| 5         | 42158                  | 66978       | 196639                |
| 6         | 39641                  | 62688       | 189931                |
| 7         | 39329                  | 60606       | 190447                |
| 8         | 41089                  | 66264       | 198187                |
| Вариант 4 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы    |                        |             |                       |
| 1         | 40293                  | 87720       | 128073                |
| 2         | 46083                  | 91640       | 151074                |
| 3         | 41853                  | 81408       | 138204                |
| 4         | 41850                  | 80720       | 147873                |
| 5         | 45186                  | 89304       | 150909                |
| 6         | 42669                  | 83584       | 145761                |
| 7         | 42357                  | 80808       | 146157                |
| 8         | 44117                  | 88352       | 152097                |

| Вариант 5 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
|-----------|------------------------|-------------|-----------------------|
| Месяцы    |                        |             |                       |
| 1         | 50293                  | 142545      | 244503                |
| 2         | 56083                  | 148915      | 288414                |
| 3         | 51853                  | 132288      | 263844                |
| 4         | 51850                  | 131170      | 282303                |
| 5         | 55186                  | 145119      | 288099                |
| 6         | 52669                  | 135824      | 278271                |
| 7         | 52357                  | 131313      | 279027                |
| 8         | 54117                  | 143572      | 290367                |
| Вариант 6 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы    |                        |             |                       |
| 1         | 60296                  | 197370      | 294956                |
| 2         | 66086                  | 206190      | 347928                |
| 3         | 61856                  | 183168      | 318288                |
| 4         | 61853                  | 181620      | 340556                |
| 5         | 65189                  | 200934      | 347548                |
| 6         | 62672                  | 188064      | 335692                |
| 7         | 62360                  | 181818      | 336604                |
| 8         | 64120                  | 198792      | 350284                |
| Вариант 7 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы    |                        |             |                       |
| 1         | 60279                  | 54825       | 27167                 |
| 2         | 66069                  | 57275       | 32046                 |
| 3         | 61839                  | 50880       | 29316                 |
| 4         | 61836                  | 50450       | 31367                 |
| 5         | 65172                  | 55815       | 32011                 |
| 6         | 62655                  | 52240       | 30919                 |
| 7         | 62343                  | 50505       | 31003                 |
| 8         | 64103                  | 55220       | 32263                 |
| Вариант 8 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы    |                        |             |                       |
| 1         | 40378                  | 5482,5      | 15524                 |
| 2         | 46168                  | 5727,5      | 18312                 |
| 3         | 41938                  | 5088        | 16752                 |
| 4         | 41935                  | 5045        | 17924                 |
| 5         | 45271                  | 5581,5      | 18292                 |
| 6         | 42754                  | 5224        | 17668                 |
| 7         | 42442                  | 5050,5      | 17716                 |
| 8         | 44202                  | 5522        | 18436                 |

| Вариант 9  | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
|------------|------------------------|-------------|-----------------------|
| Месяцы     |                        |             |                       |
| 1          | 47377                  | 3289,5      | 34929                 |
| 2          | 53167                  | 3436,5      | 41202                 |
| 3          | 48937                  | 3052,8      | 37692                 |
| 4          | 48934                  | 3027        | 40329                 |
| 5          | 52270                  | 3348,9      | 41157                 |
| 6          | 49753                  | 3134,4      | 39753                 |
| 7          | 49441                  | 3030,3      | 39861                 |
| 8          | 51201                  | 3313,2      | 41481                 |
| Вариант 10 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы     |                        |             |                       |
| 1          | 40374                  | 21930       | 42691                 |
| 2          | 46164                  | 22910       | 50358                 |
| 3          | 41934                  | 20352       | 46068                 |
| 4          | 41931                  | 20180       | 49291                 |
| 5          | 45267                  | 22326       | 50303                 |
| 6          | 42750                  | 20896       | 48587                 |
| 7          | 42438                  | 20202       | 48719                 |
| 8          | 44198                  | 22088       | 50699                 |
| Вариант 11 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы     |                        |             |                       |
| 1          | 116337                 | 43860       | 62096                 |
| 2          | 133707                 | 45820       | 73248                 |
| 3          | 121017                 | 40704       | 67008                 |
| 4          | 121008                 | 40360       | 71696                 |
| 5          | 131016                 | 44652       | 73168                 |
| 6          | 123465                 | 41792       | 70672                 |
| 7          | 122529                 | 40404       | 70864                 |
| 8          | 127809                 | 44176       | 73744                 |
| Вариант 12 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы     |                        |             |                       |
| 1          | 271453                 | 153510      | 31048                 |
| 2          | 311983                 | 160370      | 36624                 |
| 3          | 282373                 | 142464      | 33504                 |
| 4          | 282352                 | 141260      | 35848                 |
| 5          | 305704                 | 156282      | 36584                 |
| 6          | 288085                 | 146272      | 35336                 |
| 7          | 285901                 | 141414      | 35432                 |
| 2013       | 298221                 | 154616      | 36872                 |

| Вариант 13 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
|------------|------------------------|-------------|-----------------------|
| Месяцы     |                        |             |                       |
| 1          | 736801                 | 186405      | 23286                 |
| 2          | 846811                 | 194735      | 27468                 |
| 3          | 766441                 | 172992      | 25128                 |
| 4          | 766384                 | 171530      | 26886                 |
| 5          | 829768                 | 189771      | 27438                 |
| 6          | 781945                 | 177616      | 26502                 |
| 7          | 776017                 | 171717      | 26574                 |
| 8          | 809457                 | 187748      | 27654                 |
| Вариант 14 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы     |                        |             |                       |
| 1          | 2559414                | 263160      | 50453                 |
| 2          | 2941554                | 274920      | 59514                 |
| 3          | 2662374                | 244224      | 54444                 |
| 4          | 2662176                | 242160      | 58253                 |
| 5          | 2882352                | 267912      | 59449                 |
| 6          | 2716230                | 250752      | 57421                 |
| 7          | 2695638                | 242424      | 57577                 |
| 8          | 2811798                | 265056      | 59917                 |
| Вариант 15 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы     |                        |             |                       |
| 1          | 13960                  | 109650      | 116,4                 |
| 2          | 16044                  | 114550      | 137,3                 |
| 3          | 14522                  | 101760      | 125,6                 |
| 4          | 14520                  | 100900      | 134,4                 |
| 5          | 15721                  | 111630      | 137,1                 |
| 6          | 14815                  | 104480      | 132,5                 |
| 7          | 14703                  | 101010      | 132,8                 |
| 8          | 15337                  | 110440      | 138,2                 |
| Вариант 16 | Товарная продукция (Y) | Капитал (K) | Фонд оплаты труда (L) |
| Месяцы     |                        |             |                       |
| 1          | 3877                   | 153510      | 2833                  |
| 2          | 4456                   | 160370      | 3341                  |
| 3          | 4033                   | 142464      | 3057                  |
| 4          | 4033                   | 141260      | 3271                  |
| 5          | 4367                   | 156282      | 3338                  |
| 6          | 4115                   | 146272      | 3224                  |
| 7          | 4084                   | 141414      | 3233                  |
| 8          | 4260                   | 154616      | 3364                  |

На основании данных табл. 4.6, соответствующих номеру Вашего варианта, осуществить:

1. Логарифмирование исходных данных и расчёт матрицы коэффициентов парной корреляции между переменными ПФ с помощью редактора *Excel* (результаты представить в виде таблиц типа табл. 4.2, 4.3).

2. Расчёт коэффициентов ПФ Кобба-Дугласа с помощью редактора *Excel*, потенцирование величины  $A'$  и запись в явном виде полученной модели по типу уравнения (4.4).
3. Определение основных экономико-математических характеристик производства на изучаемом предприятии с помощью построенной ПФ (результаты представить в виде таблицы типа табл. 4.5).
4. Количественную и качественную интерпретацию всех найденных выше экономико-математических характеристик производства на изучаемом предприятии.
5. Оценку оптимальной пропорции, в которой следует инвестировать средства в живой и овеществлённый труд с целью обеспечения максимального выпуска товарной продукции на предприятии.
6. Использование построенной модели для отыскания границ величины производственной инвестиции на предприятии, обеспечивающих её прибыльность.

По каждому пункту дать краткие математико-статистические и экономические пояснения и выводы.

## ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 4

1. Готліб І. Г., Янковий В. О. Аналіз впливу витрат праці і капіталу на випуск хлібопекарської продукції за допомогою виробничої функції / І. Г. Готліб, В. О. Янковий // Зернові продукти і комбікорми. – 2006. – № 3. – С. 12-16.
2. Економетрія // Навч. посібник за ред. А. Ф. Кабака, О. В. Проценка. – Одеса : НМЦО-ОДЕУ, 2003. – 562 с.
3. Клейнер Г. Б. Производственные функции : Теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
4. Теория и практика статистического моделирования экономики / Под ред. Е. М. Четыркина, А. Класа. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 272 с.
5. Терехов Л. Л. Производственные функции. – М.: Статистика, 1974. – 128 с.
6. Черевко Є. В. Оптимальна фондоозброєність та початковий капітал / Є. В. Черевко // Вісник соціально-економічних досліджень : зб. наук. пр. – Одеса, 2007. – Вип. 26. – С. 359-365.
7. Янковий О. Г. Виробнича функція Кобба-Дугласа-Тінбергена : теоретичні та прикладні економічні аспекти / О. Г. Янковий // Вісник соціально-економічних досліджень: зб. наук. пр. – Одеса, 2005. – № 20. – С. 395-400.
8. Янковой А. Г. Основы эконометрического моделирования. – Одесса, ротапринт ОГЭУ, 2006. – 133 с.
9. Янковий О. Г., Мельник Н. В., Янковий В. О. Зони беззбиткового інвестування в харчову промисловість України на основі виробничої функції // Сучасна економіка : Випуск 2. – К.: ДІПК, 2010. – С. 8-19.
10. Янковий В. О. Застосування динамічної виробничої функції у задачах економічного аналізу та управління / В. О. Янковий // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. – 2005. – № 3 (66). – Т. 1. – С. 225-229.
11. Янковий В. О. Прогнозування зони беззбитковості інвестицій у хлібопекарську промисловість за допомогою виробничої функції / В. О. Янковий // Вісник соціально-економічних досліджень: зб. наук. пр. – Одеса, 2006. – № 22. – С. 410-414.
12. Янковий В. О. Виробнича функція як інструмент економічного аналізу хлібопекарських підприємств / В. О. Янковий // Наукові праці ОНАХТ : зб. наук. пр. – Одеса, 2006. – Вип. 29, Т. 2. – С. 308-313.
13. Янковий В. О. Модель беззбитковості інвестування в м'ясопереробну промисловість / В. О. Янковий // Економіка харчової промисловості. – 2010. – № 4 (8). – С. 16-21.

## Раздел II. АНАЛИЗ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ПРЕДПРИЯТИЯ

### 5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРИРОСТА РЕЗУЛЬТАТИВНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПО ФАКТОРАМ С ПОМОЩЬЮ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

Одной из важнейших задач, стоящих перед экономической наукой, является выявление причинно-следственных связей между показателями предприятия, объясняющих его поведение. Это позволяет открывать закономерности функционирования и развития производственно-экономической системы, использовать их для управления в соответствии с заранее заданными целями и установками. При этом следует иметь в виду, что между технико-экономическими показателями предприятия наблюдаются два основных типа причинно-следственных связей: функциональные и стохастические (вероятностные).

При функциональной зависимости каждому значению фактора  $X$  соответствует одно или несколько, но вполне определенных, т.е. с вероятностью 1, значений результативного признака  $Y$ . Между ними существует взаимно однозначное соответствие, например, в виде функции  $Y = f(X_1, X_2)$ . Так, уровень производительности труда на предприятии  $q$  полностью определяется величиной выработанной за год продукции  $Q$  и средней списочной численностью работников  $T$  ( $q = Q/T$ ).

Функциональная зависимость  $Y$  от  $X_1, X_2$  в силу жёсткой, детерминированной причинности, обусловленной действием лишь главных факторов, проявляется в каждом отдельном наблюдении, не требует образования статистической совокупности объектов. В самом деле, для любого предприятия уровень производительности труда  $q$  будет определяться приведенной выше формулой. Ясно, что, выявив один раз объективно существующую функциональную связь, её можно многократно использовать в дальнейшем при решении задач экономического анализа, моделирования и прогнозирования.

В реальной экономической действительности величину  $Y$  обычно определяет намного большее количество факторов ( $X_1, X_2, \dots, X_m$ ). При этом наряду с главными, важнейшими аргументами действуют также второстепенные и случайные (субъективные, трудноизмеримые, природно-климатические) причины. Они вносят элемент неопределённости, неточности в функцию  $Y = f(X_1, X_2)$ , придавая ей характер вероятностной зависимости.

Для отражения действия указанных возмущений вводится понятие случайной компоненты  $\varepsilon$ , которая аккумулирует влияние на  $Y$  всех случайных факторов. Тогда стохастическую связь между изучаемыми признаками можно представить следующим образом:  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m) + \varepsilon$ . В простейшем парном случае, когда исследуется взаимосвязь пары переменных  $Y$  и  $X$ , стохастическая зависимость выражается так:  $Y = f(X) + \varepsilon$ .

Так, в рыночной экономике наблюдаются достаточно тесные вероятностные зависимости между ценой и спросом (предложением) данного товара, между величиной производительности труда работников предприятия и уровнем их оплаты.

Следует отметить, что оба обсуждаемых вида причинно-следственных связей между технико-экономическими показателями предприятия носят объективный характер, не зависят от воли и познания их исследователем. Функциональные зависимости (в силу их жёсткости, детерминированности, проявления в каждом отдельном наблюдении) открыты и изучены значительно лучше по сравнению со стохастическими связями, которые вследствие действия случайных возмущений представляются более скрытыми, менее исследованными.

Поэтому вполне понятным представляется интерес учёных и практиков к познанию функциональных и вероятностных связей, особенно в экономике предприятия, т.к. их выявление, изучение и моделирование даёт возможность принимать обоснованные решения в процессе управления, при проведении экономического анализа и прогнозирования.

При исследовании указанных видов причинно-следственных связей с целью количественной оценки влияния отдельных факторов на изменение результативных экономических показателей предприятия используются разнообразные модели, которые по характеру причинно-следственных зависимостей, постулируемых между переменными, также можно условно разделить на два класса: 1) вероятностные; 2) детерминированные.

В основе вероятностных моделей лежит предпосылка о стохастической (корреляционной или регрессионной) связи между зависимой переменной  $Y$  и факторами  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , её обуславливающими. Иными словами, наряду с основными решающими факторами рассматриваются также второстепенные и случайные причины, определяющие вариацию результативного признака во времени. Это достаточно адекватная постановка задачи, поскольку в реальной действительности действует именно такой механизм формирования уровня большинства технико-экономических показателей предприятия.

Однако, следует помнить следующее: согласно закону больших чисел для успешного построения вероятностных моделей любых экономических показателей необходима достаточная информационная база в виде временных рядов большой длины ( $N > 10$ ). В противном случае (на коротких рядах динамики) стохастические зависимости между переменными не в состоянии проявиться в явном виде. Этот факт является основной причиной, по которой данные модели довольно редко используются в финансово-экономическом анализе показателей предприятия, поскольку исследователь обычно располагает информацией всего за 2-3 периода – чаще всего за отчетный и базисный (плановый) год.

Детерминированные модели основаны на предпосылке о том, что временная вариация результативного экономического признака функционально обусловлена действием только нескольких неслучайных факторов. Хотя указанная гипотеза и не совсем адекватна реальной экономической

действительности, но она позволяет строить детерминированные модели факторного анализа лишь на базе двух наблюдений, поскольку функциональные связи проявляются в каждом отдельном случае, для каждого объекта исследования. Именно поэтому указанные модели получили широкое распространение в качестве главного инструмента факторного финансово-экономического анализа показателей деятельности предприятия.

Среди детерминированных моделей наиболее популярными являются следующие четыре вида, которые отличаются математической формой связи между переменными.

#### 1. Аддитивные модели

$$Y = \sum_{j=1}^m X_j = X_1 + X_2 + \dots + X_m. \quad (5.1)$$

#### 2. Мультипликативные модели

$$Y = \prod_{j=1}^m X_j = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m. \quad (5.2)$$

#### 3. Кратные модели

$$Y = \frac{X_1}{X_2}, \quad Y = \frac{\sum_{j=1}^m X_j}{X_{j+1}}, \quad Y = \frac{X_1}{\sum_{j=2}^m X_j}, \quad Y = \frac{\sum_{j=1}^m X_j}{\sum_{j=1}^n X_j}. \quad (5.3)$$

4. Смешанные (комбинированные) модели, которые представляют собой комбинацию предыдущих моделей.

$$Y = \frac{X_1 + X_2}{X_3}, \quad Y = (X_1 + X_2)X_3. \quad (5.4)$$

Рассмотрим применение некоторых из указанных моделей на примере исследования показателей бухгалтерской прибыли предприятия. В факторном финансово-экономическом анализе прибыли чаще других применяются аддитивные (5.1) и мультипликативные модели (5.2), когда результативный показатель  $Y$  рассматривается как сумма или произведение нескольких факторов. Например, в соответствии с содержательной формулой валовой прибыли ( $Y_B$ ) и на основе информации формы № 2 «Отчет о финансовых результатах» предприятия она может быть представлена в виде следующей аддитивной модели:

$$Y_B = X_1 - X_2, \quad (5.5)$$

где  $X_1$  – чистый доход предприятия;

$X_2$  – себестоимость реализованной продукции (работ, услуг).

Чистая прибыль ( $Y_ч$ ) анализируется с помощью аддитивной детерминированной модели

$$Y_ч = X_3 + X_4 - X_5 - X_6, \quad (5.6)$$

где  $X_3$  – финансовые результаты от обычной деятельности;  
 $X_4$  – чрезвычайные доходы;  
 $X_5$  – чрезвычайные расходы;  
 $X_6$  – налоги на чрезвычайные доходы.

Аналогично строятся аддитивные модели таких показателей, как финансовые результаты от операционной деятельности, финансовые результаты от обычной деятельности до налогообложения, финансовые результаты от обычной деятельности после налогообложения и др. Указанные модели являются обычным инструментом факторного финансово-экономического анализа показателей прибыли предприятия и не вызывают никаких методических трудностей.

Дело в том, что одним из важнейших вопросов исследования любого экономического показателя предприятия является определение величины влияния отдельных факторов на его прирост. Поскольку прирост результативного признака  $\Delta Y$  в аддитивных моделях состоит из приростов соответствующих факторов  $\Delta Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), то никаких методических проблем при этом не возникает, т.к. можно записать следующее балансовое соотношение:

$$\Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \dots + \Delta Y_m = \Delta Y, \quad (5.7)$$

которое и даёт искомое разложение общего прироста соответствующего показателя прибыли по факторам.

Что касается мультипликативных моделей типа (5.2), то они также очень широко распространены в факторном финансово-экономическом анализе показателей предприятия и, в частности, при исследовании его прибыли. Например, в простейшем двухфакторном случае ( $Y = X_1 \times X_2$ ) валовую прибыль  $Y_B$  можно представить как произведение физического объёма товарной продукции ( $X_1 = Q$ ) и её прибылеёмкости ( $X_2 = Y_B/Q$ ). При этом правая часть построенной модели должна тождественно равняться её левой части:  $Q \times (Y_B/Q) = Y_B$ .

Исходная факторная система взаимосвязанных показателей может быть искусственно усложнена самим исследователем, если правую часть модели умножить на дробь, равную единице. Данный подход позволяет перейти от двухфакторной модели к трёхфакторной, от трёхфакторной модели к четырёхфакторной и т.д. Этот переход может быть реализован двумя способами, которые будут проиллюстрированы на предыдущем примере двухфакторной модели валовой прибыли  $Y_B$ .

**Первый способ.** В модель вводится новый экономический показатель. Пусть им будет средняя годовая стоимость основных производственных фондов (ОПФ) предприятия  $F$ . Очевидно, что умножение правой части модели  $Y_B = Q \times (Y_B/Q)$  на дробь  $F/F = 1$  не меняет приведенного выше тождества. При этом новый сомножитель  $F/F$  в правой части может

взаимодействовать как с первым фактором исходной модели  $Q$ , так и со вторым –  $Y_B/Q$ . Рассмотрим оба случая:

1)  $Y_B = Q \times (F/F) \times (Y_B/Q) = F \times (Q/F) \times (Y_B/Q)$  и получаем трёхфакторную модель валовой прибыли  $Y_B = X_1 \times X_2 \times X_3$ . В ней  $X_1 = F$ ,  $X_2 = Q/F$  – фондоотдача, образованная путём перестановки первых двух сомножителей  $Q$  и  $F$ ,  $X_3 = Y_B/Q$  – прибылеёмкость товарной продукции. Правая часть построенной модели тождественно равна её левой части:  $F \times (Q/F) \times (Y_B/Q) = Y_B$ .

2)  $Y_B = Q \times (Y_B/Q) \times (F/F) = Q \times (F/Q) \times (Y_B/F)$  и получаем ещё одну трёхфакторную модель валовой прибыли  $Y_B = X_1 \times X_2 \times X_3$ . В ней  $X_1 = Q$ ,  $X_2 = F/Q$  – фондоёмкость товарной продукции, образованная путём перестановки последних двух сомножителей  $Y_B$  и  $F$ ,  $X_3 = Y_B/F$  – рентабельность ОПФ. Легко показать, что правая часть построенной модели тождественно равна её левой части:  $Q \times (F/Q) \times (Y_B/F) = Y_B$ .

Таким образом, первый способ (умножение правой части модели на дробь  $X/X$  и её взаимодействие с двумя исходными факторами) даёт возможность получить две новые трёхфакторные модели. Очевидно, что если исходная модель трёхфакторная, то в результате образуются три новые четырёхфакторные модели и т.д. Вводя в исходную модель другие экономические показатели, и действуя аналогично, получают новые дополнительные модели более высоких порядков.

**Второй способ.** В модель вводится новый структурный показатель, связанный с объёмным фактором (в данном примере с  $Q$ ). Он выглядит как отношение  $Q'/Q$  (где  $Q'$  – реализованная продукция предприятия) и называется коэффициентом реализации. Но для того, чтобы правая часть исходной двухфакторной модели не изменилась, умножение происходит на дробь  $Q'Q/QQ' = 1$ . Новая трёхфакторная модель валовой прибыли  $Y_B = X_1 \times X_2 \times X_3$  имеет вид:  $Y_B = Q \times (Y_B/Q) \times (Q'Q/QQ') = Q \times (Q'/Q) \times (Y_B/Q) \times (Q/Q') = Q \times (Q'/Q) \times (Y_B/Q')$ .

В ней  $X_1 = Q$ ,  $X_2 = Q'/Q$  – коэффициент реализации, образованный путём перестановки данного сомножителя на вторую позицию в правой части,  $X_3 = Y_B/Q'$  – прибылеёмкость реализованной продукции. Правая часть построенной модели снова тождественно равна её левой части:  $Q \times (Q'/Q) \times (Y_B/Q') = Y_B$ .

Оба указанных способа усложнения модели позволяют детализировать финансово-экономический анализ результативного признака  $Y$ . Данный процесс обычно ограничен только отсутствием информации о дополнительных экономических показателях предприятия.

Однако, следует иметь в виду, что при использовании данных моделей возникает методологическая проблема разложения общего прироста результативного признака  $\Delta Y$  на частные приросты по факторам вследствие того, что мультипликативная зависимость предполагает наличие наряду с аддитивным эффектом влияния факторов  $X_1, X_2, \dots, X_m$  на  $Y$  также и дополнительного синергетического эффекта их взаимодействия. Поэтому балансовое соотношение (5.7) в этом случае, вообще говоря, не выполняется.

Например, если постулируется наиболее простая двухфакторная модель  $Y = a \times b$ , то прирост  $\Delta Y$  за некоторый период времени выражается следующей формулой, которая геометрически интерпретируется с помощью знака Варзара (рис. 5.1):

$$\Delta Y = a_0 \Delta b + b_0 \Delta a + \Delta a \Delta b, \quad (5.8)$$

где  $\Delta a, \Delta b$  – приросты факторов;  
 $a_0, b_0$  – базисные значения факторов.

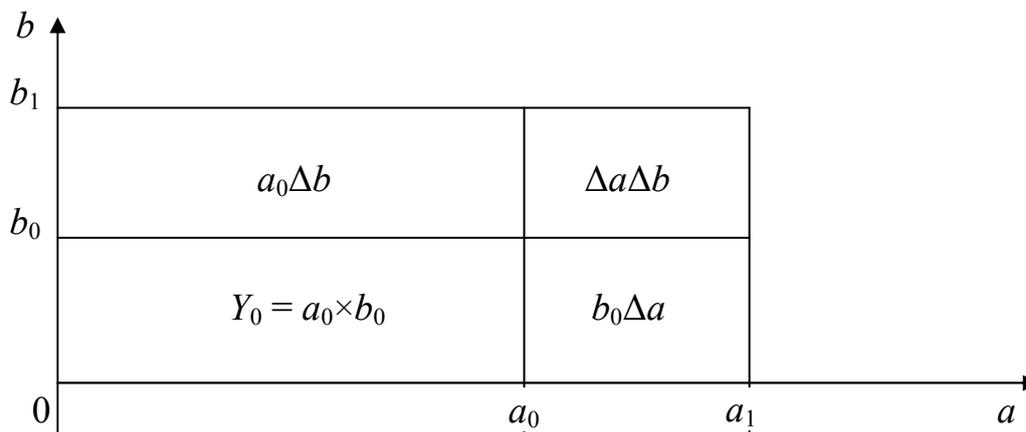


Рис. 5.1. Знак Варзара, иллюстрирующий разложение прироста результативного показателя  $\Delta Y$  по двум факторам

Очевидно, что произведение факторов  $a \times b$ , т.е. результативный показатель  $Y$  на рис. 5.1, будет изображаться площадью соответствующего прямоугольника. Например, площадь всего прямоугольника, т.е.  $a_1 \times b_1 = Y_1$ , представляет собой отчетный уровень результативного показателя, площадь прямоугольника в нижней левой части соответствует величине базисного уровня  $Y_0$ . В левой верхней части знака находится прямоугольник, площадь которого эквивалентна приросту  $Y$  за счет изменения фактора  $b$ , в правой нижней части – приросту  $Y$  за счёт изменения фактора  $a$ . Площадь правого верхнего прямоугольника отражает дополнительный прирост  $Y$  – синергетический эффект взаимодействия исходных факторов  $a$  и  $b$ .

В связи с этим возникает ряд фундаментальных вопросов, например: к воздействию какого фактора отнести величину этого прироста  $\Delta a \Delta b$ ? Или его следует рассматривать отдельно, не относя ни к одному из исходных факторов? Необходимо отметить, что поставленные методологические вопросы до сих пор остаются дискуссионными и не имеют однозначного и чёткого ответа в современной экономической литературе. На данный момент среди всего разнообразия предложенных подходов к разложению общего прироста результативного признака по факторам при использовании в финансово-экономическом анализе мультипликативных моделей типа (5.2) выделяются два основных направления – статистическое и математическое.

Наиболее популярными являются статистические подходы, среди которых выделяются метод цепных подстановок (или метод выявления

взаимосвязанного влияния факторов) и метод выявления изолированного влияния факторов. Для простейшей двухфакторной модели  $Y = a \times b$ , которая проиллюстрирована на рис. 5.1, метод цепных подстановок даёт следующее решение поставленной задачи:  $\Delta Y_a = b_0 \Delta a$  (правый нижний прямоугольник на рис. 4.1),  $\Delta Y_b = a_0 \Delta b + \Delta a \Delta b$  (два верхних прямоугольника на рис. 5.1), т.е. синергетический эффект взаимодействия исходных факторов  $\Delta a \Delta b$  присоединяется к вкладу второго фактора  $b$ . В методе выявления изолированного влияния факторов для этой же модели эффект взаимодействия исходных факторов  $\Delta a \Delta b$  рассматривается отдельно, а вклады каждого факторы равны:  $\Delta Y_a = b_0 \Delta a$ ,  $\Delta Y_b = a_0 \Delta b$ .

К математическим относятся дифференциальный и интегральный методы, метод логарифмирования, метод Галасюка. Последний учитывает изменения исследуемых факторов в периодах, предшествовавших анализируемому. При этом анализ дифференциального метода разложения общего абсолютного прироста результативного экономического признака показал, что его результаты полностью совпадают с результатами статистического метода выявления изолированного влияния факторов. Сущность интегрального метода заключается в том, что синергетический эффект взаимодействия исходных факторов  $\Delta a \Delta b$  распределяется между ними поровну, т.е.  $\Delta Y_a = b_0 \Delta a + \Delta a \Delta b / 2$ ,  $\Delta Y_b = a_0 \Delta b + \Delta a \Delta b / 2$ . А метод логарифмирования данную задачу распределения  $\Delta a \Delta b$  между исходными факторами решает пропорционально логарифмам их индексов –  $\ln(i_a)$ ,  $\ln(i_b)$ .

Не теряя общности, рассмотрим преимущества и недостатки двух статистических методов разложения общего прироста результативного экономического показателя по факторам на примере четырёхфакторной модели, которую представим в виде  $Y = a \times b \times c \times d$ .

**Метод цепных подстановок** состоит в поэтапном устранении влияния на  $Y$  всех факторов, кроме одного. При этом предполагается, что факторы  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  меняются не одновременно, а в определенной последовательности: сначала меняется первый, а все остальные остаются без изменения, затем меняется второй и т.д. при неизменности остальных факторов. В настоящее время данный метод доминирует в теории и практике статистики и экономического анализа всех постсоветских стран, является основным подходом к исследованию абсолютных и относительных вкладов отдельных факторов в изменение результативного экономического признака.

При этом вначале строится индекс (сводный или индивидуальный со статистическими весами) результативного экономического показателя  $Y$ . Поскольку в обсуждаемой задаче проведения факторного анализа прироста  $\Delta Y$  используются данные одного предприятия, то применяется именно индивидуальный индекс:

$$I_Y = \frac{Y_1}{Y_0} = \frac{a_1 b_1 c_1 d_1}{a_0 b_0 c_0 d_0}. \quad (5.9)$$

Метод цепных подстановок исходит из того, что признак  $a$  является первичным, объёмным, выраженным в виде абсолютной величины. Признак

$b$  является вторичным по отношению к  $a$ , но первичным по отношению к  $c$ . Признак  $c$  является вторичным по отношению к  $b$ , но первичным по отношению к  $d$ . Факторы  $b$  и  $c$ , часто являются относительными величинами структуры, отражая удельный вес данных экономических показателей в некоторой среде. Фактор  $d$  – обычно качественный относительный показатель.

Таким образом, эта система отражает гипотезу о первоочередном изменении первичного по отношению ко всем другим объёмного признака  $a$ . Следующие изменения всех других признаков происходят с учетом его изменения и т.д. При этом факторные индексы строятся по такой схеме:

$$i_a = \frac{a_1 b_0 c_0 d_0}{a_0 b_0 c_0 d_0}, \quad i_b = \frac{a_1 b_1 c_0 d_0}{a_1 b_0 c_0 d_0}, \quad i_c = \frac{a_1 b_1 c_1 d_0}{a_1 b_1 c_0 d_0}, \quad i_d = \frac{a_1 b_1 c_1 d_1}{a_1 b_1 c_1 d_0}. \quad (5.10)$$

Иными словами, факторы, влияние которых уже учтено, фиксируются в числителе и знаменателе индекса на отчётном уровне, а факторы, вклад которых еще предстоит измерить, – на базисном уровне. Отметим, что факторный индекс объёмного показателя  $a$  в выражении (5.10) строится по принципу Ласпейреса (статистические веса зафиксированы на базисном уровне), а факторный индекс качественного показателя  $d$  – по принципу Пааше (статистические веса зафиксированы на отчётном уровне). Подобный порядок построения индексов является общепринятым в украинской статистике.

Учитывая возможность сокращения зафиксированных статистических весов в факторных индексах (5.10), справедливо соотношение:

$$i_Y = i_a \times i_b \times i_c \times i_d. \quad (5.11)$$

Общий абсолютный прирост результативного признака  $\Delta Y$ , а также частные приросты за счёт каждого фактора ( $\Delta Y_a, \Delta Y_b, \Delta Y_c, \Delta Y_d$ ) находятся как разности между числителем и знаменателем соответствующих индексов модели (5.9), (5.10) и могут быть представлены в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \Delta Y = a_1 b_1 c_1 d_1 - a_0 b_0 c_0 d_0 \\ \Delta Y_a = a_1 b_0 c_0 d_0 - a_0 b_0 c_0 d_0 \\ \Delta Y_b = a_1 b_1 c_0 d_0 - a_1 b_0 c_0 d_0 \\ \Delta Y_c = a_1 b_1 c_1 d_0 - a_1 b_1 c_0 d_0 \\ \Delta Y_d = a_1 b_1 c_1 d_1 - a_1 b_1 c_1 d_0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Поскольку числитель первого факторного индекса в формулах (5.10) совпадает со знаменателем второго индекса, числитель второго индекса совпадает со знаменателем третьего индекса и т.д., образуя цепочку (откуда и название метода), то на базе формул (5.12) легко показать справедливость балансового соотношения (5.7):

$$\Delta Y_a + \Delta Y_b + \Delta Y_c + \Delta Y_d = a_1 b_1 c_1 d_1 - a_0 b_0 c_0 d_0 = Y_1 - Y_0 = \Delta Y. \quad (5.13)$$

Общий и частные относительные приросты в процентах определяются путем деления соответствующих абсолютных приростов на базисный уровень результативного признака  $Y_0 = a_0 b_0 c_0 d_0$  и умножения на 100. Из формулы (5.13) следует, что при применении метода цепных подстановок сумма частных относительных приростов  $\Delta Y_a/Y_0 + \Delta Y_b/Y_0 + \Delta Y_c/Y_0 + \Delta Y_d/Y_0$  равна общему относительному приросту  $\Delta Y/Y_0$ .

Совпадение порядка образования факторных индексов (5.10) с правилами их построения, принятыми в украинской статистике, а также выполнение балансового соотношения (5.13) считаются главными преимуществами метода цепных подстановок по сравнению со всеми другими подходами к факторному финансово-экономическому анализу на базе мультипликативных моделей. Их кратко можно сформулировать так: при использовании метода цепных подстановок число частных абсолютных (относительных) приростов результативного признака  $Y$  равно числу исходных факторов, а сумма абсолютных (относительных) приростов равна общему абсолютному (относительному) приросту  $\Delta Y$ .

Следует отметить, что в экономической практике можно встретить несколько разновидностей данного способа разложения общего абсолютного (относительного) прироста результативного признака  $\Delta Y$  ( $\Delta Y/Y_0$ ) по факторам. Среди них наиболее известными являются метод абсолютных разностей, метод относительных разностей, метод процентных разностей.

**Замечание.** При конструировании правой (факторной) части модели в случае применения метода цепных подстановок необходимо строго соблюдать следующее требование: каждый сомножитель (группа сомножителей, взятая в любой последовательности в цепочке факторов), должен иметь самостоятельный экономический смысл и реально влиять на уровень исследуемого показателя.

Например, в предыдущей трёхфакторной модели валовой прибыли предприятия ( $Y_B = F \times Q / F \times Y_B / Q$ ) каждый из исходных факторов (средний годовой размер основных производственных фондов  $F$ , фондоотдача  $Q/F$ , прибылеёмкость продукции  $Y_B/Q$ ), безусловно, определяют размер валовой прибыли любого предприятия. При этом первые два сомножителя дают в производстве объём товарной продукции  $Q$ , вторые два сомножителя – рентабельность основных производственных фондов  $Y_B/F$ , т.е. являются вполне реальными экономическими показателями, определяющими изменение валовой прибыли. Следовательно, указанное требование выполнено, а полученная мультипликативная модель валовой прибыли построена верно.

Недостатком метода цепных подстановок считается тот факт, что, во-первых, синергетический эффект взаимодействия между собой всех исходных факторов не выделяется в чистом виде, а присоединяется к вкладу всех факторов, кроме первого объёмного фактора  $a$ . Это ведёт к определённому искажению истинной роли  $b$ ,  $c$ ,  $d$  в изменении величины результативного экономического показателя  $Y$ . Причём распределение данного эффекта между факторами  $b$ ,  $c$ ,  $d$  происходит в довольно сложной

пропорции. Например, отношение взаимодействий, присоединенных к вкладам факторов  $b$  и  $c$ , равно  $\Delta a \times \Delta b \times c_0 / \Delta ab \times \Delta c$ , где  $\Delta ab = a_1 b_1 - a_0 b_0$ .

Во-вторых, вклад каждого фактора  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  зависит от его местоположения в правой (факторной) части модели. Так, если расположить их в обратном порядке ( $Y = d \times c \times b \times a$ ), учитывая реалии инвестиционно-инновационного развития современного предприятия, когда качественные скачки, обусловленные внедрением новейших технологий и технических средств производства, а также автоматизированных систем управления, предшествуют количественным изменениям объёмных показателей, то роль каждого фактора, очевидно, будет отличаться от вкладов, найденных по формулам (5.12).

Проиллюстрируем практическое применение изложенного выше подхода к построению мультипликативной модели прибыли предприятия с целью её факторного финансово-экономического анализа за два периода – базисный и отчётный. В качестве инструмента такого анализа применим четырёхфакторную модель, в которой переменные имеют следующий экономический смысл:

$Y$  – валовая прибыль, тыс. грн.;

$a$  – средняя годовая стоимость основного капитала, тыс. грн.;

$b$  – удельный вес стоимости машин и оборудования в общей стоимости основного капитала;

$c$  – капиталотдача активной части основного капитала, грн./грн.;

$d$  – прибылеёмкость реализованной продукции, грн./грн.

Здесь фактор  $a$  – объёмный, характеризующий размер основного капитала предприятия, который используется в процессе производства продукции (работ, услуг). Фактор  $b$  – структурный, отображающий структуру основного капитала, а именно, долю его активной части. Факторы  $c$  и  $d$  – качественные, они измеряют эффективность применения машин и оборудования в производстве и долю валовой прибыли в выручке от реализации продукции предприятия, т.е. его ценовую конкурентоспособность на соответствующем рынке.

Очевидно, что все формальные требования, предъявляемые к построению такого рода моделей при использовании метода цепных подстановок, выполнены: 1) левая часть ( $Y$ ) равняется правой части ( $a \times b \times c \times d$ ); 2) любая последовательность сомножителей в правой части имеет реальный экономический смысл; 3) каждый фактор действительно влияет на уровень изучаемого результативного показателя – валовой прибыли предприятия.

Информация по указанным факторам и их составным показателям содержится в формах финансовой отчетности № 1 «Баланс», № 2 «Отчет о финансовых результатах», № 5 «Примечания к годовой финансовой отчетности». Исходные данные для построения искомой четырёхфакторной модели приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Исходные данные для факторного экономического анализа  
валовой прибыли предприятия

| Периоды  | Показатели и факторы            |  |   |  |  |  |  |
|----------|---------------------------------|--|---|--|--|--|--|
|          | валовая прибыль $Y$ , тыс. грн. | средняя годовая стоимость основного капитала $a$ , тыс. грн. | средняя годовая стоимость машин и оборудования, тыс. грн. | доля машин и оборудования в стоимости основного капитала $b$ (ст. 3 : 2) | выручка от реализации продукции, тыс. грн. | капиталоотдача активной части основного капитала $c$ , грн./грн. (ст. 5 : 3) | прибылеёмкость реализованной продукции $d$ , грн./грн. (ст. 1 : 5) |
| А        | 1                               | 2  | 3   | 4  | 5  | 6  | 7  |
| базисный | 1134                            | 8300,8   | 5622,1  | 0,67730  | 46790                                      | 8,32251  | 0,02424  |
| отчётный | 1115                            | 11032  | 6783  | 0,61485  | 42603                                      | 6,28085  | 0,02617  |
| $i$      | 0,98325                         | 1,32903  | 1,20649   | 0,90780  | 0,91052                                    | 0,75468  | 1,07962  |

В последней строке табл. 5.1 приведены индивидуальные индексы всех исследуемых показателей. Они свидетельствуют о том, что валовая прибыль предприятия за изучаемый период времени уменьшилась на 1,7 %, что явилось следствием, с одной стороны, повышения средней годовой стоимости основного капитала (на 32,9 %) и прибылеёмкости реализации (почти на 8 %). А, с другой стороны, снижения удельного веса активной части основного капитала (на 9,2 %) и его капиталотдачи (на 24,5 %).

На основе данных табл. 5.2 были рассчитаны общий и частные приросты валовой прибыли предприятия в абсолютном и относительном выражении с помощью метода цепных подстановок на базе формул (5.12). Их результаты представлены в табл. 5.2.

Так, общий абсолютный прирост валовой прибыли предприятия согласно данным табл. 5.1 равняется

$$\Delta Y = Y_1 - Y_0 = 1115 - 1134 = -19 \text{ (тыс. грн.)},$$

Таблица 5.2

Результаты разложения абсолютного и относительного прироста валовой прибыли предприятия по факторам по методу цепных подстановок

| Разложение            | $\Delta Y$ | $\Delta Y_a$ | $\Delta Y_b$ | $\Delta Y_c$ | $\Delta Y_d$ |
|-----------------------|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| абсолютное, тыс. грн. | -19        | 373,378      | -138,99      | -335,69      | 82,299       |
| относительное, %      | -1,675     | 32,926       | -12,256      | -29,602      | 7,257        |

а частный абсолютный прирост валовой прибыли за счёт фактора  $a$  (изменения средней годовой стоимости основного капитала) определяется так:

$$\Delta Y_a = a_1 b_0 c_0 d_0 - a_1 b_0 c_0 d_0 = a_1 b_0 c_0 d_0 - Y_0 = 11032 \times 0,67730 \times 8,32251 \times 0,02424 - 1134 = 373,378 \text{ (тыс. грн.) и т.д.}$$

Общий и частные относительные приросты прибыли в процентах находятся путём деления соответствующих абсолютных приростов на базисный уровень результативного показателя  $Y_0 = 1134$  и умножения полученных частных на 100.

Так, общий относительный прирост валовой прибыли предприятия составляет

$$100 \times \Delta Y / Y_0 = 100 \times (-19) / 1134 = -1,675 \%,$$

а частный относительный прирост валовой прибыли за счёт фактора  $a$  составляет:

$$100 \times \Delta Y_a / Y_0 = 100 \times (373,378) / 1134 = 32,926 \% \text{ и т.д.}$$

Проверка балансового соотношения (5.13) показывает, что

$$\Delta Y_a + \Delta Y_b + \Delta Y_c + \Delta Y_d = 373,378 - 138,99 - 335,69 + 82,299 = -19,003 \approx \Delta Y.$$

Отклонение фактической суммы частных абсолютных приростов прибыли предприятия от её истинного значения на 0,003 тыс. грн. обусловлено округлением отдельных величин  $\Delta Y_i$  ( $i = a, b, c, d$ ).

Для частных относительных приростов валовой прибыли за счет отдельных факторов баланс также выполняется:

$$\Delta Y_a / Y_0 + \Delta Y_b / Y_0 + \Delta Y_c / Y_0 + \Delta Y_d / Y_0 = 32,926 - 12,256 - 29,602 + 7,257 = -1,675.$$

При этом для индивидуальных индексов из табл. 5.1 справедливо соотношение (5.11):

$$i_Y = i_a \times i_b \times i_c \times i_d = 1,32903 \times 0,90780 \times 0,75468 \times 1,07962 = 0,98301.$$

Расхождение фактического произведения индивидуальных индексов от его истинного значения на 0,00024 обусловлено округлением отдельных величин  $i_a, i_b, i_c, i_d$ .

Экономический анализ данных табл. 5.2, проведенный по результатам метода цепных подстановок, позволил выявить позитивное влияние факторов  $a$  и  $d$  и негативное влияние факторов  $b$  и  $c$  на динамику валовой прибыли предприятия в изучаемом периоде времени, т.е. были количественно подтверждены выводы индексного анализа из табл. 5.1.

Таким образом, метод цепных подстановок обеспечил разложение общего прироста валовой прибыли предприятия на четыре частных прироста за счёт каждого исходного фактора, сумма которых равна общему приросту результативного экономического показателя.

До сих пор речь шла о правилах построения и применения детерминированных мультипликативных моделей абсолютных объёмных экономических показателей. При конструировании аналогичных моделей результативных качественных признаков, которые представлены в виде относительных величин  $Y/X$ , например, рентабельности реализованной продукции, производительности труда, фондоотдачи и т.п., ситуация несколько усложняется вследствие того, что в правой (факторной) части таких моделей обычно отсутствуют абсолютные объёмные показатели. В данной ситуации рекомендуется поступать следующим образом:

- представлять изучаемый качественный показатель в виде произведения двух сомножителей  $Y \times (1/X)$ ;
- по изложенным выше правилам строить детерминированную модель абсолютного экономического показателя  $Y$ , в которой не фигурировал бы в роли фактора правой части объёмный признак  $X$ ;
- правую и левую части полученной модели абсолютного объёмного экономического показателя  $Y$  умножить на величину  $1/X$ .

Пусть необходимо построить двухфакторную модель производительности труда. Действуя по указанной схеме, получим:

- 1) производительность труда  $Q/T$  представим в виде  $Q \times (1/T)$ , где  $Q$  – стоимость товарной продукции;  $T$  – затраты труда в виде среднегодовой численности работников (рабочих), либо отработанного времени в человеко-днях, человеко-часах;
- 2) по изложенным выше правилам построим двухфакторные детерминированные модели объёмного экономического показателя  $Q$ , например,  $Q = F \times (Q/F)$ , где  $F$  – средняя годовая стоимость ОПФ. В этой модели в роли фактора правой части не фигурирует объёмный признак  $T$ ;
- 3) умножение обеих частей полученных моделей на величину  $1/T$  даёт:  $Y/T = (F/T) \times (Q/F)$ , где  $F/T$  – фондовооружённость труда,  $Q/F$  – фондоотдача.

При этом следует проверять строгое выполнение сформулированного выше требования относительно самостоятельного экономического смысла каждого полученного сомножителя или их группы в цепочке факторов (см. замечание).

**Метод выявления изолированного влияния факторов** определенным образом преодолевает недостатки метода цепных подстановок. Он исходит из предпосылки, что при построении индексной факторной системы изменяется один из факторов, а все остальные фиксируются на базисном уровне:

$$z_a = \frac{a_1 b_0 c_0 d_0}{a_0 b_0 c_0 d_0}; \quad z_b = \frac{a_0 b_1 c_0 d_0}{a_0 b_0 c_0 d_0}; \quad z_c = \frac{a_0 b_0 c_1 d_0}{a_0 b_0 c_0 d_0}; \quad z_d = \frac{a_0 b_0 c_0 d_1}{a_0 b_0 c_0 d_0}. \quad (5.14)$$

При этом балансовое соотношение (5.11) для произведения индексов сохраняется, т.к. величина индивидуальных индексов факторов не меняется при изменении правил их взвешивания.

Как видно из формул (5.14), измерение вклада каждого фактора в прирост результативного экономического показателя  $\Delta Y$  не зависит от последовательности обнаружения влияния других факторов, т.е. происходит изолированно, что и обусловило название данного метода индексного анализа.

Отметим, что все факторные индексы в выражении (5.14) строятся по принципу Ласпейреса (статистические веса зафиксированы на базисном уровне). Если по отношению к индексу объёмного показателя  $a$  это вполне привычно для украинской статистики, то для индекса качественного показателя  $d$  – может вызывать определенные вопросы.

Приведем систему формул расчёта общего и частных абсолютных приростов результативного признака за счёт каждого из четырёх факторов при использовании метода выявления изолированного влияния факторов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Y = a_1 b_1 c_1 d_1 - a_0 b_0 c_0 d_0 = Y_1 - Y_0 \\ \Delta Y_a = a_1 b_0 c_0 d_0 - a_0 b_0 c_0 d_0 = a_1 b_0 c_0 d_0 - Y_0 \\ \Delta Y_b = a_0 b_1 c_0 d_0 - a_0 b_0 c_0 d_0 = a_0 b_1 c_0 d_0 - Y_0 \\ \Delta Y_c = a_0 b_0 c_1 d_0 - a_0 b_0 c_0 d_0 = a_0 b_0 c_1 d_0 - Y_0 \\ \Delta Y_d = a_0 b_0 c_0 d_1 - a_0 b_0 c_0 d_0 = a_0 b_0 c_0 d_1 - Y_0. \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Сравнение вторых соотношений систем (5.12) и (5.15) показывает, что для метода цепных подстановок и метода выявления изолированного влияния факторов величина  $\Delta Y_a$  совпадает.

Из формул (5.15) следует, что для системы индексов (5.9), (5.14) балансовое соотношение (5.13) не выполняется, поэтому в него вводится дополнительный пятый абсолютный прирост  $\Delta$ , который выражает синергетический эффект – взаимодействие исходных факторов  $a, b, c, d$ . Его величина находится по остаточному принципу:

$$\Delta = \Delta Y - (\Delta Y_a + \Delta Y_b + \Delta Y_c + \Delta Y_d). \quad (5.16)$$

Из формулы (5.16) следует, что для рассматриваемого метода так же, как и для метода цепных подстановок, справедливы балансовые соотношения (5.11), (5.13) с учётом дополнительно введённого абсолютного прироста  $\Delta$ .

При этом общий и частные относительные приросты (в процентах) также определяются путём деления соответствующих абсолютных приростов  $\Delta Y_i$  на базисный уровень результативного экономического показателя  $Y_0$  и умножения на 100. Из формулы (4.16) следует, что при применении метода выявления изолированного влияния факторов сумма частных относительных приростов  $\Delta Y_a/Y_0 + \Delta Y_b/Y_0 + \Delta Y_c/Y_0 + \Delta Y_d/Y_0 + \Delta/Y_0$  равна общему относительному приросту  $\Delta Y/Y_0$ .

Таким образом, метод выявления изолированного влияния факторов позволяет выделить в чистом виде синергетический эффект взаимодействия исходных факторов  $\Delta$ . При использовании метода цепных подстановок этот эффект присоединяется к вкладу всех факторов, кроме объёмного фактора  $a$ .

Данный факт считается одним из главных преимуществ метода выявления изолированного влияния факторов по сравнению с методом цепных подстановок.

Кроме того, данный подход обеспечивает получение следующих полезных результатов при разложении абсолютного (относительного) прироста результативного экономического показателя по факторам:

- определение истинного вклада каждого фактора в прирост результативного признака  $\Delta Y$ , очищенного от синергетического эффекта взаимодействия факторов  $\Delta$ ;
- независимость величины вклада каждого фактора от его места в мультипликативной детерминированной модели в прирост результативного признака  $\Delta Y$ .

На основе данных табл. 5.1 были рассчитаны общий и частные приросты валовой прибыли предприятия в абсолютном и относительном выражении с помощью метода выявления изолированного влияния факторов на базе формул (5.15). Их результаты представлены в табл. 5.3, в последнем столбце которой отражён синергетический эффект взаимодействия факторов  $\Delta$ .

Таблица 5.3

Результаты разложения абсолютного и относительного прироста валовой прибыли предприятия по факторам по методу выявления изолированного влияния факторов

| Разложение            | $\Delta Y$ | $\Delta Y_a$ | $\Delta Y_b$ | $\Delta Y_c$ | $\Delta Y_d$ | $\Delta$ |
|-----------------------|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------|
| абсолютное, тыс. грн. | -19        | 373,378      | -104,382     | -278,043     | 90,501       | -100,454 |
| относительное, %      | -1,675     | 32,926       | -9,205       | -24,519      | 7,981        | -8,858   |

Проверка балансового соотношения (5.13) показывает, что

$$\Delta Y_a + \Delta Y_b + \Delta Y_c + \Delta Y_d + \Delta = 373,378 - 104,382 - 278,043 + 90,501 - 100,454 = -19 = \Delta Y.$$

Для частных относительных приростов валовой прибыли за счёт отдельных факторов баланс также выполняется:

$$\Delta Y_a/Y_0 + \Delta Y_b/Y_0 + \Delta Y_c/Y_0 + \Delta Y_d/Y_0 + \Delta/Y_0 = 32,926 - 9,205 - 24,519 + 7,981 - 8,858 = -1,675.$$

Сравнение результатов разложения прироста валовой прибыли по факторам методом цепных подстановок (табл. 5.2) и методом выявления изолированного влияния факторов (табл. 5.3) представлено в табл. 5.4.

Данные табл. 5.4 показывают, что вклад объёмного фактора  $a$  в величину  $\Delta Y$ , рассчитанный по обоим методам, совпадает. С помощью метода выявления изолированного влияния факторов удалось установить, что синергетический эффект факторов  $\Delta$  вызвал уменьшение результативного экономического показателя на 100,454 тыс. грн. или почти на 8,9 %.

Таблица 5.4

Сравнительный анализ результатов разложение общего прироста валовой прибыли предприятия по факторам с помощью двух методов

| Прирост                         | Метод цепных подстановок      |                          | Метод выявления изолированного влияния факторов |                          |
|---------------------------------|-------------------------------|--------------------------|---|--------------------------|
|                                 | абсолютный прирост, тыс. грн. | относительный прирост, % | абсолютный прирост, тыс. грн.                   | относительный прирост, % |
| $\Delta Y$                      | -19                           | -1,675                   | -19   | -1,675                   |
| $\Delta Y_a$                    | 373,378                       | 32,926                   | 373,378   | 32,926                   |
| $\Delta Y_b$                    | -138,99                       | -12,256                  | -104,382  | -9,205                   |
| $\Delta Y_c$                    | -335,69                       | -29,602                  | -278,043  | -24,519                  |
| $\Delta Y_d$                    | 82,299                        | 7,257                    | 90,501  | 7,981                    |
| $\Delta$                        | -                             | -                        | -100,454  | -8,858                   |
| Суммарное влияние всех факторов | -19                           | -1,675                   | -19   | -1,675                   |

При этом метод цепных подстановок дал несколько заниженные по сравнению с методом выявления изолированного влияния факторов оценки значений  $\Delta Y_b$ ,  $\Delta Y_c$ ,  $\Delta Y_d$ , поскольку между ними была распределена отрицательная величина  $\Delta = -100,454$  тыс. грн., отражающая взаимодействие исходных факторов.

Итак, применение метода выявления изолированного влияния факторов позволило определить очищенное влияние на изменение валовой прибыли предприятия четырёх рассмотренных факторов, а также выявить направление и количественную величину эффекта их взаимодействия:

1) за счёт повышения средней годовой стоимости основного капитала валовая прибыль предприятия в отчетном периоде по сравнению с базисным выросла на 373,378 тыс. грн. или на 32,9 %;

2) в результате роста прибылеёмкости реализованной продукции валовая прибыль повысилась на 90,5 тыс. грн. или почти на 8 %;

3) за счёт снижения удельного веса активной части основного капитала валовая прибыль уменьшилась на 104,382 тыс. грн. или на 9,2 %;

4) в результате падения капиталотдачи машин и оборудования валовая прибыль снизилась на 278,043 тыс. грн. или на 24,5 %

5) уменьшению прибыли предприятия способствовало также негативное взаимодействие указанных факторов, которое обусловило её дополнительное падение на 100,454 тыс. грн. или на 8,9 %.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что изучаемое предприятие имеет существенные резервы роста валовой прибыли за счёт улучшения структуры основного капитала, а именно – повышения доли его активной части. Еще большие возможности для роста прибыльности предприятие имеет в направлении повышения эффективности использования машин и оборудования. Кроме того, следует проанализировать причины негативного синергетического эффекта основных факторов, определяющих динамику

валовой прибыли на предприятии с целью кардинального изменения направления вектора их взаимодействия.

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

За два периода времени имеются следующие данные о динамике важнейших экономических показателей предприятия (табл. 5.5), где

$Q$  – выпуск товарной продукции (тыс. грн.);

$T$  – численность работников (чел.);

$F$  – средняя годовая стоимость ОПФ (тыс. грн.).

Таблица 5.5

Исходные данные по вариантам

| Показатель | $Q_0$ | $T_0$ | $F_0$ | $Q_1$ | $T_1$ | $F_1$ |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Вариант 1  | 22,4  | 215   | 217   | 21,6  | 213   | 206   |
| Вариант 2  | 35,1  | 353   | 407   | 46,5  | 522   | 540   |
| Вариант 3  | 32,7  | 307   | 318   | 30,7  | 292   | 288   |
| Вариант 4  | 10,2  | 133   | 154   | 16,0  | 207   | 209   |
| Вариант 5  | 21,8  | 216   | 213   | 21,2  | 214   | 215   |
| Вариант 6  | 15,1  | 158   | 160   | 16,5  | 202   | 174   |
| Вариант 7  | 16,8  | 175   | 188   | 18,5  | 197   | 217   |
| Вариант 8  | 80,4  | 738   | 715   | 63,4  | 610   | 622   |
| Вариант 9  | 12,8  | 126   | 130   | 13,2  | 149   | 154   |
| Вариант 10 | 61,5  | 653   | 642   | 65,1  | 672   | 674   |
| Вариант 11 | 16,3  | 150   | 148   | 15,1  | 147   | 137   |
| Вариант 12 | 36,8  | 375   | 388   | 38,5  | 397   | 417   |
| Вариант 13 | 50,8  | 506   | 503   | 50,2  | 504   | 496   |
| Вариант 14 | 15,8  | 159   | 200   | 21,7  | 220   | 243   |
| Вариант 15 | 16,1  | 165   | 158   | 15,5  | 147   | 143   |
| Вариант 16 | 71,0  | 733   | 754   | 76,8  | 800   | 796   |
| Вариант 17 | 11,1  | 112   | 135   | 13,9  | 140   | 158   |
| Вариант 18 | 15,0  | 158   | 162   | 16,7  | 172   | 171   |
| Вариант 19 | 46,8  | 475   | 458   | 44,5  | 452   | 427   |
| Вариант 20 | 70,5  | 730   | 751   | 76,6  | 784   | 770   |
| Вариант 21 | 51,8  | 526   | 513   | 51,2  | 504   | 495   |
| Вариант 22 | 45,2  | 455   | 462   | 47,1  | 482   | 490   |
| Вариант 23 | 66,6  | 675   | 658   | 64,5  | 650   | 644   |
| Вариант 24 | 90,8  | 931   | 950   | 96,6  | 984   | 976   |
| Вариант 25 | 76,8  | 775   | 788   | 78,5  | 797   | 817   |
| Вариант 26 | 37,5  | 350   | 347   | 33,6  | 328   | 317   |
| Вариант 27 | 47,4  | 486   | 495   | 50,0  | 508   | 519   |
| Вариант 28 | 51,8  | 526   | 513   | 51,2  | 504   | 495   |
| Вариант 29 | 25,6  | 259   | 267   | 27,1  | 280   | 284   |
| Вариант 30 | 66,6  | 675   | 658   | 64,5  | 650   | 644   |
| Вариант 31 | 10,1  | 130   | 152   | 16,5  | 188   | 187   |
| Вариант 32 | 21,8  | 221   | 228   | 23,7  | 248   | 256   |
| Вариант 33 | 50,7  | 516   | 499   | 48,6  | 491   | 485   |
| Вариант 34 | 34,0  | 363   | 382   | 39,8  | 416   | 408   |
| Вариант 35 | 39,5  | 402   | 415   | 41,2  | 424   | 444   |
| Вариант 36 | 75,0  | 700   | 694   | 67,2  | 656   | 634   |
| Вариант 37 | 15,3  | 165   | 174   | 17,9  | 187   | 198   |
| Вариант 38 | 27,3  | 281   | 268   | 26,7  | 259   | 250   |
| Вариант 39 | 76,8  | 777   | 801   | 81,3  | 840   | 852   |

На основании данных табл. 5.5, соответствующих номеру Вашего варианта, осуществить:

10. Построение в общем виде 2-х детерминированных двухфакторных моделей выпуска товарной продукции на предприятии и переход к трёхфакторным моделям с целью анализа влияния факторов на результативный показатель в отчётном периоде по сравнению с базисным периодом.
11. Разложение на основе одной из экономически обоснованных трёхфакторных моделей с помощью метода цепных подстановок:
  - а) абсолютного прироста выпуска товарной продукции на предприятии по факторам;
  - б) относительного (в процентах) прироста выпуска товарной продукции на предприятии по факторам.
3. Проверку важнейших балансовых соотношений метода цепных подстановок.
4. Разложение на основе той же экономически обоснованной трёхфакторной модели с помощью метода выявления изолированного влияния факторов:
  - а) абсолютного прироста выпуска товарной продукции на предприятии по факторам;
  - б) относительного (в процентах) прироста выпуска товарной продукции на предприятии по факторам.
5. Проверку важнейших балансовых соотношений метода выявления изолированного влияния факторов.
6. Сравнительный анализ полученных результатов с целью определения наиболее адекватной детерминированной модели разложения прироста товарной продукции на предприятии по факторам (результаты представить в виде таблицы типа табл. 5.4).

По каждому пункту сделать краткие экономико-статистические пояснения и выводы.

## ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 5

1. Баканов М. И., Шеремет А. Д. Теория экономического анализа : Учебник. – 3-е изд., перераб. – М.: Финансы и статистика, 1996. – 288 с.
2. Галасюк В. В. Принципиально новый метод детерминированного факторного экономического анализа // Государственный бюллетень о приватизации. – 2006. – № 1. – С. 26-31.
3. Литвинюк А. С. Экономический анализ [Электронный ресурс]. – Режим доступа : – <http://lib.rus.ec/b/165859/read>
4. Метод и методика комплексного экономического анализа хозяйственной деятельности [Электронный ресурс]. – Режим доступа : – <http://sumdu.telesweet.net/doc/lections/Ekonomicheskij-naliz/16037/index.html>
5. Методичні рекомендації оцінки впливу змін економічних факторів на результативні показники прибутку, рентабельності виробництва і реалізації продукції (робіт, послуг) / [Григор Н. М., Крехівський О. В., Ніколаєнко Н. Л. та ін.]. – К.: ДП ДІКТЕД, 2007. – 140 с.
6. Мних Є. В. Економічний аналіз : Підручник. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 412 с.
7. Осипов В. И. Методы факторного анализа и планирования в промышленности : учеб. пособ. / Осипов В. И. – К.: УМК ВО при Минвузе УССР, 1989. – 212 с.
8. Статистика : навч.-метод. посіб. для самостійного вивч. дисципліни / [А. М. Єріна, Р. М. Моторін, А.В. Головач та ін.]. – К.: КНЕУ, 2002. – 457 с.
9. Статистика : підруч. / [С. С, Герасименко, А. В. Головач, А. М. Єріна та ін.]. – [2-е вид., перероб. і доп.]. – К.: КНЕУ, 2000. – 467 с.
10. Толпегина О. А. Экономический анализ. Учебный курс. Центр дистанционных образовательных технологий МИЭМП, 2010 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : – [http://www.e-college.ru/xbooks /xbook137/book/index/index.html?go=part-005\\*page.htm](http://www.e-college.ru/xbooks /xbook137/book/index/index.html?go=part-005*page.htm)
11. Чебан Т. М. та ін. Теорія економічного аналізу : Навчальний посібник / Т. М.Чебан, Т. А. Калінська, І. О. Дмитрієнко : За ред. проф. В. Є. Труша. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 214 с.
12. Шеремет А. Д. Теория экономического анализа : Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 333 с.
13. Янковой А. Г. Индексные модели факторного экономического анализа / А. Г. Янковой // Сучасні технології. управління підприємством та можливості використання інформаційних систем: стан, проблеми, перспективи : матер. 5-ї міжнар. наук.-практ. конф. 26-27 березня 2010 р. – Одеса, ОНУ, 2010. – С.272-277.
14. Янковий О. Г. Математичні методи факторного економічного аналізу на базі мультиплікативних моделей / О. Г. Янковий // Сучасні технології. управління підприємством та можливості використання інформаційних систем: стан, проблеми, перспективи : матер. 6-ї міжнар. наук.-практ. конф. 31 березня – 1 квітня 2011 р. – Одеса, ОНУ, 2011. – С.217-221.

15. Янковий О. Г. Порівняльний аналіз методів факторного економічного аналізу на базі мультиплікативних моделей / О. Г. Янковий // Статистична оцінка соціально-економічного розвитку : зб. наук. пр. за матер. Всеукраїнській наук.-практ. конф., 20 травня 2011 р. – Хмельницький, 2011. – С.18-23.
16. Янковий О. Г. Альтернативні моделі факторного індексного аналізу / О. Г. Янковий // Статистична оцінка соціально-економічного розвитку : зб. наук. пр. за матер. Всеукраїнській наук.-практ. конф., 20 травня 2010 р. – Хмельницький, 2010. – С.15-19.
17. Янковий О. Г. Детерміновані моделі факторного економічного аналізу / Методологія статистичного забезпечення розвитку регіону : Монографія // За заг. ред. А. З. Підгорного. – Одеса : Атлант, 2012. – С. 125-143.
18. Янковой А. Г. Методы усложнения факторной детерминированной модели результативного экономического показателя / А. Г. Янковой // Матеріали 2-ї міжнар. наук.-практ. конф. «Економіка підприємства: сучасні проблеми теорії та практики», 26-27 вер. 2013 р. – Одеса : ОНЕУ, 2013. – С. 253-255.

Мультипликативные модели, применяемые при анализе прибыли предприятия ( $Y$ )

| Число факторов в модели | Формула   | Обозначения   |
|-------------------------|---|---|
| два                     | 1. $Y = Q \times (Y/Q)$                             | $Q$ – товарная продукция;<br>$Y/Q$ – прибылеёмкость товарной продукции  |
|                         | 2. $Y = F \times (Y/F)$                             | $F$ – средняя годовая стоимость ОПФ;<br>$Y/F$ – рентабельность ОПФ  |
|                         | 3. $Y = T \times (Y/T)$                             | $T$ – затраты труда (численность работников);<br>$Y/T$ – рентабельность общих трудовых затрат   |
| три                     | 1. $Y = F \times (Q/F) \times (Y/Q)$                | $Q/F$ – фондоотдача   |
|                         | 2. $Y = T \times (Q/T) \times (Y/Q)$                | $Q/T$ – производительность труда (выработка)  |
|                         | 3. $Y = T \times (F/T) \times (Y/F)$                | $F/T$ – фондовооружённость труда  |
|                         | 4. $Y = Q \times (F/Q) \times (Y/F)$                | $F/Q$ – фондоёмкость продукции  |
|                         | 5. $Y = Q \times (T/Q) \times (Y/T)$                | $T/Q$ – трудоёмкость товарной продукции   |
|                         | 6. $Y = F \times (T/F) \times (Y/T)$                | $T/F$ – величина, обратная к фондовооружённости труда   |
|                         | 7. $Y = Q \times (Q'/Q) \times (Y/Q')$              | $Q'$ – реализованная продукция;<br>$Q'/Q$ – коэффициент реализации продукции;<br>$Y/Q'$ – прибылеёмкость реализованной продукции                |
|                         | 8. $Y = F \times (F'/F) \times (Y/F')$              | $F'$ – средняя годовая стоимость активной части ОПФ;<br>$F'/F$ – удельный вес активной части ОПФ;<br>$Y/F'$ – рентабельность активной части ОПФ |
|                         | 9. $Y = T \times (T'/T) \times (Y/T')$              | $T'$ – численность рабочих;<br>$T'/T$ – удельный вес рабочих в численности работников;<br>$Y/T'$ – рентабельность трудовых затрат рабочих       |
| четыре                  | 1. $Y = T \times (Q/T) \times (Q'/Q) \times (Y/Q)$  | см. выше  |
|                         | 2. $Y = T \times (T'/T) \times (Q/T') \times (Y/Q)$ | $Q/T'$ – производительность труда рабочих   |
|                         | 3. $Y = F \times (F'/F) \times (Q/F') \times (Y/Q)$ | $Q/F'$ – фондоотдача активной части ОПФ   |
|                         | 4. $Y = Q \times (Q'/Q) \times (T/Q') \times (Y/T)$ | $T/Q'$ – трудоёмкость реализованной продукции   |
|                         | 5. $Y = T \times (T'/T) \times (F/T') \times (Y/F)$ | $F/T'$ – фондовооружённость рабочих   |
|                         | 6. $Y = F \times (F'/F) \times (T/F') \times (Y/T)$ | $T/F'$ – величина, обратная к вооружённости труда активной частью ОПФ   |
|                         | 7. $Y = T \times (F/T) \times (Q/F) \times (Y/Q)$   | см. выше  |
|                         | 8. $Y = F \times (T/F) \times (Q/T) \times (Y/Q)$   | см. выше  |
|                         | 9. $Y = F \times (Q/F) \times (T/Q) \times (Y/T)$   | см. выше  |
|                         | 10. $Y = T \times (Q/T) \times (F/Q) \times (Y/F)$  | см. выше  |
|                         | 11. $Y = Q \times (T/Q) \times (F/T) \times (Y/F)$  | см. выше  |
|                         | 12. $Y = Q \times (F/Q) \times (T/F) \times (Y/T)$  | см. выше  |

Мультипликативные модели, применяемые при анализе выпускаемой продукции предприятия (Y)

| Число факторов в модели | Формула  | Обозначения   |
|-------------------------|--|---|
| два                     | 1. $Y = T \times (Y/T)$  | $T$ – затраты труда (численность работников);<br>$Y/T$ – производительность труда (выработка)   |
|                         | 2. $Y = F \times (Y/F)$  | $F$ – средняя годовая стоимость ОПФ;<br>$Y/F$ – фондоотдача   |
| три                     | 1. $Y = T \times (F/T) \times (Y/F)$                                     | $F/T$ – фондовооружённость труда  |
|                         | 2. $Y = F \times (T/F) \times (Y/T)$                                     | $T/F$ – величина, обратная к фондовооружённости труда   |
|                         | 3. $Y = F \times (F'/F) \times (Y/F')$                                   | $F'$ – средняя годовая стоимость активной части ОПФ;<br>$F'/F$ – удельный вес активной части ОПФ;<br>$Y/F'$ – фондоотдача активной части ОПФ                                  |
|                         | 4. $Y = T \times (T'/T) \times (Y/T')$                                   | $T'$ – численность рабочих;<br>$T'/T$ – удельный вес рабочих в численности работников;<br>$Y/T'$ – производительность труда рабочих   |
|                         | 5. $Y = T^* \times (T^*/T^*) \times (Y/T^*)$                             | $T^*$ – общее число чел-дн., отработанных всеми рабочими;<br>$T^*/T^*$ – средняя продолжительность 1 года;<br>$Y/T^*$ – средняя дневная выработка 1 рабочего                  |
|                         | 6. $Y = T^{**} \times (T^{**}/T^{**}) \times (Y/T^{**})$                 | $T^{**}$ – общее число чел-часов, отработанных всеми рабочими;<br>$T^{**}/T^{**}$ – средняя продолжительность 1 чел-дн.;<br>$Y/T^{**}$ – средняя часовая выработка 1 рабочего |
| четыре                  | 1. $Y = T \times (T'/T) \times (F/T') \times (Y/F)$                      | $F/T'$ – фондовооружённость рабочих   |
|                         | 2. $Y = F \times (F'/F) \times (T/F') \times (Y/T)$                      | $T/F'$ – величина, обратная к вооружённости труда активной частью ОПФ   |
|                         | 3. $Y = T^* \times (T^*/T^*) \times (F/T^*) \times (Y/F)$                | $F/T^*$ – фондовооружённость 1 отработанного рабочими чел-дн.   |
|                         | 4. $Y = T^* \times (T^*/T^*) \times (F'/T^*) \times (Y/F')$              | $F'/T^*$ – вооружённость активной частью ОПФ 1 отработанного рабочими чел-дн.   |
|                         | 5. $Y = T^{**} \times (T^{**}/T^{**}) \times (F/T^{**}) \times (Y/F)$    | $T^{**}/T^{**}$ – величина, обратная к средней продолжительности 1 года;  |
|                         | 6. $Y = T^{**} \times (T^{**}/T^{**}) \times (F/T^{**}) \times (Y/F)$    | см. выше  |
|                         | 7. $Y = T \times (T'/T) \times (T^*/T^*) \times (Y/T^*)$                 | см. выше  |
|                         | 8. $Y = T^* \times (T^*/T^*) \times (T^{**}/T^{**}) \times (Y/T^{**})$   | см. выше  |
|                         | 9. $Y = T \times (T'/T) \times (F'/T') \times (Y/F')$                    | $F'/T'$ – вооружённость активной частью ОПФ 1 рабочего  |
|                         | 10. $Y = T^{**} \times (T^{**}/T^{**}) \times (F'/T^{**}) \times (Y/F')$ | см. выше  |
|                         | 11. $Y = T^{**} \times (T^{**}/T^{**}) \times (F'/T^{**}) \times (Y/F')$ | $F'/T^{**}$ – вооружённость активной частью ОПФ 1 отработанного рабочими чел-час.   |
|                         | 12. $Y = F \times (F'/F) \times (T'/F') \times (Y/T')$                   | $T'/F'$ – величина, обратная к вооружённости рабочих активной частью ОПФ  |

## 6. КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

### 6.1 Виды вероятностных связей между признаками

Как было отмечено выше (см. главу 5), между экономическими показателями предприятия наблюдаются два основных типа причинно-следственных связей: функциональные и стохастические (вероятностные). В свою очередь, различают два вида стохастической связи между исследуемыми экономическими явлениями и процессами – регрессионную и корреляционную. При регрессионной (односторонней) вероятностной зависимости между  $Y$  и  $X$  каждому значению аргумента отвечает не одно определенное значение функции, а закон её распределения, т.е. набор значений  $Y$  с соответствующими вероятностями их появления, которые меньше 1. Причём обратных связей нет или они крайне слабы, поэтому ими можно пренебречь.

Например, известно, что существует зависимость между уровнем производительности труда рабочих и их квалификацией. Однако нельзя быть полностью уверенным в том, что в каждом отдельном наблюдении выработка высококвалифицированного рабочего будет превышать аналогичный показатель для рабочего с низкой квалификацией. Дело в том, что на уровень производительности труда влияют и другие организационно-технические, субъективные факторы: состояние технологического оборудования, уровень материальной заинтересованности, здоровье рабочего, его психологический настрой и т.п.

При корреляционной (двусторонней) стохастической зависимости обе переменные (и  $Y$  и  $X$ ) можно рассматривать как аргумент и как функцию одновременно: каждому значению  $X$  отвечает закон распределения  $Y$ , и наоборот, каждому значению  $Y$  отвечает закон распределения  $X$ . Иными словами, при корреляционной зависимости реально существуют как прямые, так и обратные связи между признаками.

Понятно, что предпосылка о полном отсутствии обратных связей между  $Y$  и  $X$  весьма условна и в определённой степени субъективна. Поэтому и различия между регрессионными и корреляционными связями в экономике также условны и могут быть установлены только самим исследователем. По крайней мере, оба этих вида стохастических связей изучаются в рамках одного и того же метода – корреляционно-регрессионного анализа (КРА). Причём используемые формулы не зависят от конкретного типа зависимости (регрессии или корреляции).

И регрессионные и корреляционные связи между изучаемыми признаками в силу действия случайных факторов-причин проявляются не в каждом отдельном наблюдении, а только в совокупности наблюдений, в массовом процессе. Поэтому, для чёткого проявления подобных зависимостей, согласно закону больших чисел, необходима статистическая совокупность объектов (наблюдений) значительного объёма с тем, чтобы в результате взаимного погашения действия случайных факторов-причин

основная тенденция или закономерность превратилась из завуалированной, латентной, в явную, фиксируемую с помощью методов КРА.

При любой форме стохастической связи в экономике (регрессионной или корреляционной) факторные признаки  $X_1, X_2, \dots, X_m$  принято рассматривать как неслучайные, которые можно многократно повторять на неизменном уровне при переходе от одного испытания к другому (от одной выборки к другой) бесконечное число раз. Результативный признак  $Y$ , напротив, всегда считается случайной величиной, закон распределения которой определяется законом распределения случайной компоненты  $\varepsilon$ .

## 6.2 Априорный анализ (модельная спецификация)

Априорный анализ (от лат. *a priori* – до опыта, до сбора данных) или модельная спецификация – это та предварительная стадия КРА, на которой собираются и обобщаются теоретические сведения об изучаемом экономическом объекте на базе соответствующей экономической науки с привлечением имеющегося опыта в данной области. В самом общем виде регрессионная модель записывается так:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots) + \varepsilon. \quad (6.1)$$

На стадии априорного анализа исследователь должен попытаться дать ответ, какой в его представлении является будущая регрессионная модель (6.1), т.е. осуществить модельную спецификацию. Здесь решаются следующие основные задачи:

1. Выбор зависимой (результативной)  $Y$  и независимых (факторных) переменных  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , исходя из целей и задач исследования.

2. Установление конкретных измерителей выбранных переменных.

3. Выявление направления причинно-следственных связей между переменными и наложение ограничений на знаки коэффициентов парной корреляции и коэффициентов регрессии будущей модели.

4. Обоснование формы связи  $f$  между результативной и факторными переменными модели.

5. Выдвижение предположений относительно вероятностных свойств случайной компоненты  $\varepsilon$ .

– Выбор зависимой (результативной) и независимых (факторных) переменных будущей модели осуществляется исходя из целей и задач исследования на базе анализа причинно-следственных связей между экономическими показателями предприятия.

Кроме деления переменных модели на результативную и факторные, различают также *текущие и запаздывающие (лаговые)* переменные в зависимости от времени, к которому они относятся.

Например, величина прибыли предприятия данного года (текущая результативная переменная)  $Y_t$  в значительной степени определяется уровнем его менеджмента и маркетинга (текущие факторные переменные)  $X_{1t}, X_{2t}$ , а

также размерами капитальных вложений прошлых лет (лаговые факторные переменные)  $X_{3t-1}, X_{3t-2}$ .

Кроме того, как показывает опыт, величина прибыли изучаемого периода (текущая результативная переменная)  $Y_t$  находится в определённой зависимости от объёма прибыли, полученной в предыдущие годы (лаговые результативные переменные)  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots$  вследствие эффекта автокорреляции, который проявляется в форме зависимости последующих уровней ряда динамики от предыдущих уровней, сдвинутых на величину запаздывания или временного лага.

Необходимость установления конкретных измерителей переменных модели связана с наличием множества показателей продукции предприятия (натуральных, стоимостных, трудовых), затрат рабочего времени (отработанные человеко-дни, человеко-часы, численность работников и т.п.). В ходе априорного анализа исследователь должен выбрать те измерители результативного и факторных признаков, которые в наибольшей степени соответствуют целям и задачам КРА.

При определении причинно-следственных связей между переменными следует иметь в виду, что существуют прямые и обратные зависимости между экономическими показателями предприятия, в частности, между  $Y$  и  $X_1, X_2, \dots$ . Это налагает определенные ограничения на знаки коэффициентов будущей линейной модели. Следует помнить, что при прямых связях знаки коэффициентов модели положительные, а при обратных связях – отрицательные.

В некоторых случаях выявленные и изученные связи носят устойчивый характер экономических законов, которым присущ именно определённый класс математических функций. Например, степенные функции достаточно успешно применяются для моделирования функций, описывающих зависимость выпуска продукции предприятия от величины затрат труда и капитала. Они получили известность как производственные функции Кобба-Дугласа по имени американских исследователей, предложивших в 1928 г. их практическое использование (см. подробнее главу 4).

Если нет никакой априорной информации о форме математической связи, то в качестве первого приближения функции  $f(X_1, X_2, \dots)$  можно использовать линейную форму связи между переменными:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_mX_m + \varepsilon, \quad (6.2)$$

где  $m$  – число факторов в линейной модели.

Знаки коэффициентов  $b_1, b_2, \dots, b_m$  отражают направление причинно-следственной связи между  $Y$  и факторными переменными  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . Действительно, если коэффициент  $b_j > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), то с увеличением  $X_j$  линейная функция монотонно возрастает, т.е. между  $Y$  и  $X_j$  имеет место прямая связь. И, наоборот, при  $b_j < 0$ , то с ростом  $X_j$  линейная функция монотонно убывает, т.е. между  $Y$  и  $X_j$  наблюдается обратная связь.

Линейные функции отражают равномерный рост (снижение) моделируемого показателя предприятия. Однако, следует иметь в виду, что влияние экономических факторов на величину результативной переменной  $Y$  часто является нелинейным, т.к. почти всегда существуют некоторые оптимальные условия производства продукции (работ, услуг), за пределами которых снижается эффективность деятельности предприятия.

Для отражения нелинейности действия указанных факторов, наличия экстремальных точек, точек перегиба (смены ускоренного развития на замедленное, или наоборот), этапов насыщения требуется применение других, отличных от линейной, функций. Примером таких криволинейных функций может служить парабола второй и третьей степени, гипербола, экспонента, логарифмическая функция, функция Гомперца и др.

Выдвижение предположений относительно вероятностных свойств случайной компоненты  $\varepsilon$  необходимо для проверки различных предположений (статистических гипотез) относительно построенной модели. Обычно предполагается следующее:

1. Математическое ожидание  $\varepsilon$  равняется нулю.
2. Отдельные случайные величины  $\varepsilon_i$  независимы между собой.
3. Случайная компонента  $\varepsilon$  имеет постоянную дисперсию.
4. Случайная компонента  $\varepsilon$  подчиняется нормальному закону распределения.

Если будущая регрессионная модель правильно специфицирована (не пропущен ни один важный фактор, верно выбрана форма математической связи между переменными) и адекватно описывает исходные статистические данные, то указанные выше гипотезы относительно вероятностных свойств случайной компоненты  $\varepsilon$  обычно выполняются.

Осуществим априорный анализ по условию следующей задачи. Пусть с помощью методов КРА необходимо исследовать зависимость уровня производительности труда рабочих-сдельщиков механического цеха предприятия от важнейших организационно-технических факторов производства.

В качестве зависимой (результативной) переменной  $Y$  примем показатель годовой выработки продукции на одного рабочего в тыс. грн. В роли факторов, определяющих вариацию производительности труда рабочих, рассмотрим такие организационно-технические характеристики производства, как фондовооружённость труда, тыс. грн. ( $X_1$ ) и годовая заработная плата одного рабочего, тыс. грн. ( $X_2$ ). Все три предполагаемые переменные модели являются текущими, лаговые переменные отсутствуют.

Основываясь на теории производительности труда, можно утверждать, что оба фактора прямо влияют на величину выработки продукции на одного рабочего. Следовательно, коэффициенты парной корреляции и соответствующие коэффициенты модели должны быть со знаком плюс.

Поскольку нет никакой априорной информации о форме математической связи между  $Y$  и  $X_1$ ,  $X_2$ , то в качестве первого приближения

функции  $f(X_1, X_2)$  можно принять линейную форму связи между переменными, т.е. в качестве опорной использовать модель (6.2).

Будем также предполагать, что все четыре указанные выше гипотезы относительно вероятностных свойств случайной компоненты  $\varepsilon$  выполняются.

### 6.3 Измерение тесноты корреляционной связи между экономическими признаками

В настоящее время выделяются следующие основные типы корреляционных связей между переменными: 1) парная корреляция; 2) частная корреляция; 3) множественная корреляция; 4) автокорреляция; 5) каноническая корреляция. В данном учебном пособии мы ограничимся рассмотрением и измерением парных, множественных и автокорреляционных зависимостей переменных в экономическом исследовании.

Для измерения тесноты парной линейной зависимости между результативным признаком  $Y$  и фактором  $X$  чаще всего используется коэффициент парной корреляции Пирсона, который по дискретным статическим данным рассчитывается как отношение ковариации переменных  $\text{cov}(Y, X)$  к произведению их стандартных отклонений  $\sigma_Y, \sigma_X$ . Раскрыв формулу ковариации, получим следующее выражение коэффициента парной корреляции:

$$r_{YX} = \frac{\text{cov}(Y, X)}{\sigma_Y \sigma_X} = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{N \sigma_Y \sigma_X}. \quad (6.3)$$

Заслуга К. Пирсона, который в конце XIX века предложил формулу (6.3), состоит в том, что он пронормировал ковариацию экономических признаков с помощью величины  $\sigma_Y \sigma_X$ , ограничив её тем самым значениями от -1 до +1.

Коэффициент парной корреляции обладает рядом свойств, которые вытекают из свойств дисперсии и ковариации и делают его особенно привлекательным при проведении любых исследований, в том числе и экономических. Приведём важнейшие из них:

1)  $r_{YX}$  не зависит от начала отсчёта переменных, иными словами, если к каждому наблюдаемому значению величин  $X$  и  $Y$  прибавить константу, то величина  $r_{YX}$  не изменится;

2)  $r_{YX}$  не зависит от единиц измерения переменных, т.е. если все наблюдаемые значения величин  $X$  и  $Y$  умножить на постоянное число, то величина  $r_{YX}$  не изменится;

3) из равенства  $Y = X$  вытекает  $r_{YY} = r_{XX} = 1$ , т.е. корреляция признака с самим собой всегда равняется единице;

4)  $r_{YX}$  не зависит от порядка переменных, т.е.  $r_{YX} = r_{XY}$ ;

5)  $r_{YX}$  принимает значения в интервале от -1 до +1;

6) поскольку  $\sigma_Y \geq 0, \sigma_X \geq 0$ , то знак  $r_{YX}$  определяется знаком ковариации  $\text{cov}(Y, X)$ . Отрицательное значение  $r_{YX}$  указывает на обратную связь между признаками, положительное – на прямую связь;

7) при  $r_{YX} = \pm 1$  переменные  $Y$  и  $X$  являются линейно зависимыми, а связь превращается в функциональную, т.е. никакие другие факторы, кроме  $X$ , не влияют на вариацию результивного признака  $Y$ ;

8) при  $r_{YX} = 0$  переменные считаются линейно независимыми, некоррелированными (ортогональными).

Коэффициент парной корреляции имеет следующие градации и интерпретируется так:

a) при  $0 \leq |r_{YX}| \leq 0,3$  связь слабая;

b) при  $0,3 < |r_{YX}| \leq 0,7$  связь средняя;

c) при  $0,7 < |r_{YX}| \leq 1$  связь тесная.

В экономической практике чаще всего встречается случай, когда  $-1 < r_{YX} < 1$  и теснота корреляционной связи между переменными интерпретируется в соответствии с приведенной выше градацией. В этом контексте ситуацию, когда  $r_{YX} = \pm 1$  (функциональная зависимость между  $X$  и  $Y$ ), можно рассматривать как предельный случай корреляционной связи. Иными словами, по мере ослабления действия на  $Y$  всех случайных факторов, аккумулированных в компоненте  $\varepsilon$ , значение  $r_{YX} \rightarrow \pm 1$ .

Необходимо иметь в виду, что сама по себе величина коэффициента парной корреляции, даже близкая к единице, не является доказательством наличия причинно-следственной зависимости между изучаемыми экономическими переменными. Она характеризует лишь формальную меру корреляции между ними. Статистическая зависимость, как бы ни была она сильна, никогда не может установить причинной связи: наши идеи о причине должны приходить извне статистики, в конечном счёте, из некоторой другой теории, например, из экономической науки.

Установление причинно-следственной зависимости осуществляется в процессе качественного априорного анализа экономического объекта, который обязательно должен предшествовать КРА (см. параграф 6.2). В противном случае можно получить ложную, бессодержательную корреляцию между показателями, практическое значение которой равно нулю. Например, пользуясь данными статистических справочников, можно обнаружить довольно тесные связи между такими независимыми явлениями, как ежегодное производство минеральных удобрений в стране и количеством зарегистрированных браков, годовой размер выпавших осадков и средняя продолжительность жизни населения и т.п.

Следует помнить, что коэффициент парной корреляции  $r_{YX}$  является измерителем именно линейной связи между признаками. Если в действительности между экономическими переменными  $X$  и  $Y$  существует криволинейная зависимость (параболическая, экспоненциальная, гиперболическая и т.п.), то величина коэффициента парной корреляции может быть сильно занижена.

Коэффициент парной корреляции геометрически трактуется как косинус угла  $\varphi$  между векторами  $X$  и  $Y$ . Очевидно, что чем меньше угол  $\varphi$ , тем теснее линейная связь между переменными и наоборот. При  $\varphi \approx 0$  векторы

однонаправлены, линейно зависимы, т.е. лежат на одной прямой и  $r_{YX} \approx +1$ . В случае  $\varphi \approx 180^\circ$  векторы также линейно зависимы, лежат на одной прямой, но разнонаправлены и  $r_{YX} \approx -1$ . И, наконец, при  $\varphi \approx 90^\circ$  векторы взаимно перпендикулярны и  $r_{YX} \approx 0$ . В последней ситуации говорят о линейной независимости векторов или об их ортогональности.

Расчёт  $r_{YX}$  осуществляют на персональном компьютере в редакторе *Excel* (команды: = коррел (адреса ячеек Y; адреса ячеек X) – Enter).

Другой способ нахождения коэффициентов парной корреляции, который рекомендуется применять в случае нескольких факторов (при множественном КРА), заключается в выполнении следующих команд: Сервис – Надстройки – активизировать Пакет анализа (в меню Сервис появляется опция Анализ данных) и снова команды Сервис – Анализ данных – Корреляция – ОК. В результате появляется матрица коэффициентов парной корреляции  $r$ , которая имеет размерность  $(m+1) \times (m+1)$  и выглядит так:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & r_{Y1} & r_{Y2} & \dots & r_{Ym} \\ r_{1Y} & 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{mY} & r_{m1} & r_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

В случае парного КРА построенная матрица имеет размерность  $2 \times 2$  и характеризует тесноту парных корреляционных связей между изучаемыми переменными.

Матрица  $r$  симметрична, что непосредственно вытекает из четвёртого свойства коэффициента парной корреляции. Поэтому на экране компьютера обычно показывают только нижнюю часть матрицы  $r$ . По главной диагонали корреляционной матрицы расположены единицы, отражающие связи признака с самим собой (см. третье свойство коэффициента  $r_{XY}$ ).

Рассчитаем с помощью стандартной программы «Корреляция» редактора *Excel* корреляционную матрицу по данным табл. 6.1 об основных трудовых показателях деятельности 12 рабочих предприятия (см. обозначения в модельной спецификации параграфа 6.2).

Таблица 6.1

Вариация трудовых показателей рабочих предприятия, тыс. грн.

| № рабочего | Y     | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> |
|------------|-------|----------------|----------------|
| 1          | 182,6 | 3081           | 95,4           |
| 2          | 184,0 | 3135           | 96,9           |
| 3          | 190,3 | 3168           | 99,2           |
| 4          | 198,7 | 3192           | 101,5          |
| 5          | 200,4 | 3074           | 106,3          |
| 6          | 200,3 | 3043           | 109,1          |
| 7          | 200,5 | 3006           | 110,4          |
| 8          | 216,2 | 3156           | 118,6          |
| 9          | 218,9 | 3190           | 119,5          |
| 10         | 236,7 | 3257           | 122,8          |
| 11         | 277,8 | 3438           | 135,9          |
| 12         | 295,1 | 3583           | 147,2          |

В результате расчётов на персональном компьютере с применением редактора *Excel* получена следующая матрица (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Корреляционная матрица

|       |        |        |       |
|-------|--------|--------|-------|
|       | $Y$    | $X_1$  | $X_2$ |
| $Y$   | 1      |        |       |
| $X_1$ | 0,9162 | 1      |       |
| $X_2$ | 0,9755 | 0,8337 | 1     |

В первом столбце матрицы  $r$  (табл. 6.2) приводятся коэффициенты парной корреляции между  $Y$  и  $X_1$ ,  $X_2$ , знаки которых полностью соответствуют экономическим представлениям о направлении причинно-следственных связей между трудовыми показателями табл. 6.1. Их значения свидетельствуют о наличии тесных прямых зависимостей ( $r_{Yj} > 0,9$ ) годовой выработки рабочих предприятия от уровня их фондовооружённости и оплаты труда. Во втором столбце находится коэффициент  $r_{12} = 0,834$ , характеризующий тесноту корреляционной связи между самими факторами  $X_1$  и  $X_2$ .

#### 6.4 Построение парного уравнения регрессии

При моделировании с помощью КРА корреляционных и регрессионных связей в экономике возникает задача построения уравнения регрессии, адекватно отражающего зависимость между изучаемыми экономическими признаками.

Рассмотрим сначала простейший случай регрессионной зависимости, когда  $f$  представляет собой линейную относительно параметров функцию:

$$Y = b_0 + b_1X + \varepsilon. \quad (6.5)$$

где  $b_0, b_1$  – неизвестные параметры.

Отметим, что регрессионная связь (6.5) в действительности имеет место в генеральной совокупности, а задача КРА состоит в нахождении подходящих оценок величин  $b_0, b_1, \varepsilon$  на основе выборочных статистических данных. При этом предполагается, что генеральная совокупность может быть как реально существующей, так и гипотетической. Такой подход обеспечивает возможность применять процедуру проверки различных статистических гипотез относительно параметров будущей регрессионной модели.

Пусть некоторый метод позволяет оценить неизвестные параметры регрессионной зависимости (6.5) в виде линейного относительно коэффициентов уравнения:

$$\hat{Y} = a_0 + \alpha_1X, \quad (6.6)$$

где  $\hat{Y}$  – расчётные по уравнению (6.6) значения зависимой переменной;  
 $a_0, \alpha_1$  – коэффициенты регрессии (искомые оценки параметров  $b_0, b_1$ ).

Уравнение (6.6) называется парным линейным уравнением регрессии, построенным по статистическим наблюдениям за изучаемым экономическим объектом. В системе координат линейное уравнение регрессии геометрически представляется в виде прямой  $a_0c_0$ , пересекающей ось ординат в точке  $a_0$ . При этом тангенс угла наклона  $\gamma$  линии регрессии к оси абсцисс равен  $a_1$  (рис. 6.1).

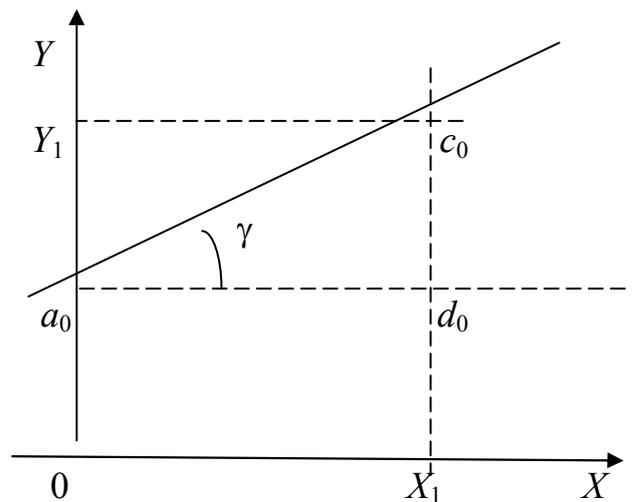


Рис. 6.1. Геометрический смысл парного линейного уравнения регрессии

При  $a_1 \rightarrow 0$   $\gamma \rightarrow 0^\circ$  ( $180^\circ$ ). При  $a_1 \rightarrow \infty$   $\gamma \rightarrow 90^\circ$ . Положительному значению  $a_1$  отвечает угол  $\gamma < 90^\circ$  (рис. 6.1), отрицательному – угол  $\gamma > 90^\circ$ .

Ясно, что при любом методе оценки неизвестных параметров регрессионной зависимости (6.5) расчётные по уравнению (6.6) значения результативного признака для каждого наблюдения будут отличаться от фактических значений на величину остатка:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i. \quad (6.7)$$

Очевидно, что в зависимости от значений коэффициентов  $a_0, \alpha_1$  существует бесконечное множество прямых, проходящих через «корреляционное облако» наблюдаемых статистических данных (рис. 6.2).

Возникает вопрос: какую из них выбрать? Или, какой метод использовать при оценке неизвестных параметров  $b_0, b_1, \varepsilon$  модели (6.5)? Ответы на поставленные вопросы можно получить, если сформулировать определённый критерий (метод) нахождения оценок  $a_0, \alpha_1$  неизвестных параметров  $b_0, b_1$  гипотетической генеральной совокупности.

Наиболее распространённым (но не единственным) методом нахождения  $a_0, \alpha_1$  является метод наименьших квадратов. Вполне логичным выглядит

следующее требование: искомая прямая регрессии должна проходить так, чтобы сумма квадратов остатков (6.7) была минимальной.

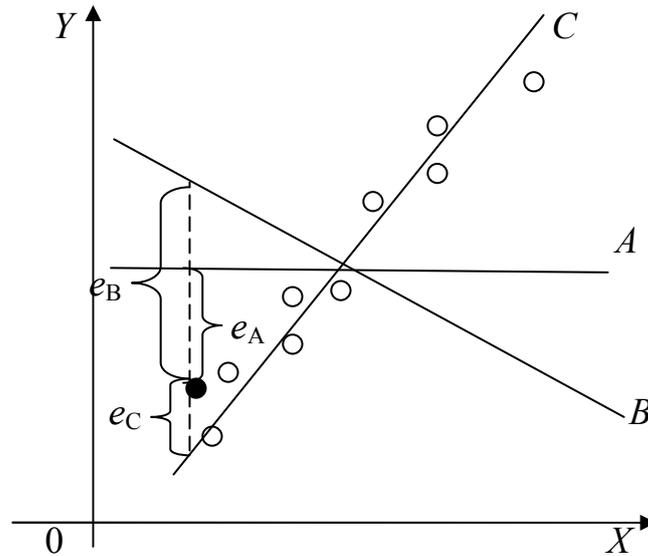


Рис. 6.2. Возможное расположение трёх линий регрессии

На рис. 6.2 показаны остатки для одного наблюдения (чёрный кружок) относительно трёх различных линий регрессии  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ( $e_C < e_A < e_B$ ). Очевидно, что с учётом критерия метода наименьших квадратов прямая  $C$  выглядит явно предпочтительней по сравнению с двумя другими линиями.

На основе соотношений (6.6), (6.7) запишем требование метода наименьших квадратов следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - a_0 - a_1 X_i)^2 \rightarrow \min \quad (6.8)$$

Сложная функция (6.8) зависит от значений переменных  $a_0$ ,  $a_1$ . Чтобы отыскать её минимум, необходимо найти первые частные производные выражения (6.8) по  $a_0$ ,  $a_1$  и приравнять их к нулю. В результате указанных действий получаются такие выражения:

$$\frac{\partial \left( \sum_{i=1}^N e_i^2 \right)}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^N (Y_i - a_0 - a_1 X_i) = 0; \quad \frac{\partial \left( \sum_{i=1}^N e_i^2 \right)}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^N X_i (Y_i - a_0 - a_1 X_i) = 0. \quad (6.9)$$

Отсюда после несложных алгебраических преобразований находится система двух (по числу оцениваемых коэффициентов регрессии) *нормальных уравнений*:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_i = N a_0 + a_1 \sum_{i=1}^N X_i \\ \sum_{i=1}^N Y_i X_i = a_0 \sum_{i=1}^N X_i + a_1 \sum_{i=1}^N X_i^2 \end{cases} \quad (6.10)$$

Из первого нормального уравнения и определения величины простой средней арифметической следует:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i - a_1 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \bar{Y} - a_1 \bar{X}. \quad (6.11)$$

Формула (6.11) даёт простое выражение коэффициента регрессии  $a_0$  через найденные значения  $\bar{Y}$ ,  $\bar{X}$ ,  $\alpha_1$ .

Подставляя во второе нормальное уравнение выражение (6.11), получают следующее решение системы (6.10) относительно коэффициента  $\alpha_1$ :

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i X_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^N X_i}{\sum_{i=1}^N X_i^2 - \bar{X} \sum_{i=1}^N X_i}. \quad (6.12)$$

Числитель и знаменатель формулы (6.12) после несложных преобразований представляются так:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N Y_i X_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^N X_i &= \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X}), \\ \sum_{i=1}^N X_i^2 - \bar{X} \sum_{i=1}^N X_i &= \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Учитывая определения ковариации и дисперсии, выражение (6.12) запишется следующим образом:

$$a_1 = \frac{\text{cov}(Y, X)}{\sigma_X^2}, \quad (6.14)$$

т.е. коэффициент регрессии  $\alpha_1$  определяется отношением ковариации экономических признаков  $Y$ ,  $X$  к дисперсии фактора  $X$ . Сравнение формул (6.3) и (6.14) позволяет выразить коэффициент регрессии  $\alpha_1$  через коэффициент парной корреляции:

$$a_1 = \frac{\text{cov}(Y, X)}{\sigma_X^2} = r_{YX} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}. \quad (6.15)$$

**Замечание 1.** Поскольку  $\sigma_Y$ ,  $\sigma_X$  величины неотрицательные, то знак коэффициента  $\alpha_1$  в уравнении регрессии (6.6) полностью определяется знаком коэффициента парной корреляции между  $Y$  и  $X$ . При прямой связи между экономическими признаками  $r_{YX} > 0$  и  $\alpha_1 > 0$ , при обратной связи  $r_{YX} < 0$  и  $\alpha_1 < 0$ , при отсутствии корреляционной зависимости  $r_{YX} = \alpha_1 = 0$ .

Таким образом, если на предшествующих этапах КРА определены величины  $\bar{Y}$ ,  $\bar{X}$ ,  $\sigma_Y$ ,  $\sigma_X$ ,  $r_{YX}$ , то расчёт коэффициентов парной линейной регрессии  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  в соответствии с формулами (6.15), (6.11) не вызовет особых трудностей.

Необходимо помнить, что метод наименьших квадратов, применяемый для оценивания неизвестных параметров  $b_0$ ,  $b_1$  линейной модели (6.5) с помощью коэффициентов уравнения регрессии (6.6), обладает рядом замечательных свойств, которые выдвигают его на первый план среди множества других методов оценки параметров генеральной совокупности. Приведём основные из них.

1. Несмещённость, означающая, что найденные коэффициенты регрессии  $a_0, a_1$  не содержат систематических ошибок, т.е. математическое ожидание коэффициентов регрессии  $\alpha_0, \alpha_1$ , найденных по данным бесконечного числа выборок из генеральной совокупности, равняется их истинным значениям  $b_0, b_1$ .

2. Эффективность, которая состоит в том, что случайные ошибки найденных коэффициентов регрессии  $a_0, a_1$  минимальны по сравнению со случайными ошибками параметров уравнения (6.6), обеспечиваемыми всеми другими методами оценивания.

3. Состоятельность, означающая, что с ростом объёма статистической совокупности наблюдений  $N$  коэффициенты регрессии стремятся к своим истинным значениям в генеральной совокупности. Иными словами, рост информационной базы экономико-статистической модели обеспечивает увеличение точности и достоверности оцениваемых регрессионных взаимосвязей.

Оценки, обладающими свойствами 1 – 3, называются наилучшими линейными оценками без смещений (*best liner unbiased estimates*) или *BLUE*-оценками. Следовательно, коэффициенты регрессии  $a_0, a_1$  являются *BLUE*-оценками неизвестных параметров  $b_0, b_1$  линейной функции (6.5) в генеральной совокупности.

4. Нормальность распределения случайной компоненты  $\varepsilon$ , вследствие которой и коэффициенты регрессии также подчиняются нормальному закону распределения с математическими ожиданиями, равными истинным значениям  $b_0, b_1$  этих коэффициентов в генеральной совокупности.

Свойство 4 является особенно важным для проведения процедуры проверки различных статистических гипотез в процессе анализа полученного уравнения (6.6) и построения доверительных интервалов его параметров, а также доверительных интервалов прогноза.

## 6.5 Построение множественного уравнения регрессии

В реальной экономической действительности вариацию результативной переменной  $Y$  чаще всего определяет изменение не одного, а нескольких факторов  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . При этом, как было отмечено в параграфе 6.1, причинно-следственная связь между ними не функциональная, а регрессионная (корреляционная).

Прежде чем приступать к множественному КРА весьма полезным представляется вычисление описательных статистик всех переменных будущего уравнения регрессии, которые включают средние значения, дисперсии, стандартные (средние квадратические) отклонения и др. статистические характеристики рядов распределения величин  $Y_i, X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im}$ . Для его реализации необходимо образовать документ *Excel*, открыть рабочую книгу и ввести в столбцы электронной таблицы, расположенные рядом, исходные данные по каждой экономической переменной.

Далее выполняются команды: Сервис – Анализ данных – Описательная статистика – ОК. В электронной таблице появляется диалоговое окно, в котором указываются исходные данные: входной интервал – адреса ячеек  $Y, X_1, X_2, \dots, X_m$ ; выходной интервал данного листа – указать адрес ячейки, справа и вниз от которой находится свободное поле. После команды ОК на рабочем листе книги *Excel* появляются результаты в форме расчётной табл. 6.3.

Таблица 6.3

**Описательные статистики трудовых показателей рабочих предприятия**

| Статистические характеристики | Столбец 1 (Y) | Столбец 2 ( $X_1$ ) | Столбец 3 ( $X_2$ ) |
|-------------------------------|---------------|---------------------|---------------------|
| Среднее значение              | 216,7916667   | 3193,58333          | 113,566667          |
| Стандартная ошибка            | 10,42102666   | 48,1285303          | 4,62074265          |
| Медиана                       | 200,45        | 3162                | 109,75              |
| Мода                          | #Н/Д          | #Н/Д                | #Н/Д                |
| Стандартное отклонение        | 36,0994953    | 166,72212           | 16,0067221          |
| Дисперсия выборки             | 1303,173561   | 27796,2652          | 256,215152          |
| Эксцесс                       | 1,065618828   | 1,8225812           | 0,26505514          |
| Асимметричность               | 1,396487146   | 1,42385973          | 0,91655668          |
| Интервал                      | 112,5         | 577                 | 51,8                |
| Минимум                       | 182,6         | 3006                | 95,4                |
| Максимум                      | 295,1         | 3583                | 147,2               |
| Сумма                         | 2601,5        | 38323               | 1362,8              |
| Счёт                          | 12            | 12                  | 12                  |

Отметим здесь, что практическое применение результатов КРА предполагает в дальнейшем использование, по крайней мере, двух статистических характеристик переменных из табл. 6.3 – средних значений и стандартных отклонений.

Основные подходы к оценке параметров множественной линейной регрессии принципиально ничем не отличаются от идей оценки параметров парной линейной регрессии, изложенных выше. Уравнение регрессии в этом случае принимает вид

$$\hat{Y} = a_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m, \quad (6.16)$$

а система нормальных уравнений (6.10), полученная из требования метода наименьших квадратов (6.8), содержит уже не два, а  $(m+1)$  уравнение.

Решить такую систему вручную (даже при малых  $m$ ) не представляется возможным вследствие очень большой трудоёмкости вычислений. Поэтому множественный КРА выполняется исключительно на персональном компьютере с использованием стандартных программ редактора *Excel* или же других пакетов программ, например, *STATISTICA*.

С этой целью в редакторе *Excel* выполняются команды: Сервис – Анализ данных – Регрессия – ОК. В электронной таблице появляется диалоговое окно, в котором указываются исходные данные:

- 1) адреса ячеек  $Y$ ;
- 2) адреса ячеек  $X_1, X_2, \dots, X_m$ ;
- 3) надежность коэффициентов регрессии (по умолчанию 95 %);
- 4) вывод результатов на новый рабочий лист, либо в выходной интервал данного листа (активизировать и указать адрес ячейки).

После команды ОК на рабочем листе книги *Excel* появляются результаты КРА в форме расчётной таблицы. Для вывода на экран расчётных (предсказанных) значений результативного признака  $\hat{Y}_i$  и остатков уравнения регрессии после команд Сервис – Анализ данных – Регрессия – ОК в диалоговом окне следует активизировать также опцию «Остатки». После команды ОК на рабочем листе книги *Excel* ниже результатов КРА в форме расчётной таблицы появляется информация о  $\hat{Y}_i$  и  $e_i$ .

Рассмотрим результаты множественного КРА на персональном компьютере по данным обсуждаемого выше примера (табл. 6.1). После выполнения указанных команд в редакторе *Excel* появляются следующие итоги, состоящие из четырёх блоков (табл. 6.4).

Таблица 6.4

Результаты множественного КРА трудовых показателей рабочих  
предприятия

| Регрессионная статистика (1-й блок) |                                   |                               |                          |                        |                       |                        |
|-------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| Множественный R                     | 0,993166                          |                               |                          |                        |                       |                        |
| R-квадрат                           | 0,986379                          |                               |                          |                        |                       |                        |
| Норм. R-квадрат                     | 0,983352                          |                               |                          |                        |                       |                        |
| Станд. ошибка                       | 4,657875                          |                               |                          |                        |                       |                        |
| Наблюдения                          | 12                                |                               |                          |                        |                       |                        |
| Дисперсионный анализ (2-й блок)     |                                   |                               |                          |                        |                       |                        |
|                                     | <i>df</i>                         | <i>SS</i>                     | <i>MS</i>                | <i>F</i>               | <i>Значимость F</i>   |                        |
| Регрессия                           | 2                                 | 14139,65                      | 7069,823476              | 325,861363             | 4,02E-09              |                        |
| Остаток                             | 9                                 | 195,2622                      | 21,69580157              |                        |                       |                        |
| Итого                               | 11                                | 14334,91                      |                          |                        |                       |                        |
|                                     | (3-й блок)<br><i>Коэффициенты</i> | <i>Стандартная<br/>ошибка</i> | <i>t-<br/>статистика</i> | <i>P-<br/>Значение</i> | <i>Нижние<br/>95%</i> | <i>Верхние<br/>95%</i> |
| Y-пересечение                       | -194,397                          | 35,14473                      | -5,53132283              | 0,00036511             | -273,9                | -114,894               |
| Переменная X 1                      | 0,073089                          | 0,015256                      | 4,790816082              | 0,00098627             | 0,038578              | 0,107601               |
| Переменная X 2                      | 1,565346                          | 0,158905                      | 9,850859314              | 4,0544E-06             | 1,205879              | 1,924813               |
| ВЫВОД ОСТАТКА (4-й блок)            |                                   |                               |                          |                        |                       |                        |
| <i>Наблюдение</i>                   | <i>Предсказанное Y</i>            | <i>Остатки</i>                |                          |                        |                       |                        |
| 1                                   | 180,1259                          | 2,474111                      |                          |                        |                       |                        |
| 2                                   | 186,4207                          | -2,42074                      |                          |                        |                       |                        |
| 3                                   | 192,433                           | -2,13299                      |                          |                        |                       |                        |
| 4                                   | 197,7874                          | 0,912567                      |                          |                        |                       |                        |
| 5                                   | 196,6765                          | 3,723466                      |                          |                        |                       |                        |
| 6                                   | 198,7937                          | 1,506271                      |                          |                        |                       |                        |
| 7                                   | 198,1244                          | 2,375632                      |                          |                        |                       |                        |
| 8                                   | 221,9236                          | -5,72363                      |                          |                        |                       |                        |
| 9                                   | 225,8175                          | -6,91748                      |                          |                        |                       |                        |
| 10                                  | 235,8801                          | 0,81988                       |                          |                        |                       |                        |
| 11                                  | 269,6153                          | 8,18465                       |                          |                        |                       |                        |
| 12                                  | 297,9017                          | -2,80174                      |                          |                        |                       |                        |

Искомые параметры двухфакторного уравнения регрессии находятся в 3-м блоке, в столбце «Коэффициенты», следовательно, можно записать:

$$\hat{Y} = -194,397 + 0,073X_1 + 1,565X_2. \quad (6.17)$$

Свободный член модели  $a_0 = -194,397$  обозначен как  $Y$ -пересечение (см. 3-й блок решения, табл. 6.4, столбец «Коэффициенты»), исходя из геометрической интерпретации данного параметра.

### 6.6 Анализ построенного уравнения регрессии

Далее осуществляется исследование построенного уравнения регрессии, направленное на выяснение степени его пригодности к практическому использованию в процессе экономического анализа и прогнозирования. Это исследование базируется на априорной и эмпирической информации, полученной в ходе модельной спецификации и непосредственного КРА, и состоит из следующих основных этапов:

- 1) проверка надёжности построенного уравнения регрессии в целом и отдельных её коэффициентов;
- 2) проверка знаков коэффициентов регрессии  $a_0, a_1, \dots, a_m$ ;
- 3) оценка тесноты множественных корреляционных связей между  $Y$  и  $X_1, X_2, \dots, X_m$ ;
- 4) оценка точности полученной модели;
- 5) проверка адекватности построенного уравнения регрессии.

Рассмотрим подробнее указанные этапы анализа построенного уравнения регрессии, иллюстрируя их на примере модели (6.17).

1. *Проверка надёжности.* В самом начале проверяется надёжность уравнения регрессии в целом. Если случится, что модель ненадёжна в целом, то второй шаг – проверку надёжности отдельных коэффициентов регрессии делать не имеет смысла: уравнение регрессии признаётся непригодным к практическому использованию.

Проверка статистической надёжности (значимости, существенности) модели в целом осуществляется с помощью  $F$ -критерия Фишера. Она тождественна тестированию надёжности множественных корреляционных связей. При этом статистика критерия имеет вид:

$$F_{\alpha; k_1; k_2} = \frac{R^2/m}{(1-R^2)/(N-m-1)}. \quad (6.18)$$

В условиях справедливости гипотезы о несущественности множественных корреляционных связей в генеральной совокупности ( $R = 0$ ) выражение (6.18) подчиняется  $F$ -распределению Фишера с уровнем значимости  $\alpha$  и числом степеней свободы  $k_1 = m$  и  $k_2 = N - m - 1$ . Расчётное значение  $F$ -критерия, а также его статистическая значимость находятся автоматически в ходе построения уравнения регрессии с помощью редактора *Excel* (см. 2-й блок решения «Дисперсионный анализ», столбцы  $F$  и значимость  $F$  табл. 6.4).

Модель с достоверностью  $(1 - \alpha) \times 100$  считается надёжной, если расчётное значение  $F$ -критерия превышает  $\alpha$ -квантиль  $F$ -распределения Фишера ( $F_{\alpha; k_1; k_2}$ ), найденный в редакторе *Excel* с помощью команд: = FРАСПОБР(вероятность;  $k_1$ ;  $k_2$ ) – ОК. Вероятность ошибки  $\alpha$  задаётся самим исследователем (обычно на уровне 0,05; 0,01). Величину  $F_{\alpha; k_1; k_2}$  можно также найти через функции редактора *Excel*, выбрав в категории «Статистические» вторую по списку функцию FРАСПОБР.

Модель считается незначимой (несущественной), если расчётное значение  $F$ -критерия меньше, либо равно  $\alpha$ -квантилю  $F_{\alpha; k_1; k_2}$ . Достоверность данного утверждения равна мощности критерия, которая в основном зависит от объёма статистической совокупности наблюдений  $N$ . На малых выборках ( $N < 20$ ) мощность критерия не высока и исследователь часто допускает ошибку, признавая множественные корреляционные связи ненадёжными, когда в действительности, т.е. в генеральной совокупности, это не так. Чем больше объём выборки ( $N \rightarrow \infty$ ), тем выше мощность критерия, тем более достоверным является вывод о не значимости уравнения регрессии в целом.

В обсуждаемом примере (см. 2-й блок решения табл. 6.3)  $F = 325,86$ ; значимость  $F = 4,02\text{E-}09$ ;  $\alpha$ -квантиль  $F_{\alpha; k_1; k_2}$  находится с учётом следующих условий:  $\alpha = 0,01$  (заданная исследователем вероятность ошибки при отклонении гипотезы о несущественности множественных корреляционных связей);  $k_1 = m = 2$ ;  $k_2 = N - m - 1 = 12 - 2 - 1 = 9$ . Числа степеней свободы (*degree of freedom*)  $k_1 = 2$  и  $k_2 = 9$  можно также найти в столбце *df* 2-го блока решения табл. 6.4, в строках «Регрессия» и «Остаток»;  $\alpha$ -квантиль  $F_{0,01; 2; 9}$ , найденный в редакторе *Excel*, равняется 8,02.

Поскольку  $F$  расчётное превышает  $\alpha$ -квантиль  $F_{0,01; 2; 9}$  ( $325,86 > 8,02$ ), то с достоверностью  $1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$  или 99 % модель (6.17) следует признать в целом надёжной (значимой, существенной).

Аналогичный вывод можно получить, используя современный (компьютерный) вариант проверки, который основывается на сравнении заданного исследователем уровня значимости  $\alpha = 0,01$  и расчётной значимости  $F = 4,02\text{E-}09$ . В данном примере он выглядит следующим образом: т.к. расчётная значимость  $F$  намного меньше заданного уровня значимости  $\alpha$  ( $4,02\text{E-}09 = 0,00000000402 < 0,01$ ), то с достоверностью  $1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$  или 99 % модель (6.17) следует признать в целом надёжной, значимой, существенной.

**Замечание 2.** Современный подход к проверке гипотез представляется более простым, поскольку не требует определения  $\alpha$ -квантиля  $F_{\alpha; k_1; k_2}$ , а базируется на заданном исследователем уровне значимости  $\alpha$  (при условии, что компьютерная программа рассчитывает значимость  $F$ ).

Если модель надёжна в целом, то проверяется надёжность отдельных её коэффициентов, имея в виду, что основное внимание обращается на величины  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , т.к. в экономических исследованиях свободный член  $\alpha_0$  обычно всегда присутствует в уравнении. Проверка надёжности отдельных коэффициентов регрессии базируется на предпосылке о том, что искомая

модель не должна содержать несущественно влияющие на  $Y$  факторы. Она проводится с целью исключения из уравнения тех переменных  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , коэффициенты которых незначимо отличаются от нуля.

В условиях справедливости гипотезы о нулевом значении  $j$ -го коэффициента регрессии в генеральной совокупности ( $b_j = 0$ ) величина  $a_j/s_j$  ( $s_j$  – стандартная ошибка  $j$ -го коэффициента регрессии) подчиняется  $t$ -распределению Стьюдента с уровнем значимости  $\alpha$  и числом степеней свободы  $k = N - m - 1$ . Это позволяет последовательно проверять надёжность отдельных коэффициентов регрессии, начиная с самого «слабого» звена, т.е. с коэффициента  $a_j$ , которому соответствует  $\min(t_j)$ , либо  $\max(P_j)$ -значимость).

Расчётные значения  $t$ -критерия, а также его  $P$ -значимость находятся автоматически в ходе построения уравнения регрессии с помощью редактора *Excel* (см. 3-й блок решения, столбцы  $t$ -статистика и  $P$ -значение табл. 6.4). При этом проверка испытуемой гипотезы осуществляется аналогично проверке надёжности построенной модели в целом. Основное отличие состоит в том, что обнаруженные несущественные коэффициенты  $a_j$  сигнализируют о необходимости исключения из уравнения соответствующих факторов  $X_j$ .

В обсуждаемом примере (см. 3-й блок решения табл. 6.4)  $t_1 = 4,79$ ;  $P_1 = 0,000986$ ;  $t_2 = 9,85$ ;  $P_2 = 0,000004$ . «Слабым» звеном является коэффициент  $a_1$ , поскольку  $t_1 < t_2$  ( $P_1 > P_2$ ). Применим современный (компьютерный) вариант проверки, сопоставив  $P_1$  с заданным уровнем значимости  $\alpha = 0,01$ . Полученный вывод таков: расчётная  $P_1$ -значимость намного меньше заданного уровня значимости  $\alpha$  ( $0,000986 < 0,01$ ), поэтому с достоверностью  $1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$  или 99 % коэффициент регрессии  $a_1$  следует признать надёжным, значимым, существенным.

Очевидно, что надёжность коэффициента регрессии  $a_2$  не нуждается в проверке, т.к. его  $P_2$ -значимость меньше, чем  $P_1$ -значимость и нулевая гипотеза ( $b_j = 0$ ) тем более отклоняется. Следовательно, с достоверностью 99 % можно утверждать о том, что построенная модель (6.17) надёжна не только в целом, но и по отдельным её коэффициентам.

Если случится, что самое «слабое» звено, например,  $a_j$  окажется ненадёжным, незначимым, несущественным, то соответствующий фактор  $X_j$  необходимо исключить из уравнения, пересчитав заново все его параметры. При этом число коэффициентов регрессии  $m$  снижается на единицу, а проверка их надёжности повторяется.

Необходимо отметить, что описанная выше процедура проверки надёжности коэффициентов регрессии по  $t$ -критерию Стьюдента лежит в основе ряда алгоритмов поиска *наилучшей модели*, под которой обычно понимают наиболее точное уравнение регрессии, все коэффициенты  $a_j$  которого являются надёжными, значимыми, существенными. Среди таких алгоритмов можно назвать перебор всех возможных регрессионных моделей, шаговый регрессионный анализ (процедура отсева), пошаговый ввод в модель новых факторов и др.

Так, шаговый регрессионный анализ начинается с построения наиболее полной модели, включающей все переменные, отобранные на стадии априорного экономического исследования изучаемого объекта. Затем осуществляется проверка надёжности полученного уравнения регрессии в целом и отдельных его коэффициентов. Если обнаружится, что самое «слабое» звено статистически ненадёжно, то соответствующий фактор исключается из уравнения с пересчётом всех его параметров. Процедура отсева незначимых факторов и проверки надёжности новой модели повторяется до тех пор, пока не будет найдено наилучшее уравнение регрессии.

2. *Проверка знаков.* Знак свободного члена  $a_0$  проверяется только в том случае, если данный коэффициент имеет качественную экономическую интерпретацию. Последняя возможна, когда точка  $X_j = 0$  входит в область определения всех, без исключения, факторов, вошедших в уравнения регрессии. Если хотя бы для одного фактора это условие не выполняется, то  $a_0$  экономически не интерпретируется, а имеет лишь геометрическое истолкование, и на его знак можно не обращать никакого внимания.

Например, моделируется парная линейная зависимость (6.6) урожайности некоторой сельскохозяйственной культуры ( $Y$ ) от количества внесённых в поля удобрений ( $X$ ). Очевидно, что точка  $X = 0$  входит в область определения фактора  $X$  – это случай, когда по каким-то причинам удобрения в поля вообще не вносились. Тогда величину свободного члена  $a_0$  можно рассматривать как значение средней урожайности изучаемой сельскохозяйственной культуры при отсутствии в почве удобрений. В самом деле, из уравнения (6.6) вытекает: при  $X = 0$   $\hat{Y} = a_0$ . Следовательно, в этом случае величина  $a_0$  должна быть положительной, т.к. сельскохозяйственная культура производится, а не потребляется. Величина  $a_0 < 0$  означала бы потребление изучаемой культуры.

Рассмотрим проверку знака  $a_0 = -194,397$  двухфакторного уравнения регрессии (6.17), построенного по данным обсуждаемого выше примера. Поскольку в области определения ни фактора  $X_1$  (фондовооружённость труда), ни фактора  $X_2$  (годовая заработная плата) не входят нулевые или близкие к ним значения, то свободный член  $a_0$  экономически не интерпретируется. Он имеет лишь геометрическое истолкование как точка пересечения плоскости регрессии с осью  $Y$ , поэтому на его знак можно не обращать никакого внимания.

Знаки коэффициентов регрессии  $a_1, a_2, \dots, a_m$  проверяются на основе априорного экономического анализа будущей модели на базе информации о направлении причинно-следственных связей между  $Y$  и соответствующими факторами  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . В уравнении (6.17) знаки коэффициентов  $a_1, a_2$  полностью отвечают экономическим представлениям о направлении влияния размера фондовооружённости труда и годовой заработной платы на производительность труда рабочих (положительные значения  $a_1, a_2$  свидетельствуют о прямой связи между изучаемыми переменными).

В случае, когда знак коэффициента регрессии  $a_j$  противоречит теоретическим представлениям о направлении влияния  $X_j$  на  $Y$ , то возможны два варианта выхода из создавшейся ситуации.

1. Углублённое изучение исследуемого объекта с целью определения скрытых причин наблюдаемого несоответствия.

2. Исключение из построенной модели фактора  $X_j$ , действующего на  $Y$  в направлении, которое противоречит экономической теории.

В настоящее время чаще всего применяется второй подход, поскольку первый путь обычно требует дополнительных затрат времени, финансовых и материальных ресурсов для анализа создавшейся ситуации.

3. *Оценка тесноты* корреляционных связей между изучаемыми экономическими переменными. Как было указано выше, показателем тесноты линейной корреляционной связи между  $Y$  и  $X$  служит коэффициент парной корреляции  $r_{YX}$ . Его величина часто используется как показатель тесноты связи между результативным признаком и фактором, вошедшим в уравнение парной линейной регрессии.

Однако, универсальной мерой тесноты корреляционных связей для любых регрессионных моделей (парных и множественных, линейных и нелинейных) служит коэффициент множественной корреляции  $R$ , который определяется как положительное значение корня квадратного из коэффициента детерминации  $R^2$ :

$$R^2 = \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma^2}, \quad (6.19)$$

где  $\sigma^2$  – общая дисперсия результативного признака  $Y$  ( $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}{N}$ );

$\sigma_{\hat{y}}^2$  – факторная дисперсия  $Y$  ( $\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{N}$ ).

Величина  $R$  изменяется в пределах от 0 до +1 и статистически интерпретируется аналогично коэффициенту парной корреляции  $r_{YX}$ . Для парной регрессии (6.6)  $R = |r_{YX}|$ , т.е. коэффициент множественной корреляции совпадает с абсолютной величиной коэффициента парной корреляции.

Практические расчёты КРА трудовых показателей рабочих предприятия, проведенные для двухфакторной модели в редакторе *Excel* (см. табл. 6.4, 1-й блок решения, строка 1), показали, что для уравнения (6.17)  $R = 0,993$ . Следовательно, можно говорить об очень тесной корреляционной связи, которая характеризует зависимость производительности труда от величины фондовооружённости ( $X_1$ ) и оплаты труда ( $X_2$ ) рабочих предприятия.

В тех случаях, когда обнаруженные с помощью КРА корреляционные связи между изучаемыми экономическими переменными являются средними и слабыми ( $R < 0,7$ ), трудно рассчитывать на получение точных, надёжных и адекватных регрессионных моделей со всеми вытекающими для их практического использования последствиями.

4. Оценка точности уравнения регрессии осуществляется с помощью показателей двух видов: абсолютных и относительных. Стандартная ошибка регрессии  $S_Y$  представляет собой корень квадратный из среднего квадрата остатков и служит абсолютной мерой точности построенной модели:

$$S_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N-m-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N e_i^2}{N-m-1}}. \quad (6.20)$$

В редакторе *Excel* с использованием стандартной программы «Регрессия» стандартная ошибка рассчитывается автоматически. Для уравнения (6.17) величина  $S_Y = 4,658$  (см. табл. 6.4, 1-й блок решения, строка 4). Можно дать такую общую рекомендацию по истолкованию величины  $S_Y$ : для одних и тех же исходных статистических данных меньшая стандартная ошибка отвечает более точной модели, и наоборот.

Необходимо помнить, что величина  $S_Y$  зависит от единиц измерения переменной  $Y$ . Чтобы получить безразмерный относительный показатель точности регрессионной модели используют коэффициент детерминации  $R^2$  (6.19), который представляет собой долю дисперсии результативного признака  $Y$ , объясняемую факторами, вошедшими в уравнение регрессии, в общей дисперсии  $Y$ .

Коэффициент детерминации изменяется в пределах от 0 до +1. Очевидно, что чем ближе  $R^2$  к 1 (100 %), тем точнее построенное уравнение описывает изменение результативной переменной  $Y$ , и наоборот. Величина  $(1 - R^2)$  характеризует влияние на результативный признак  $Y$  всех неучтённых в модели факторов. Выраженная в процентах, она также используется как относительная мера точности регрессионной модели. В случае, когда  $(1 - R^2) \times 100 < 10\%$ , полученное уравнение считается точным, а при  $(1 - R^2) \times 100 < 5\%$  – очень точным.

В обсуждаемом примере для уравнения (6.17) коэффициент детерминации  $R^2 = 0,986$  (см. 1-й блок решения, строка 2, табл. 6.4). Величина  $R^2$  указывает на то, что свыше 98,6 % вариации производительности труда рабочих предприятия определяется изменением величины фондовооружённости ( $X_1$ ) и оплаты труда ( $X_2$ ). Влияние факторов, не вошедших в уравнение (6.17), составляет всего 1,4 % общего воздействия на  $Y$  всех факторных переменных. Поэтому модель (6.17) следует признать очень точной.

Для малых выборок ( $N < 20$ ) при построении уравнений регрессии наряду с обычным  $R^2$  целесообразно анализировать величину нормированного коэффициента детерминации  $R_H^2$ . Последний всегда меньше  $R^2$  и получается путём корректировки обычного коэффициента детерминации на соотношение числа наблюдений  $N$  и количества оцениваемых коэффициентов уравнения регрессии  $(m+1)$ . При  $N \rightarrow \infty$   $R_H^2 \rightarrow R^2$ . Но на малых выборках величина  $R_H^2$  может быть существенно ниже  $R^2$ . Следовательно, можно утверждать, что нормированный коэффициент детерминации характеризует точность полученной модели с учётом информационной базы, на которой она построена.

Величина  $R_H^2 = 0,983$  для модели (6.17) приводится в 1-м блоке решения табл. 6.4, в строке 3. Для него выполняется соотношение  $R_H^2 \leq R^2$  ( $0,983 < 0,986$ ), хотя точность полученной модели с учётом информационной базы, на которой она построена, по-прежнему, достаточно высока.

5. *Проверка адекватности* завершает анализ построенной регрессионной модели. Она осуществляется на основе исследования остатков модели (6.17) графическим и аналитическим методами. Остатки уравнения регрессии  $e_i$ , а также выровненные по модели значения результативной переменной  $\hat{Y}_i$  в редакторе *Excel* рассчитываются автоматически и приводятся в 4-м блоке решения КРА, табл. 6.4.

Графический метод заключается в построении графиков стандартизированных остатков ( $e_i/S_Y$ ), в зависимости от порядкового номера  $e_i$ , от выровненных значений  $\hat{Y}_i$ , от факторов конечного уравнения регрессии, и сравнении их с эталонным графиком остатком – горизонтальной «полосой» (рис. 6.3).

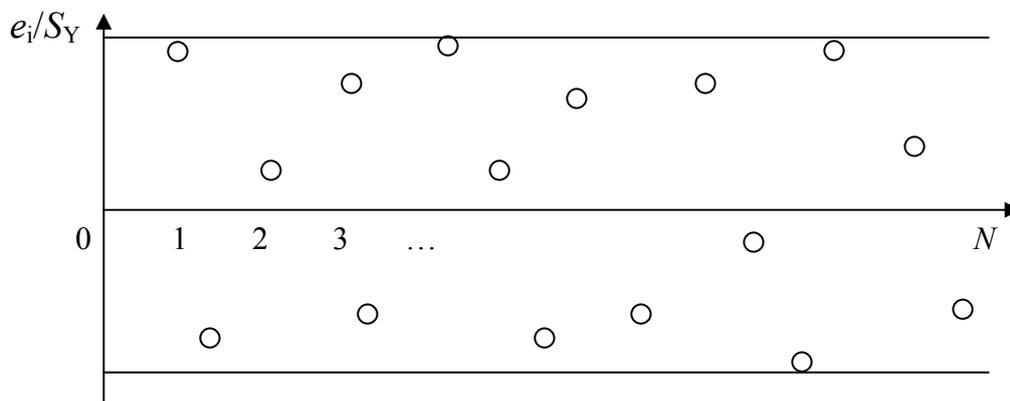


Рис. 6.3. Эталонный график стандартизированных остатков, указывающий на отсутствие неадекватности построенной модели

Например, если фактический график остатков напоминает дугу (рис. 6.4), то это означает, что гипотеза о линейности формы математической связи между  $Y$  и факторами уравнения регрессии неверна и необходимо его скорректировать, испробовав иные, нелинейные зависимости – параболическую, гиперболическую, степенную и другие функции.

Следует иметь в виду, что выводы графического исследования остатков сильно зависят от масштаба построенных графиков, отличаются субъективностью и часто дают лишь приближенные представления о нарушении предпосылок априорного анализа относительно свойств случайной компоненты  $\varepsilon$ .

Поэтому на практике обычно пользуются аналитическим исследованием адекватности модели, которое заключается в расчёте коэффициента автокорреляции остатков первого порядка  $r(1)$ :

$$r(1) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (e_i - \bar{e}_i)(e_{i+1} - \bar{e}_{i+1})}{\sigma_{e_i} \sigma_{e_{i+1}} (N-1)}. \quad (6.21)$$

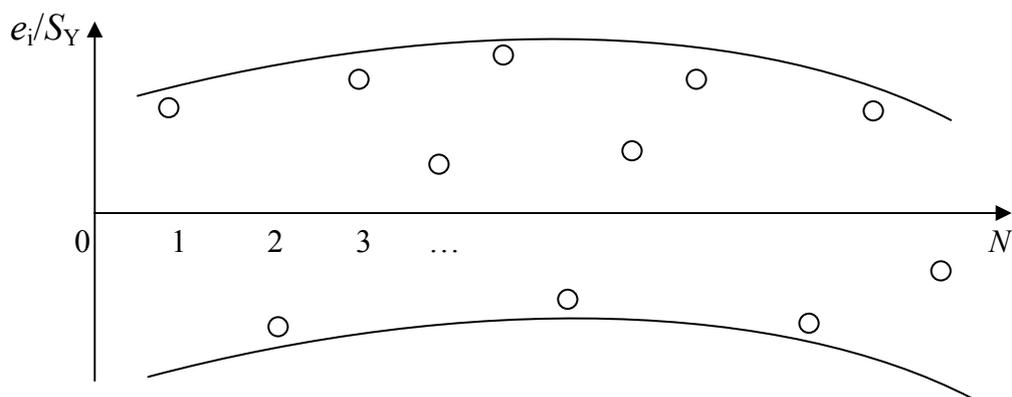


Рис. 6.4. График стандартизованных остатков, указывающий на наличие нарушения гипотезы о линейной форме математической связи между переменными уравнения регрессии

Нахождение коэффициента автокорреляции остатков первого порядка  $r(1)$  осуществляется по следующей схеме: рассчитывается обычный коэффициент парной корреляции по двум рядам, выделенным на рис. 6.5 фигурной скобкой и горизонтальными штриховыми линиями.

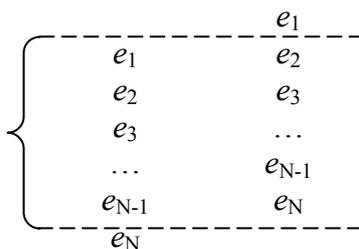


Рис. 6.5. Схема расчёта коэффициента автокорреляции остатков первого порядка

Доказано, что регрессионную модель можно считать адекватной изучаемому экономическому явлению, если выполняется условие  $r(1) \approx 0$ , т.е. автокорреляция остатков первого порядка мала и статистически ненадёжна. В противном случае говорят о неадекватности уравнения исходным данным. А именно:

1) положительная и статистически значимая величина  $r(1)$  указывает на «недогруженность» регрессионной модели – необходимо ввести в уравнение дополнительные важные факторы или усложнить форму математической связи между переменными;

2) отрицательная и статистически значимая величина  $r(1)$  свидетельствует о «перегруженности» регрессионной модели – необходимо исключить из уравнения некоторые несущественные факторы или упростить форму математической связи между переменными.

Руководствуясь этими рекомендациями, можно осуществить корректировку полученной регрессионной модели с обязательной повторной проверкой требований всех предшествующих этапов анализа модели –

надёжности уравнения в целом и отдельных ее коэффициентов, соответствия знаков коэффициентов регрессии экономическим представлением о направлении связи между переменными, тесноты их корреляционной связи, точности построенного уравнения регрессии.

Чтобы рассчитать коэффициент автокорреляции остатков первого порядка  $r(1)$  и проверить его надёжность следует повторить процедуру КРА, в которой в роли результативного признака  $Y$  будет выступать исходный ряд остатков, без последнего  $e_N$  (см. схему на рис. 6.5), а в роли фактора  $X$  – ряд остатков, без первого  $e_1$  (табл. 6.5).

Таблица 6.5

Исходные данные для расчёта  $r(1)$

| Наблюдение | Остатки $e_i$ | Остатки $e_{i+1}$ |
|------------|---------------|-------------------|
| 1          | 2,474111      | -2,42074          |
| 2          | -2,42074      | -2,13299          |
| 3          | -2,13299      | 0,912567          |
| 4          | 0,912567      | 3,723466          |
| 5          | 3,723466      | 1,506271          |
| 6          | 1,506271      | 2,375632          |
| 7          | 2,375632      | -5,72363          |
| 8          | -5,72363      | -6,91748          |
| 9          | -6,91748      | 0,81988           |
| 10         | 0,81988       | 8,18465           |
| 11         | 8,18465       | -2,80174          |

Второй ряд остатков (начиная с  $e_2$  и заканчивая  $e_N$ ) необходимо скопировать в столбец электронной таблицы *Excel*, находящийся справа от исходного ряда остатков (начиная с  $e_1$  и заканчивая  $e_{N-1}$ ), как это показано в табл. 6.5. Следует иметь в виду, что из-за сдвига на одно наблюдение число остатков равно уже не  $N$ , а  $N - 1$ , в обсуждаемом примере это 11. Затем, по образованным таким способом переменным необходимо провести КРА аналогично тому, как выполнялась эта процедура для изучения рассматриваемых трудовых показателей рабочих предприятия (см. табл. 6.4).

В табл. 6.6 полученных результатов КРА остатков уравнения (6.17) внимание обращается лишь на три параметра: 1) Множественный  $R$ ; 2) знак коэффициента регрессии  $a_1$  при переменной  $X_1$ ; 3) Значимость  $F$  ( $P$ -значение для переменной  $X_1$ ).

Первый показатель как раз и является абсолютной величиной коэффициента автокорреляции остатков первого порядка  $R = |r_{e_i e_{i+1}}| = |r(1)| = 0,0775$ , а второй определяет его знак, т.к. знаки  $r_{e_i e_{i+1}}$  и  $a_1$  в парной модели совпадают. В данной задаче  $a_1 = 0,0771 > 0$ . Следовательно, если автокорреляция остатков первого порядка и существует, то она положительная.

Полученные результаты показывают, что величина  $r(1) = 0,078$  свидетельствует о наличии положительной и слабой по тесноте связи между остатками модели (6.17).

Таблица 6.6

## Результаты КРА остатков уравнения регрессии (6.17)

| Регрессионная статистика (1-й блок) |                                |                           |                     |                   |                     |                    |
|-------------------------------------|--------------------------------|---------------------------|---------------------|-------------------|---------------------|--------------------|
| Множественный R                     | 0,077522308                    |                           |                     |                   |                     |                    |
| R-квадрат                           | 0,006009708                    |                           |                     |                   |                     |                    |
| Норм. R-квадрат                     | -0,10443366                    |                           |                     |                   |                     |                    |
| Стандартная ошибка                  | 4,540886627                    |                           |                     |                   |                     |                    |
| Наблюдения                          | 11                             |                           |                     |                   |                     |                    |
| Дисперсионный анализ (2-й блок)     |                                |                           |                     |                   |                     |                    |
|                                     | <i>df</i>                      | <i>SS</i>                 | <i>MS</i>           | <i>F</i>          | <i>Значимость F</i> |                    |
| Регрессия                           | 1                              | 1,12200573                | 1,122006            | 0,054414          | 0,82077             |                    |
| Остаток                             | 9                              | 185,576862                | 20,61965            |                   |                     |                    |
| Итого                               | 10                             | 186,698868                |                     |                   |                     |                    |
|                                     | <i>Коэффициенты (3-й блок)</i> | <i>Стандартная ошибка</i> | <i>t-статистика</i> | <i>P-Значение</i> | <i>Нижние 95%</i>   | <i>Верхние 95%</i> |
| Y-пересечение                       | 0,272052247                    | 1,37114736                | 0,198412            | 0,847132          | -2,8297             | 3,373803           |
| Переменная X 1                      | 0,077133761                    | 0,33066455                | 0,233269            | 0,820772          | -0,67088            | 0,825148           |

Остаётся проверить статистическую надёжность найденного значения  $r(1)$ . Для этого, как раз и необходим третий параметр вновь построенного уравнения – значимость  $F$ , или  $P$ -значение коэффициента регрессии  $a_1$  при  $X_1$ , которые в парной модели всегда совпадают. В нашем примере значимость  $F = P$ -значение = 0,821.

Поскольку значимость  $F > \alpha$  ( $0,821 > 0,1$ ), то испытываемая гипотеза  $r(1) = 0$  не отклоняется. Здесь уровень значимости  $\alpha$  выбран среди сравнительно высоких значений ( $\alpha = 0,1$ ) с целью максимизации мощности статистического критерия. Это объясняется тем, что в данном случае последствия ошибочного не отклонения предположения  $r(1) = 0$  более опасны для моделирования по сравнению с последствиями его ошибочного отклонения. В самом деле, значительно хуже считать уравнение регрессии адекватным (когда в действительности это не так), чем ошибочно признать необходимость корректировки построенной модели.

Следовательно, с достоверностью, равной мощности критерия, можно утверждать о ненадёжности автокорреляции остатков исследуемого уравнения регрессии. Поэтому приходим к такому заключению: регрессионную модель (6.17) следует считать адекватно описывающей зависимость производительности труда рабочих предприятия от факторов  $X_1$  (фондовооружённости труда) и  $X_2$  (годовой заработной платы). Нет необходимости пытаться корректировать построенное уравнение – оно вполне пригодно к практическому использованию.

Необходимо иметь в виду, что наряду с расчётом коэффициента автокорреляции остатков первого порядка и проверки его статистической надёжности, в роли инструмента анализа автокорреляции внутри ряда  $e_i$  довольно часто применяется критерий Дарбина-Уотсона ( $d$ ). Он назван по имени исследователей, которые разработали удобные таблицы его  $\alpha$ -квантилей. Расчёт величины  $d$  ведётся по следующей формуле:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (e_{i+1} - e_i)^2}{\sum_{i=1}^N e_i^2}. \quad (6.22)$$

Легко показать, что между коэффициентом автокорреляции остатков первого порядка и статистикой критерия Дарбина-Уотсона существует следующая взаимосвязь:

$$d \approx 2[1 - r(1)]. \quad (6.23)$$

Исследование выражения (6.23) показывает, что если  $r(1)$  изменяется в пределах от  $-1$  до  $+1$ , то  $d$  варьирует от  $0$  (при положительной автокорреляции остатков) до  $+4$  (при отрицательной автокорреляции остатков). Значение  $d$  в области  $+2$  указывает на отсутствие автокорреляции остатков и на адекватность тестируемой регрессионной модели.

Так, по данным обсуждаемой задачи рассчитанное в системе *STATISTICA* значение критерия  $d = 1,7859$  не сильно отличается значения, найденного по формуле (6.23):

$$d \approx 2[1 - r(1)] = 2(1 - 0,0775) = 1,845.$$

Поскольку найденное значение  $d$  находится в области  $+2$ , то предыдущий вывод об адекватности уравнения (6.17) остаётся в силе.

Таким образом, исследование построенного уравнения регрессии (6.17) показало, что оно с достоверностью  $99\%$  является надёжным как в целом, так и по отдельным коэффициентам регрессии. Положительные знаки коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  полностью отвечают экономическим представлениям о направлении причинно-следственных связей между величинами  $X_1$  (фондовооружённостью труда),  $X_2$  (годовой заработной платы), с одной стороны, и производительностью труда рабочих предприятия  $Y$ , с другой. Построенную модель отличают тесные ( $R = 0,993$ ) корреляционные связи факторов  $X_1$  и  $X_2$  с результативной переменной  $Y$ . Точность уравнения регрессии высока: стандартная ошибка составляет  $4,658$  тыс. грн., а относительная погрешность, вызванная неучтёнными в модели факторами, равна всего  $1,4\%$ . Уравнение адекватно описывает исходные статистические данные: автокорреляция его остатков практически равняется нулю и ненадёжна, а критерий Дарбина-Уотсона близок к двум. Поэтому регрессионная модель (6.17) не нуждается в корректировке и может быть использовано на практике.

### 6.7 Практическое применение построенного уравнения регрессии

Прикладные аспекты построенной регрессионной модели сводятся к экономическому анализу и прогнозированию выявленных связей на предприятии. Использование на практике уравнения регрессии обычно состоит из следующих основных направлений:

1) характеристика с помощью коэффициента регрессии  $\alpha_0$  среднего уровня результативной переменной  $Y$  при  $X_1 = X_2 = \dots = X_m = 0$  (если нулевое значение входит в область определения всех факторов модели);

2) оценка на основе коэффициентов регрессии  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  среднего абсолютного влияния факторов на результативный признак  $Y$ ;

3) характеристика с помощью коэффициентов эластичности  $E_1, E_2, \dots, E_m$  среднего относительного влияния факторов на результативную переменную  $Y$ ;

4) определение на основе бета-коэффициентов  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  среднего влияния на  $Y$  факторов  $X_1, X_2, \dots, X_m$  с учетом степени их колеблемости;

5) расчёт с помощью коэффициентов регрессии  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  резервов (эффетов) изменения результативной переменной  $Y$  на основе сравнительного анализа объектов-лидеров и объектов-аутсайдеров;

6) нахождение точечного и интервального прогнозов  $Y$  с помощью построенного уравнения регрессии.

Рассмотрим подробнее указанные прикладные направления использования построенной регрессионной модели на примере уравнения (6.17).

1. Характеристика среднего уровня результативной переменной  $Y$  с помощью коэффициента регрессии  $\alpha_0$  обсуждалась в пункте 2 параграфа 6.6 при проверке его знака. Напомним, что свободный член уравнения регрессии действительно отражает величину  $\bar{Y}$  при условии, что точка  $X_1 = X_2 = \dots = X_m = 0$  входит в область определения всех факторов модели.

Коэффициент  $\alpha_0 = -194,397$  двухфакторной модели (6.17), построенной по данным обсуждаемого выше примера, экономически не интерпретируется, поскольку в области определения факторов  $X_1$  (фондовооружённость труда),  $X_2$  (годовая заработная плата) не входят нулевые или близкие к ним значения.

2. Оценка среднего абсолютного влияния факторов на результативный признак  $Y$  на основе коэффициентов регрессии  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  осуществляется на базе следующего определения: величина  $\alpha_j$  показывает, как в среднем изменяется переменная  $Y$  с изменением соответствующего фактора  $X_j$  на 1 с учётом их единиц измерения.

Для уравнения регрессии (6.17) коэффициент  $\alpha_1 = 0,073$  показывает, что с ростом фондовооружённости труда на 1 тыс. грн. производительность труда рабочих предприятия увеличивается в среднем на 73 грн. А повышение годовой заработной платы на 1 тыс. грн. приводит к росту выработки рабочих в среднем на 1565 грн.

Следовательно, можно утверждать, что на изучаемом предприятии абсолютное влияние фактора «оплата труда» существенно выше на исследуемый показатель производительности труда по сравнению с абсолютным влиянием фактора «фондовооружённость труда».

3. При решении экономических задач часто необходимо знать не только абсолютное влияние факторов на результативный признак, но и их относительное влияние. Оценку такого влияния даёт коэффициент

эластичности, который для линейной регрессионной модели (6.17) имеет следующий общий вид:

$$A_j = a_j \frac{\bar{X}_j}{\bar{Y}}. \quad (6.24)$$

Коэффициент эластичности  $E_j$  показывает, на сколько процентов в среднем изменяется результивный признак  $Y$  с изменением соответствующего фактора  $X_j$  на один процент (или в 1,01 раза).

По данным табл. 6.3 и коэффициентам модели (6.17) рассчитаем коэффициенты эластичности по формуле (6.24):

$$A_1 = 0,073 \frac{3193,583}{216,792} = 1,075; \quad A_2 = 1,565 \frac{113,567}{216,792} = 0,820.$$

Коэффициент  $E_1$  показывает, что с ростом величины фондовооружённости труда на 1 процент производительность труда рабочих увеличивается в среднем на 1,08 процента. В то же время повышение оплаты труда в 1,01 раза приводит к росту выработки одного рабочего в среднем на 0,82 процента. Таким образом, судя по величине найденных коэффициентов эластичности, можно сделать вывод о том, что фактор «фондовооружённость труда» оказывает более сильное относительное влияние на выработку рабочих по сравнению с оплатой их труда.

Необходимо помнить, что знак коэффициента эластичности  $E_j$  определяется знаком коэффициента регрессии  $\alpha_j$ . Эластичность результивной переменной  $Y$  по фактору  $X_j$  считается высокой, если  $E_j > 1$ . Следовательно, чувствительность производительности труда рабочих по величине их фондовооружённости является высокой, т.к.  $E_1 = 1,075 > 1$ .

4. Для определения среднего влияния фактора  $X_j$  на результивный признак  $Y$  с учетом степени колеблемости переменной  $X_j$  рассчитывается так называемый бета-коэффициент ( $\beta_j$ ) по формуле:

$$\beta_j = a_j \frac{\sigma_j}{\sigma_Y}. \quad (6.25)$$

**Замечание 3.** Для парного уравнения регрессии (6.6)  $\beta$ -коэффициент совпадает с коэффициентом парной корреляции  $r_{YX}$ . Кроме формулы (6.25), для нахождения  $\beta_j$ -коэффициентов можно использовать систему STATISTICA (модуль «Multiple Regression»), в котором они рассчитываются автоматически, либо стандартную программу «Регрессия» редактора Excel, предварительно осуществив стандартизацию всех переменных конечного уравнения регрессии.

$\beta_j$ -коэффициент показывает, на сколько стандартных отклонений в среднем изменится результивная переменная  $Y$  с изменением фактора  $X_j$  на одно своё стандартное отклонение. Поэтому  $\beta_j$ -коэффициент отражает влияние на  $Y$  фактора  $X_j$  с учётом степени его колеблемости, измеряемой

величиной  $\sigma_j$ . Как и для  $E_j$ , знак  $\beta_j$  определяется знаком коэффициента регрессии  $\alpha_j$ .

Если переменная  $X_j$  является заданной, т.е. константой, то  $\sigma_j = 0$  и  $\beta_j = 0$ . Чем выше  $\sigma_j$ , тем больше по абсолютной величине  $\beta_j$ , тем значительнее возможности изменения результативного признака  $Y$  за счёт изменения фактора  $X_j$ .

**Замечание 4.** Абсолютные значения  $\beta_j$  отражают степень «регулируемости» соответствующих факторов по отношению к переменной  $Y$  и используются в множественном КРА в роли количественных оценок величин резервов (эффектов) изменения  $Y$  за счёт переменной  $X_j$ .

Для двухфакторной регрессионной модели (6.17) по формуле (6.25) были рассчитаны  $\beta$ -коэффициенты:  $\beta_1 = 0,338$ ;  $\beta_2 = 0,694$ . Они показывают, что с ростом фондовооружённости рабочих на одно стандартное отклонение их производительность труда увеличивается в среднем на 0,338 своего стандартного отклонения. А с повышением годовой заработной платы рабочих на одно стандартное отклонение их выработка возрастает в среднем на 0,694 своего стандартного отклонения.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что с учётом степени колеблемости факторов наибольшее влияние на производительность труда рабочих оказывает уровень оплаты их труда. Именно в развитии фактора  $X_2$  (годовая заработная плата) заложены наибольшие резервы повышения выработки рабочих.

5. Перейдём к непосредственной оценке величины имеющихся резервов  $Y$  с помощью методики сравнительного анализа объектов-лидеров и объектов-аутсайдеров на основе линейной регрессионной модели. В обсуждаемой задаче имеет смысл говорить именно о резервах *роста*, т.к. производительность труда рабочих предприятия – экономический признак стимулятор, повышение которого желательно. Если  $Y$  – признак дестимулятор, величину которого следует снижать, то говорят о поиске резервов его *снижения*, например, затрат на производство, всевозможных потерь, простоев и т.п.

На первом этапе сравнительного анализа вся совокупность объектов делится на две части: 1) группа лидеров (передовые объекты), для которых  $Y_i > \bar{Y}$ ; 2) группа аутсайдеров (отстающие объекты), для которых  $Y_i \leq \bar{Y}$ .

В обсуждаемом примере на основе исходных данных табл. 6.1 по столбцу  $Y$  выявлена группа рабочих-лидеров, у которых годовая выработка продукции превышает среднее значение по всей совокупности (216,792 тыс. грн.) и группа рабочих-аутсайдеров, для которых выполняется условие  $Y_i \leq 216,792$  тыс. грн. (табл. 6.7)

На втором этапе в каждой образованной группе находятся средние арифметические значения результативной и факторных переменных, вошедших в уравнение регрессии (6.17), – так называемые групповые средние (см. последнюю строку табл. 6.7).

Таблица 6.7

Средние значения трудовых показателей рабочих-лидеров  
и рабочих-аутсайдеров, тыс. грн.

| Группа лидеров   |        |                |                | Группа аутсайдеров |         |                |                |
|------------------|--------|----------------|----------------|--------------------|---------|----------------|----------------|
| № рабочего       | Y      | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | № рабочего         | Y       | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> |
| 9                | 218,9  | 3190           | 119,5          | 1                  | 182,6   | 3081           | 95,4           |
| 10               | 236,7  | 3257           | 122,8          | 2                  | 184     | 3135           | 96,9           |
| 11               | 277,8  | 3438           | 135,9          | 3                  | 190,3   | 3168           | 99,2           |
| 12               | 295,1  | 3583           | 147,2          | 4                  | 198,7   | 3192           | 101,5          |
| -                | -      | -              | -              | 5                  | 200,4   | 3074           | 106,3          |
| -                | -      | -              | -              | 6                  | 200,3   | 3043           | 109,1          |
| -                | -      | -              | -              | 7                  | 200,5   | 3006           | 110,4          |
| -                | -      | -              | -              | 8                  | 216,2   | 3156           | 118,6          |
| Среднее значение | 257,13 | 3367           | 131,35         | -                  | 196,625 | 3106,875       | 104,675        |

На третьем этапе сравнительного исследования на основе данных табл. 6.7 и коэффициентов регрессии  $a_1$ ,  $a_2$  модели (6.17) в аналитической табл. 6.8 рассчитывается эффект для передовых или резерв для отстающих объектов за счёт влияния разности средних уровней каждого фактора в одной группе по сравнению с другой.

Таблица 6.8

Сравнительный анализ средней производительности труда  
рабочих-лидеров и рабочих-аутсайдеров на базе модели (6.17)

| Признаки       | Средние значения признаков по группам |          | Разность средних значений (гр. 2 – гр. 3) | Коэффициенты регрессии | Эффект (резерв) (гр. 4 × гр. 5) |
|----------------|---------------------------------------|----------|---|------------------------|---------------------------------|
|                | лидеров                               | лидеров  |   |                        |                                 |
| 1              | 2                                     | 3        | 4   | 5                      | 6                               |
| X <sub>1</sub> | 3367                                  | 3106,875 | 260,125                                   | 0,0731                 | 19,012                          |
| X <sub>2</sub> | 131,35                                | 104,675  | 26,675                                    | 1,5653                 | 41,756                          |
| Y              | 257,125                               | 196,625  | 60,5                                      | -                      | 60,768                          |

Данные табл. 6.8 показывают, что среднее значение производительности труда Y в группе передовых рабочих на 60,5 тыс. грн. превышает среднее значение этого признака в группе отстающих рабочих предприятия. Это отличие объясняется превышением средних уровней факторов в группе лидеров по сравнению с аутсайдерами: по фактору X<sub>1</sub> (фондовооружённость труда) на 260,125 тыс. грн. и по фактору X<sub>2</sub> (годовая заработная плата) на 26,675 тыс. грн.

Поэтому, чтобы определить эффект (резерв) данного отличия, необходимо разность средних значений факторов (гр. 4) умножить на соответствующие коэффициенты регрессии (гр. 5) модели (6.17), которые, по определению, характеризуют осреднённое абсолютное влияние единичного приращения каждого фактора на результативный признак Y.

Итог гр. 6 табл. 6.8 характеризует суммарный эффект (резерв) передовой группы рабочих по сравнению с отстающей за счет разности групповых средних всех факторов, которые вошли в модель (6.17). Обычно он отличается от разности 60,5 тыс. грн., стоящей в гр. 4 ( $60,5 < 60,8$ ), на величину влияния случайных факторов и причин, которые не учтены в уравнении регрессии (6.17).

В данном примере на основе расчетов табл. 9.8 можно сделать следующие выводы.

1) для рабочих-лидеров:

- за счёт того, что у передовых рабочих средняя фондовооружённость труда превышает аналогичный показатель у отстающих рабочих на 260,125 тыс. грн., а годовая заработная плата выше на 26,675 тыс. грн., рабочие-лидеры получают эффект в виде дополнительной выработки в размере 19,012 тыс. грн. и 41,756 тыс. грн. соответственно; при этом общий эффект от влияния размера  $X_1, X_2$  на  $Y$  составляет 60,768 тыс. грн.

2) для рабочих-аутсайдеров:

- если средняя фондовооружённость труда отстающих рабочих повысится на 260,125 тыс. грн., а средняя годовая заработная плата увеличится на 26,675 тыс. грн. (т.е. оба показателя достигнут среднего уровня рабочих-лидеров), то они смогут реализовать резервы роста выработки в размере 19,012 тыс. грн. и 41,756 тыс. грн. соответственно; при этом общий резерв роста производительности труда, который удастся реализовать за счёт увеличения размера  $X_1, X_2$  рабочими-аутсайдерами, составит 60,768 тыс. грн.

**Замечание 5.** При построении аналитической таблицы типа 6.8 рекомендуется использовать редактор Excel, который существенно упрощает расчёты, связанные с нахождением значений гр. 4, 6. Кроме того, необходимо обращать внимание на выполнение следующих условий: 1) в гр. 6 не может быть отрицательных чисел; 2) итог гр.6 должен не сильно отличаться от итога гр. 4; 3) величины эффектов (резервов) за счёт отдельных факторов в гр. 6 должны соотноситься со значениями найденных выше  $\beta_j$ -коэффициентов. Нарушения указанных условий обычно свидетельствуют об арифметических или логических ошибках, допущенных при формировании табл. 6.7, 6.8.

Изложенная методика может быть достаточно успешно использована также для количественной оценки эффекта действия факторов для какого-либо одного объекта, например, лучшего лидера ( $\max Y_i$ ) по сравнению с группой аутсайдеров. С этой целью в гр. 2 табл. 6.8 вместо средних значений подставляются значения факторов и результата конкретного передового рабочего и данные гр. 4, 6 пересчитываются автоматически (табл. 6.9).

Данные табл. 6.9 показывают, что у передового рабочего № 12 фондовооружённость труда превышает аналогичный средний показатель отстающих рабочих на 476,125 тыс. грн., а годовая заработная плата выше на 42,525 тыс. грн. За счёт этого он получил эффект в виде дополнительной выработки в размере 34,8 тыс. грн. и 66,566 тыс. грн. соответственно. При

этом общий эффект от влияния размера  $X_1, X_2$  на  $Y$  у данного рабочего-лидера составляет 101,366 тыс. грн.

Таблица 6.9

Анализ производительности труда лучшего рабочего-лидера по сравнению со средними показателями рабочих-аутсайдеров на базе модели (6.17)

| Признаки | Лучший лидер (рабочий № 12) | Средние значения аутсайдеров | Разность средних значений (гр. 2 – гр. 3) | Коэффициенты регрессии | Эффект (гр. 4 × гр. 5) |
|----------|-----------------------------|------------------------------|---|------------------------|------------------------|
| 1        | 2                           | 3                            | 4   | 5                      | 6                      |
| $X_1$    | 3583                        | 3106,875                     | 476,125                                   | 0,0731                 | 34,800                 |
| $X_2$    | 147,2                       | 104,675                      | 42,525                                    | 1,5653                 | 66,566                 |
| $Y$      | 295,1                       | 196,625                      | 98,475                                    | -                      | 101,366                |

Используя указанную методику, можно получить также количественную оценку резерва результативной переменной  $Y$  для какого-либо одного, например, наиболее отстающего аутсайдера ( $\min Y_i$ ) по сравнению с передовой группой. С этой целью в гр. 3 табл. 6.8 вместо средних значений подставляются значения факторов и результата данного отстающего объекта (табл. 6.10).

Таблица 6.10

Анализ производительности труда худшего рабочего-аутсайдера по сравнению со средними показателями рабочих-лидеров на базе модели (6.17)

| Признаки | Средние значения лидеров | Худший аутсайдер (рабочий № 1) | Разность средних значений (гр. 2 – гр. 3) | Коэффициенты регрессии | Эффект (гр. 4 × гр. 5) |
|----------|--------------------------|--------------------------------|---|------------------------|------------------------|
| 1        | 2                        | 3                              | 4   | 5                      | 6                      |
| $X_1$    | 3367                     | 3081                           | 286                                       | 0,0731                 | 20,903                 |
| $X_2$    | 131,35                   | 95,4                           | 35,95                                     | 1,5653                 | 56,274                 |
| $Y$      | 257,125                  | 182,6                          | 74,525                                    | -                      | 77,177                 |

Из табл. 6.10 видно, что если фондовооружённость труда отстающего рабочего № 1 повысится на 286 тыс. грн., а средняя годовая заработная плата увеличится на 35,95 тыс. грн. (т.е. оба показателя достигнут среднего уровня рабочих-лидеров), то он сможет реализовать резервы роста выработки в размере 20,903 тыс. грн. и 56,274 тыс. грн. соответственно. При этом общий резерв роста производительности труда, который удастся реализовать за счёт увеличения размера  $X_1, X_2$  данным рабочим-аутсайдером, составит 77,117 тыс. грн.

6. Полученную регрессионную модель можно использовать как инструмент прогнозирования результативной переменной по заданным будущим (проектным) значениям факторов  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_m^*$ . При этом строятся прогнозы двух типов:

- 1) точечный – в виде одного числа  $\hat{Y}^*$  (точки на оси ординат);

2) интервальный – в виде двух чисел (верхней и нижней границы доверительного интервала прогноза с наперёд заданной вероятностью попадания в него будущего фактического значения  $Y^*$ ).

Точечный прогноз находится путём подстановки будущих уровней факторов  $X_1^*$ ,  $X_2^*$ , ...,  $X_m^*$  в построенное уравнение регрессии:

$$\hat{Y}^* = a_0 + \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \dots + \alpha_m X_m^*. \quad (6.26)$$

Осуществим с помощью уравнения регрессии (6.17) точечное прогнозирование производительности труда для нового рабочего предприятия, значения факторов которого следующие: фондовооружённость труда ( $X_1^*$ ) на будущем рабочем месте проектируется на уровне 3600 тыс. грн., а годовая заработная плата ( $X_2^*$ ) – 150 тыс. грн. Подставим эти проектные значения факторов в модель (6.17):

$$\hat{Y}^* = -194,397 + 0,073 \times 3600 + 1,565 \times 150 = 303,527 \text{ (тыс. грн.)}.$$

Таким образом, если для вновь создаваемого рабочего места на предприятии сохранятся регрессионные связи между исследуемыми экономическими переменными  $Y$ ,  $X_1$ ,  $X_2$ , наблюдаемые на изучаемой совокупности 12 рабочих, то при заданных выше проектных значениях факторных переменных выработка нового рабочего ожидается на уровне 303,527 тыс. грн. (здесь при расчёте  $\hat{Y}^*$  коэффициенты регрессии брались с восьмью знаками после запятой).

Однако, следует помнить, что уравнение регрессии (6.17), является выборочным, содержит возможные случайные ошибки, связанные с репрезентативностью статистических данных и с возможным нарушением предпосылок априорного анализа (модельной спецификации). Поэтому вероятность совпадения точечного прогноза  $\hat{Y}^*$  с фактическим будущим значением результативного признака  $Y^*$  практически равняется нулю.

В этой ситуации говорят, что прогноз, полученный по формуле (6.26), является максимально точным, т.к. представляет собой точку на оси ординат минимального (нулевого) диапазона. Но при этом он является наименее достоверным из всех возможных прогнозов, поскольку вероятность  $P$  попадания будущего значения  $Y^*$  в эту точку близка к нулю.

Поэтому более привлекательным представляется прогнозирование на основе построения доверительного интервала для точки  $\hat{Y}^*$  с заранее заданной необходимой достоверностью. Доверительный интервал прогноза рассчитывается на основе следующей общей схемы:

$$\hat{Y}^* \pm \Delta, \quad (6.27)$$

где  $\Delta$  – предельная ошибка прогноза.

Из формулы (6.27) следует, что в центре доверительного интервала находится точечный прогноз, а сам диапазон интервала составляет  $2\Delta$ . Величина предельной ошибки прогноза определяет его точность: чем меньше  $\Delta$  при заданной достоверности  $P$  попадания фактического значения  $Y^*$  в интервал (6.27), тем точнее прогнозная оценка, и наоборот.

Ясно, что точность интервального прогнозирования по сравнению с точечной оценкой (6.26) снижается, но зато возрастает достоверность  $P$  попадания  $Y^*$  в интервал от  $\hat{Y}^* - \Delta$  до  $\hat{Y}^* + \Delta$ . Обычно достоверность принимается на уровне  $P = 95\%$  (так называемый 95-процентный доверительный интервал). И затем находится соответствующая предельная ошибка  $\Delta$ . Между заданным уровнем доверия  $P$  и величиной  $\Delta$  существует прямая связь, т.е. чем выше требуемая достоверность прогноза, тем выше его предельная ошибка и ниже точность самого прогноза.

Формула (6.27) является базовой и используется для определения доверительных интервалов прогнозов, построенных не только с помощью линейной регрессии, а и на основе любых других моделей, найденных по методу наименьших квадратов.

Для парной линейной модели (6.6) формула предельной ошибки прогноза  $\Delta$  с достоверностью  $P = (1 - \alpha) \times 100\%$  имеет вид:

$$\Delta = t_{\alpha; k} \times S_Y \times \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}}, \quad (6.28)$$

где  $t_{\alpha; k}$  – коэффициент доверия ( $\alpha$ -квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы  $k = N - m - 1$ , в котором  $\alpha$  задается исходя из требуемой достоверности, например, при  $P = 95\%$   $\alpha = 0,05$ ; при  $P = 99\%$   $\alpha = 0,01$  и т.п.);

$S_Y$  – стандартная ошибка регрессии (см. формулу (6.20) и пояснения к ней).

Подробное исследование выражения (6.28) приведено в главе 2 данного учебного пособия применительно к анализу величины  $\Delta$  для линейного тренда (см. выражение (2.3), рис. 2.2 и комментарий под ним).

Предельная ошибка прогноза для множественного линейного уравнения регрессии (6.16) в общем виде рассчитывается по следующей матричной формуле:

$$\Delta = t_{\alpha k} \times S_Y \times \sqrt{X^* (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T}}, \quad (6.29)$$

где  $X^*$  – вектор-строка будущих уровней факторов, размера  $1 \times (m+1)$ ;

$(X^{*T} X^*)^{-1}$  – матрица, обратная к матрице системы нормальных уравнений,

размера  $(m+1) \times (m+1)$ ;

$X^{*T}$  – вектор-столбец будущих уровней факторов, размера  $(m+1) \times 1$ .

Следует иметь в виду, что автоматический расчёт величины предельной ошибки прогноза  $\Delta$  в стандартных программах КРА редактора *Excel* не выполняется. А вручную осуществить его на основе довольно сложных математических преобразований при больших  $m$  не представляется возможным. Поэтому в реальных экономических исследованиях с этой целью обычно пользуются системой *STATISTICA* (модуль «*Multiple Regression*»).

Проиллюстрируем её применение на примере использования уравнения регрессии (6.17) для построения интервального прогноза ( $X_1^* = 3600$ ;  $X_2^* = 150$ ;  $\hat{Y}^* = 303,527$ ) с достоверностью  $P = 99\%$ . Для этого после построения регрессионной модели с помощью модуля «*Multiple Regression*» в средней части панели «Результатов множественной регрессии» (*Multiple Regression Results*) необходимо активизировать опцию «Прогноз зависимой переменной» (*Predict dependent var.*). В открывшемся окне следует указать будущие значения факторов и уровень значимости  $\alpha$ . После команды ОК появляется результаты прогнозирования (табл. 6.11).

Таблица 6.11

Точечный и интервальный прогнозы производительности труда нового рабочего по заданным значениям факторов уравнения (6.17) в системе *STATISTICA*

| Predicting Values for (new.sta)<br>variable: VAR1 |             |       |                  |
|---|-------------|-------|------------------|
|   | B-Weight    | Value | B-Weight * Value |
| VAR2  | 0,073089487 | 3600  | 263,1222         |
| VAR3  | 1,565346015 | 150   | 234,8019         |
| Intercept   |             |       | -194,397         |
| Predicted   |             |       | 303,5272         |
| -99,0%CL  |             |       | 291,4055         |
| +99,0%CL  |             |       | 315,649          |

В табл. 6.11, в строке *Predicted* приводится точечный прогноз 303,527 тыс. грн., который был найден выше по формуле (6.26). В строках -99,0%CL и +99,0%CL находятся нижняя (291,4055 тыс. грн.) и верхняя (315,649 тыс. грн.) границы 99-процентного доверительного интервала прогноза.

Таким образом, если выявленные взаимосвязи между трудовыми показателями рабочих предприятия сохранятся и в недалёком будущем, то производительность труда нового рабочего, фондовооружённость которого планируется на уровне 3600 тыс. грн., а годовая заработная плата – в размере 150 тыс. грн., следует ожидать в районе 303,527 тыс. грн. При этом с достоверностью 99 % фактическое значение его выработки будет находиться в интервале от 291,40 тыс. грн. и до 315,65 тыс. грн.

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Имеются следующие данные (см. табл. 6.12), характеризующие основные трудовые показатели деятельности рабочих предприятия за отчётный год.

Таблица 6.12

Основные трудовые показатели рабочих

| №  | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1  | 88    | 42,5  | 30,8  | 154   | 67    |
| 2  | 87    | 57,1  | 31,3  | 184   | 64    |
| 3  | 100   | 61    | 31,6  | 209   | 61    |
| 4  | 105   | 62,7  | 31,4  | 230   | 63    |
| 5  | 120   | 74,4  | 30,7  | 255   | 62    |
| 6  | 133   | 78,7  | 30,4  | 269   | 59    |
| 7  | 148   | 89    | 30,0  | 283   | 60    |
| 8  | 163   | 91,8  | 29,5  | 301   | 57    |
| 9  | 170   | 94,3  | 28,9  | 307   | 57    |
| 10 | 175   | 98,5  | 28,5  | 319   | 56    |
| 11 | 178   | 99,1  | 29,3  | 322   | 55    |
| 12 | 181   | 99,9  | 29,8  | 330   | 52    |
| 13 | 211   | 100   | 29,5  | 354   | 51    |
| 14 | 222   | 100,5 | 29,3  | 423   | 50    |
| 15 | 235   | 109   | 29,0  | 481   | 51    |
| 16 | 240   | 110   | 29,0  | 529   | 49    |
| 17 | 258   | 112   | 28,5  | 587   | 47    |
| 18 | 266   | 112,7 | 28,3  | 619   | 46    |
| 19 | 277   | 115   | 28,1  | 651   | 46    |
| 20 | 282   | 117,5 | 28,0  | 692   | 45    |
| 21 | 295   | 120   | 27,9  | 706   | 44    |
| 22 | 309   | 120,5 | 27,5  | 734   | 43    |
| 23 | 315   | 121   | 27,3  | 741   | 42    |
| 24 | 318   | 122   | 27,2  | 759   | 41    |
| 25 | 322   | 122,5 | 27,0  | 815   | 40    |
| 26 | 335   | 125   | 27,0  | 973   | 40    |
| 27 | 390   | 130   | 26,9  | 1106  | 39    |
| 28 | 411   | 132   | 26,8  | 1217  | 39    |
| 29 | 430   | 132,2 | 26,5  | 1349  | 38    |
| 30 | 476   | 140   | 26,6  | 1423  | 37    |
| 31 | 515   | 144   | 26,1  | 1497  | 37    |
| 32 | 554   | 150   | 26,0  | 1592  | 36    |
| 33 | 619   | 155,7 | 26,0  | 1624  | 35    |
| 34 | 635   | 160   | 25,5  | 1688  | 34    |
| 35 | 640   | 165   | 25,4  | 1703  | 35    |
| 36 | 642   | 160,5 | 25,0  | 1746  | 32    |

где  $X_1$  – выработка на одного рабочего, тыс. грн.  
 $X_2$  – фондовооружённость труда, тыс. грн.;  
 $X_3$  – простои технологического оборудования, час.;  
 $X_4$  – энерговооружённость труда, кВт-час;  
 $X_5$  – потери рабочего времени, час.

Таблица 6.13

| Варианты индивидуального задания |                     |
|----------------------------------|---------------------|
| Номер варианта                   | Номера рабочих      |
| 1                                | 1-15                |
| 2                                | 3-17                |
| 3                                | 5-19                |
| 4                                | 7-21                |
| 5                                | 9-23                |
| 6                                | 11-25               |
| 7                                | 13-27               |
| 8                                | 15-29               |
| 9                                | 17-31               |
| 10                               | 19-33               |
| 11                               | 21-35               |
| 12                               | 1-8, 29-35          |
| 13                               | 3-10, 27-33         |
| 14                               | 5-12, 25-31         |
| 15                               | 7-14, 23-29         |
| 16                               | 9-16, 21-27         |
| 17                               | 11-18, 29-35        |
| 18                               | 1-5, 11-15, 21-25   |
| 19                               | 6-10, 16-20, 26-30  |
| 20                               | 11-15, 26-35        |
| 21                               | 1-5, 16-20, 31-35   |
| 22                               | 6-10, 27-36         |
| 23                               | 5-12, 30-36         |
| 24                               | 3-10, 21-27         |
| 25                               | 7-14, 27-33         |
| 26                               | 9-15, 25-32         |
| 27                               | 11-18, 24-30        |
| 28                               | 13-20, 26-32        |
| 29                               | 15-22, 28-34        |
| 30                               | 17-24, 30-36        |
| 31                               | 3-7, 13-17, 23-27   |
| 32                               | 5-9, 15-19, 25-29   |
| 33                               | 7-11, 17-21, 27-31  |
| 34                               | 9-13, 19-23, 29-33  |
| 35                               | 11-15, 21-25, 31-35 |

По приведенным данным, соответствующим номеру Вашего варианта (см. табл. 6.13), осуществить КРА эффективности трудовой деятельности рабочих предприятия. С этой целью выполнить:

1. Априорный экономический анализ (модельную спецификацию) для определения: 1) результативной переменной  $Y$  и факторов  $X_1, X_2, \dots, X_m$ ;
- 2) направления причинно-следственных связей между переменными и

- знаков коэффициентов будущей регрессионной модели; 3) математической формы связи между  $Y$  и  $X_1, X_2, \dots, X_m$ ; 4) вероятностных свойств случайной компоненты  $\varepsilon$ .
2. Расчёт описательных статистик каждой переменной и коэффициентов парной корреляции между ними с целью определения факторов, в наибольшей степени влияющих на переменную  $Y$ .
  3. Построение наилучшего уравнения регрессии и его статистический анализ (проверка надёжности уравнения в целом и отдельных его коэффициентов, тестирование знаков коэффициентов регрессии, определение тесноты множественных корреляционных связей, точности и адекватности построенной модели);
  4. Практическое использование построенной адекватной модели с целью нахождения:
    - 4.1) среднего уровня переменной  $Y$  при нулевом значении факторов, если оно входит в область их определения (интерпретация свободного члена уравнения регрессии  $a_0$ );
    - 5.2) среднего абсолютного влияния факторов на  $Y$  (интерпретация коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_m$ );
    - 5.3) среднего относительного влияния факторов на  $Y$  (интерпретация коэффициентов эластичности);
    - 5.4) среднего влияния факторов на  $Y$  с учётом степени их колеблемости (интерпретация бета-коэффициентов);
    - 5.5) размера эффекта (резерва) роста  $Y$  в двух группах рабочих предприятия (лидеров и аутсайдеров) за счёт отдельных факторов;
    - 5.6) эффекта роста  $Y$  лучшего рабочего-лидера по сравнению со средними показателями рабочих-аутсайдеров за счёт отдельных факторов;
    - 5.7) резервов повышения  $Y$  самого отстающего рабочего по сравнению со средними показателями рабочих-лидеров за счёт отдельных факторов;
    - 5.8) точечного прогноза  $\hat{Y}^*$  для нового рабочего с координатами  $(\max X_j + 10)$  для факторов стимуляторов и  $(\min X_j - 10)$  для факторов дестимуляторов;
    - 5.9) нижней и верхней границ интервального прогноза с достоверностью попадания в него будущего значения  $Y^*$ , равной 99 %.

По каждому выполненному пункту индивидуального задания дать краткие экономико-статистические пояснения и выводы.

## ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 6

- 59.Боровиков В. П. Популярное введение в программу *STATISTICA*. – М.: КомпьютерПресс, 1998. – 267 с.
- 60.Боровиков В. П., Боровиков И. П. Статистический анализ и обработка данных в среде *Windows*. – М.: Филинь, 1998. – 608 с.
- 61.Боровиков В. П., Ивченко Г. И. Прогнозирование в системе *STATISTICA* в среде *Windows*. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 384 с.
- 62.Винн Р., Холден К. Введение в прикладной эконометрический анализ. Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 294 с.
- 63.Головач А. В. и др. Критерии математической статистики в экономических исследованиях. – М.: Статистика, 1973. – 136 с.
- 64.Груббер Й. Эконометрия. Т. 1. Введение в эконометрию. Пер. с нем. – К., 1996. – 400 с.
- 65.Джонстон Дж. Эконометрические методы. Пер. с англ. – М.: Статистика, 1980. – 444 с.
- 66.Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, Кн. 1, 1986. – 366 с.
- 67.Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, Кн. 2, 1987. – 351 с.
68. Економетрія // Навч. посібник за ред. А.Ф. Кабака, О.В. Проценка. – Одеса : НМЦО-ОДЕУ, 2003. – 562 с.
69. Кади Дж. Количественные методы в экономике. Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1977. - 247 с.
70. Клас А. и др. Введение в эконометрическое моделирование. Пер. с чеш. – М.: Статистика, 1978. – 152 с.
71. Костіна Н. І., Алексєєв А. А., Василик О. Д. Фінанси : система моделей і прогнозів. – К.: Четверта хвиля, 1998. – 304 с.
72. Лук'яненко І. Г., Краснікова Л. І. Економетрика. – К.: Знання, КОО, 1998. – 494 с.
73. Статистика / За ред. С. С. Герасименка. – К.: КНЕУ, 2000. – 467 с.
74. Статистика : Учебное пособие для иностранных студентов / А. З. Подгорный, О. Г. Мылашко, С. М. Киршо, Н. М. Шилофост. – Одесса : Атлант, 2012. – 194 с.
75. Теория и практика статистического моделирования экономики /Под ред. Е. М. Четыркина, А. Класа. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 272 с.
76. Толбатов Ю. А. Економетрика. – К.: Четверта хвиля, 1997. – 320 с.
77. Толбатов Ю. А. Загальна теорія статистики засобами *Excel*. – К.: Четверта хвиля, 1999. – 224 с.
78. Уманець Т. В. Загальна теорія статистики : Навч. посібник. – К.: Знання, 2006. – 239 с.
79. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. – М.: Статистика, 1977. – 200 с.
80. Янковой О. Г. Моделювання парних зв'язків в економіці. – Одеса : Оптимум, 2001. – 198 с.

81. Янковой О. Г. Моделирование та прогнозування S-подібних соціально-економічних процесів // Ринкова економіка: Сучасна теорія і практика управління, т. 4. – Одеса : Астропринт, 2001, С. 47-63.

82. Янковой О. Г., Яшкіна О. І. До проблеми вибору математичної форми трендів при прогнозуванні соціально-економічних показників // Вісник соціально-економічних досліджень ОДЕУ. – Одеса, 2003, № 14, С. 341-346.

83. Янковой А. Г. Основы эконометрического моделирования : Учеб. пособие. – Одесса, ОГЭУ, 2006. – 133 с.

84. Янковой А. Г. Основы теории статистики : Учеб. пособие. – Одесса, ОИФ УГУФМТ, 2007. – 111 с.

## **Раздел III. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ**

### **7. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ**

Инвестиции – это вложения капитала в виде накопленных ценностей (денежных, имущественных, интеллектуальных и др.), целью которых является получение прироста капитала (прибыли) предприятия в будущем в результате его производственно-финансовой деятельности. Любая современная инвестиционная деятельность предприятия в определенной степени связана с инновациями, т.е. по сути, является инновационно-инвестиционной деятельностью.

В экономической теории с целью ведения учета, анализа и планирования инвестиции классифицируются по различным признакам. Одной из наиболее распространенных классификаций инвестиций на предприятии является их разделение по объекту инвестирования, согласно которого выделяются реальные и финансовые инвестиции.

Реальные инвестиции – это вложения средств в реальные активы, как материальные – производственные основные и оборотные фонды, здания, сооружения, оборудование, товарно-материальные ценности, так и нематериальные – патенты, лицензии, «ноу-хау», программное обеспечение, техническая, инструктивная, технологическая, проектно-сметная и другая документация.

Финансовые инвестиции – вложения средств в различные финансовые инструменты и активы, например, фондовые, инвестиционные ценные бумаги, специальные (целевые) банковские вложения, депозиты, паи и т.п.

Все виды и формы инвестирования на предприятии проходят цикл, состоящий из трёх основных стадий:

- прединвестиционную, в процессе которой разрабатываются варианты альтернативных инвестиционных решений, проводится их оценка и принимается к реализации конкретный их вариант;
- инвестиционную, в ходе которой осуществляется непосредственная реализация принятого инвестиционного решения;
- постинвестиционную, в процессе которой обеспечивается контроль за достижением предусмотренных параметров инвестиционных решений в процессе эксплуатации объекта инвестирования (в случае реальных инвестиций) либо принимаются решения по реализации приобретённых активов (в случае финансовых инвестиций) с целью получения запланированной прибыли.

Основу прединвестиционной стадии цикла инвестирования составляет подготовка инвестиционного проекта. Понятие «инвестиционный проект» имеет двойственное толкование. С одной стороны, инвестиционный проект – это комплекс мероприятий, осуществляемых инвестором с целью реализации своего плана наращивания капитала. При этом действия инвестора должны быть оптимальными для достижения поставленных целей в условиях

ограниченных временных, финансовых и материальных ресурсов. С другой стороны, инвестиционный проект – это специальным способом подготовленная документация, которая содержит максимально полное описание и обоснование всех особенностей будущего инвестирования. В таком понимании проект является документированным инвестиционным планом (синонимами этого термина выступают словосочетания «бизнес-план», «технико-экономическое обоснование»).

В экономической литературе существует множество различных признаков классификации инвестиционных проектов. Рассмотрим два наиболее важных – по типу денежного потока и по виду взаимосвязи между запланированными мероприятиями.

Любой инвестиционный проект на предприятии генерирует определенный денежный поток, составляющими которого являются вложения (оттоки, инвестиции) и поступления (притоки) денежных средств, характеризующиеся соответствующей абсолютной величиной и знаком. В течение всего срока осуществления инвестиционного проекта в конце каждого периода (например, года) подсчитывается сальдо денежных потоков. Важным параметром денежного потока является последовательность знаков его сальдо за весь период реализации инвестиционного проекта.

Поток называется *ординарным*, если он состоит из начальной инвестиции, сделанной единовременно или в течение нескольких последовательных базовых периодов и последующих притоков денежных средств. Иными словами, денежный поток считается ординарным, если периоды с отрицательным знаком сальдо (общим оттоком) предшествуют периодам с положительным сальдо (общим притоком), как это показано на схеме рис. 7.1.

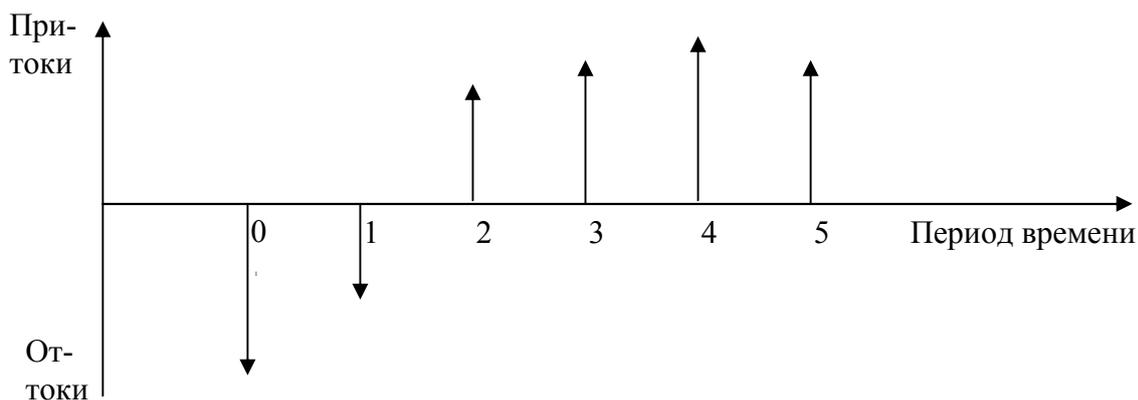


Рис. 7.1. Схема ординарного денежного потока

Если оттоки (инвестиции) чередуются в любой последовательности с притоками средств, то денежный поток называется *неординарным*. В этом случае схема последовательности периодов с отрицательным и положительным сальдо нарушена (см. рис. 7.2).

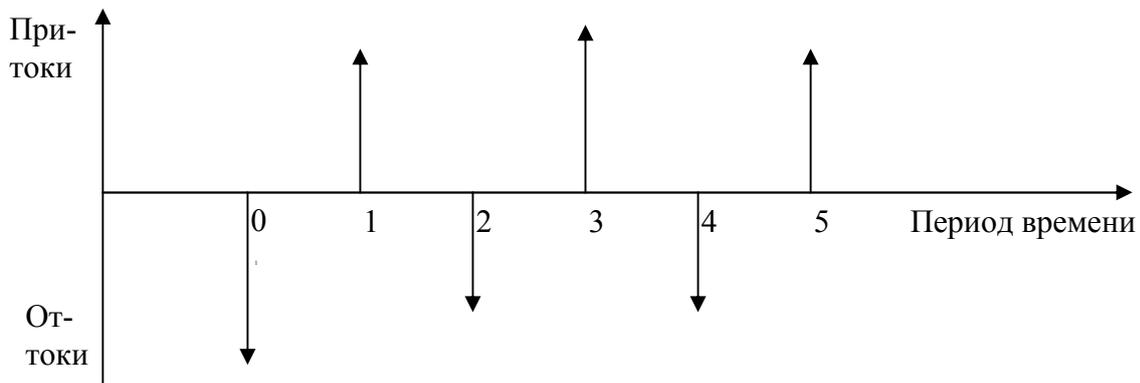


Рис. 7.2. Схема неординарного денежного потока

Идентификация ординарных и неординарных денежных потоков чрезвычайно важна при выборе того или иного показателя экономической оценки инвестиционного проекта, поскольку не все критерии пригодны для анализа проектов с неординарными денежными потоками.

Весьма важным в анализе инвестиционных проектов является выделение различных отношений их взаимосвязи между собой.

Два изучаемых проекта называются *независимыми*, если решение о принятии одного из них не влияет на решение о принятии другого.

Если два и более инвестиционных проекта не могут быть реализованы одновременно, т.е. принятие одного из них автоматически означает, что оставшиеся мероприятия должны быть отвергнуты, то такие проекты называются *альтернативными*. Подразделение проектов на независимые и альтернативные имеет особое значение при формировании инвестиционного портфеля предприятия в условиях ограниченного объёма капиталовложений. В этом случае обычно приходится ранжировать независимые производственно-финансовые мероприятия по степени их приоритетности.

Проекты связаны между собой отношениями *комплиментарности*, если осуществление нового мероприятия способствует росту доходов по одному или нескольким другим проектам. И проекты связаны между собой отношениями *замещения*, если осуществление нового мероприятия способствует снижению доходов по одному или нескольким другим проектам.

Основой для анализа движения денежных средств, происходящего в результате осуществления инвестиционных проектов, является информация открытой финансовой отчетности предприятия, в частности статьи таких разделов баланса, как «Внеоборотные активы», формы № 3 «Отчёт о движении денежных средств», а именно статьи подразделения II. «Движение денежных средств в результате инвестиционной деятельности».

Одной из важнейших предпосылок успешной инвестиционной деятельности предприятия является наличие финансовых ресурсов – собственных и заёмных. Это главный фактор формирования инвестиционных планов и одновременно основное их ограничение. В настоящее время украинские предприятия могут использовать следующие субъекты инвести-

ционного процесса в качестве внешних источников заёмных средств для финансирования проектов:

- отечественные и иностранные банки;
- портфельные инвесторы (частные фонды, фонды «помощи»);
- стратегические инвесторы;
- лизинговые компании.

Менее распространены такие источники финансирования предприятий, как публичные эмиссии акций и облигаций.

Очевидно, что денежные и другие ресурсы любых источников финансирования имеют определённую цену, которая называется ценой инвестированного капитала. Это уровень прибыли, которую предприятие должно выплатить инвесторам, чтобы побудить их рисковать своими средствами. Считается, что цена инвестированного капитала является альтернативной стоимостью, т.е. прибылью, которую ожидают получить инвесторы от альтернативных возможностей вложения капитала при условии такого же риска. Если предприятию необходимо привлечь инвестиции, то оно должно обеспечить доходы по ним, не меньшие, чем альтернативные капиталовложения.

Таким образом, за использование финансовых ресурсов надо платить независимо от источника их получения. Плата за использование финансовых ресурсов осуществляется тому лицу, которое предоставляет эти средства: инвестору в виде дивидендов за осуществлённую инвестицию, банку или кредитору в виде процентных отчислений за предоставленную ссуду, лизингодателю в виде комиссионных за предоставленное оборудование и т.д.

На первый взгляд может показаться, что в случае, когда предприятие обладает собственными средствами, то они не имеют цены. Однако, это не так. Дело в том, что имея определённые свободные собственные средства, предприятие всегда имеет возможность инвестировать их, например, в финансовые инструменты, в том числе и положить на депозит, и тем самым получить прибыль. Поэтому, минимальная цена указанных ресурсов является «заработком» предприятия от альтернативного способа вложения имеющихся в его распоряжении финансовых ресурсов. Следовательно, предприятие, решая вложить деньги в свой собственный инвестиционный проект, предусматривает цену данного капитала как минимум на уровне стоимости альтернативного вложения денег.

На практике цена капитала конкретного инвестиционного проекта  $r$  обычно находится как средняя арифметическая взвешенная из цен капиталов, полученных предприятием из различных источников. Она рассчитывается следующим образом:

$$r = \sum_{j=1}^h p_j d_j, \quad j = 1, 2, \dots, h, \quad (7.1)$$

где  $p_j$  – цена  $j$ -го источника капитала;

$d_j$  – удельный вес  $j$ -го источника капитала в общей его сумме.

Основным источником заёмного капитала являются банковские займы. Их цена должна рассматриваться с учётом налога на прибыль. Согласно действующим в Украине нормативным документам проценты за пользование займами банка включаются в себестоимость продукции (работ, услуг). Поэтому цена данного источника  $p_1$  меньше банковского процента и рассчитывается по следующей формуле:

$$p_1 = I_r (1 - T), \quad (7.2)$$

где  $I_r$  – процентная ставка по кредиту;  
 $T$  – ставка налога на прибыль.

Инвестиционные проекты предприятия можно оценивать по многим показателям: с точки зрения их социальной значимости, масштабов воздействия на окружающую среду, степени вовлечения трудовых ресурсов и т.д. Однако в рыночной экономике центральное место в этих оценках принадлежит коммерческой стороне мероприятия, под которой понимают соответствие полученного от внедрения проекта экономического результата (прироста прибыли, стоимости капитала предприятия) осуществленным инвестиционным затратам. Поскольку данные финансовые показатели обычно относятся к различным моментам времени (см. рис. 7.1, 7.2), то их сопоставимость обеспечивается с помощью процедуры дисконтирования денежных потоков.

Дисконтирование является универсальной методикой приведения будущих денежных потоков к настоящему моменту времени, основанной на использовании сложных процентов. Формула дисконтированной текущей стоимости  $PV$  (от англ. слов *Present Value*) будущих денежных потоков  $P_k$  имеет следующий вид:

$$PV = \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{(1+r)^k}, \quad (7.3)$$

где  $k$  – номер периода (обычно года), в котором ожидается приток денежных средств от проекта ( $k = 1, 2, \dots, n$ );  
 $r$  – средняя цена инвестиционного капитала (десятичная дробь), определяющая ставку дисконтирования  $1/(1+r)^k$ ;  
 $n$  – длительность инвестиционного проекта (лет).

В некоторых ситуациях при анализе инвестиционных проектов приходится осуществлять не дисконтирование денежных потоков, а их наращивание, например, при определении будущей стоимости денег на конец срока проекта в условиях реинвестирования. Величина наращенных на конец проекта денежных поступлений называется чистой терминальной стоимостью –  $NTV$  (*Net Terminal Value*). В этом случае общая формула для наращенной будущей стоимости денежных потоков  $NTV$  записывается так:

$$NTV = \sum_{k=1}^n P_k (1+r)^{n-k}. \quad (7.4)$$

В настоящее время в процессе экономической оценки приемлемости и эффективности реализации инвестиционного проекта чаще всего рассчитываются семь основных показателей:

1. Чистая приведенная стоимость – *NPV (Net Present Value)*.
2. Индекс рентабельности – *PI (Profitability Index)*.
3. Внутренняя норма прибыли – *IRR (Internal Rate of Return)*.
4. Модифицированная внутренняя норма прибыли – *MIRR (Modified Internal Rate of Return)*.
5. Дисконтированный срок окупаемости – *DPP (Discounted Payback Period)*.
6. Срок окупаемости – *PP (Payback Period)*.
7. Коэффициент эффективности – *ARR (Accounting Rate of Return)*.

Первые пять перечисленных финансово-экономических показателей или критериев оценки инвестиционных проектов основаны на дисконтированных денежных потоках и применяются при  $n > 1$ , последние два – на не дисконтированных денежных потоках и используются при  $n \leq 1$ . Рассмотрим их практическое применение подробнее.

- Первый критерий (чистая приведенная стоимость *NPV*) основан на сравнении общей суммы дисконтированных денежных поступлений *PV*, генерируемых данным инвестиционным проектом на протяжении всего срока его осуществления, с величиной всех дисконтированных инвестиций *IC*:

$$NPV = PV - IC. \quad (7.5)$$

Вывод о приемлемости исследуемого проекта делается с учётом следующих неравенств:

- $NPV > 0$  – проект приемлем.
- $NPV < 0$  – проект неприемлем.
- $NPV = 0$  – решение не определено.

Сумма дисконтированных денежных поступлений *PV* рассчитывается по формуле (7.3). В случае, если денежный поток неординарный, например, инвестиции в проект предполагается осуществлять неоднократно на протяжении ряда лет реализации проекта, то их суммарный дисконтированный объём *IC* определяется так:

$$IC = \sum_{k=0}^n \frac{IC_k}{(1+r)^k}. \quad (7.6)$$

Величина *NPV* показывает, насколько повысится прибыль (стоимость капитала) предприятия в результате осуществления данного инвестиционного проекта в случае выполнения его главных предпосылок и прогнозных оценок. Данный критерий характеризует абсолютный эффект от инвестирования, который измеряется в денежных единицах и допускает суммирование, т.е. является аддитивным показателем.

Знак и величина  $NPV$  являются одними из важнейших критериев приемлемости и целесообразности внедрения анализируемого проекта, поскольку владельцев предприятия, в первую очередь, интересует именно рост стоимости его капитала. Очевидно, что то мероприятие представляется наиболее привлекательным, которое соответствует условию  $max(NPV > 0)$ .

Результаты многочисленных исследований практики принятия решений в области инвестиционной деятельности предприятий в условиях рыночных отношений показали, что критерий  $NPV$  является одним из наиболее распространённых и популярных. Главным аргументом в пользу использования показателя  $NPV$  является возможность получения на его основе вероятностной оценки прироста стоимости капитала предприятия в случае приемлемости проекта, что в полной мере отвечает основной цели деятельности его управленческого персонала.

Кроме того, чистая приведенная стоимость отражает такое существенное свойство проекта, как масштабность предполагаемого мероприятия, его влияние на один из важнейших показателей производственно-финансовой деятельности предприятия – прибыль.

Таким образом, если менеджеров предприятия интересует, в первую очередь, именно прирост прибыли, то следует отдать предпочтение использованию показателя  $NPV$ .

Однако при этом не стоит забывать и о недостатках данного критерия, среди которых обычно указывается такой:  $NPV$  как абсолютный показатель не может предоставить информацию о так называемом «резерве безопасности» проекта. Имеется в виду следующее: если на прединвестиционной стадии разработки мероприятия допущена ошибка при прогнозировании денежных потоков, или изменилась (как правило, в большую сторону) средняя цена инвестированного капитала  $r$ , то критерий  $NPV$  не позволяет определить, насколько велика угроза того, что проект, который ранее считался приемлемым, превратится в убыточный.

Рассмотрим расчёт важнейших критериев оценки инвестиционных проектов с помощью пакета программ «Сравнение проектов» на следующем примере. На предприятии планируется внедрить новое технологическое оборудование. Первоначальная инвестиция по данному мероприятию составляет 465 тыс. грн. Для его финансирования предполагается использовать банковский кредит, процентная ставка по которому составляет 15 % годовых. Срок реализации инвестиционного проекта – четыре года. Прогнозные чистые денежные поступления по годам составляют: 1-й год 110 тыс. грн., 2-й год 165 тыс. грн., 3-й год 180 тыс. грн. и 4-й год 205 тыс. грн. Ликвидационный денежный приток, связанный с реализацией устаревшего оборудования предприятия, равен 40 тыс. грн. и ожидается в четвертом году реализации проекта. Ставка налога на прибыль равна 18 %.

Изобразим денежный поток, генерируемый данным инвестиционным проектом, на числовой оси, учитывая, что срок реализации проекта четыре года, а итоговый денежный поток за четвёртый год является суммой

соответствующего чистого и ликвидационного денежного поступления, которая равна  $205 + 40 = 245$  тыс. грн. (рис. 7.3).

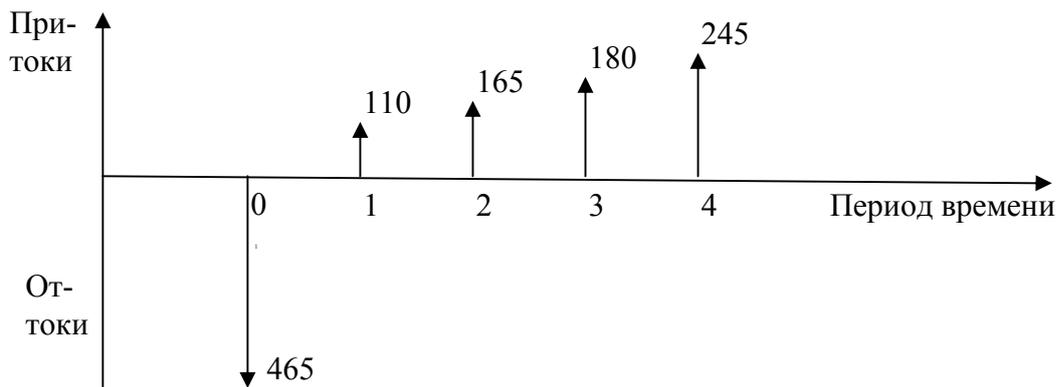


Рис. 7.3. Схема денежного потока, который генерируется инвестицией по замене технологического оборудования на предприятии

Сравнивая рис. 7.3 и 7.1, легко видеть, что исследуемый денежный поток является ординарным.

В начале осуществим корректировку цены заёмного капитала (банковского кредита  $p_1$ ) на налог на прибыль  $T$ , ставка которого равна 18 %. В соответствии с формулой (7.2) имеем:

$$r = p_1 = I_t(1 - T) = 0,15 \times (1 - 0,18) = 0,123.$$

Для определения чистой приведенной стоимости  $NPV$  проекта подставим полученное значение  $r$  в выражение  $NPV = PV - IC$ , составляющие которого определяются формулами (7.3), (7.6):

$$NPV = 110/(1 + 0,123) + 165/(1 + 0,123)^2 + 180/(1 + 0,123)^3 + 245/(1 + 0,123)^4 - 465 = 509,92827 - 465 = 44,92827 \text{ (тыс. грн.)}.$$

Полученное значение  $NPV$  является положительной величиной, поэтому можно сделать вывод о приемлемости запланированного производственного мероприятия по замене технологического оборудования на изучаемом предприятии. Величина  $NPV$  показывает, что прибыль (стоимость капитала) предприятия повысится на 44,928 тыс. грн. в результате осуществления данного инвестиционного проекта в случае выполнения его главных предпосылок и прогнозных оценок.  $NPV = 44,928$  тыс. грн. характеризует абсолютный эффект от запланированного мероприятия, его масштаб.

• Второй критерий (индекс рентабельности  $PI$ ) вытекает из первого. В отличие от  $NPV$ , индекс рентабельности является не абсолютным, а относительным показателем:

$$PI = \frac{PV}{IC}. \quad (7.7)$$

Вывод о приемлемости исследуемого проекта делается с учётом следующих неравенств:

$PI > 1$  – проект приемлем.

$PI < 1$  – проект неприемлем.

$PI = 1$  – решение не определено.

Индекс рентабельности показывает уровень доходов на 1 грн. инвестиционных расходов данного проекта. Благодаря этому критерий  $PI$  удобен при выборе одного проекта из ряда альтернативных мероприятий, имеющих примерно одинаковые значения  $NPV$ . Величина индекса рентабельности характеризует эффективность инвестирования, который обычно измеряется в форме коэффициента или в процентах и не допускает суммирования, т.е. является не аддитивным показателем.

Легко убедиться, что при исследовании единичного инвестиционного проекта на предприятии значения и выводы относительно его оценки, сделанные на основе показателей  $NPV$  и  $PI$ , полностью согласованы, поскольку между ними наблюдаются очевидные взаимосвязи. Так, в случае, если

$NPV > 0$ , то одновременно  $PI > 1$ ;

$NPV < 0$ , то одновременно  $PI < 1$ ;

$NPV = 0$ , то одновременно  $PI = 1$ .

Найдём индекс рентабельности инвестиционного проекта по данным предыдущего примера о замене технологического оборудования на предприятии по формуле (7.7):

$$PI = 509,92827/465 = 1,09662.$$

Поскольку индекс рентабельности превышает единицу, то можно говорить об эффективности данного проекта реальной инвестиции. В отличие от чистой приведенной стоимости, величина  $PI$  является не абсолютной, а относительной характеристикой предполагаемого мероприятия. Она показывает, что на 1 грн. инвестиционных расходов данного проекта приходится почти 1 грн. 10 коп. дохода.

• Третий критерий (внутренняя норма прибыли  $IRR$ ) представляет собой такую цену инвестиционного капитала  $r$ , при которой величина дисконтированных денежных притоков совпадает со всеми приведенными инвестициями, т.е. при  $PV = IC$ . В этом случае чистая приведенная стоимость проекта  $NPV$  равна нулю. Поэтому  $IRR$  находится из следующего уравнения:

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k}{(1 + IRR)^k} = 0. \quad (7.8)$$

Здесь  $P_0 = IC_0$  и выражение, которое находится в левой части формулы (7.8), является суммой всех элементов дисконтированного денежного потока,

включая начальные и последующие инвестиции, которые генерируется исследуемым проектом.

Уравнение (7.8) является частным случаем функции  $NPV = f(r)$ , которая имеет следующий общий вид:

$$NPV = f(r) = \sum_{k=0}^n \frac{P_k}{(1+r)^k}. \quad (7.9)$$

Для правильного понимания природы внутренней нормы прибыли  $IRR$  следует воспользоваться графическим анализом функции (7.9). Она обладает следующими главными свойствами:

1. Функция  $NPV = f(r)$  является нелинейной функцией от  $r$ .
2. При  $r = 0$  график функции пересекает ось ординат в точке, равной сумме всех элементов не дисконтированного денежного потока  $\sum_{k=0}^n P_k$ , генерируемого данным инвестиционным проектом.
3. Для проектов с ординарным денежным потоком функция (7.9) является невозрастающей, т.е. при  $r \rightarrow +\infty$  график функции  $NPV = f(r)$  стремится к оси абсцисс и пересекает её в некоторой точке, которая и определяет показатель  $IRR$  проекта согласно уравнению (7.8).

На рис. 7.4 приведен график исследуемой функции для проекта с ординарным денежным потоком.

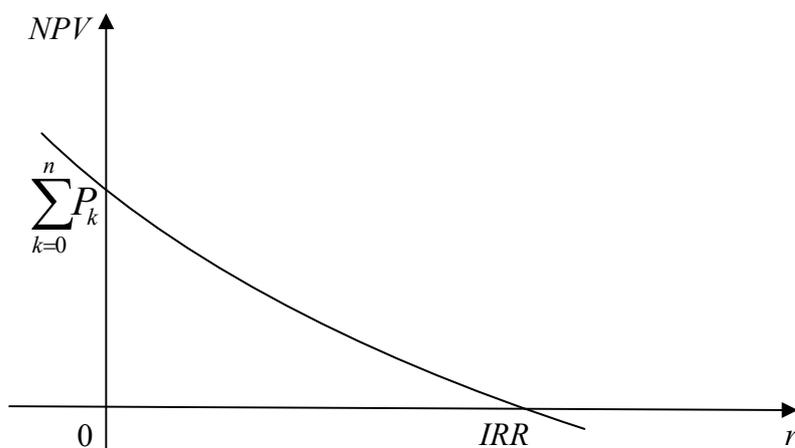


Рис. 7.4. График функции (7.9) проекта с ординарным денежным потоком

Визуальный анализ графика функции (7.9) на рис. 7.4 показывает, что решение относительно приемлемости проекта должно приниматься путём сравнения величины  $IRR$  с фактической средней ценой инвестированного капитала  $r$ , которая представляет собой некоторую точку на оси абсцисс.

Очевидно, что в случае  $IRR > r$  (интервал  $(0; IRR)$  на рис. 7.4)  $NPV > 0$  и проект следует оценить как приемлемый. При  $IRR < r$  (интервал  $(IRR; +\infty)$  на рис. 7.4)  $NPV < 0$  и проект следует признать неприемлемым. И, наконец, при  $IRR = r$  (точка  $IRR$  на рис. 7.4)  $NPV = 0$  – вывод о приемлемости данного инвестиционного проекта остаётся неопределённым.

Следовательно, величину  $IRR$  можно интерпретировать как показатель доходности исследуемого мероприятия: чем выше значение  $IRR$  по

сравнению с  $r$ , тем более эффективным в смысле прибыльности является инвестиционный проект, и наоборот. Для двух проектов с ординарными денежными потоками тот из них считается наиболее эффективным, которому соответствует  $\max(IRR)$ .

4. Для проектов с неординарным денежным потоком выражение (7.8) представляет собой уравнение  $n$ -й степени относительно  $IRR$  и вследствие своей нелинейности может иметь несколько действительных корней, а график функции (7.9) может пересекать ось абсцисс в нескольких точках. Это соответствует случаю множественности значений  $IRR$  (рис. 7.5) и установить приоритетность одного из инвестиционных проектов на основе критерия  $IRR$  не представляется возможным.

Кроме того, уравнение (7.8) может вообще не иметь действительных корней и тогда график функции  $NPV = f(r)$  не пересекает ось абсцисс, а критерий  $IRR$  становится полностью непригодным для принятия решений о приемлемости данного инвестиционного проекта.

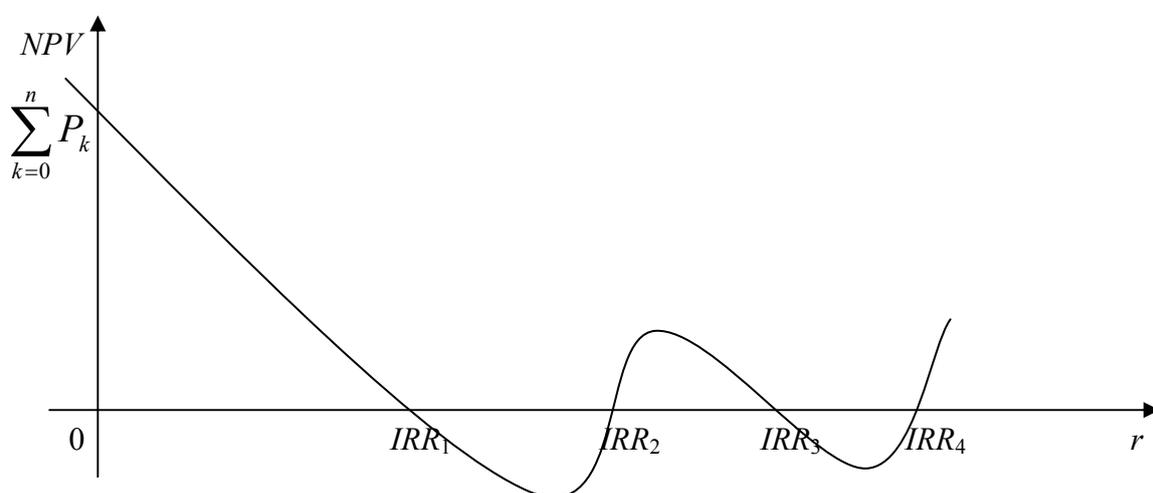


Рис. 7.5. График функции (7.9) проекта с неординарным денежным потоком

5. По определению критерий  $IRR$  является относительным и неаддитивным показателем. Он, как и средняя цена инвестированного капитала  $r$ , выражается в виде десятичной дроби либо в процентах.

6. Если в схеме денежного потока, генерируемого инвестиционным проектом  $A$ , во всех притоках и оттоках денежных средств поменять знаки на противоположные, т.е. получить симметричный относительно оси времени денежный поток нового проекта  $-A$ , то график его функции (7.9) будет симметричным (относительно оси  $r$ ) графику первоначального денежного потока проекта  $A$  (рис. 7.6).

Таким образом, в случае неординарного денежного потока использование показателя  $IRR$  для экономической оценки инвестиционного проекта становится невозможным вследствие не единственности решения уравнения (7.8), хотя формальный графический анализ функции  $NPV = f(r)$  указывает интервалы  $(0; IRR_1)$ ,  $(IRR_2; IRR_3)$ ,  $(IRR_4; +\infty)$  на рис. 7.5, на которых  $NPV > 0$ .

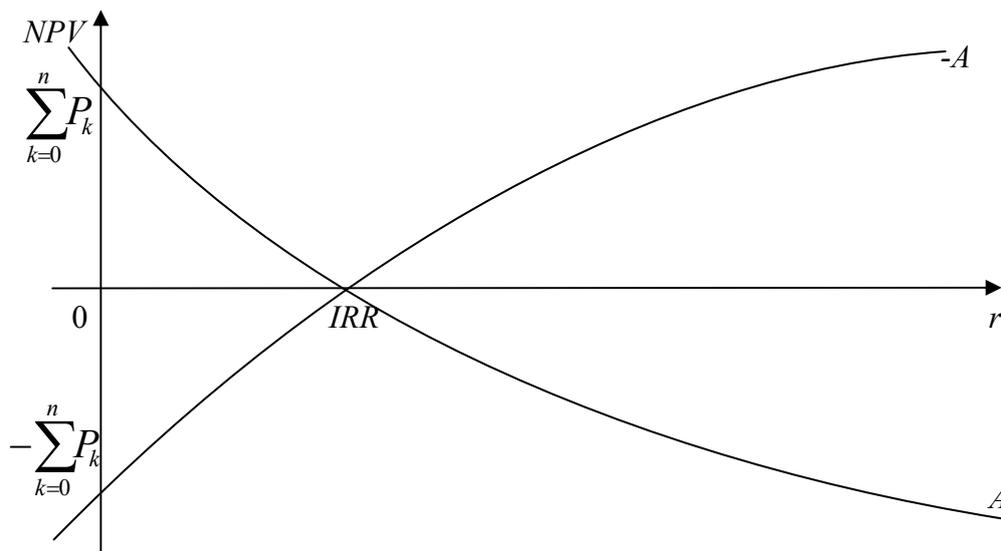


Рис. 7.6. Графики функций (7.9) двух проектов с симметричными денежными потоками

Итак, для ординарного денежного потока значение  $IRR$  можно рассматривать как максимальную ожидаемую доходность рассматриваемого мероприятия. С другой стороны, величина  $IRR$  показывает пороговое значение  $r$ , т.е. предельную величину средней цены инвестированного капитала, которая обеспечивает эффективность данного проекта. В рассматриваемом случае выводы о приемлемости изучаемого инвестиционного проекта делаются на основе следующих неравенств:

$$\begin{aligned}
 IRR > r & - \text{проект приемлем.} \\
 IRR < r & - \text{проект неприемлем.} \\
 IRR = r & - \text{решение не определено.}
 \end{aligned}$$

При этом оценки относительно его приемлемости, сделанные на основе показателей  $NPV$ ,  $PI$ ,  $IRR$ , полностью согласованы, поскольку между ними наблюдаются очевидные взаимосвязи. Так, в случае, если

$$\begin{aligned}
 NPV > 0, PI > 1, & \text{ то одновременно } IRR > r; \\
 NPV < 0, PI < 1, & \text{ то одновременно } IRR < r; \\
 NPV = 0, PI = 1, & \text{ то одновременно } IRR = r.
 \end{aligned}$$

В ситуации, когда анализируемый проект генерирует неординарный денежный поток, значения критериев  $NPV$ ,  $PI$ , с одной стороны, и  $IRR$ , с другой, вообще говоря, могут быть не согласованными, как в случае ординарного денежного потока.

Кроме того, доказанным является факт искажения критерием внутренней нормы прибыли действительной эффективности инвестиционного мероприятия в ситуации, когда оно генерирует неординарный денежный поток, например, если предполагается реинвестирование

полученных поступлений в тот же проект и при этом средняя цена инвестированного капитала  $r$  значительно ниже найденного значения  $IRR$ . Данный феномен связан с тем, что согласно уравнению (7.8), которое лежит в основе расчёта внутренней нормы прибыли, все денежные притоки и оттоки проекта дисконтируются по величине  $IRR$ . Хотя правильнее было бы их дисконтировать по средней цене инвестированного капитала  $r$ . Если величины  $IRR$  и  $r$  не слишком сильно отличаются друг от друга, то искажение эффективности проекта незначительное. Но в случае, когда  $IRR$  существенно превышает  $r$ , внутренняя норма прибыли подвергается довольно серьёзному и неоправданному завышению.

На практике расчёт внутренней нормы прибыли ведется с помощью специальных компьютерных программ по приближённой формуле:

$$IRR \approx r_1 + \frac{f(r_1)(r_2 - r_1)}{f(r_1) - f(r_2)}, \quad (7.10)$$

где  $r_1, r_2$  – два произвольных близких значения средней цены инвестиционного капитала, для которых функция  $NPV = f(r)$  меняет свой знак на противоположный.

Для определения внутренней нормы прибыли  $IRR$  по данным предыдущего примера о замене технологического оборудования на предприятии подставим соответствующие данные в уравнения (7.8):

$$110/(1 + IRR) + 165/(1 + IRR)^2 + 180/(1 + IRR)^3 + 245/(1 + IRR)^4 - 465 = 0.$$

Поскольку в данном случае исследуемый денежный поток является ординарным (см. рис. 7.3), то полученное уравнение  $NPV = 0$  имеет один корень, а график функции  $NPV = f(r)$  пересекает ось абсцисс в одной точке. Последняя и определяет внутреннюю норму прибыли  $IRR$ . Это уравнение можно решить с помощью персонального компьютера, используя соответствующее программное обеспечение. Для определения приближенного значения  $IRR$  без использования программного обеспечения вычислим значения  $NPV$  при  $r_1 = 0,15$ ;  $r_2 = 0,20$  и подставим их в выражение (7.10):

$$\begin{aligned} f(r_1) &= NPV_1 = 110/(1 + 0,15) + 165/(1 + 0,15)^2 + 180/(1 + 0,15)^3 + \\ &\quad + 245/(1 + 0,15)^4 - 465 = 13,8 \text{ (тыс. грн.)}; \\ f(r_2) &= NPV_2 = 110/(1 + 0,20) + 165/(1 + 0,20)^2 + 180/(1 + 0,20)^3 + \\ &\quad + 245/(1 + 0,20)^4 - 465 = -36 \text{ (тыс. грн.)}; \\ IRR &\approx r_1 + \frac{f(r_1)(r_2 - r_1)}{f(r_1) - f(r_2)} = 0,15 + \frac{13,8483 \times (0,20 - 0,15)}{13,8483 + 36,4313} = 0,164. \end{aligned}$$

При этом сумма всех элементов не дисконтированного денежного потока, генерируемого данным инвестиционным проектом, составляет:

$$\sum_{k=0}^n P_k = 110 + 165 + 180 + 245 - 465 = 235 \text{ (тыс. грн.)}.$$

Анализируя полученные выше значения и построенный с их помощью график функции  $NPV = f(r)$  (см. рис. 7.7), можно прийти к выводу, что приближённо внутренняя норма прибыли равна 0,164 или 16,4 %. Результаты расчётов  $IRR$  на компьютере в целом подтверждают этот вывод. Расчётное значение  $IRR$ , при котором  $NPV = 0$ , с точностью до  $10^{-5}$  равно 0,16293.

Найденная величина  $IRR$  означает, что при средней цене инвестированного капитала, превышающей 16,3 %, реализация данного проекта нецелесообразна. При стоимости финансирования, меньшей 16,3 %, осуществление проекта принесёт прибыль. Поскольку внутренняя норма прибыли (16,3 %) выше фактической цены банковского кредита с учётом корректировки на налог на прибыль (12,3 %) и чистая приведенная стоимость проекта является положительной величиной (44,928 тыс. грн.), то рассматриваемый проект является не только приемлемым, но и эффективным: его следует реализовать.

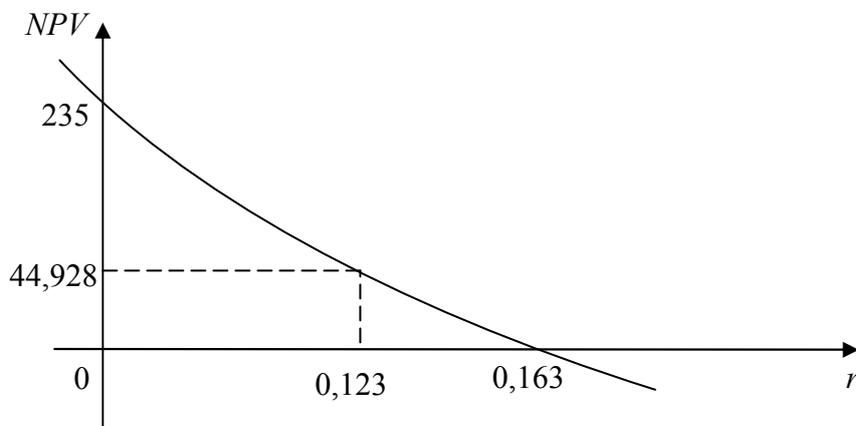


Рис. 7.7. График функции (7.9) проекта по замене оборудования на предприятии

- Четвёртый критерий (модифицированная внутренняя норма прибыли  $MIRR$ ) устраняет главные недостатки показателя  $IRR$  в случае оценки проектов, как с ординарными, так и с неординарными денежными потоками. Он представляет собой такую цену инвестированного капитала, при которой достигается равенство двух величин:

- 1) приведенных на начало проекта всех инвестиционных затрат (предполагается, что предприятие может осуществлять реинвестирование в проект на протяжении всего срока его реализации);

- 2) наращенных на конец проекта денежных поступлений – чистой терминальной стоимости проекта  $NTV$  (см. формулу (7.4)).

Причём, в обоих случаях учёт фактора времени происходит при помощи одной и той же ставки дисконтирования, основанной на средней цене инвестированного капитала  $r$ . Поскольку эти величины относятся к разным моментам времени реализации проекта, то их необходимо сделать соизмеримыми (привести к началу проекта) с помощью некоторого коэффициента дисконтирования, который как раз и базируется на модифицированной внутренней норме прибыли  $MIRR$  (см. схему на рис. 7.8).

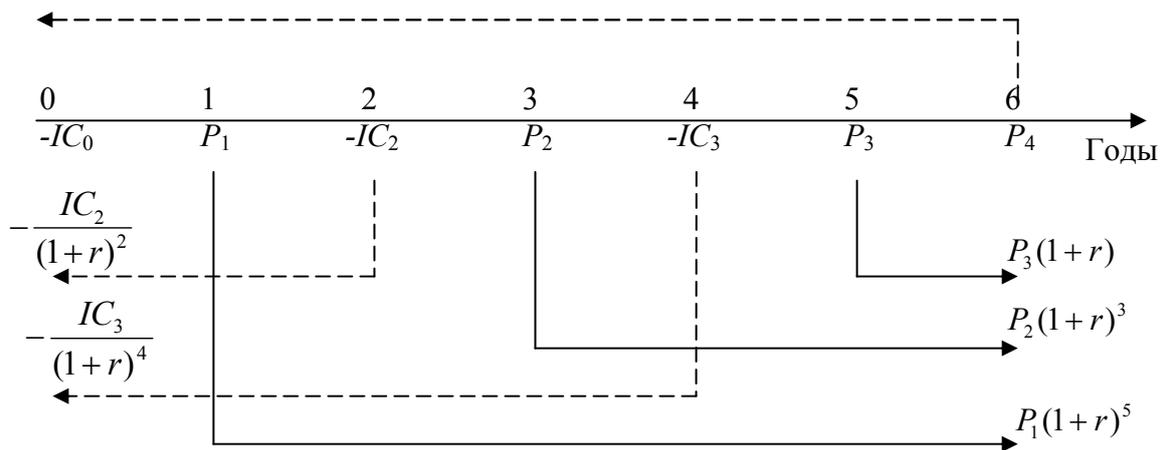


Рис. 7.8. Схема расчёта критерия *MIRR* (штрихом показано приведение всех инвестиционных затрат и поступлений к началу проекта)

Расчёты величины *MIRR* ведутся на основе следующего уравнения:

$$\sum_{k=0}^n \frac{IC_k}{(1+r)^k} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k (1+r)^{n-k}}{(1+MIRR)^n}. \quad (7.11)$$

Оно всегда обеспечивает единственное решение, в отличие от уравнения (7.8), которое определяет величину *IRR* для проекта с неординарным денежным потоком. Из уравнения (7.11) вытекает конечная формула расчёта искомой модифицированной нормы прибыли:

$$MIRR = \sqrt[n]{\frac{\sum_{k=1}^n P_k (1+r)^{n-k}}{\sum_{k=0}^n \frac{IC_k}{(1+r)^k}}} - 1. \quad (7.12)$$

Отметим, что выражение (7.12) имеет реальный экономический смысл ( $MIRR \geq 0$ ) только в случае, когда чистая терминальная стоимость *NTV* (числитель дроби под корнем) не меньше суммы дисконтированных инвестиционных затрат (знаменатель дроби под корнем).

Критерий *MIRR* имеет существенное преимущество перед обычным показателем *IRR* за счёт того, что модифицированная внутренняя норма прибыли базируется на предположении о том, что все денежные поступления реинвестируются по средней цене инвестированного капитала  $r$ , тогда как расчёт показателя *IRR* предполагает, что реинвестирование происходит по цене, равной величине *IRR* данного проекта. Поскольку дисконтирование денежных потоков по средней цене инвестированного капитала в целом более обосновано, то *MIRR* точнее отражает реальную доходность проекта.

Кроме того, благодаря единственности решения уравнения (7.11), критерий *MIRR* может быть успешно использован в случае экономической оценки любых инвестиционных проектов на предприятии – как тех, которые генерируют ординарные, так и тех, которые сопровождаются неординарными

денежными потоками. Он обладает всеми положительными свойствами внутренней нормы прибыли и в то же время носит универсальный характер.

В случае анализа проекта с ординарным денежным потоком величина  $MIRR$  зависит от конкретного значения средней цены инвестированного капитала  $r$ . Как показано на рис. 7.9, при  $r_1 < IRR$  модифицированная внутренняя норма прибыли оказывается в интервале  $(r_1, IRR)$ ; при  $r_2 = IRR$  выполняется равенство  $MIRR_2 = IRR$ ; при  $r_3 > IRR$  модифицированная внутренняя норма прибыли попадает в интервал  $(IRR, r_3)$ .

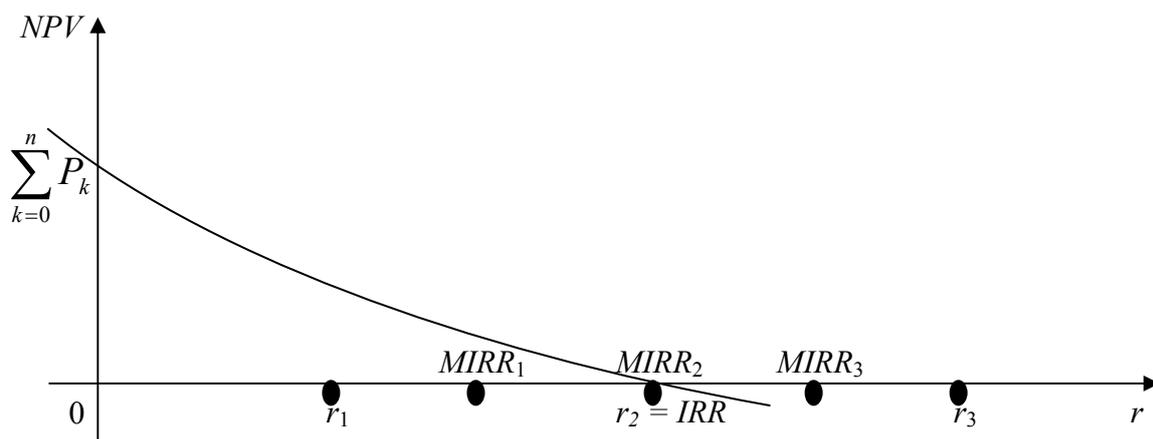


Рис. 7.9. График функции (7.9) проекта с ординарным денежным потоком, характеризующий соотношение критериев  $IRR$  и  $MIRR$

Таким образом, в случае приемлемости инвестиционного проекта ( $NPV > 0$ ) выполняется соотношение  $r < MIRR < IRR$ , а при его неприемлемости ( $NPV < 0$ ) справедливо неравенство  $r > MIRR > IRR$ . В ситуации неопределённости ( $NPV = 0$ ) средняя цена инвестированного капитала совпадает с обычной и модифицированной нормами прибыли ( $r = MIRR = IRR$ ).

Следовательно, выводы, которые делаются с помощью  $MIRR$  относительно приемлемости рассматриваемого проекта с ординарным денежным потоком, полностью совпадают с выводами, полученными на основе показателя  $IRR$ .

Весьма полезным является сравнение показателя  $MIRR$  не только с внутренней нормой прибыли  $IRR$ , но и с индексом рентабельности  $PI$  как ещё одной относительной характеристикой эффективности инвестиционного проекта. Рассмотрим подробнее выражения, которые их определяют.

Согласно формулам (7.3), (7.6), (7.7) индекс рентабельности представляется так:

$$PI = \frac{PV}{IC} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k (1+r)^{-k}}{\sum_{k=0}^n IC_k (1+r)^{-k}}. \quad (7.13)$$

Здесь ставка дисконтирования денежных поступлений и оттоков проекта выражена множителем  $(1+r)^{-k}$ . Исходя из формулы критерия  $MIRR$  (7.12), можно записать:

$$(1 + MIRR)^n = \frac{\sum_{k=1}^n P_k (1+r)^{n-k}}{\sum_{k=0}^n IC_k (1+r)^{-k}}. \quad (6.14)$$

Сравнение выражений (7.13) и (7.14) показывает, что они отличаются лишь множителем  $(1+r)^n$ . Поэтому справедливы следующие соотношения:

$$PI = \left( \frac{1 + MIRR}{1+r} \right)^n; \quad MIRR = (1+r)^{\sqrt[n]{PI}} - 1. \quad (7.15)$$

Это означает, что показатели  $MIRR$  и  $PI$  взаимосвязаны и могут быть выражены один через другой. Причём их значения полностью согласованы между собой, поскольку зависимость между данными критериями прямая: с ростом  $MIRR$  повышается значение  $PI$ , и наоборот.

Следовательно, для любого инвестиционного проекта (с ординарным или неординарным денежным потоком) выводы относительно оценки его приемлемости, которые вытекают из значений критериев  $NPV$ ,  $PI$  и  $MIRR$ , полностью согласованы. Иными словами, если

$$\begin{aligned} NPV > 0, & \text{ то одновременно } PI > 1, MIRR > r; \\ NPV < 0, & \text{ то одновременно } PI < 1, MIRR < r; \\ NPV = 0, & \text{ то одновременно } PI = 1, MIRR = r. \end{aligned}$$

Модифицированную внутреннюю норму прибыли  $MIRR$  для предыдущего примера инвестиционного проекта по замене технологического оборудования на предприятии рассчитаем по формуле (7.12), предварительно определив чистую терминальную стоимость проекта  $NTV$  на основе выражения (7.4), и схемы на рис. 7.8:

$$\begin{aligned} NTV &= \sum_{k=1}^4 P_k (1+r)^{4-k} = 110 \times (1+0,123)^3 + 165 \times (1+0,123)^2 + 180 \times (1+0,123) + \\ &+ 245 = 811,0136. \end{aligned}$$

Отсюда

$$MIRR = \sqrt[n]{\frac{\sum_{k=1}^n P_k (1+r)^{n-k}}{\sum_{k=0}^n \frac{IC_k}{(1+r)^k}}} - 1 = \sqrt[4]{\frac{811,0136}{465}} - 1 = 0,1492.$$

Величину  $MIRR$  можно также рассчитать через её взаимосвязь с индексом рентабельности проекта ( $PI$ ) на базе второго выражения из формулы (7.15):

$$MIRR = (1+r)^{\sqrt[n]{PI}} - 1 = (1+0,123)^{\sqrt[4]{1,109662}} - 1 = 0,1492,$$

что полностью совпадает с предыдущим результатом.

Модифицированная внутренняя норма прибыли (14,9 %) превышает цену капитала проекта (12,3 %), поэтому выводы по критерию *MIRR* полностью совпадают с выводами, сделанными на основе показателя *IRR*. При этом выполняется соотношение  $r < MIRR < IRR$  ( $0,123 < 0,149 < 0,163$ ), показанное выше для проектов с ординарными денежными потоками. Оно означает, что в случае приемлемости инвестиционного проекта по показателю *IRR*, по критерию *MIRR* данный проект также является приемлемым и модифицированная внутренняя норма прибыли обеспечивает более реальную оценку степени эффективности анализируемого мероприятия по сравнению с завышенной оценкой показателя *IRR* (рис. 7.10).

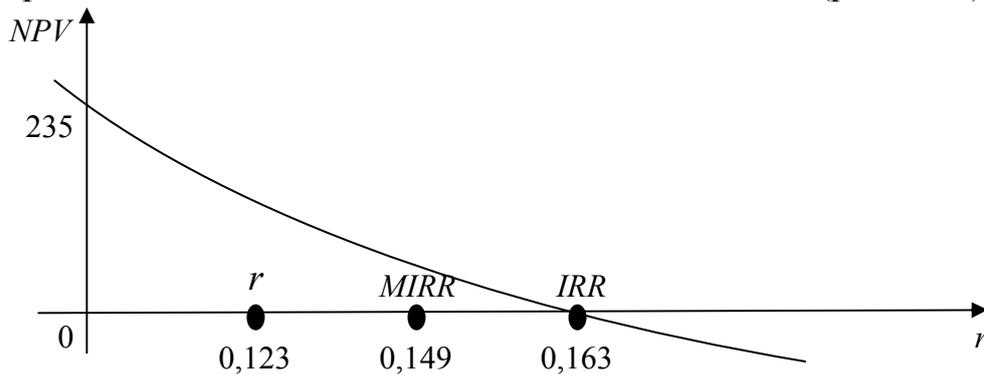


Рис. 7.10. График функции (7.9) для проекта по замене технологического оборудования на предприятии, характеризующий соотношение критериев *IRR* и *MIRR*

Определение величины *MIRR* инвестиционного проекта открывает возможность рассчитать истинный резерв безопасности проекта *RS* (*Reserve of Security*). С этой целью используются следующие формулы:

$$RS_1 = MIRR - r; \quad (7.16)$$

$$RS_2 = \frac{MIRR - r}{r} \times 100. \quad (7.17)$$

Резерв безопасности проекта в случае  $RS_1$  ( $RS_2$ )  $> 0$  характеризует возможный запас абсолютного (7.16) и относительного (7.17) изменения фактического значения средней цены инвестированного капитала  $r$  в связи с различными непредвиденными обстоятельствами. В частности, формула (7.16) показывает, насколько процентных пунктов цена капитала проекта может повыситься, не изменяя статус проекта с прибыльного на убыточный. Формула (7.17) отражает ту же возможность, но не в абсолютном выражении, а в относительном – в процентах.

Очевидно, что чем выше положительный показатель  $RS_1$  ( $RS_2$ ), тем больше резерв безопасности проекта, тем ниже его степень риска и, наоборот. Отрицательное значение  $RS_1$  ( $RS_2$ ), рассчитанное по формулам (7.16), (7.17), показывает, насколько процентных пунктов (процентов)

необходимо снизить среднюю цену инвестированного капитала  $r$ , чтобы превратить проект из убыточного в прибыльный.

Величины  $RS_1$ ,  $RS_2$  интерпретируются как характеристики степени риска инвестиционного проекта с любым денежным потоком (ординарным или неординарным).

Абсолютный резерв безопасности обсуждаемого проекта по замене технологического оборудования на предприятии равен:

$$RS_1 = MIRR - r = 14,9 - 12,3 = 2,6 \text{ (п. п.)}.$$

Он показывает, что средняя цена инвестированного капитала (в данном случае кредита банка) исследуемого проекта может повыситься на 2,6 процентных пункта, не изменяя его статус с прибыльного на убыточный.

Относительный резерв безопасности проекта составляет

$$RS_2 = \frac{MIRR - r}{r} \times 100 = \frac{2,6}{12,3} \times 100 = 21,138 \text{ \%}.$$

Это означает, что цена инвестированного капитала производственного мероприятия по замене оборудования на предприятии может вырасти на 21,1 % и при этом данный проект останется прибыльным.

Сравнение критериев  $IRR$  и  $MIRR$ , их особенностей, преимуществ и недостатков показывает, что следует отдать предпочтение второму показателю вследствие следующих причин:

1. Критерий  $MIRR$  является универсальной относительной характеристикой эффективности инвестиционных проектов, которая одинаково применима при исследовании как ординарных, так и неординарных денежных потоков, генерируемых запланированными капиталовложениями.

2. Критерий  $MIRR$  обеспечивает получение более точной и объективной оценки эффективности и степени риска инвестиционного проекта в отличие от внутренней нормы прибыли  $IRR$ , которая при прочих равных условиях даёт завышенное значение данных свойств анализируемого мероприятия.

3. Расчёт модифицированной внутренней нормы прибыли  $MIRR$  намного проще по сравнению с расчётом критерия  $IRR$ .

• Пятый показатель (дисконтированный срок окупаемости  $DPP$ ) показывает минимальное число лет, на протяжении которых суммарные инвестиционные затраты  $IC$  могут быть полностью покрыты кумулятивными притоками денежных средств  $VP$  исследуемого инвестиционного проекта с учётом фактора времени. Он также представляет собой относительную величину эффективности инвестиционного проекта, поскольку предусматривает сопоставление расходов и поступлений, обусловленных данным мероприятием. В случае равномерного распределения дисконтированных денежных притоков по годам данное свойство проявляется вполне очевидно, т.к. при этом  $DPP = n/PI$ .

Использование критерия  $DPP$  в процессе экономической оценки инвестиционного проекта предприятия происходит путём сравнения его фактического значения с некоторой нормативной величиной  $Norm$ , а вывод о приемлемости проекта делается при выполнении условия  $DPP < Norm$ . Это обуславливает некоторую субъективность данного показателя, связанную с выбором нормативного срока окупаемости  $Norm$ . Поэтому можно предположить, что величина  $DPP$  отображает для менеджеров предприятия, прежде всего, временно́й фактор процесса инвестирования и связанные с ним риски.

При определённых обстоятельствах критерий  $DPP$  может играть доминирующую роль в процессе решения вопроса о приемлемости инвестиционного проекта, например, в условиях жёсткой конкурентной борьбы предприятия за рынки сбыта своей продукции (работ, услуг). Поскольку иногда товаропроизводителю целесообразно идти на сознательные убытки ради быстрого получения конкурентных преимуществ.

Не стоит забывать и о ситуациях, когда использование именно данного критерия в качестве приоритетного является оправданным. Например, в случае, если менеджеры предприятия в большей степени озабочены решением проблемы быстрой окупаемости, а не прибыльности проекта. Поэтому  $DPP$ , наряду с величиной резерва безопасности  $RS_1$  ( $RS_2$ ), может быть применён для косвенной оценки степени риска и ликвидности инвестиционных проектов. Небезосновательно считается, что чем короче срок окупаемости, тем менее рискованным и более ликвидным представляется исследуемый проект.

Действительно, инвестиционный проект предприятия, рассчитанный на достаточно долгую перспективу, что проявляется в большом сроке окупаемости  $DPP$ , выглядит более рискованным и менее ликвидным по сравнению с краткосрочным мероприятием. Поэтому величина  $DPP$  может выступать в роли косвенного индикатора степени риска и ликвидности анализируемого проекта.

Дисконтированный срок окупаемости  $DPP$  по данным предыдущего примера определяется путём вычитания из начальной инвестиции поступления денежных средств по годам с учётом фактора времени:

$$\begin{aligned} 1\text{-й год: } & 465,000 - 110/(1 + 0,123) = 367,048 \text{ (тыс. грн.);} \\ 2\text{-й год: } & 367,048 - 165/(1 + 0,123)^2 = 236,213 \text{ (тыс. грн.);} \\ 3\text{-й год: } & 236,213 - 180/(1 + 0,123)^3 = 109,117 \text{ (тыс. грн.);} \\ 4\text{-й год: } & 109,117 - 245/(1 + 0,123)^4 = -44,928 \text{ (тыс. грн.).} \end{aligned}$$

Поскольку в четвёртом году дисконтированное поступление денежных средств  $(245/(1 + 0,123)^4 = 154,045 \text{ тыс. грн.})$  превышает средства, которые необходимо восстановить (109,117 тыс. грн.), запланированная инвестиция будет окуплена в течение данного года. Часть четвёртого года, определяющая срок окупаемости, может быть найдена с помощью деления:

$$109,117/154,045 = 0,708 \text{ года или } 8,5 \text{ месяца.}$$

Таким образом, дисконтированный срок окупаемости мероприятия по замене технологического оборудования на предприятии составляет три года и восемь с половиной месяцев. Его следует сопоставить с принятым на данном конкретном предприятии нормативным сроком окупаемости  $Norm$ .

Как было показано выше, при оценке единичного инвестиционного проекта, генерирующего ординарный денежный поток, значения и выводы на основе первых четырёх критериев полностью согласованы, поскольку между ними существуют очевидные взаимосвязи. При анализе проекта с неординарным денежным потоком соблюдается согласованность между критериями  $NPV$ ,  $PI$ ,  $MIRR$ . Что касается выводов по показателю  $DPP$ , то они в основном зависят от установленного на предприятии нормативного срока окупаемости  $Norm$ .

Тем не менее, даже в такой ситуации сохраняется общая согласованность указанных критериев для ряда исследуемых инвестиционных проектов. Это означает, что, например, для двух любых инвестиционных проектов  $A$  и  $B$ , которые характеризуются соотношениями  $NPV(A) > NPV(B)$ ,  $PI(A) > PI(B)$ ,  $MIRR(A) > MIRR(B)$ , справедливо неравенство  $DPP(A) < DPP(B)$ . Иными словами, лучшему по трём рассмотренным критериям проекту всегда соответствует меньший дисконтированный срок окупаемости.

Кроме того, следует отметить определенную зависимость критерия  $DPP$  от структуры денежного потока, генерируемого исследуемым проектом. Действительно, при прочих равных условиях величина дисконтированного срока окупаемости проекта может быть существенно ниже при условии, если будущие денежные поступления  $P_k$  приходятся на первые годы реализации мероприятия (рис. 7.11, а), и наоборот (рис. 7.11, б).

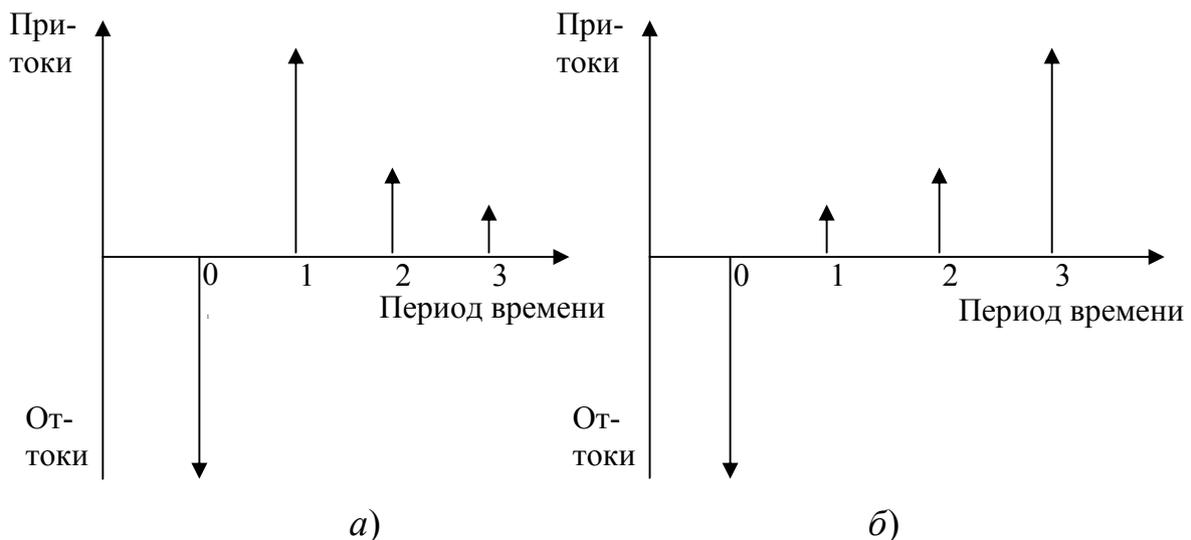


Рис. 7.11. Схема двух денежных потоков с разной структурой

Очевидно, что ликвидность инвестиционного проекта в любое время его реализации на предприятии характеризуется скоростью обратного процесса возврата денежных средств, вложенных в производственные и финансовые

активы. Проект с положительными денежными потоками, приходящимися на первые годы его осуществления, обычно рассматривается как более ликвидный, и менее рискованный по сравнению с проектом с такими же поступлениями, но в конце срока его существования. Следовательно, сравнение степени ликвидности и риска инвестиционных проектов может происходить путём анализа структуры денежных потоков, генерируемых указанными проектами.

- Шестой показатель (не дисконтированный срок окупаемости  $PP$ ) показывает минимальное число периодов времени, на протяжении которых суммарные не дисконтированные инвестиционные затраты могут быть полностью покрыты кумулятивными не дисконтированными поступлениями денежных средств исследуемого инвестиционного проекта. Он обычно рассчитывается при анализе инвестиционных проектов, продолжительность реализации которых на предприятии не превышает одного года ( $n \leq 1$ ).

Для  $PP$  справедливы все основные выводы и соображения, которые были приведены выше для пятого критерия – дисконтированного срока окупаемости  $DPP$ . Основное отличие  $PP$  от предыдущего показателя заключается лишь в том, что все денежные потоки – как оттоки, так и притоки денежных средств от анализируемого мероприятия не учитывают фактор времени, что в пределах одного года считается вполне допустимым с точки зрения теории временной стоимости денег.

Если же данный показатель применять при исследовании среднесрочных и долгосрочных инвестиционных проектов ( $n > 1$ ), то не исключена опасность получения ложных выводов и рекомендаций в ходе экономической оценки предполагаемых производственно-финансовых мероприятий на предприятии. Так, не учёт фактора времени в случае  $n > 1$  приводит к тому, что между показателями не дисконтированного и дисконтированного срока окупаемости одного и того же приемлемого проекта выполняется соотношение  $PP \leq DPP$ . Иными словами,  $PP$  даёт несколько заниженное значение реального срока окупаемости и, соответственно, завышенную оценку эффективности изучаемого мероприятия.

Не дисконтированный срок окупаемости  $PP$  по данным предыдущего примера определим, отнимая от начальной инвестиции поступления денежных средств по годам без учёта фактора времени:

$$\begin{aligned} 1\text{-й год: } & 465 - 110 = 355 \text{ (тыс. грн.);} \\ 2\text{-й год: } & 355 - 165 = 190 \text{ (тыс. грн.);} \\ 3\text{-й год: } & 190 - 180 = 10 \text{ (тыс. грн.);} \\ 4\text{-й год: } & 10 - 245 = -235 \text{ (тыс. грн.).} \end{aligned}$$

Поскольку в четвёртом году не дисконтированное поступление денежных средств (245 тыс. грн.) превышает средства, которые необходимо восстановить (10 тыс. грн.), реализованная инвестиция будет окуплена в течение данного года. Часть четвёртого года, которая будет определять срок окупаемости, может быть найдена делением:

$10/245 = 0,041$  года, или 0,489 месяца.

Таким образом, не дисконтированный срок окупаемости мероприятия по замене технологического оборудования на предприятии составляет три года и пол месяца. Сравнение его с величиной  $DPP$  показывает, что действительно  $PP < DPP$  ( $3,041 < 3,708$ ) и найденная величина на 0,667 года или на 8 месяцев меньше соответствующего дисконтированного показателя.

• Седьмой критерий (коэффициент эффективности  $ARR$ ) находится по следующей формуле:

$$ARR = \frac{2PN}{IC + RV}, \quad (7.18)$$

где  $PN$  – чистый доход предприятия, т.е. выручка от реализации продукции (работ, услуг) за вычетом отчислений в бюджет, тыс. грн.;

$RV$  – ликвидационная стоимость оборудования, подлежащего замене, тыс. грн.

Он, как и показатель  $PP$ , является не дисконтированным критерием. Величина  $ARR$  обычно сравнивается с коэффициентом рентабельности авансированного капитала, который рассчитывается путём делением общей чистой прибыли промышленного предприятия на общую сумму средств, авансированных в его деятельность (итог среднего баланса-нетто). Теоретически возможно установление определённого предельного значения, с которым будет сравниваться фактическая величина  $ARR$  проекта.

Недостатки критерия  $ARR$  связаны, прежде всего, с тем, что денежные поступления  $P_k$  от реализации инвестиционного проекта, которые служат базой для определения чистой прибыли промышленного предприятия  $PN$ , не учитывают фактор времени. Это означает, что коэффициент эффективности  $ARR$  не различает проекты с одинаковой суммой среднегодовой прибыли, но существенно варьирующей по отдельным годам (на протяжении разного количества лет и т.п.).

Таким образом, подводя итоги проведенному выше сравнительному анализу критериев экономической оценки инвестиционных проектов на предприятии, необходимо сделать вывод о нецелесообразности применения показателя внутренней нормы прибыли  $IRR$  в качестве характеристики эффективности будущего мероприятия вследствие серьёзных недостатков данного критерия. Это, прежде всего, невозможность использования  $IRR$  в случае анализа проектов, генерирующих неординарные денежные потоки, а также завышение реальной эффективности исследуемых мероприятий и сложность расчёта. Следует заменить его универсальным показателем – модифицированной внутренней нормой прибыли  $MIRR$ , которая благодаря своим свойствам способна обеспечить более точное и объективное представление о степени эффективности инвестиционного проекта.

Кроме того, индекс рентабельности  $PI$  также целесообразно исключить из перечня важнейших показателей экономической оценки инвестиционных

проектов без особой потери аналитической информации, поскольку с учётом соотношения (7.15) он носит производный характер и при необходимости может быть рассчитан на базе критерия *MIRR*.

В арсенал критериев, основанных на дисконтированных оценках инвестиционного проекта, следует ввести показатели резерва безопасности данного мероприятия  $RS_1$ ,  $(RS_2)$ , рассчитанные на базе модифицированной внутренней нормы прибыли по формулам (7.16), (7.17). Это позволит отразить такое важное свойство капиталовложения, как истинная степень его риска, что, безусловно, уточнит выводы менеджеров предприятия относительно приемлемости различных инвестиционных проектов.

При этом, конечно, не следует забывать, что экономические оценки, полученные на основе рассмотренных количественных критериев, не должны превращаться в истину в последней инстанции: реальная производственно-финансовая деятельность предприятия является слишком сложной, многогранной и непредсказуемой, которую довольно часто невозможно втиснуть в прокрустово ложе формальных математических формул и абстрактных логических конструкций.

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Имеются следующие данные об инвестиционном проекте на предприятии, характеризующие динамику сальдо денежных потоков по годам. Отток или инвестиция денежных средств указана со знаком минус, приток или поступление денежных средств – со знаком плюс. Кроме того, известна цена  $r = 15\%$  источников инвестированного капитала (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Исходные данные по инвестиционному проекту, тыс. грн.

| Годы       | 0     | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|------------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Вариант 1  | -500  | 60  | 85  | 155 | 290 | 260 |
| Вариант 2  | -330  | 30  | 65  | 145 | 140 | 200 |
| Вариант 3  | -350  | 50  | 65  | 95  | 160 | 220 |
| Вариант 4  | -250  | 40  | 45  | 85  | 90  | 160 |
| Вариант 5  | -450  | 40  | 95  | 185 | 190 | 260 |
| Вариант 6  | -650  | 300 | 175 | 185 | 170 | 140 |
| Вариант 7  | -500  | 50  | 105 | 195 | 220 | 260 |
| Вариант 8  | -600  | 70  | 125 | 295 | 220 | 260 |
| Вариант 9  | -650  | 90  | 145 | 315 | 250 | 240 |
| Вариант 10 | -700  | 90  | 195 | 300 | 270 | 280 |
| Вариант 11 | -700  | 210 | 125 | 200 | 280 | 290 |
| Вариант 12 | -750  | 230 | 175 | 210 | 250 | 300 |
| Вариант 13 | -400  | 200 | 145 | 110 | 110 | 100 |
| Вариант 14 | -400  | 100 | 145 | 130 | 140 | 150 |
| Вариант 15 | -750  | 200 | 245 | 230 | 240 | 255 |
| Вариант 16 | -800  | 135 | 185 | 300 | 340 | 355 |
| Вариант 17 | -800  | 235 | 185 | 200 | 340 | 275 |
| Вариант 18 | -850  | 435 | 385 | 100 | 140 | 200 |
| Вариант 19 | -900  | 335 | 285 | 270 | 240 | 200 |
| Вариант 20 | -900  | 250 | 255 | 270 | 295 | 340 |
| Вариант 21 | -950  | 170 | 195 | 275 | 395 | 540 |
| Вариант 22 | -950  | 330 | 195 | 285 | 295 | 340 |
| Вариант 23 | -1000 | 125 | 250 | 285 | 395 | 690 |
| Вариант 24 | -1000 | 425 | 250 | 200 | 295 | 290 |
| Вариант 25 | -550  | 125 | 150 | 200 | 195 | 190 |
| Вариант 26 | -550  | 25  | 150 | 200 | 275 | 390 |
| Вариант 27 | -450  | 45  | 50  | 100 | 245 | 360 |
| Вариант 28 | -350  | 145 | 150 | 100 | 45  | 60  |
| Вариант 29 | -300  | 25  | 50  | 100 | 135 | 260 |
| Вариант 30 | -300  | 85  | 60  | 90  | 110 | 160 |
| Вариант 31 | -250  | 135 | 80  | 70  | 60  | 55  |
| Вариант 32 | -200  | 15  | 40  | 70  | 90  | 155 |
| Вариант 33 | -200  | 115 | 100 | 40  | 30  | 5   |
| Вариант 34 | -150  | 25  | 40  | 50  | 80  | 50  |
| Вариант 35 | -150  | 95  | 50  | 30  | 20  | 15  |
| Вариант 36 | -100  | 15  | 30  | 35  | 40  | 55  |
| Вариант 37 | -100  | 75  | 25  | 15  | 10  | 5   |

На основании данных табл. 7.1, соответствующих номеру Вашего варианта, с помощью пакета программ «Сравнение проектов» осуществить:

1. Идентификацию денежного потока, генерируемого изучаемым инвестиционным проектом, с помощью графического метода.

2. Расчёт и экономическую интерпретацию показателей:

2.1. чистой приведенной стоимости  $NPV$ ;

2.2. индекса рентабельности  $PI$ ;

2.3. модифицированной внутренней нормы прибыли  $MIRR$ ;

2.4. резерва безопасности  $RS_1, RS_2$ ;

2.5. дисконтированного срока окупаемости  $DPP$ .

3. Обоснованные выводы и рекомендации о приемлемости, масштабности, эффективности, рискованности и ликвидности изучаемого инвестиционного проекта на предприятии.

4. Проверку согласованности экономических выводов по найденным значениям критериев  $NPV, MIRR, PI, DPP$ .

5. Построение по точкам графика функции  $NPV = f(r)$  по данным анализируемого инвестиционного проекта, приняв  $r = 0; 0,15; 0,16; 0,17; 0,18; 0,19; 0,20$ . Результаты представить в виде графического изображения типа графика на рис. 7.10.

По каждому пункту дать краткие экономико-математические пояснения и выводы.

## ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 7

1. Беренс В. Руководство по оценке эффективности инвестиций / В. Беренс, П. М. Хавранек; пер. с англ. – М.: Интерэксперт; ИНФРА-М, 1995. – 528 с.
2. Брігхем Ю. Фінансовий менеджмент : повний курс у 2 т. / Ю. Брігхем, Л. Гапенскі; пер. з англ. під ред. В. В. Ковальова. – СПб : Економічна школа, 2001. – 238 с.
3. Бузова И. А., Маховикова Г. А., Терехова В. В. Коммерческая оценка инвестиций / И. А. Бузова, Г. А. Маховикова, В. В. Терехова. – С.-Пб., Издательство «ПИТЕР», 2004. – 432 с.
4. Галасюк В. О конфликте критериев IRR и NPV [Электронный ресурс] – Режим доступа : <http://www.cfin.ru/finanalysis/ /invest/npvvsirr.shtml>.
5. Данилов О. Д. Інвестування : [навч. посіб.] / О. Д. Данилов, Г. М. Івашина, О. Г. Чумаченко. – Ірпінь, 2001. – 377 с.
6. Келлехер Дж. Внутренняя норма рентабельности: поучительная история [Электронный ресурс] / Келлехер Дж., МакКормак Дж. // Вестник McKinsey. – 2004. – № 3 (8). – С. 45-59. – Режим доступа : <http://www.insapov.ru/irr-history.html>
7. Ковалёв В. В. Методы оценки инвестиционных проектов : [учеб. пособ.] / В. В. Ковалев. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 144 с.
8. Корпоративный менеджмент. Энциклопедия. Внутренняя норма рентабельности (IRR) : [Электронный ресурс]. – Режим доступа <http://www.cfin.ru/encycl/irr.shtml>.
9. Корпоративный менеджмент. Энциклопедия. Модифицированная внутренняя норма рентабельности (MIRR) : [Электронный ресурс] – Режим доступа : <http://www.cfin.ru/encycl/mirr.shtml>.
10. Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов, утвержденные Министерством экономики РФ, Министерством финансов РФ, Государственным комитетом РФ по строительной, архитектурной и жилищной политике 21.06.1999 г., № ВК 477 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://invest.h11.ru/law/doc00279.shtml>
11. Методичні рекомендації з розробки бізнес-планів інвестиційних проектів : затверджені наказом Державного агентства України з інвестицій та розвитку від 31.08.2010, № 73. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://document.ua/pro-zatverdzhennja-metodichnih-rekomendacii-z-rozrobki-bizne-doc31334.html>
12. Рябых Д. Оценка эффективности проекта. NPV или IRR [Электронный ресурс] – / Д. Рябых // *Financial director*. – 2008. – № 7. Режим доступа : <http://www.fd.ru/reader2.htm?id=564#>.

13. Савчук А. В. Анализ эффективности инвестиционных проектов и экономических условий их реализации / А. В. Савчук. – Одесса : ИПРЭЭИ НАН Украины, 2000. – 176 с.
14. Савчук В. П. Анализ и разработка инвестиционных проектов : [учеб. пособ.] / В. П. Савчук, С. И. Прилипко, Е. Г. Величко. – К.: Абсолют-В, Эльга, 1999. – 304 с.
15. Стасюк В. П. Моделирование процессов инвестиционной деятельности предприятия. Модели адаптивного управления предприятием: [монография] / В. П. Стасюк. – Донецк : Юго-Восток, 2003. – С. 77-104.
16. Супрун С. Д. Оцінка ефективності інвестиційних проектів підприємств / С. Д. Супрун // Фінанси України. – 2003. – № 4. – С. 82-87.
17. Хобта В. М. Управління інвестиціями : [навч. посіб.] / В. М. Хобта. – Донецьк : ДонНТУ, 2005. – 394 с.
18. Череп А. В. Инвестознаводство : [навч. посіб.] / Череп А. В. – К.: Кондор, 2006. – 398 с.
19. Щукін Б. М. Аналіз інвестиційних проектів : [конспект лекцій] / Щукін Б. М. – К.: МАУП, 2002. – 128 с.
20. Янковий О. Г. Порівняльний аналіз критеріїв *MIRR* і *IRR* інвестиційного проекту / О. Г. Янковий / Матер. 7-ї Міжнар. наук.-практ. конф. «Сучасні технол. управл. підприємством та можлив. використ. інф. систем: стан, проблеми, перспективи». Т. 2. – Одеса, 2012, ОНУ. – С.102-105.
21. Янковий О. Г. Аналіз залежності *NPV* інвестиційного проекту від ціни залученого капіталу / О. Г. Янковий // Прикладний менеджмент та інновації. – № 2. – 2012. – С. 294-303.
22. Янковий О. Г. Критичний аналіз внутрішньої норми прибутку як показника оцінки інвестиційних проектів / О. Г. Янковий, Н. В. Мельник // Вісник соціально-економічних досліджень : зб. наук. пр. – Одеса, ОНЕУ, 2012. – № 45. – С. 196-205.
23. Янковий О. Г. Показники оцінки портфеля інвестицій підприємства / О. Г. Янковий / Матеріали 1-ї міжнар. наук.-практ. конф. «Економіка підприємства: сучасні проблеми теорії та практики», 18-19 жовт. 2012 р. – Одеса : ОНЕУ, 2012. – С. 440-441.
24. Янковий О. Г. Модифікована внутрішня норма прибутку інвестиційного проекту / О. Г. Янковий, Н. В. Мельник // Прикладной менеджмент и инвестиции. – 2012. – № 4. – С. 502-508.
25. Янковий О. Г. Методи ранжирування інвестиційних проектів / О. Г. Янковий / Актуальні соціально-економічні та правові проблеми розвитку України та її регіонів : матеріали IV міжнар. круглого стола, 8 трав. 2013 р. – Одеса, ОНУ, 2013. – С. 80-82.
26. Янковий О. Г. Оцінка інвестиційних проектів на підприємствах харчової промисловості України / О. Г. Янковий, Н. В. Мельник, В. О. Янковий // Економіка харчової промисловості. – 2013. – № 2 (18). – С. 49-53.

## 8. ФОРМИРОВАНИЕ ПОРТФЕЛЯ ИНВЕСТИЦИЙ

Содержание и структура выбранной инвестиционной деятельности на предприятии выражается через понятие инвестиционного портфеля, т.е. обоснованного набора конкретных инвестиционных проектов, принятых к реализации. Инвестиционный портфель обычно является средством достижения тактических и стратегических целей предприятия.

Формирование инвестиционного портфеля – задача со многими критериями. Она решается для планового периода, поэтому базируется на прогнозируемых оценках. Для этой задачи не существует чётко очерченных методик решения, но есть типовые процедуры, общие рекомендации и методы прогнозных расчетов.

Инвестиционный портфель, как и каждый проект, входящий в него, формируется исходя из определенных критериев: доходности; эффективности; срочности достижения инвестиционных целей; степени рискованности; ликвидности; соответствия проекта финансовым ресурсам и др. (см. главу 7).

Критерий прибыльности отражает ожидаемое увеличение стоимости капитала самого объекта инвестирования (портфель роста), например, самого предприятия в условиях осуществления реальных инвестиций, либо высоких и регулярных дивидендов на вложенный капитал (портфель дохода) при финансовом инвестировании. В качестве такого критерия может выступать чистая приведенная стоимость  $NPV$ .

Эффективность инвестиционного портфеля характеризуется уровнем доходов на 1 грн. инвестиционных расходов данного набора проектов. Это не абсолютный, а относительный критерий, роль которого могут выполнять такие показатели, как индекс рентабельности  $PI$ , модифицированная внутренняя норма прибыли  $MIRR$ .

Критерий срочности достижения инвестиционных целей определяет требования к срокам реализации инвестиций (до начала эксплуатации объекта), достижения необходимой прибыльности и окупаемости всего их набора, продолжительность эксплуатации объектов инвестиций. Срочность достижения инвестиционных целей находит своё отражение в показателе дисконтированного срока окупаемости  $DPP$  затрат портфеля инвестиций.

Степень риска инвестиционного портфеля оценивается показателем вероятности не достижения нужной доходности или вообще потери инвестированных средств. Здесь может быть применён критерий резерва безопасности набора проекта резерв безопасности проекта в абсолютном ( $RS_1$ ) и в относительном выражении ( $RS_2$ ). Кроме того, показатель  $DPP$  также может использоваться для косвенной оценки степени риска портфеля инвестиций.

Инвестиционный портфель, обеспечивающий минимальный риск потери инвестированного капитала, определяется как «консервативный», а в случае высоких показателей ожидаемой доходности инвестиций (и большого риска) портфель называется «агрессивным».

Ликвидность портфеля – возможность обратного процесса преобразования объекта инвестирования (в различных формах) снова в денежные средства. При этом, как правило, без потерь не обойтись. Объём потерь и время, необходимое для продажи объекта инвестирования, определяют уровень ликвидности инвестиционного проекта. Количественными характеристиками ликвидности портфеля инвестиций служат показатели структуры денежных потоков, генерируемых данным набором проектов, а также дисконтированный срок окупаемости  $DPP$ .

Соответствие проекта финансовым ресурсам – критерий выбора именно тех проектов, которые соответствуют собственным средствам предприятия, или привлеченным средствам, например, за счёт банковского кредита. Это вопрос объёмов инвестиций. Соотношение собственных и привлеченных средств может быть различным, но чем больше доля собственного капитала предприятия (более 50 %), тем надёжнее считается проект.

В главе 7 данного учебного пособия рассматривались вопросы обоснования применения указанных критериев на уровне отдельного конкретного инвестиционного проекта. Далее затронутая проблематика будет обсуждаться на более высоком уровне – на уровне формирования портфеля инвестиций предприятия. В частности, будет исследована возможность оценки (по уже найденным критериям отдельных инвестиционных мероприятий) таких показателей портфеля предприятия, как:

1. Длительность реализации  $n'$ .
2. Цена инвестированного капитала  $r'$ .
3. Чистая приведенная стоимость  $NPV'$ .
4. Индекс рентабельности  $PI'$ .
5. Модифицированная внутренняя норма прибыли  $MIRR'$ .
6. Уровень безопасности  $RS_1', RS_2'$ .
7. Дисконтированный срок окупаемости  $DPP'$ .
8. Приоритетность или ранг ( $Rank$ ) включения конкретных проектов.

В качестве примера, иллюстрирующего расчёты показателей 1 – 8 по критериям отдельных мероприятий, рассмотрим два проекта, образующих инвестиционный портфель предприятия. Первое мероприятие ( $A$ ) представляет собой приобретение линий по упаковке готовой продукции. Второй проект ( $B$ ) касается замены устаревшего оборудования на комплексные поточно-механизированные линии. Характеристики двух денежных потоков, генерируемые указанными мероприятиями и их совместным набором ( $A+B$ ), вместе с найденными экономическими критериями инвестиционных проектов приведены в табл. 8.1.

Очевидно, что длительность реализации портфеля инвестиций предприятия  $n'$  будет определяться длительностью наибольшего по времени проекта, т.е.

$$n' = \max(n_q), \quad q = 1, 2, \dots, s. \quad (8.1)$$

Таблица 8.1

Основные экономические характеристики и критерии двух инвестиционных проектов и их портфеля на предприятии

| Показатели                                  | Проект (A) | Проект (B) | Проект (A+B) |
|---|------------|------------|--------------|
| 1. Длительность проекта $n$ , лет           | 3          | 5          | 5            |
| 2. Цена инвестированного капитала $r$ , %   | 14         | 14         | 14           |
| Исходная инвестиция $IC_0$ , тис. грн.      | 580        | 760        | 1340         |
| Притоки денежных средств $PV_k$ , тис. грн. |            |            |              |
| 1-й год                                     | 500        | 40         | 540          |
| 2-й год                                     | 190        | 125        | 315          |
| 3-й год                                     | 25         | 280        | 305          |
| 4-й год                                     | -          | 345        | 345          |
| 5-й год                                     | -          | 490        | 490          |
| 3. $NPV$ , тис. грн.                        | 21,67      | 19,02      | 40,69        |
| 4. $PI$ , %                                 | 103,74     | 102,50     | 103,04       |
| 5. $MIRR$ , %                               | 15,40      | 14,57      | 14,68        |
| 6. $MS$                                     |            |            |              |
| а) абсолютный $MS_1$ , п. п.                | 1,4        | 0,57       | 0,68         |
| б) относительный $MS_2$ , %                 | 10,02      | 4,04       | 4,88         |
| 7. $DPP$ , лет                              | 1,97       | 4,93       | 4,84         |

Данные табл. 8.1 показывают, что  $n_A = 3$ ,  $n_B = 5$ , следовательно, длительность реализации портфеля инвестиций предприятия  $n'$  будет определяться длительностью наибольшего по времени проекта, поэтому согласно формулы (8.1)  $n' = 5$  лет.

Цена инвестированного капитала всего набора планируемых производственно-финансовых мероприятий  $r'$ , вообще говоря, зависит от цен инвестированного капитала отдельных проектов  $r_q$  ( $q = 1, 2, \dots, s$ ). По аналогии с формулой (7.1) цена капитала портфеля инвестиций предприятия обычно находится как средняя арифметическая взвешенная из цен капиталов отдельных проектов, вошедших в портфель:

$$r' = \sum_{q=1}^s r_q d_q, \quad (8.2)$$

где  $r_q$  – цена капитала  $q$ -го проекта;

$d_q$  – удельный вес инвестированного капитала  $q$ -го проекта в общей сумме инвестированного капитала портфеля предприятия.

Однако, поскольку формирование инвестиционного портфеля осуществляется внутри одного конкретного предприятия, то будем считать, что все его потенциально приемлемые проекты имеют одинаковую

(среднюю) цену капитала, т.е.  $r_1 = r_2 = \dots = r_s = r'$ . Принятое допущение вполне корректно, т.к. не меняет общей суммы инвестированного капитала портфеля предприятия. В обсуждаемом примере это условие выполняется, т.к.  $r_1 = r_2 = r' = 14\%$  (см. табл. 8.1).

Позитивным следствием сделанного допущения является тот факт, что оно обеспечивает выполнение свойства аддитивности показателя  $NPV$ , которое позволяет суммировать значения критериев  $NPV$  по отдельным инвестиционным проектам и использовать эту агрегированную величину для оценки чистой приведенной стоимости портфеля инвестиций предприятия. Это свойство вытекает из аддитивности слагаемых  $PV$  и  $IC$ , входящих в формулу расчёта  $NPV$  (см. выражения (7.3), (7.5), (7.6)). Свойство аддитивности означает, например, что для двух независимых проектов  $A$  и  $B$  справедливо соотношение  $NPV(A) + NPV(B) = NPV(A+B) = NPV'$ .

Обобщая данное свойство на множество из  $s$  проектов с  $r_q = const$  инвестиционного портфеля предприятия, можно записать

$$NPV(A_1 + A_2 + \dots + A_s) = \sum_{q=1}^s NPV(A_q) = NPV'. \quad (8.3)$$

В данном примере (см. табл. 8.1)  $NPV(A) = 21,67$  тыс. грн.;  $NPV(B) = 19,02$  тыс. грн.;  $NPV(A+B) = 40,69$  тыс. грн. и соотношение (8.3) выполняется. Следовательно, чистая приведенная стоимость портфеля инвестиций  $NPV' = 21,67 + 19,02 = 40,69$  (тыс. грн.), что совпадает со значением, приведенным в табл. 8.1.

В отличие от показателя  $NPV$ , индекс рентабельности  $PI$  является не аддитивным критерием, что вытекает из сущности любой относительной величины. Это означает, что для  $s$  независимых проектов соотношение типа (8.3) не выполняется. Однако, исходя из формулы (7.8) индекса рентабельности (см. главу 7), и аддитивности величин  $PV$  и  $IC$  для двух проектов с одинаковой ценой инвестированного капитала  $r$ , можно записать:

$$PI(A+B) = \frac{PV(A+B)}{IC(A+B)} = \frac{PV(A)+PV(B)}{IC(A)+IC(B)} = \frac{PI(A) \cdot IC(A) + PI(B) \cdot IC(B)}{IC(A) + IC(B)} = PI'. \quad (8.4)$$

Выражение (8.4) даёт основание утверждать, что индекс рентабельности портфеля из  $s$  независимых инвестиционных проектов на предприятии можно представить как среднюю арифметическую взвешенную из индексов рентабельности отдельных проектов  $PI_q$ . Причём в качестве статистических весов средней величины выступают дисконтированные инвестиционные затраты по каждому проекту  $IC_q$ :

$$PI(A_1 + A_2 + \dots + A_s) = \overline{PI} = \sum_{q=1}^s PI_q d_q = PI', \quad (8.5)$$

где  $d_q$  – удельный вес дисконтированных инвестиционных затрат  $q$ -го проекта в общей сумме дисконтированных затрат портфеля инвестиций предприятия.

Таким образом, формула (8.5) позволяет достаточно просто рассчитать величину индекса рентабельности  $PI'$  для инвестиционного портфеля предприятия. Проверим её на данных табл. 8.1:

$$PI(A+B) = \overline{PI} = \frac{PI(A) \times IC(A) + PI(B) \times IC(B)}{IC(A) + IC(B)} = \frac{103,74 \times 580 + 102,5 \times 760}{580 + 760} = 103,04 \%,$$

или 1,0304, что полностью совпадает с расчётом, приведенным в табл. 8.1.

Единственным существенным недостатком показателя  $MIRR$ , впрочем, как и критерия  $PI$ , считается его не аддитивность, которая затрудняет определение величины модифицированной внутренней нормы прибыли портфеля инвестиций предприятия. Однако здесь в определённой степени может помочь вторая формула из соотношения (7.15), из которой следует

$$\begin{aligned} MIRR(A_1 + A_2 + \dots + A_s) &= (1 + r') \sqrt[n]{PI(A_1 + A_2 + \dots + A_s)} - 1 = \\ &= (1 + r') \sqrt[n]{PI'} - 1 = MIRR'. \end{aligned} \quad (8.6)$$

В данном примере  $r' = 14 \%$  или 0,14;  $n = 5$ ;  $PI' = 103,04 \%$  или 1,0304. Подставляя эти значения в формулу (8.6), получим:

$$MIRR' = (1 + 0,14) \sqrt[5]{1,0304} - 1 = 0,1468,$$

или 14,68 %, что непосредственно совпадает со значением  $MIRR(A+B)$ , приведенным в табл. 8.1.

Поскольку уровень безопасности портфеля инвестиций в абсолютном ( $RS_1'$ ) и относительном ( $RS_2'$ ) выражении является производным от величин  $MIRR'$  и  $r'$  показателем, то согласно формулам (7.16), (7.17) можно записать:

$$\begin{aligned} RS_1' &= MIRR' - r' = 14,68 - 14 = 0,68 \text{ (п.п.)} \\ RS_2' &= \frac{MIRR' - r'}{r'} \times 100 = \frac{14,68 - 14}{14} \times 100 = 4,88 \%, \end{aligned}$$

что полностью совпадает с данными, приведенными в табл. 8.1.

Недостатком показателя  $DPP$ , который присущ всем относительным критериям эффективности инвестиционных проектов, является его не аддитивность, что затрудняет расчёт дисконтированного срока окупаемости инвестиционного портфеля предприятия  $DPP'$ . Очевидно, что указанный параметр показывает минимальное число лет, на протяжении которых все инвестиционные расходы будут полностью погашены кумулятивными поступлениями от всех исследуемых проектов портфеля.

Если дисконтированные притоки денежных средств распределены по годам примерно равномерно, то  $DPP'$  может быть рассчитан прямым делением общей суммы инвестиционных затрат  $\Sigma(IC)$  на величину годовых поступлений  $\Sigma(PV)$ , обусловленных всеми проектами. В этом случае  $DPP'$  является величиной, которая прямо зависит от срока осуществления

портфеля инвестиций, и обратно от его индекса рентабельности, т.е. справедливо соотношение

$$DPP' \approx n'/PI'. \quad (8.7)$$

В обсуждаемом примере притоки денежных средств изучаемого портфеля инвестиций колеблются по годам от 305 до 540 тыс. грн. (см. табл. 8.1), т.е. распределены примерно равномерно, поэтому для приближённого расчёта его дисконтированного срока окупаемости можно воспользоваться формулой (8.7), учитывая, что  $n' = 5$  лет;  $PI' = 1,0304$ . В результате расчётов получим:

$$DPP' = 5/1,0304 = 4,85 \text{ (года)},$$

что несущественно отличается от значения  $DPP'$ , приведенного в табл. 8.1 (4,84 года).

Как было показано выше, приемлемые инвестиционные проекты, входящие в портфель инвестиций предприятия, описываются набором количественных экономических критериев –  $NPV$ ,  $PI$ ,  $MIRR$ ,  $RS$ ,  $DPP$ . На предприятии часто возникает задача расположить производственно-финансовые мероприятия, входящие в портфель, в порядке первоочередности их осуществления, т.е. проранжировать по величине  $Rank$ . Данная задача связана, прежде всего, с дефицитом собственных и привлечённых средств для реализации запланированных на предприятии инвестиционных проектов и необходимостью выявить наиболее первостепенные и важные из них.

В простейшей ситуации, когда число изучаемых альтернативных проектов не большое, задача определения их приоритетности с позиций чистой приведенной стоимости может быть успешно решена, минуя расчёты  $NPV$ , с помощью парного сравнения графиков функций  $NPV = f(r)$ .

Так, если для двух альтернативных проектов  $C$  и  $D$  графическое изображение этих функций имеет вид, представленный на рис. 8.1, то вывод о целесообразности их внедрения практически очевиден.

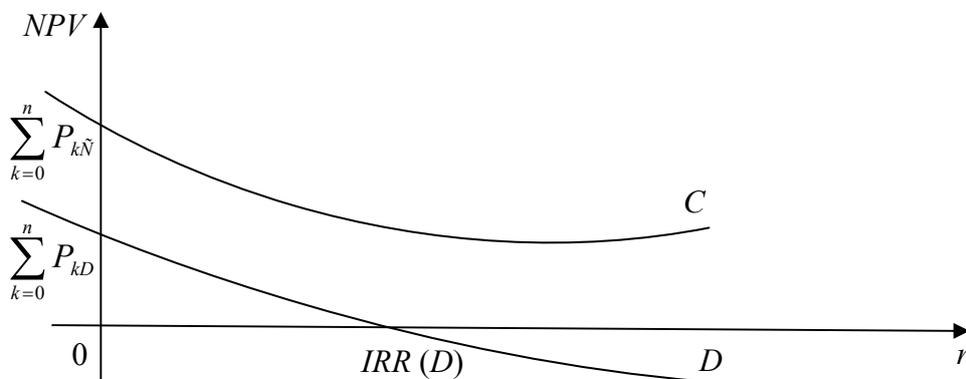


Рис. 8.1. Непересекающиеся графики функций  $NPV = f(r)$  для двух инвестиционных проектов

Поскольку при любых значениях цены инвестированного капитала  $r$   $NPV(C) > 0$  (рис. 8.1), в отличие от  $NPV(D)$ , которая положительна лишь на интервале  $(0, IRR(D))$ , и при этом выполняется неравенство  $NPV(C) > NPV(D)$ , то, безусловно, следует отдать предпочтение проекту  $C$ .

Ситуация несколько усложняется при пересечении графиков функций  $NPV = f(r)$  для двух альтернативных инвестиционных проектов (рис. 8.2). В этом случае их оценки уже не столь очевидны и однозначны.

Если схемы денежных потоков, генерируемых двумя инвестиционными проектами  $E$  и  $G$ , таковы, что графики их функций  $NPV = f(r)$  пересекаются в так называемой точке Фишера с координатами  $(NPV_F, r_F)$ , для которой  $NPV_F = NPV(E) = NPV(G)$ , как это представлено на рис. 8.2.

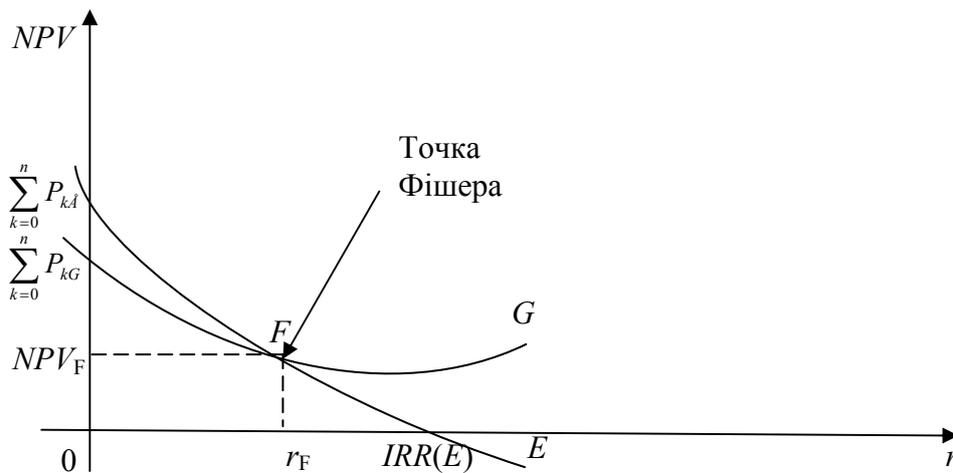


Рис. 8.2. Графики функций  $NPV = f(r)$  для двух инвестиционных проектов при наличии точки Фишера

Визуальный анализ графика на рис. 8.2 показывает, что ось абсцисс может быть разделена на три интервала:

- 1)  $0 < r < r_F$  – оба проекта приемлемы, однако проект  $E$  является предпочтительным;
- 2)  $r_F < r < IRR(E)$  – также оба проекта приемлемы, однако проект  $G$  является предпочтительным;
- 3)  $IRR(E) < r$  – проект  $G$  всё еще приемлем, а проект  $E$  должен быть отвергнут.

Главным свойством точки Фишера является то, что в ней  $NPV(E) = NPV(G)$ , а при её переходе инвестиционные проекты изменяют свою приоритетность по показателю  $NPV$ . Действительно, слева от  $r_F$  на рис. 8.2  $NPV(E) > NPV(G)$ , а справа от  $r_F$   $NPV(E) < NPV(G)$ .

Поэтому, согласно формуле (7.9), точка Фишера находится при условии, что уравнение

$$\sum_{k=0}^u \frac{P_k}{(1+r_F)^k} = \sum_{l=0}^t \frac{P_l}{(1+r_F)^l} \quad (8.8)$$

имеет хотя бы один корень. Здесь  $P_k$ ,  $P_l$  – соответствующие денежные потоки проектов  $E$  и  $G$ , продолжительность которых  $u$  и  $t$  лет.

Из выражения (8.8) вытекает соотношение

$$\sum_{k=0}^u \frac{P_k}{(1+r_F)^k} - \sum_{l=0}^t \frac{P_l}{(1+r_F)^l} = 0. \quad (8.8)$$

Это означает, что с учётом уравнения (7.8) величину  $r_F$  на рис. 8.2 можно рассматривать как внутреннюю норму прибыли  $IRR$  некоторого нового инвестиционного проекта ( $E - G$ ), денежный поток которого равен разности соответствующих притоков и оттоков денежных средств проектов  $E$  и  $G$ , а его продолжительность – величине  $\max(u; t)$ .

Согласно приведенному в главе 7 свойству 6 функции  $NPV = f(r)$  (см. рис. 7.6) для симметричного мероприятия ( $G - E$ ) величина  $IRR = r_F$  не изменяется.

Очевидно, что в случае неординарности денежного потока нового инвестиционного проекта ( $E-G$ ) или ( $G-E$ ) уравнение (8.8) может иметь не один, а несколько корней. Отсюда следует вывод о принципиальной возможности нахождения нескольких точек Фишера. Кроме того, уравнение (8.8) может вообще не иметь действительных корней. Тогда точка Фишера не наблюдается (см. рис. 8.1).

В табл. 8.2 приведена исходная информация по инвестиционному проекту ( $B-A$ ), а также результаты расчёта точки Фишера для проектов  $A$  и  $B$  из предыдущего примера.

Таблица 8.2

Результаты расчёта точки Фишера для проектов  $A$  и  $B$

| Показатели   | Проект (A) | Проект (B) | Проект (B-A) |
|--|------------|------------|--------------|
| 1. Длительность проекта $n$ , лет                  | 3          | 5          | 5            |
| 2. Цена инвестированного капитала $r$ , %          | 14         | 14         | 14           |
| Исходная инвестиция $IC_0$ , тис. грн.             | 580        | 760        | 180          |
| Притоки денежных средств $PV_k$ , тис. грн.        |            |            |              |
| 1-й год  | 500        | 40         | -460         |
| 2-й год  | 190        | 125        | -65          |
| 3-й год  | 25         | 280        | 255          |
| 4-й год  | -          | 345        | 345          |
| 5-й год  | -          | 490        | 490          |
| 3. $NPV$ , тис. грн.                               | 21,67      | 19,02      | -2,65        |
| 4. $PI$ , %  | 103,74     | 102,50     | 98,53        |
| 5. $IRR$ , %                                       | 17,27      | 14,76      | 13,86        |
| 6. Точка Фишера $r_F$ , для проектов $A$ и $B$ , % | 13,86      | 13,86      | -            |
| 7. $NPV_F$ , тис. грн.                             | 22,65      | 22,65      | -            |
| 8. Сума $P_k$ , тис. грн.                          | 135        | 520        | 385          |

На основе экономических характеристик табл. 8.2 был осуществлен графический анализ исследуемых инвестиций (рис. 8.3).

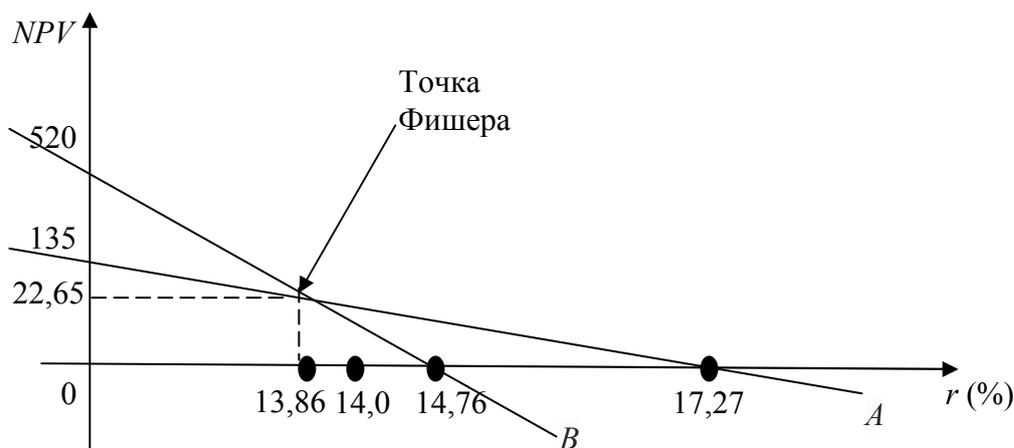


Рис. 8.3. Графики функций  $NPV = f(r)$  инвестиционных проектов  $A$  и  $B$

Вся ось абсцисс на рис. 8.3 может быть условно разбита на несколько сегментов:

1.  $0 \leq r < r_F = 13,86\%$ . Здесь оба проекта приемлемы и  $NPV(A) < NPV(B)$ .
2. В точке  $r_F = 13,86\%$  выполняется равенство  $NPV(A) = NPV(B) = 22,65$  тыс. грн.
3.  $r_F < r < IRR(B) = 14,76\%$ . На этом отрезке, как и ранее, оба проекта приемлемы, но  $NPV(A) > NPV(B)$ . В точке  $IRR(B) = 14,76\%$  мероприятие  $B$  обеспечивает нулевую прибыль, т.к.  $NPV(B) = 0$ .
4.  $IRR(B) < r < IRR(A) = 17,27\%$ . Проект  $A$  остаётся приемлемым:  $NPV(A) > 0$ , а проект  $B$  становится убыточным:  $NPV(B) < 0$ . В точке  $IRR(A) = 17,27\%$  мероприятие  $A$  приносит нулевую прибыль, поскольку  $NPV(A) = 0$ .
4.  $IRR(A) < r < \infty$ . Оба проекта становятся неприемлемыми, т.к.  $NPV(A) < 0$ ,  $NPV(B) < 0$ .

В данном случае цена инвестированного  $r = 14\%$  попадает во второй сегмент, поэтому мероприятие  $A$  обеспечивает больший прирост прибыли исследуемому предприятию. Информация табл. 8.1 свидетельствует о более высокой эффективности инвестиции в приобретение линий упаковки готовой продукции ( $15,4 = MIRR(A) > MIRR(B) = 14,57$ ) и меньшей рискованности по сравнению с заменой устаревшего оборудования. Показатели абсолютного и относительного резервов безопасности первого проекта 1,4 п. п. и 10,0 % против 0,6 п. п. и 4,0 % второго.

Кроме того, ликвидность мероприятия  $A$  намного выше мероприятия  $B$ . Это вытекает из сопоставления дисконтированных сроков их окупаемости:  $1,97 = DPP(A) < DPP(B) = 4,93$ , а также из анализа структуры притоков денежных средств. Для инвестиционного проекта  $A$  характерно покрытие затрат исходной инвестиции в первые годы осуществления запланированного мероприятия, в то время как для проекта  $B$  наблюдается обратная картина.

Поэтому следует порекомендовать руководству изучаемого предприятия отдать предпочтение приобретению линий по упаковке готовой продукции – проекту *A*, который является лучшим по всем экономическим критериям оценки инвестиций. Что же касается замены устаревшего оборудования на комплексные поточно-механизированные линии, то инвестиционный проект *B* может стать достаточно привлекательным в условиях привлечения более дешёвых источников финансирования. На рис. 8.3 видно, что на отрезке  $0 < r < 13,86 \%$ , т.е. при использовании дешёвого инвестированного капитала, прибыль от внедрения производственного мероприятия *B* значительно превышает аналогичный показатель проекта *A*.

В ситуации, когда формируемый портфель инвестиций предприятия состоит из достаточно большого числа запланированных производственно-финансовых мероприятий ( $s > 5$ ), или в случае не столь явного преимущества одного инвестиционного проекта по сравнению с другими, для решения задачи оценки их приоритетности используются многомерные статистические методы. К ним относятся как традиционные (метод главных компонент, таксономический анализ), так и современные подходы (метод нечётких множеств и др.).

В данной главе будет рассмотрено использование таксономического анализа или метода таксономии (от греч. слов *táxis* – расположение, порядок и *nómos* – закон) применительно к решению задачи оценки приоритетности инвестиционных проектов. Как отмечалось выше, указанная задача на предприятии обычно связана с дефицитом инвестируемых средств и заключается в ранжировании проектов по их важности с учётом сразу нескольких экономических параметров предполагаемых мероприятий.

Пусть в плановом периоде на некотором предприятии намечается осуществить несколько инвестиционных проектов, направленных на совершенствование его производственно-финансовой деятельности. При этом предприятие не располагает достаточными собственными средствами, чтобы профинансировать большинство из них. Поэтому проблема определения приоритетности инвестиционных мероприятий стоит особо актуально перед его экономическими службами.

По каждому из потенциально полезных проектов были рассчитаны количественные значения четырёх основных критериев оценки обсуждаемых инвестиций (*NPV*, *MIRR*, *RS<sub>1</sub>*, *DPP*) и отобраны лишь 8 приемлемых с экономической точки зрения мероприятий (см. главу 7).

Поскольку на предприятии планировалось финансирование всех без исключения проектов на основе денежных средств по цене капитала  $r' = 12,6 \%$  ( $r_q = const$ ), то с учётом формулы (7.16) выполняется следующее соотношение:

$$MIRR = r' + RS_1 = 12,6 + RS_1. \quad (8.9)$$

Это означает, что в данном случае показатели *MIRR* и *RS<sub>1</sub>* связаны между собой функциональной зависимостью и несут только одну порцию

информации о приоритетности исследуемых инвестиционных проектов. Поэтому было решено рассматривать только один из них, а именно абсолютный резерв безопасности проекта  $RS_1$ . Исходная информация представлена в табл. 8.3. Определим приоритетность данных 8 инвестиционных проектов на предприятии с помощью таксономического анализа.

Таблица 8.3

Значения основных критериев оценки  
инвестиционных проектов на предприятии

| Номер проекта | $NPV$ , тыс. грн. | $RS_1$ , п. п. | $DPP$ , лет |
|---------------|-------------------|----------------|-------------|
| 1             | 24,53             | 1,1            | 6,7         |
| 2             | 5,68              | 4,9            | 2,8         |
| 3             | 32,21             | 0,5            | 7,1         |
| 4             | 13,95             | 2,7            | 3,5         |
| 5             | 19,11             | 0,9            | 4,2         |
| 6             | 4,56              | 3,8            | 2,2         |
| 7             | 8,72              | 3,1            | 2,6         |
| 8             | 30,25             | 0,3            | 6,5         |

Обсудим сначала теоретические основы применения метода таксономии в экономических исследованиях, которые базируются на следующих положениях.

1. Исследуемое явление (в данной задаче это приоритетность инвестиционного проекта) рассматривается как скрытое, латентное свойство множества из  $s$  объектов, которое невозможно непосредственно измерить.

2. Допустима лишь количественная оценка уровня изучаемого латентного свойства на основе значений  $m$  признаков-симптомов, роль которых в данной задаче играют величины трёх отобранных критериев  $NPV$ ,  $RS_1$ ,  $DPP$  ( $m = 3$ ) для каждого из  $s$  исследуемых объектов – инвестиционных проектов ( $s = 8$ ).

3. Приоритетность или ранг каждого проекта определяется его расстоянием или сходством с некоторой идеальной (реальной) точкой  $m$ -мерного пространства (по числу признаков-симптомов), которая называется *эталон*. Координаты эталона отвечают наиболее желательным представлениям о значении признаков-симптомов (показателей  $NPV$ ,  $RS_1$ ,  $DPP$ ) для каждого объекта (инвестиционного проекта).

4. Координаты эталона устанавливаются на базе разделения всех признаков-симптомов (критериев  $NPV$ ,  $RS_1$ ,  $DPP$ ) на стимуляторы, рост которых желателен, и дестимуляторы, величина которых должна снижаться.

В математико-статистической литературе рассматриваются два главных подхода к проведению ранжирования объектов с помощью таксономического анализа: классический, основанный на сходстве объектов с эталоном, и модифицированный, базирующийся на расстоянии до *антиэталона* – точки нижнего полюса. Доказано, что чем меньше сходство исследуемого объекта с эталоном, тем больше вероятность ошибочного ранжирования и, наоборот.

Иными словами, классический алгоритм таксономического анализа точнее определяет ведущие места (объекты-лидеры) и ошибается в ранжировании последних мест объектов-аутсайдеров. Модифицированный алгоритм наоборот: обеспечивает более точные результаты при идентификации объектов-аутсайдеров и часто неверно определяет объекты-лидеры.

Исходя из приведенного теоретического положения, в данной главе будет применяться в качестве инструмента ранжирования инвестиционных проектов именно классический вариант таксономического анализа, который обеспечивает наиболее точное решение поставленной задачи. В самом деле, именно объективное выявление первоочередных инвестиционных мероприятий на предприятии представляется наиболее важным и значимым.

Сущность классического варианта таксономии приоритетности инвестиционных проектов заключается в выполнении следующих основных этапов (рис. 8.4).

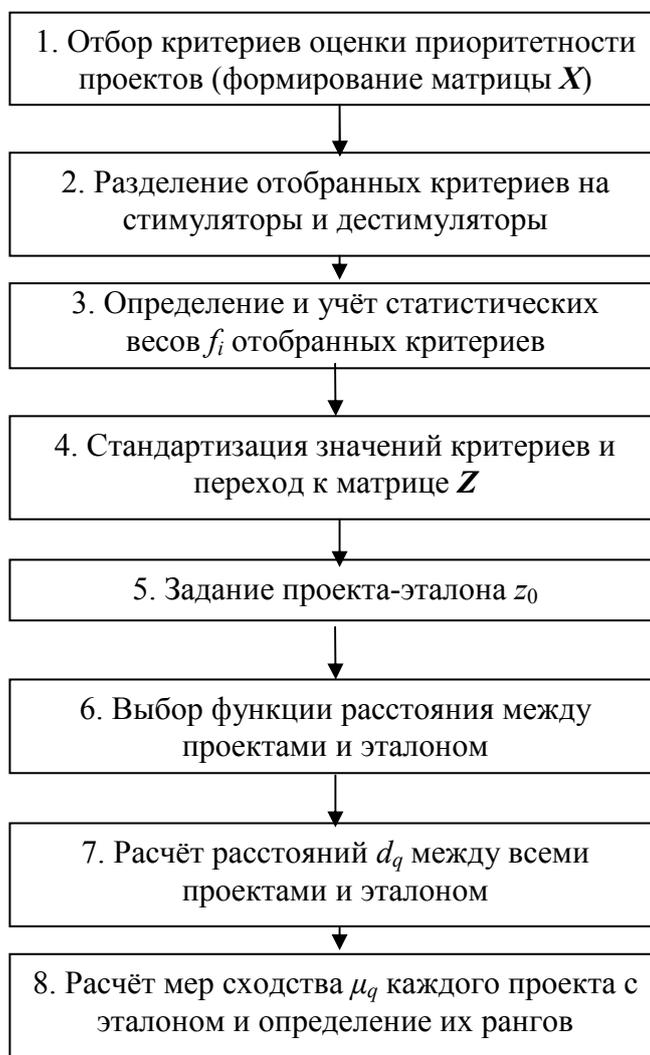


Рис. 8.4. Блок-схема классического алгоритма таксономического анализа приоритетности инвестиционных проектов

На первом этапе с целью обеспечения обоснованности многомерной статистической процедуры необходимо применять самые важные признаки-симптомы (критерии), которые наиболее адекватно и точно характеризуют уровень исследуемого латентного свойства. В данной задаче все три показателя приоритетности инвестиционного проекта ( $NPV$ ,  $RS_1$ ,  $DPP$ ) являются главными, решающими (см. главу 7).

Введём следующие обозначения:

$q$  – номер исследуемого проекта,  $q = 1, 2, \dots, s$ ;

$i$  – номер изучаемого критерия,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;

$x_{qi}$  – значение  $i$ -го критерия у  $q$ -го проекта.

Тогда исходная информация обо всех значениях экономических критериев по всем проектам может быть представлена в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1i} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{q1} & x_{q2} & \dots & x_{qi} & \dots & x_{qm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{si} & \dots & x_{sm} \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

размера  $s \times m$ . Строки этой матрицы соответствуют отдельным проектам, а столбцы – отдельным критериям. Очевидно, что проекты (векторы-строки) можно рассматривать как точки некоторого признакового пространства.

При этом в отбор следует стремиться включать не только абсолютные признаки-симптомы (такие, как  $NPV$ ), но и относительные показатели, которые наряду с масштабностью инвестиционных проектов характеризуют также и другие их свойства, прежде всего, степень эффективности, риска, ликвидности (например,  $RS_1$ ,  $DPP$  и др.).

В данном примере на первом этапе таксономического анализа приоритетности инвестиционных проектов на базе табл. 8.3 была сформирована матрица исходных данных  $X$ , размера  $8 \times 3$ :

$$X = \begin{pmatrix} 24,53 & 1,1 & 6,7 \\ 5,68 & 4,9 & 2,8 \\ 32,21 & 0,5 & 7,1 \\ 13,95 & 2,7 & 3,5 \\ 19,11 & 0,9 & 4,2 \\ 4,56 & 3,8 & 2,2 \\ 8,72 & 3,1 & 2,6 \\ 30,25 & 0,3 & 6,5 \end{pmatrix}$$

В качестве ранжируемых объектов при этом выступали инвестиционные проекты на предприятии ( $n = 8$ ), а в качестве признаков-симптомов – критерии их экономической оценки  $NPV$ ,  $RS_1$ ,  $DPP$  ( $m = 3$ ).

На втором этапе осуществлялось разделение выбранных показателей на стимуляторы и дестимуляторы. Такое разделение необходимо для

правильного задания эталона для исследуемых объектов – инвестиционных проектов. Суть данного этапа состоит в том, что на базе соответствующей теории (в данном случае на основе теории инвестирования) следует чётко определить, рост каких показателей является желательным, а каких – представляется негативным с точки зрения оцениваемого латентного явления.

Исходя из экономической сущности выбранных критериев (см. главу 7) было установлено, что первые два показателя  $NPV$ ,  $RS_1$  относятся к стимуляторам, т.к. чем выше предполагаемая прибыль (прирост капитала предприятия) и резерв безопасности инвестиционного проекта, тем приоритетнее считается рассматриваемое мероприятие. А третий критерий  $DPP$  относится к дестимуляторам, поскольку он характеризует ликвидность и рискованность проекта: меньшему значению дисконтированного срока окупаемости соответствует более высокая ликвидность и меньший риск невозвращения инвестированных средств.

На третьем этапе алгоритма происходит определение статистических весов  $f_i$  отобранных ранее критериев оценки инвестиционных проектов. Данный этап исследования предполагает дифференциацию показателей  $NPV$ ,  $RS_1$ ,  $DPP$  по их роли в формировании уровня приоритетности инвестиционных проектов предприятия путем умножения установленных  $f_i$  на соответствующие столбцы матрицы исходных данных  $X$ .

На основе практического опыта, экономической теории или с учётом целевых установок, которые менеджеры в области инвестирования получают со стороны собственников предприятия, довольно часто появляется необходимость отразить различную роль отдельных критериев в процессе ранжирования инвестиционных проектов по уровню их приоритетности.

Например, в условиях установки желаемой максимизации потенциальной эффективности проектов и минимизации их рискованности следует предпочтительные значения подобрать для весов  $f_2$ ,  $f_3$ , тем самым усиливая важность показателей  $RS_1$  и  $DPP$  при определении приоритетности проектов. Если же необходимо повысить роль масштабных проектов в будущем инвестиционном портфеле предприятия, то целесообразен рост веса  $f_1$  по сравнению с остальными. В данном случае усиливается значимость критерия  $NPV$ .

При реализации любой стратегии выдвигается следующее условие: сумма всех статистических весов равна единице. С учётом мирового опыта применения дисконтированных показателей оценки инвестиционных проектов, в данном примере предлагается применять такие статистические веса трех выбранных критериев:  $f_1 = 0,5$ ;  $f_2 = 0,3$ ;  $f_3 = 0,2$ .

Это означает, что при определении приоритетности отдельных проектов инвестиций на исследуемом предприятии наибольший удельный вес будет иметь показатель чистой приведенной стоимости запланированного мероприятия, на втором месте по важности будет стоять его резерв безопасности, и на последнем – дисконтированный срок окупаемости. Так,

важность чистой приведенной стоимости проектов оценивается почти в 1,7 раза выше их безопасности, и в 2,5 раза выше их ликвидности.

Отсюда, матрица исходных данных  $X$  с учетом статистических весов признаков-симптомов имеет такой окончательный вид:

$$X = \begin{pmatrix} 12,265 & 0,33 & 1,34 \\ 2,84 & 1,47 & 0,56 \\ 16,105 & 0,15 & 1,42 \\ 6,975 & 0,81 & 0,70 \\ 9,555 & 0,27 & 0,84 \\ 2,28 & 1,14 & 0,44 \\ 4,36 & 0,93 & 0,52 \\ 15,125 & 0,09 & 1,30 \end{pmatrix}$$

Здесь все значения первого столбца исходной матрицы  $X$  умножены на 0,5; второго столбца – на 0,3; третьего столбца – на 0,2.

Стандартизация значений признаков-симптомов и переход к матрице стандартизированных данных  $Z$  осуществляется на четвертом этапе процедуры. Его задача заключается в нивелировании влияния единиц измерения показателей  $NPV$ ,  $RS_1$ ,  $DPP$  на результаты таксономического анализа. Дело в том, что признаки-симптомы, вообще говоря, имеют различные единицы измерения – натуральные, денежные, трудовые и т.д. Изменение масштаба их измерения не должно оказывать серьёзного влияния на результаты ранжирования объектов. Для этого переменные обычно приводятся к одному безразмерному виду путём различных преобразований. Наиболее распространённым способом таких преобразований является *стандартизация* признаков-симптомов с помощью их *центрирования* и *нормирования* по следующей формуле:

$$z_{qi} = \frac{x_{qi} - \bar{x}_i}{\sigma_i}. \quad (8.11)$$

Центрирование представляет собой вычитание из каждого значения данного признака-симптома  $x_{qi}$  по всем объектам совокупности его среднего значения  $\bar{x}_i$ . При этом средняя арифметическая преобразованных значений признака становится равной нулю. Геометрически данное преобразование равносильно переносу соответствующих осей координат вправо (влево), вверх (вниз) на величину среднего значения  $\bar{x}_i$ . В результате точка «ноль» перемещается в центр изучаемой совокупности объектов.

Под нормированием понимается деление исходных значений признака на некоторое постоянное число, обычно на стандартное отклонение  $\sigma_i$ . Геометрически нормирование означает сжатие (при  $\sigma_i > 1$ ) или растяжение (при  $\sigma_i < 1$ ) «облака» точек в признаковом пространстве (рис. 8.5).

Стандартизация признаков-симптомов позволяет избавиться от масштаба их измерения, приводит все данные к одному порядку. При

нормальном распределении признаков-симптомов диапазон изменения стандартизованных значений составляет область от -3 до 3.



Рис. 8.5. Геометрическая интерпретация стандартизации признаков

Легко показать, что для стандартизованных признаков-симптомов справедливы соотношения:

$$\bar{z}_i = 0, \sigma_i^2 = \sigma_i = 1. \quad (8.12)$$

Таким образом, на четвёртом этапе процедуры в результате предварительной обработки исходных данных путём их стандартизации матрица  $X$  приводится к следующему виду:

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1i} & \dots & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2i} & \dots & z_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{q1} & z_{q2} & \dots & z_{qi} & \dots & z_{qm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{s1} & z_{s2} & \dots & z_{si} & \dots & z_{sm} \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

Полученная матрица имеет ту же размерность ( $s \times m$ ), что и матрица  $X$ , и служит отправной точкой большинства многомерных методов. Так же, как и в матрице  $X$ , строки матрицы  $Z$  соответствуют отдельным объектам, а столбцы – отдельным признакам-симптомам.

Стандартизация значений критериев по формуле (8.11) и переход к матрице  $Z$  осуществляется автоматически в любом модуле системы программ *STATISTICA*. В результате расчётов на персональном компьютере получена следующая матрица стандартизованных значений трёх критериев для исследуемых инвестиционных проектов:

$$Z = \begin{pmatrix} 0,6578 & -0,7950 & 1,1159 \\ -1,0756 & \mathbf{1,5995} & -0,8183 \\ \mathbf{1,3642} & -0,9291 & 1,3142 \\ -0,3151 & 0,3352 & -0,4712 \\ 0,1594 & -0,6992 & -0,1240 \\ -1,1791 & 0,9674 & \mathbf{-1,1159} \\ -0,7961 & 0,5651 & -0,9175 \\ 1,1839 & -1,0440 & 1,0166 \end{pmatrix}$$

Все значения матрицы  $Z$ , которая имеет ту же размерность, что и матрица  $X$  ( $8 \times 3$ ), свободны от единиц измерения и находятся в пределах от -2 до 2. При этом легко убедиться в том, что сумма  $z_i$  по столбцу равна нулю, а дисперсия – единице, т.е. свойства (8.12) выполняются.

На пятом этапе на основе разделения отобранных признаков-симптомов ( $NPV$ ,  $RS_1$ ,  $DPP$ ) на стимуляторы и дестимуляторы задаются координаты эталона. В качестве эталона принимается реальная или условная точка в многомерном признаковом пространстве, координаты которой характеризуют наилучшие (с учётом разделения переменных на стимуляторы и дестимуляторы) свойства инвестиционных проектов предприятия, попавших в отбор. Эталон отражает максимально возможный, потенциальный уровень латентного показателя (приоритетности проекта) и служит своеобразным ориентиром, базой сравнения для всех точек исследуемой совокупности.

Возможны различные методы задания эталона:

- 1) на основе значений критериев данного набора инвестиционных проектов;
- 2) на основе значений критериев других наборов инвестиционных проектов.

В первом случае для стимуляторов координаты эталонных значений определяются так:

$$z_{0i} = \max_q z_{qi}, \quad (8.14)$$

а для дестимуляторов:

$$z_{0i} = \min_q z_{qi} \quad \text{и} \quad z_{0i} = 0. \quad (8.15)$$

Во втором случае в качестве эталонных значений принимаются, например, достижения по данным критериям подобных проектов предприятий других отраслей, регионов. В обсуждаемой задаче задание проекта-эталона осуществлялось на основе значений критериев совокупности инвестиционных проектов данного предприятия, т.е. по матрице  $Z$  в соответствии с формулами (8.14), (8.15). В результате их применения определился проект-эталон со следующими координатами:  $z_0(1,3642; 1,5995; -1,1159)$ , которые выделены жирным шрифтом в матрице  $Z$ .

Это условная точка в трёхмерном пространстве критериев, поскольку наибольшие значения  $NPV$  и  $RS_1$  принадлежат третьему и второму проектам, а наименьшее значение  $DPP$  – шестому мероприятию. Эталон рассматривается как дополнительный  $(s+1)$ -й объект изучаемой совокупности многомерных объектов. В данной задаче – это условный девятый инвестиционный проект исследуемого предприятия.

На шестом этапе процедуры происходит выбор функции (метрики) для измерения расстояния между всеми проектами и эталоном. При этом обычно используют степенные метрики, представленные в табл. 8.4.

Таблица 8.4

**Метрики, применяемые в таксономическом анализе**

| Название метрики                                 | Формула  |
|--|--|
| 1. Линейное (городских кварталов, манхеттенское) | $d_1(z_q, z_0) = \sum_{i=1}^m  z_{qi} - z_{0i} $           |
| 2. Евклидово                                     | $d_2(z_q, z_0) = [\sum_{i=1}^m (z_{qi} - z_{0i})^2]^{1/2}$ |
| 3. Супремум-норма (Чебышева)                     | $d_\infty(z_q, z_0) = \max_i  z_{qi} - z_{0i} $            |
| 4. Минковского                                   | $d_N(z_q, z_0) = [\sum_{i=1}^m  z_{qi} - z_{0i} ^N]^{1/N}$ |

Здесь использованы следующие обозначения:  $z_q, z_0$  – стандартизированные точки многомерного пространства ( $q$ -й проект и эталон), между которыми измеряется расстояние;  $N, P, R$  – параметры степенных метрик, определяющие их конкретный вид.

Наиболее популярными в экономических исследованиях являются первые три метрики, которые обобщаются четвертой метрикой Минковского. Она при  $N = 1$  дает линейное расстояние, при  $N = 2$  – евклидово расстояние, при  $N = \infty$  – супремум-норму (метрику Чебышева). Другие метрики, соответствующие  $N \neq 1, 2, \infty$ , применяются крайне редко.

Для метрики Минковского с увеличением показателя степени  $N$  величина расстояния для заданных точек  $z_q, z_0$  не возрастает. Поэтому можно записать:

$$d_1(z_q, z_0) \geq d_2(z_q, z_0) \geq \dots \geq d_\infty(z_q, z_0). \quad (8.16)$$

Выбор функции расстояния между проектами и эталоном, к сожалению, не имеет четких теоретических рекомендаций, поэтому обычно пользуются наиболее популярной в экономических исследованиях евклидовой метрикой. Тем более, что все функции расстояния определенным образом соотносятся между собой на базе неравенств (8.16).

Расчёты, связанные с нахождением расстояний между всеми инвестиционными проектами предприятия и эталоном (седьмой этап процедуры), удобно вести с помощью системы прикладных программ *STATISTICA* в модуле «Кластерный анализ». Найденные значения выбранной метрики представляются в виде матрицы расстояний, размера  $(s+1) \times (s+1)$ , которая имеет следующий общий вид:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1s} & d_{1(s+1)} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & \dots & d_{2s} & d_{2(s+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{s1} & d_{s2} & d_{s3} & \dots & 0 & d_{s(s+1)} \\ d_{(s+1)1} & d_{(s+1)2} & d_{(s+1)3} & \dots & d_{(s+1)s} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

В матрице  $D$  в  $(s+1)$ -й строке (столбце) приводятся расстояния всех  $s$  проектов до эталона.  $D$  – неотрицательная матрица, на её главной диагонали находятся нули (расстояние объекта до самого себя). Матрица  $D$  симметрична, т.к. величина  $d_{qi}$  не меняется от перемены точки начала отсчёта расстояния, и является одной из важнейших матриц многомерного анализа.

В результате расчётов на персональном компьютере была получена матрица евклидовых расстояний и в табл. 8.5 приведена её последняя строка.

Таблица 8.5

Евклидовы расстояния от инвестиционных проектов до эталона

| Проект | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | Эталон |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Эталон | 3,3486 | 2,4579 | 3,5070 | 2,1986 | 2,7784 | 2,6202 | 2,4033 | 3,4013 | 0      |

Например, расстояние от первого объекта до эталона по данным матрицы  $Z$  найдено так:

$$d_2(z_1, z_0) = \left[ \sum_{i=1}^m (z_{1i} - z_{0i})^2 \right]^{1/2} = [(0,6578 - 1,3642)^2 + (-0,7950 - 1,5995)^2 + (1,1159 - 1,1159)^2]^{1/2} \approx 3,3486.$$

Визуальный анализ данных табл. 8.5 показывает, что значения расстояний варьируют в пределах от 2 до 3,5, т.е. запланированные инвестиционные мероприятия достаточно однородны по признакам доходность, эффективность, рискованность и ликвидность. При этом ближе всех инвестиционных проектов к эталону находится мероприятие № 4 (2,199), а дальше всех – инвестиция № 3 (3,507).

Сами значения расстояний  $d_{0i}$  инвестиционных проектов до эталона можно интерпретировать как величины синтетических резервов роста приоритетности каждого мероприятия. Для эталонной точки  $d_{00} = 0$ .

На восьмом этапе алгоритма таксономического анализа после нахождения расстояний до эталона определяются меры сходства  $\mu_{0i}$  каждого проекта с эталоном. Понятие сходства противоположно понятию расстояния в многомерном пространстве признаков-симптомов. Поэтому измерение сходства базируется на использовании функций, обратных к функциям расстояния. Наиболее популярная мера сходства между объектами реализована в следующей формуле:

$$\mu_{0i} = 1/[1 + d(z_q, z_0)], \quad (8.18)$$

где  $d(z_q, z_0)$  – выбранная метрика, например, из табл. 8.4.

Величины  $\mu_{0i}$  изменяются от нуля до единицы и толкуются естественным образом: чем выше значение сходства инвестиционного проекта с эталоном, тем выше уровень искомого латентного показателя – приоритетности данного мероприятия. Для самого эталона  $\mu_{00} = 1$ .

На основе найденных значений мер сходства  $\mu_{0i}$  осуществляется окончательное ранжирование всего множества потенциально приемлемых

проектов по следующему принципу: высший ранг 1 получает запланированное мероприятие, которое соответствует максимальному значению  $\mu_{0i}$ , ранг 2 – проект, для которого величина сходства с эталоном находится на втором месте, и т.д.

Таким образом, упорядочение инвестиционных проектов происходит по величине одномерного скаляра  $\mu_{0i}$ , который и служит статистической оценкой искомого латентного свойства – приоритетности запланированного на предприятии производственно-финансового мероприятия (табл. 8.6).

Таблица 8.6

Результаты ранжирования инвестиционных проектов предприятия по методу классической таксономии

| Проект                   | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. Расстояние до эталона | 3,3487 | 2,4579 | 3,5070 | 2,1986 | 2,7784 | 2,6202 | 2,4033 | 3,4013 |
| 2. Сходство с эталоном   | 0,2299 | 0,2892 | 0,2219 | 0,3126 | 0,2647 | 0,2762 | 0,2938 | 0,2272 |
| 3. Ранг                  | 6      | 3      | 8      | 1      | 5      | 4      | 2      | 7      |

Расчёт мер сходства  $\mu_{0i}$  анализируемых проектов с эталоном и их ранжирование позволяют выделить группы мероприятий-лидеров и аутсайдеров. Так, анализ данных табл. 8.6 показывает, что среди исследуемых инвестиционных проектов можно выделить, по крайней мере, три группы (кластера) по уровню их приоритетности.

В первый кластер входят наиболее приоритетные мероприятия – № 4 (сходство с эталоном 0,3126), № 7 (0,2938) и № 2 (0,2892), занявшие 1-3 места в таблице о рангах. Это инвестиции-лидеры по выдвинутым требованиям их прибыльности, эффективности, рискованности и ликвидности.

Во второй кластер попали проекты-средняки – № 6 (0,2762), № 5 (0,2647), которые получили ранги 4, 5 соответственно.

И в третий кластер вошли инвестиции-аутсайдеры – № 1 (0,2299), № 8 (0,2272), № 3 (0,2219). Они заняли 6-8 места в построенной классификации.

Таким образом, применение таксономического анализа в задаче ранжирования инвестиционных проектов предприятия по латентному свойству (приоритетность осуществления мероприятий) позволило в определённой степени решить сразу три проблемы:

1. Количественно оценить изучаемое латентное свойство – приоритетность осуществления инвестиционных проектов (строка 2 табл. 8.6).

2. Проранжировать запланированные мероприятия по величине изучаемого латентного свойства – приоритетности осуществления инвестиционных проектов (строка 3 табл. 8.6).

3. Сгруппировать исследуемые инвестиционные проекты по оцененной величине приоритетности осуществления производственно-финансовых мероприятий, выделив кластеры проектов лидеров, середняков и аутсайдеров.

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

На основе решения Вашего варианта индивидуального задания главы 7 (табл. 7.1), а также решений других вариантов этого задания с помощью пакета программ «Сравнение проектов» осуществить:

1. Образование портфеля инвестиций предприятия, состоящего из двух проектов, и расчёт для него показателей:

- 1) длительности реализации  $n'$ ;
- 2) цены инвестированного капитала  $r'$ ;
- 3) чистой приведенной стоимости  $NPV'$ ;
- 4) индекса рентабельности  $PI'$ ;
- 5) модифицированной внутренней нормы прибыли  $MIRR'$ ;
- 6) резерва безопасности  $RS_1'$ ,  $RS_2'$ ;
- 7) дисконтированного срока окупаемости  $DPP'$ .

Результаты представить в виде таблицы типа табл. 8.1.

2. Проверку справедливости формул (8.3), (8.5), (8.6), (8.7) для инвестиционного портфеля предприятия по данным построенной в предыдущем пункте таблицы.

3. Определение точки Фишера и сравнительный анализ двух обсуждаемых инвестиционных проектов с целью выявления наиболее предпочтительного из них. Результаты представить в виде таблицы типа табл. 8.2 и рисунка типа рис. 8.3.

4. Ранжирование шести запланированных инвестиционных мероприятий по приоритетности, включая Ваш вариант задания главы 7, и образование трёх кластеров проектов (лидеров, середняков, аутсайдеров) с помощью классического алгоритма таксономического анализа. Результаты представить в виде таблицы типа табл. 8.6.

По каждому пункту дать краткие экономико-математические пояснения и выводы.

## ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 8

1. Батенко Л. П., Загородніх О. А., Ліщинська В. В. Управління проектами : Навч. посібник / Л. П. Батенко, О. А. Загородніх, В. В. Ліщинська. – К.: КНЕУ, 2003. – 231 с.
2. Лившиц В. Н. Проектный анализ : методология, принятая во всемирном банке : [Электронный ресурс] / В. Н. Лившиц // Экономика и математические методы. – 1994. Т. 30. Вып. 3. Режим доступа : <http://www.niec.ru/Articles/051.html/>.
3. Мазур И. И., Шапиро В. Д., Ольдерогге Н. Г. Управление проектами : Учебное пособие / Под общ. ред. И. И. Мазура. – 2-е изд. – М.: Омега-Л, 2009. – 664 с.
4. Плюта В. Сравнительный многомерный анализ в эконометрическом моделировании / Плюта В.; [пер. с польск.] – М.: Финансы и статистика, 1989. – 175 с.
5. Плюта В. Сравнительный многомерный анализ в экономических исследованиях / Плюта В.; [пер. с польск.] – М.: Статистика, 1980. – 151 с.
6. Григорук П. М. Багатомірне економіко-статистичне моделювання : [навч. посібник для студентів ВНЗ] / Григорук П. М. – Львів : «Новий Світ – 2000», 2006. – 148 с.
7. Янковой А. Г. Многомерный анализ в системе *STATISTICA* : Вып. 1 / Янковой А. Г. – Одесса, Оптимум, 2001. – 214 с.
8. Янковой А. Г. Многомерный анализ в системе *STATISTICA* : Вып. 2 / Янковой А. Г. – Одесса, Оптимум, 2002. – 325 с.
9. Янковой А. Г. Оценка латентных экономических признаков предприятий с помощью методов таксономии / А. Г. Янковой, А. В. Юрьева, Е. Д. Янковая // Зерновые продукты и комбикорма. – 2005. – № 3. – С. 11-16.
10. Янковий О. Г. Методи і моделі оцінки латентних показників у бізнес-плануванні / О. Г. Янковий, О. Л. Гура // Вісник соціально-економічних досліджень. – 2006. – № 24. – С. 399-403.
11. Янковий О. Г. Статистична оцінка латентних економічних ознак / О. Г. Янковий // Теорія і методологія стат. аналізу : Міжнар. наук.-практ. конф., присвяч. 100-річчю Пасхавера Й. С. – К.: КНЕУ, 2006. – С. 327-335.
12. Янковой А. Г. Оценка латентных показателей с помощью таксономического анализа / А. Г. Янковий // Вісник ОНУ ім. І. І. Мечникова – 2006. – Т. 11. – Вип. 8. – С. 140-158.
13. Янковой А. Г. Объединённая таксономическая оценка латентных экономических показателей / А. Г. Янковой, Г. В. Кошелёк, О. Б. Чернышёва // Проблеми вдосконалення інституційних умов функціонування української економіки : матер. 3-ї Міжнар. наук.-практ. конф. – Одеса, ОНУ, 2008. – Ч. 1. – С. 45-47.
14. Янковий О. Г. Об'єднана таксономія підприємств кондитерської галузі за рівнем конкурентоспроможності / О. Г. Янковий, Г. В. Кошельок, О. Б. Чернишова // Розвиток фінансових відносин в умовах трансформаційних

процесів : матер. симпозіуму з нагоди 65-річчя Харків. ін-т. фінансів УДУФМТ. – Х. : ХІФ УДУФМТ, 2008. – С. 131-138.

15. Янковий О. Г. Методи ранжирування інвестиційних проектів / О. Г. Янковий // Актуальні соціально-економічні та правові проблеми розвитку України та її регіонів : матер. IV міжнар. круглого стола, 8 трав. 2013 р. – Одеса, ОНУ, 2013. – С. 80-82.

## 9. АНАЛИЗ И ПЛАНИРОВАНИЕ БЕЗУБЫТОЧНОСТИ

В условиях современной рыночной экономики прибыль и рентабельность выступают главными экономическими ориентирами и одновременно показателями состояния производства, критериями его результативности и эффективности. Рентабельность продукции показывает эффективность её производства, а рентабельность предприятия – степень рациональности использования всего капитала. Такой подход к толкованию прибыли позволяет рассматривать её не только как избыток над издержками, но и как прирост авансированной стоимости, т.е. характеризовать процесс создания новой стоимости.

Понятия прибыли, доходности, убыточности, безубыточности, определения их источников, факторов и методов управления (в частности, повышения прибыли) всегда привлекали внимание ученых и практиков во все времена. В экономической литературе по вопросам учёта и управления безубыточностью предприятия существует большое множество различных классификационных признаков прибыли (убытков) предприятия. Большинство из них представлено на рис. 9.1.



Рис. 9.1. Классификация прибыли (убытков) предприятия

Использование того или иного показателя прибыли для оценки работы предприятия в значительной мере зависит от целей анализа, его пользователей и заказчиков. Так, для определения безубыточного объёма продаж и зоны безопасности предприятия применяется маржинальная прибыль (*Marginal Profit*); для оценки уровня доходности производства отдельных видов продукции – прибыль от реализации этих товаров до налогообложения; для оценки доходности совокупного капитала – общая сумма прибыли от всех видов обычной деятельности до налогообложения; для оценки рентабельности собственного капитала – чистая прибыль; для оценки устойчивости роста предприятия – капитализированная прибыль и т.д.

Фундаментальными понятиями теории безубыточности являются понятия маржинальной прибыли и точки безубыточности.

С одной стороны, маржинальную прибыль *MP* (*Marginal Profit*) можно рассматривать как разность между выручкой от реализации конкретного вида продукции (работ, услуг) и переменными затратами предприятия на выпуск данной продукции. С другой стороны, маржинальную прибыль можно рассчитать как сумму бухгалтерской прибыли от реализации конкретного вида продукции и приходящихся на неё постоянных затрат предприятия.

Под точкой безубыточности выпуска данного вида продукции понимают такой её физический объём  $X_0$ , при котором суммарные затраты на производство продукции данного вида совпадают с выручкой от её реализации, а прибыль равняется нулю.

В экономической литературе анализ и планирование безубыточности часто встречается под названиями *CVP*-анализ (аббревиатура англ. слов *Coast* – затраты, *Volume* – объём, *Profit* – прибыль), а также предельный анализ. Последний охватывает (наряду с исследованием безубыточности хозяйственной деятельности) и подходы к отысканию максимума прибыли за счёт оптимизации объёмов и структуры продаж, цен на продукцию, выпускаемую предприятием.

При этом различают анализ и планирование безубыточности в узком и широком трактовке данного метода. В узком смысле под анализом и планированием безубыточности обычно понимают исследование операционной деятельности предприятия, связанной с производством конкретных видов продукции (работ, услуг). Анализ безубыточности (*Breakeven Analysis*) – это исследование результатов деятельности предприятия на основе соотношения объёмов производства, прибыли и затрат, что позволяет определить взаимосвязи между издержками, доходами и прибылью при различных объёмах производства. Его особенность заключается в том, что такой анализ показывает одновременно объём, при котором не возникают ни прибыль, ни убытки, и влияние постоянных и переменных затрат на ожидаемую прибыль при разных объёмах производства.

В широком смысле анализ и планирование безубыточности рассматривается как исследование операционной и финансовой деятельности

предприятия, связанной с производством и реализацией всех видов продукции (работ, услуг) в стоимостном выражении.

Обсудим в начале важнейшие теоретические и прикладные возможности анализа и планирования безубыточности в узком его понимании, который базируется на разделении общих затрат на производство данного вида продукции (работ, услуг) на постоянные и переменные затраты.

Введём следующие обозначения:

$X$  – планируемый выпуск продукции данного вида, количество единиц;

$C$  – общие затраты на планируемый выпуск продукции данного вида, денежных единиц;

$C_0$  – постоянные затраты на планируемый выпуск продукции данного вида, денежных единиц;

$C_1$  – переменные затраты на планируемый выпуск продукции данного вида, денежных единиц;

$c$  – удельные общие затраты на планируемый выпуск продукции данного вида, денежных единиц;

$c_0$  – удельные постоянные затраты на планируемый выпуск продукции данного вида, денежных единиц;

$c_1$  – удельные переменные затраты на планируемый выпуск продукции данного вида, денежных единиц;

$p$  – планируемая цена единицы продукции данного вида, денежных единиц;

$Pr$  – планируемая прибыль от реализации продукции данного вида, денежных единиц;

При этом предполагается выполнение следующих основных условий для всего периода анализа и планирования безубыточности:

1. Объём производства равен объёму реализации (продаж).

2. Постоянные затраты одинаковы для любого объёма продаж, т.е. величина  $C_0$  не зависит от  $X$ .

3. Переменные затраты изменяются прямо пропорционально объёму производства ( $C_1 = c_1X$ ), а их удельная величина остается постоянной ( $c_1 = const$ ).

4. Цена продукции (работ, услуг) остается неизменной в течение всего периода анализа и планирования безубыточности ( $p = const$ ).

Следует отметить, что указанные ограничения обычно выполняются только в течение короткого периода времени операционной деятельности предприятия. Тогда на основе данных бухгалтерской отчетности, а также внутреннего управленческого учёта для данного вида продукции справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} C &= C_0 + C_1; \\ c &= c_0 + c_1; \\ pX &= C_0 + C_1 + Pr; \\ C &= C_0 + c_1X. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Последнее соотношение  $C = C_0 + c_1X$  из (9.1) можно также получить аналитическим путем, используя ряды динамики данных об общих затратах  $C$  (результативный признак) и физическом объеме продукции данного вида  $X$  (факторный признак) с помощью стандартных программ корреляционно-регрессионного анализа, например, редактора *Excel* или системы *STATISTICA* (модуль «*Multiple Regression*»). В этом случае постоянные затраты  $C_0$  и удельные переменные затраты  $c_1$  на производство продукции данного вида будут носить типичный (осреднённый) характер.

Из уравнения  $pX = C + Pr$  непосредственно вытекает, что при условии безубыточной операционной деятельности предприятия ( $Pr \geq 0$ ) должно выполняться неравенство  $p \geq c = c_0 + c_1$ , т.е. цена единицы продукции должна быть не меньше суммы удельных постоянных и переменных затрат.

Очевидно, что с ростом физического объема производства  $X$  величина удельных постоянных расходов  $c_0$  снижается, что даёт возможность предприятию получать экономию на условно-постоянных расходах, повышать объем прибыли и ценовую конкурентоспособность.

Из уравнения выручки от реализации  $pX = C_0 + C_1 + Pr$  (9.1) вытекает формула маржинальной прибыли (см. определение):

$$MP = pX - C_1 = C_0 + Pr, \quad (9.2)$$

которая представляется в следующем виде:

$$MP = pX - c_1X = C_0 + Pr. \quad (9.3)$$

Отсюда физический объем продаж продукции (работ, услуг)  $X$  равен:

$$X = \frac{C_0 + Pr}{p - c_1}. \quad (9.4)$$

Ясно, что зона безубыточности определяется неравенством  $Pr \geq 0$ , а физический объем продаж  $X_0$ , при котором  $Pr = 0$ , называется точкой безубыточности (*Breakeven Point*). Она соответствует такому физическому объёму продаж, при котором общие затраты на производство продукции данного вида совпадают с выручкой от её реализации. Из уравнения (9.4) следует, что точка безубыточности в натуральном выражении находится так:

$$X_0 = \frac{C_0}{p - c_1}. \quad (9.5)$$

Из выражений (9.4), (9.5) вытекает, что при объеме производства  $X < C_0/(p - c_1)$  предприятие будет получать убытки от выпуска продукции данного вида и экономически обоснованным будет переход к её приобретению вместо изготовления. При выполнении условия  $X > C_0/(p - c_1)$  ему обеспечена прибыль от производства и реализации, которая будет расти по мере повышения  $X$ , и выпуск данной продукции представляется вполне целесообразным.

Точка безубыточности – один из тех экономических показателей, о котором можно говорить: «чем ниже, тем лучше». Это и понятно, чем меньшее количество продукции нужно произвести и продать, чтобы начать получать прибыль – тем меньше вероятность банкротства, тем проще стать экономически независимым. Поэтому каждое предприятия, особенно в условиях экономического кризиса, должно стремиться минимизировать величину  $X_0$  по каждой ассортиментной позиции.

Искомая точка безубыточности в стоимостном выражении определяется следующей формулой:

$$pX_0 = \frac{pC_0}{p - c_1}. \quad (9.6)$$

Величину (9.6) с учётом соотношения (9.3) можно представить в таком виде:

$$pX_0 = C_0 \cdot \frac{pX}{pX - c_1X} = C_0 \cdot \frac{pX}{MP}. \quad (9.7)$$

Итак, точка безубыточности в стоимостном выражении определяется тремя параметрами:

- 1) постоянными затратами  $C_0$ ;
- 2) выручкой от реализации  $pX$ ;
- 3) маржинальной прибылью  $MP$ .

При этом все указанные показатели должны относиться к одному и тому же периоду времени. Первые два параметра влияют на величину  $pX_0$  прямо, а третий – обратно пропорционально.

Точка безубыточности характеризует минимально допустимый объём продаж данного вида продукции (работ, услуг) за определённый период времени, который гарантирует предприятию достижения границы между доходностью и убыточностью. Величина  $pX_0$  позволяет ответить на вопрос: какую минимальную выручку должно иметь предприятие, чтобы покрывать общие расходы на производство и реализацию данного товара?

Рассмотрим пример, иллюстрирующий расчёт точки безубыточности по формулам (9.5), (9.6).

Пусть предприятие производит и реализует в пределах существующего спроса три вида продукции – А, В, С. Плановые данные по затратам на производство на месяц, а также цены изделий приведены в табл. 9.1. При этом постоянные затраты распределяются по видам продукции пропорционально объёмам их реализации.

Для товара А точка безубыточности в натуральном выражении равняется

$$X_0 = \frac{C_0}{p - c_1} = \frac{18,8 \times 12}{40 - 20} = 11,28 \text{ т.}$$

Таблица 9.1

Исходные данные для проведения анализа и планирования  
безубыточности предприятия

| Показатели  | Обозначения | А    | В    | С    | Всего по предпр. |
|---|-------------|------|------|------|------------------|
| 1. Количество товара, запланированного к реализации, т  | $X$         | 12   | 4    | 5    | -                |
| 2. Цена 1 т товара, тыс. грн.                           | $p$         | 40   | 30   | 80   | -                |
| 3. Плановая выручка от реализации, тыс. грн.            | $pX$        | 480  | 120  | 400  | 1000             |
| 4. Постоянные затраты, тыс. грн.                        | $C_0$       | 470  |      |      | 470              |
| 5. Переменные затраты, тыс. грн.                        | $C_1$       | 240  | 60   | 150  | 450              |
| 6. Удельные постоянные затраты <sup>1</sup> , тыс. грн. | $c_0$       | 18,8 | 14,1 | 37,6 | -                |
| 7. Удельные переменные затраты, тыс. грн.               | $c_1$       | 20   | 15   | 30   | -                |

<sup>1</sup>Значения  $c_0$  найдены на основе распределения постоянных затрат (470 тыс. грн.) по видам продукции пропорционально объемам их реализации: А – 48 %, В – 12 %, С – 40 % (см. стр. 3 табл. 9.1)

Для товара В она составит

$$X_0 = \frac{C_0}{p - c_1} = \frac{14,1 \times 4}{30 - 15} = 3,76 \text{ т.}$$

И для товара С

$$X_0 = \frac{C_0}{p - c_1} = \frac{37,6 \times 5}{80 - 30} = 3,76 \text{ т.}$$

Очевидно, что для всех, без исключения, изделий выполняется неравенство  $X > X_0$ , следовательно, все они будут произведены предприятием на уровне, который выше соответствующих точек безубыточности в натуральном выражении, т.е. с положительной бухгалтерской прибылью.

В самом деле, для продукции А точка безубыточности в стоимостном выражении составляет  $pX_0 = 40 \times 11,28 = 451,2$  тыс. грн. при плановой выручке 480 тыс. грн. Для продукции В она равна  $30 \times 3,76 = 112,8$  тыс. грн. при плановой выручке 120 тыс. грн. Для продукции С точка безубыточности в стоимостном выражении и плановая выручка составляют соответственно 300,8 и 400 тыс. грн.

Приведенный выше метод расчёта точек безубыточности, основанный на соотношениях (9.5) – (9.7), называется методом уравнений. Кроме него можно указать, по крайней мере, еще три подхода к определению величин  $X_0$ ,  $pX_0$ . Так, вторым методом нахождения точки безубыточности является метод предварительного расчёта маржинальной прибыли, который, по сути, является модификацией метода уравнений.

Из соотношения (9.2) вытекает, что для любого вида продукции маржинальная прибыль может быть определена двояко. Поэтому существуют два основных способа нахождения величины маржинальной прибыли. При первом способе из общей выручки, которую получило предприятие при реализации продукции данного вида за определенный период времени

(обычно за год), отнимают все переменные затраты (центральная часть уравнения (9.2)). При втором способе величина маржинальной прибыли определяется путём сложения общих постоянных затрат и бухгалтерской прибыли, которые обусловлены производством и реализацией продукции данного вида за определенный период времени (правая часть уравнения (9.2)).

Найдя величину  $MP$  тем или иным способом, и зная постоянные затраты  $C_0$  и выручку от реализации  $pX$ , по формуле (9.7) легко находится точка безубыточности в стоимостном выражении. Проиллюстрируем расчёты точек безубыточности по рассматриваемому методу по данным предыдущего примера.

Маржинальная прибыль составляет:

- по товару А  $480 - 240 = 18,8 \times 12 + 1,2 \times 12 = 240$  тыс. грн.
- по товару В  $120 - 60 = 14,1 \times 4 + 0,9 \times 4 = 60$  тыс. грн.
- по товару С  $400 - 150 = 37,6 \times 5 + 12,4 \times 5 = 250$  тыс. грн.

Здесь 1,2 тыс. грн.  $(40 - 20 - 18,8) = p - c_0 - c_1$  удельная бухгалтерская прибыль по продукции А; 0,9 тыс. грн. – по продукции В; 12,4 тыс. грн. – по продукции С.

Отсюда, согласно (9.7) точка безубыточности для товара А составит

$$pX_0 = C_0 \cdot \frac{pX}{MP} = (18,8 \times 12) \times \frac{480}{240} = 451,2 \text{ тыс. грн.}$$

что совпадает с результатом, полученным выше по методу уравнений. Разделив найденную величину на цену продукции А ( $p = 40$  тыс. грн.), окончательно найдём точку безубыточности в натуральном выражении

$$X_0 = \frac{451,2}{40} = 11,28 \text{ т.}$$

Аналогичные расчёты можно провести и для двух других изделий рассматриваемого предприятия.

Ещё один метод нахождения точки безубыточности связан с расчётом так называемого коэффициента маржинальной прибыли  $K$ , под которым понимают долю величины маржинальной прибыли в выручке от реализации продукции данного вида:

$$K = \frac{MP}{pX} = \frac{pX - C_1}{pX} = \frac{C_0 + Pr}{pX}, \quad (9.8)$$

или после деления почленно на  $pX$ :

$$K = 1 - \frac{c_1}{p} = \frac{c_0}{p} + \frac{Pr}{pX}. \quad (9.9)$$

Величина  $K$  показывает долю объёма продаж, которая должна быть использована предприятием для покрытия постоянных расходов и

формирования бухгалтерской прибыли от реализации продукции данного вида.

С учётом формул (9.6) и (9.9) точка безубыточности в стоимостном выражении представляется так:

$$pX_0 = \frac{pC_0}{p - c_1} = \frac{C_0}{\frac{p - c_1}{p}} = \frac{C_0}{K}. \quad (9.10)$$

Согласно формуле (9.8) коэффициенты маржинальной прибыли равны:

- по товару А  $240/480 = 0,5$ ;
- по товару В  $60/120 = 0,5$ ;
- по товару С  $250/400 = 0,625$ .

Отсюда, точка безубыточности в стоимостном выражении для продукции А находится следующим образом:

$$pX_0 = C_0/K = (470 \times 0,48)/0,5 = 451,2 \text{ тыс. грн.},$$

что в точности совпадает с результатами, полученными выше по методу уравнений и методу маржинальной прибыли. Аналогичные расчёты можно провести и для двух других изделий изучаемого предприятия.

Следует отметить, что кроме расчёта точки безубыточности самостоятельный экономический интерес представляет непосредственное исследование величины коэффициента маржинальной прибыли  $K$ . Так, из соотношения (9.9) вытекает, что в точке безубыточности коэффициент маржинальной прибыли равен доле удельных постоянных затрат в цене единицы продукции:

$$K_0 = \frac{c_0}{p}. \quad (9.11)$$

Изменяя соотношение постоянных и переменных затрат в себестоимости выпускаемой продукции можно повлиять на величину  $K$ . Например, уменьшая  $C_1$  за счет роста  $C_0$ , можно добиться увеличения коэффициента маржинальной прибыли и, наоборот.

Анализ центрального выражения формулы (9.9) позволяет сделать следующие выводы. При условии  $p \geq c_1$ , которое представляется вполне реальным в нормальных экономических условиях производства и реализации продукции, величина  $K$  изменяется в пределах от 0 до 1, включая указанные значения.

При  $c_1 \rightarrow 0$  (когда удельные переменные затраты минимизируются, например, в результате инноваций и роста производительности труда) или когда цена товара неограниченно растёт (например, в условиях монопольного рынка), коэффициент маржинального дохода  $K$  стремится к 1. Это наиболее благоприятная для предприятия экономическая ситуация, к которой должны стремиться все без исключения хозяйствующие субъекты.

Следовательно, чем ближе маржинальная прибыль к выручке от реализации данного вида продукции (чем больше  $K$ ), тем более привлекательным с экономической точки зрения представляется её выпуск.

При  $p \rightarrow c_1$  (когда цена единицы продукции резко падает и достигает величины, при которой  $c_0 = -Pr/X$  коэффициент  $K \rightarrow 0$ ). Это наиболее неблагоприятная для предприятия экономическая ситуация, характерная для кризисных явлений в сфере производства и обращения, и означающая катастрофический спад платёжеспособного спроса. Обычно в реальной действительности значение рассматриваемого коэффициента находится в пределах  $0 < K < 1$ . Следовательно, чем меньше маржинальная прибыль по сравнению с выручкой от реализации данного вида продукции (чем меньше  $K$ ), тем менее привлекательным с экономической точки зрения представляется её выпуск.

Кроме того, из выражения (9.10) следует, что стоимостное выражение точки безубыточности прямо зависит от величины постоянных затрат  $C_0$ , которые были отнесены на данный вид продукции, и обратно от величины коэффициента маржинальной прибыли  $K$ . Отсюда вытекают две важные рекомендации:

1) при калькуляции себестоимости продукции изменение величины постоянных затрат  $C_0$ , которые относятся на данный вид изделия, может существенно повлиять на величину его точки безубыточности;

2) при формировании ассортиментной политики предприятия необходимо принимать во внимание величину коэффициентов маржинальной прибыли по каждому виду продукции, отдавая предпочтение изделиям с максимальными значениями  $K$ .

Иллюстрируя первую рекомендацию, предположим в предыдущем примере, что общие постоянные затраты распределены поровну между всеми тремя видами продукции:  $C_0 = 470/3 = 156,667$  тыс. грн. Тогда точки их безубыточности в натуральном выражении будут выглядеть так:

$$\text{- по товару А} \quad X_0 = \frac{C_0}{p - c_1} = \frac{156,667}{40 - 20} = 7,8333 \text{ т.}$$

$$\text{- по товару В} \quad X_0 = \frac{C_0}{p - c_1} = \frac{156,667}{30 - 15} = 10,4444 \text{ т.}$$

$$\text{- по товару С} \quad X_0 = \frac{C_0}{p - c_1} = \frac{156,667}{80 - 30} = 3,1333 \text{ т.}$$

Из приведенных расчётов видно, что для продукции В ( $X = 4$  т) точка безубыточности существенно возросла и выполняется неравенство  $X < X_0$ . Следовательно, этот товар будет произведён предприятием на уровне, который ниже точки безубыточности, т.е. с бухгалтерским убытком 96,667 тыс. грн. ( $120 - 156,667 - 60$ ).

По поводу второй рекомендации об учёте найденных выше значений  $K$  при формировании ассортиментной политики предприятия можно дать

следующий совет: производить в ближайшем будущем больше продукции С, т.к. для неё  $K = \max(K_i) = 0,625$ ,  $i = 1, 2, 3$ , т.к. это обеспечит предприятию в перспективе максимальную экономию на условно-постоянных расходах.

Четвёртым методом нахождения точки безубыточности является графический метод, который заключается в построении в системе координат графиков изменения постоянных, переменных затрат и выручки от реализации в зависимости от изменения физического объёма произведенной и реализованной продукции.

Рассмотрим порядок его применения в редакторе *Excel* на примере третьего вида продукции С исследуемого предприятия ( $i = 3$ ). С этой целью сначала необходимо рассчитать часть постоянных затрат на производство, отнесённых на себестоимость товара С, и построить на основе информации табл. 9.1 вспомогательную табл. 9.2.

По условию постоянные расходы распределялись между выпускаемыми видами продукции пропорционально выручке от их реализации. Поэтому величина постоянных затрат, отнесённых на себестоимость товара С, составит:

$$C_{30} = \frac{C_0(pX)_3}{\sum_{i=1}^3 p_i X_i} = \frac{470 \times 400}{1000} = 188 \text{ тыс. грн.}$$

Таблица 9.2

Исходные данные для нахождения точки безубыточности производства и реализации продукции С

| Объём реализации, т | Постоянные затраты, тыс. грн. | Переменные затраты, тыс. грн. | Общие затраты, тыс. грн. | Выручка от реализации, тыс. грн. |
|---------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| 1                   | 188                           | 30                            | 218                      | 80                               |
| 2                   | 188                           | 60                            | 248                      | 160                              |
| 3                   | 188                           | 90                            | 278                      | 240                              |
| 4                   | 188                           | 120                           | 308                      | 320                              |
| 5                   | 188                           | 150                           | 338                      | 400                              |
| 6                   | 188                           | 180                           | 368                      | 480                              |
| 7                   | 188                           | 210                           | 398                      | 560                              |
| 8                   | 188                           | 240                           | 428                      | 640                              |
| 9                   | 188                           | 270                           | 458                      | 720                              |
| 10                  | 188                           | 300                           | 488                      | 800                              |

На рис. 9.2 показан пример графического определения точки безубыточности для производства и реализации товара С по данным табл. 9.2.

Так, в точке пересечения прямых «Выручка» и «Общие затраты» указанные экономические показатели численно совпадают и прибыль равна нулю. Следовательно, её координаты (показаны штрихом) будут соответствовать искомой точке безубыточности в натуральном ( $X_0 \approx 3,7$  т) и стоимостном выражении ( $pX_0 \approx 301$  тыс. грн.).

Необходимо иметь в виду, что метод графического изображения связей между затратами, выпуском и прибылью является приближенным, который

даёт грубую визуальную оценку искомой точки безубыточности. Но опыт показывает, что обсуждаемый подход вполне приемлем для практических расчётов, особенно, если менеджеры предприятия владеют электронными таблицами редактора *Excel*, которые позволяют просматривать различные варианты сочетания затрат, выпуска, прибыли и в автоматическом режиме с помощью инструмента «Мастер диаграмм» находить исследуемые экономические показатели.

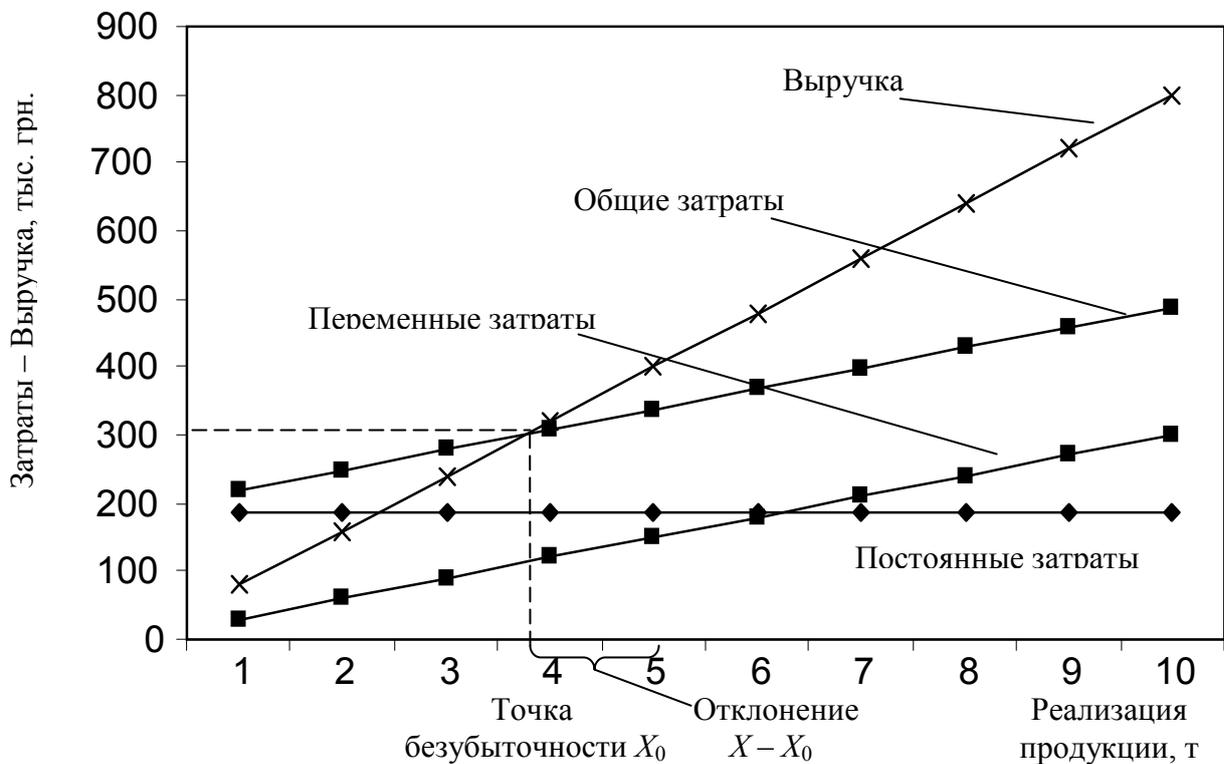


Рис. 9.2 – Графическое определение точки безубыточности производства и реализации продукции С

По аналогии с показателями резерва безопасности инвестиционного проекта  $RS_1$ ,  $RS_2$  (см. формулы (7.16), (7.17)), важным параметром анализа и прогнозирования безубыточности является показатель запаса прочности  $MS$  (*Margin of Safety*) – оценка в процентах отклонения фактического объёма реализации (в натуральном или денежном выражении) от безубыточного значения:

$$MS = \frac{X - X_0}{X_0} \times 100 = \frac{pX - pX_0}{pX_0} \times 100. \quad (9.12)$$

При  $X > X_0$  величина  $MS$  показывает, на сколько процентов может быть снижен объём реализации при условии сохранения безубыточности. В случае отрицательного значения  $MS$ , т.е. при  $X < X_0$  запас прочности показывает, на сколько процентов должны увеличиться продажи, чтобы предприятие начало получать прибыль от реализации данного вида продукции.

В обсуждаемом примере (отклонение  $X - X_0$  для товара С показано на рис. 9.2) величина запаса прочности составляет:

- по продукции А  $100 \times (12 - 11,28) / 11,28 = 6,4 \%$ ;
- по продукции В  $100 \times (4 - 3,76) / 3,76 = 6,4 \%$ ;
- по продукции С  $100 \times (5 - 3,76) / 3,76 = 33,0 \%$ .

Приведенные расчёты показывают, что наибольший запас прочности имеет выпуск продукции С: изучаемое предприятие может допустить снижение её реализации на 33 %, работая при этом безубыточно. Для двух других изделий указанный запас равен всего лишь 6,4 %.

В арсенале анализа и прогнозирования безубыточности важную роль играет показатель производственного (операционного) рычага (*Leverage*) – коэффициент эластичности прибыли по объёму продаж данного вида продукции. Производственный леверидж показывает, на сколько процентов изменяется бухгалтерская прибыль при изменении физического объёма реализации определенного вида продукции на один процент.

С учетом приведенного определения и формул (9.1) – (9.3) производственный леверидж (*L*) можно выразить следующим образом:

$$L = \frac{dPr}{Pr} : \frac{dX}{X} = \frac{dPr}{dX} \cdot \frac{X}{Pr} = (pX - C_0 - c_1X)' \cdot \frac{X}{Pr} = (p - c_1) \frac{X}{Pr} = \frac{MP}{Pr}, \quad (9.13)$$

где  $(pX - C_0 - c_1X)'$  – первая частная производная прибыли по объёму продаж *X*.

Формула (9.13) показывает, что производственный рычаг зависит от величины маржинальной и бухгалтерской прибыли от реализации данного вида продукции. Кроме того, с учетом формулы (9.8) выражение (9.13) представляется так:

$$L = \frac{MP}{Pr} = \frac{K \cdot pX}{Pr} = \frac{K}{d}, \quad (9.14)$$

где *d* – удельный вес бухгалтерской прибыли в объёме реализации продукции данного вида.

Анализ формул (9.13) – (9.14) показывает, что величины *MP*, *K* можно рассматривать как факторы, которые при прочих равных условиях прямо влияют на производственный леверидж, а показатели *Pr*, *d* – наоборот воздействуют на *L*.

В обсуждаемой задаче в соответствии с формулой (9.13) значение производственного левериджа для запланированного выпуска продукции составляет:

- по товару А  $240 / 1,2 \times 12 = 16,7 \%$ ;
- по товару В  $60 / 0,9 \times 4 = 16,7 \%$ ;
- по товару С  $250 / 12,4 \times 5 = 4,0 \%$ .

Следовательно, наибольшие темпы увеличения прибыли заложены в росте производства товаров А и В: каждый процент прироста их продаж

ведёт к увеличению прибыли на 16,7 %. Эластичность прибыли по товару С равняется 4 %, т.е. каждый дополнительный процент реализации продукции С обеспечивает предприятию рост прибыли лишь на 4 процента.

В физике аналог производственного леввериджа – ускорение. Чем оно выше, тем быстрее нарастает скорость, тем быстрее можно достичь поставленной цели. Аналогично, чем выше производственный рычаг у данного товара, тем быстрее предприятие имеет возможность увеличивать прибыль при условии, что данная продукция находится в зоне прибыльности. Однако, следует помнить, что «палка (рычаг) о двух концах». В случае снижения продаж высокий левверидж продукции будет способствовать более быстрой потере прибыли по сравнению с товаром, характеризующимся меньшим  $L$ .

С учётом определений (9.3), (9.5) выражение (9.13) можно представить следующим образом:

$$L = \frac{MP}{Pr} = \frac{Pr + C_0}{Pr} = 1 + \frac{C_0}{Pr} = 1 + \frac{C_0}{X(p - c_1) - C_0} = 1 + \frac{1}{\frac{X}{X_0} - 1}. \quad (9.15)$$

Исследуем поведение функции  $L = f(X)$ , которая согласно (9.15) с математической точки зрения представляет собой гиперболу с горизонтальной асимптотой  $L = 1$  и вертикальной асимптотой  $X = X_0$ .

Из формулы (9.15) видно, что при  $X \rightarrow 0$  значение  $L \rightarrow 0$ , т.е. ось абсцисс  $L = 0$  является горизонтальной асимптотой графика производственного рычага в окрестностях точки  $X = 0$ . В самом деле, при нулевом выпуске продукции данного вида выручка от её реализации и переменные затраты равны нулю ( $pX = c_1X = 0$ ), а постоянные затраты предприятия по данному виду продукции всё равно необходимо покрывать, поэтому убытки согласно третьему соотношению из (9.1) равны постоянным затратам ( $Pr = -C_0$ ). Это означает, что  $MP = 0$  (см. формулу (9.2)). А из (9.13) вытекает, что при  $X = 0$  величина  $L = 0/(-C_0) = 0$ .

В интервале  $0 < X < X_0$  дробь  $X/X_0$  изменяется от 0 до 1, поэтому справедливо неравенство  $-1 < X/X_0 - 1 < 0$ . Это означает, что второе слагаемое в формуле (9.15) меньше -1, а вся сумма меньше нуля, т.е.  $L < 0$ .

При  $X \rightarrow X_0$  слева величина  $X/X_0 - 1$  стремится к нулю слева, а  $L \rightarrow -\infty$ . Действительно, в интервале  $0 < X < X_0$  маржинальная прибыль положительна, поскольку  $p > c_1$ ,  $pX > c_1X > 0$  и  $MP = pX - c_1X > 0$ . А бухгалтерская прибыль отрицательна (зона убыточности), следовательно, согласно (9.13), производственный левверидж как отношение чисел с разными знаками отрицателен и убывает в  $-\infty$ , т.к. числитель дроби растёт, а знаменатель стремится к нулю слева.

В точке безубыточности  $X = X_0$  величина  $L$  не определена из-за деления на 0 в знаменателе второго слагаемого (9.15). В самом деле, в данной точке выполняются равенства  $Pr = 0$ ,  $MP = C_0$  и значение производственного рычага по формуле (9.13) не определено из-за деления на ноль. Поэтому прямая  $X = X_0$  является вертикальной асимптотой графика производственного леввериджа.

Справа от точки безубыточности  $X_0 < X$  (в зоне прибыльности) и числитель и знаменатель дроби  $MP/Pr$  положительны, следовательно, производственный леверидж  $L > 0$ . При этом его величина убывает от  $+\infty$  (когда  $X/X_0 - 1 \approx +0$ ) до 1 (когда  $X \rightarrow +\infty$ ), что непосредственно вытекает из соотношения (9.15).

Поэтому зависимость величины производственного рычага от физического объёма продаж графически представляется следующим образом (рис. 9.3).

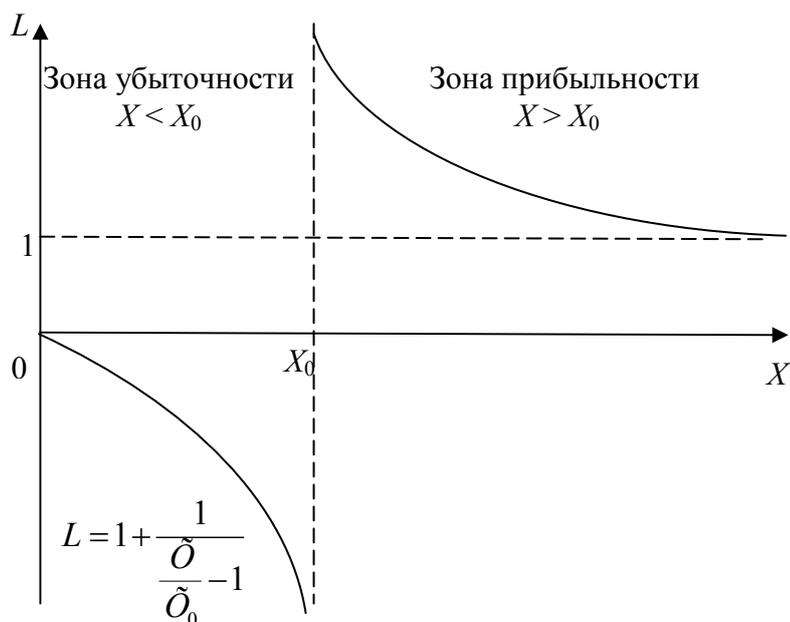


Рис. 9.3. График гиперболической зависимости производственного левериджа данного вида продукции от физического объёма её продаж

Визуальный анализ графика на рис. 9.3 показывает, что положительное воздействие производственного левериджа на результаты хозяйственной деятельности предприятия начинает проявляться лишь после того, как преодолена точка безубыточности данного вида продукции. Это связано с тем, что предприятие обязано покрывать свои постоянные затраты независимо от конкретного объёма продаж, поэтому чем выше сумма постоянных затрат, тем позже при прочих равных условиях оно достигнет точки безубыточности своей деятельности. Пока предприятие не обеспечило безубыточность своей деятельности, высокий уровень постоянных затрат будет являться дополнительным «грузом» на пути к прибыльности.

По мере дальнейшего увеличения объёма продаж и удаления от точки безубыточности эффект производственного рычага начинает снижаться. Каждый последующий процент прироста объёма продаж приводит к понижающемуся темпу прироста суммы прибыли. Данный феномен известен в экономической теории как явление убывающей предельной эффективности ресурсов.

Как видно из графика на рис. 9.3, механизм производственного левериджа имеет и обратную направленность: при любом снижении объёма

продаж в ещё большей степени будет уменьшаться размер прибыли предприятия.

Следует также помнить, что эффект операционного рычага проявляется только в коротком периоде. Это определяется тем, что постоянные затраты предприятия остаются неизменными лишь на протяжении короткого отрезка времени. Как только в процессе увеличения объёма продаж происходит очередной скачок суммы постоянных затрат (см. рис. 9.4), предприятию необходимо преодолеть новую точку безубыточности или приспособлять к ней свою производственную деятельность. Иными словами, после такого скачка эффект производственного леввериджа проявляется в новых условиях хозяйствования по-новому.

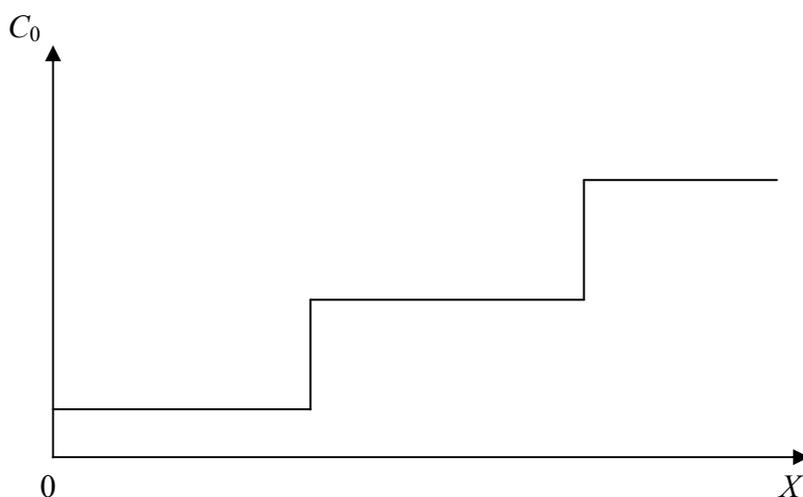


Рис. 9.4. График зависимости постоянных затрат предприятия от объёма выпуска продукции данного вида

Понимание механизма проявления производственного рычага позволяет целенаправленно управлять соотношением постоянных и переменных затрат в целях повышения эффективности производственно-хозяйственной деятельности при различных тенденциях конъюнктуры рынка и стадии жизненного цикла предприятия.

При неблагоприятной конъюнктуре рынка, определяющей возможное снижение объёма продаж, а также на ранних стадиях жизненного цикла предприятия, когда им ещё не преодолена точка безубыточности, необходимо принимать меры к снижению постоянных затрат предприятия. И наоборот, при благоприятной конъюнктуре рынка и наличии определенного запаса прочности, требования к осуществлению режима экономии постоянных затрат могут быть существенно ослаблены. В такие периоды предприятие может значительно расширять объем реальных инвестиций, проводя реконструкцию и модернизацию основных производственных фондов.

Между величиной производственного рычага и прибылью предприятия существует обратная зависимость. Чем выше прибыль предприятия, тем ниже эффект производственного леввериджа и, наоборот. Это позволяет

сделать вывод о том, что производственный рычаг является инструментом, уравнивающим соотношение степени доходности и уровня риска в процессе осуществления операционной деятельности. Поэтому величину  $L$  при  $X > X_0$  (правая ветвь графика на рис. 9.3) часто используют для характеристики степени предпринимательского риска, связанного с выпуском изделия данного вида.

Дело в том, что вблизи точки безубыточности  $X_0$ , когда  $Pr \rightarrow +0$  размер производственного рычага стремится в бесконечность ( $L \rightarrow +\infty$ ), а вероятность банкротства предприятия в случае монопродуктового производства резко повышается. И, наоборот, с ростом объёма продаж  $X$  прибыль увеличивается и  $L$  стремится до 1. Это означает уменьшение потенциальных угроз для предпринимательской деятельности.

Поэтому, в зоне прибыльности в качестве оценки степени риска ( $R$ ) производства и реализации данного вида продукции можно применять выражение

$$R = 1 - \frac{1}{L}. \quad (9.16)$$

Очевидно, что величина  $R$  изменяется от 0 до 1 и интерпретируется естественным образом: снижение прибыли до нуля приводит к увеличению степени риска выпуска изделия до единицы и, наоборот.

Оценим с помощью формулы (9.16) степень риска выпуска и реализации каждого из трёх производимых видов продукции из предыдущей задачи:

- по товару А  $1 - (1/16,7) = 0,94$ ;
- по товару В  $1 - (1/16,7) = 0,94$ ;
- по товару С  $1 - (1/4,0) = 0,75$ .

Следовательно, выпуск продукции А и В отличается наиболее высокой степенью риска, поскольку их фактические объёмы производства находятся вблизи точек безубыточности (запас прочности всего 6,4 %). В то же время товар С имеет запас прочности 33 % и может рассматриваться как продукт со сравнительно низкой степенью риска – 75 %.

Подводя итоги рассмотрению важнейших теоретических и прикладных возможностей анализа и планирования безубыточности в узком его понимании, приведём финальную таблицу найденных показателей для обсуждаемого примера производства трёх видов продукции исследуемого предприятия (табл. 9.3).

Бухгалтерская прибыль по отдельным видам продукции в табл. 9.3 была найдена по следующей формуле

$$Pr_i = p_i X_i - C_{i0} - C_{i1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.17)$$

Данные табл. 9.3 свидетельствуют о том, что план производства всех трёх видов выпускаемой продукции гарантирует предприятию получение как бухгалтерской, так и маржинальной прибыли по каждому товару. При этом в

данных экономических условиях распределения постоянных затрат по видам продукции (пропорционально выручке от реализации) выпуск товара С выглядит предпочтительней, поскольку коэффициент маржинальной прибыли и запас прочности для него выше, а уровень предпринимательского риска ниже по сравнению с аналогичными показателями продукции А и В.

Таблица 9.3

Основные показатели анализа и планирования  
безубыточности трёх видов продукции предприятия

| Показатели   | Обозначения | А      | В      | С      |
|--|-------------|--------|--------|--------|
| 1. Бухгалтерская прибыль, тыс. грн.                        | $Pr$        | 14,4   | 3,6    | 62     |
| 2. Маржинальная прибыль, тыс. грн.                         | $MP$        | 240    | 60     | 250    |
| 3. Коэффициент маржинальной прибыли                        | $K$         | 0,5    | 0,5    | 0,625  |
| 4. Точка безубыточности в натуральном выражении, т         | $X_0$       | 11,28  | 3,76   | 3,76   |
| 5. Точка безубыточности в стоимостном выражении, тыс. грн. | $pX_0$      | 451,2  | 112,8  | 300,8  |
| 6. Запас прочности, %                                      | $MS$        | 6,383  | 6,383  | 32,979 |
| 7. Производственный рычаг, %                               | $L$         | 16,667 | 16,667 | 4,032  |
| 8. Уровень предпринимательского риска                      | $R$         | 0,94   | 0,94   | 0,752  |

Чтобы осуществить анализ и планирование безубыточности в широком понимании данного термина, т.е. на уровне всего предприятия, а не отдельных видов выпускаемой продукции (работ, услуг), необходимо руководствоваться следующими принципами:

- объёмные характеристики для всего предприятия рассчитываются путём суммирования одноимённых показателей по отдельным изделиям;
- качественные (относительные) характеристики для всего предприятия получаются путём осреднения одноимённых показателей по отдельным изделиям.

Рассмотрим с учётом указанных принципов порядок проведения анализа и планирования безубыточности на уровне всего предприятия, полагая, что оно производит  $n$  видов продукции (работ, услуг). Проиллюстрируем приведенные формулы расчётом основных показателей безубыточности по данным изучаемого предприятия ( $n = 3$ ):

1. Бухгалтерская прибыль как объёмный стоимостной показатель находится путём суммирования прибыли (убытков) по отдельным изделиям:

$$Pr = \sum_{i=1}^n Pr_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.18)$$

В обсуждаемой задаче бухгалтерская прибыль предприятия составляет

$$Pr = 14,4 + 3,6 + 62 = 80 \text{ (тыс. грн.)}$$

Следовательно, можно говорить о том, что при выполнении начальных условий (см. табл. 9.1) запланированный выпуск продукции обеспечит

изучаемому предприятию суммарную бухгалтерскую прибыль в размере 80 тыс. грн.

2. Маржинальная прибыль как объёмный стоимостной показатель рассчитывается аналогично, т.е. путём суммирования маржинальной прибыли по отдельным изделиям:

$$\dot{P} = \sum_{i=1}^n \dot{D}_i. \quad (9.19)$$

Маржинальная прибыль изучаемого предприятия равняется

$$MP = 240 + 60 + 250 = 550 \text{ (тыс. грн.)}.$$

Это означает, что суммарное покрытие (постоянные затраты и бухгалтерская прибыль) исследуемого предприятия запланировано на уровне 550 тыс. грн.

3. Коэффициент маржинальной прибыли как качественный относительный показатель находится по аналогии с формулой (9.8). При этом в числителе и знаменателе дроби находятся соответствующие показатели для всего предприятия:

$$\bar{K} = \frac{\sum_{i=1}^n \dot{D}_i}{\sum_{i=1}^n p_i X_i} = \frac{\sum_{i=1}^n K_i \times p_i X_i}{\sum_{i=1}^n p_i X_i}. \quad (9.20)$$

Из формулы (9.20) вытекает, что величина  $\bar{K}$  для всего предприятия – это средняя арифметическая взвешенная из величин  $K_i$  отдельных видов продукции. В качестве статистических весов средней выступают размеры выручки от реализации этих изделий  $p_i X_i$ .

По данным предыдущего расчёта и табл. 9.1 находим величину  $\bar{K}$  для всей продукции предприятия

$$\bar{K} = \frac{550}{1000} = \frac{0,5 \times 480 + 0,5 \times 120 + 0,625 \times 400}{1000} = 0,55.$$

Таким образом, можно утверждать, что при достижении всех запланированных параметров удельный вес маржинальной прибыли предприятия в его суммарной выручке от реализации продукции составит 55 %.

4. Точка безубыточности в натуральном выражении в условиях многономенклатурного производства для всего предприятия не может быть найдена, поскольку осуществляется выпуск неоднородной продукции, в данном примере это товары А, В, С.

5. Под точкой безубыточности в стоимостном выражении в условиях многономенклатурного производства понимается такой объём её реализации, при котором обеспечивается суммарная (по всем видам продукции, работ, услуг) нулевая бухгалтерская прибыль. Отсюда вытекает, что расчёт величины  $pX_0$  для всего предприятия ведётся по аналогии с формулой (9.10).

При этом в числителе и знаменателе дроби находятся соответствующие показатели для всего изучаемого предприятия:

$$\delta X_0 = \frac{\sum_{i=1}^n C_{0i}}{K}. \quad (9.21)$$

Согласно данным табл. 9.1 и предыдущего расчёта точка безубыточности в стоимостном выражении для данного предприятия равняется

$$pX_0 = \frac{470}{0,55} = 854,546 \text{ (тыс. грн.)}.$$

Очевидно, что при производстве и реализации  $n$  видов продукции условие  $Pr = \sum_{i=1}^n Pr_i = 0$  может быть обеспечено при различных вариантах номенклатуры  $i=1$  выпуска изделий.

Так, безубыточное производство всех трёх видов продукции А, В, С может быть достигнуто при объёме их реализации, равном сумме безубыточной реализации по каждому виду товара (см. табл. 9.3, строка 5):

$$pX_0 = 451,2 + 112,8 + 300,8 = 864,8 \text{ (тыс. грн.)}.$$

В то же время, производя только один вид продукции, безубыточность предприятия согласно формуле (9.10) обеспечивается следующим объёмом реализации:

$$\text{- товара А} \quad pX_0 = 40 \frac{470}{40-20} = 940 \text{ (тыс. грн.)};$$

$$\text{- товара В} \quad pX_0 = 30 \frac{470}{30-15} = 940 \text{ (тыс. грн.)};$$

$$\text{- товара С} \quad pX_0 = 80 \frac{470}{80-30} = 752 \text{ (тыс. грн.)}.$$

Следовательно, найденное по формуле (9.21) значение  $pX_0 = 854,546$  тыс. грн. можно рассматривать как средний объём производства и реализации продукции  $\delta \tilde{O}_0$ , при котором обеспечивается суммарная (по всей номенклатуре) нулевая бухгалтерская прибыль предприятия.

6. Запас прочности как качественный относительный показатель находится на базе формулы (9.12) с учётом общего объёма реализации и точки безубыточности в стоимостном выражении для всего предприятия  $\delta \tilde{O}_0$ :

$$MS = \frac{\sum_{i=1}^n p_i X_i - \overline{pX_0}}{pX_0} \times 100. \quad (9.22)$$

В обсуждаемой задаче запас прочности для всего предприятия составит:

$$MS = \frac{1000 - 854,546}{854,546} \times 100 = 17,021 \text{ \%}.$$

Это означает, что предприятие может снизить суммарный стоимостной объём производства и реализации трёх видов продукции в среднем на 17 % при условии сохранения безубыточности его операционной деятельности.

7. Для расчёта осреднённого производственного рычага  $\bar{L}$ , который характеризует относительную динамику бухгалтерской прибыли в результате изменения объёма производства и реализации количества продукции на один процент по всему предприятию, соотносят общий маржинальный доход с суммарной прибылью:

$$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^n MP_i}{\sum_{i=1}^n Pr_i} = \frac{\sum_{i=1}^n L_i Pr_i}{\sum_{i=1}^n Pr_i}. \quad (9.23)$$

Согласно предыдущим расчётам суммарных маржинальной и бухгалтерской прибыли в данной задаче  $\bar{L}$  для всего предприятия составляет  $550/80 = 6,9$  %. Он также может быть найден как средняя арифметическая взвешенная из леввериджей отдельных видов продукции  $L_i$ , причём в качестве весов используются величины соответствующей бухгалтерской прибыли по каждому изделию:

$$\bar{L} = \frac{16,667 \times 14,4 + 16,667 \times 3,6 + 4,032 \times 62}{14,4 + 3,6 + 62} = \frac{550}{80} = 6,9 \text{ \%}.$$

Следовательно, рост физического объёма производства и реализации продукции на один процент по всему предприятию приводит к повышению его бухгалтерской прибыли в среднем на 6,9 %. При этом необходимо помнить, что снижение объёма производства и реализации выпускаемой продукции на 1 % по всему предприятию, характерное для кризисных периодов в экономике, вызовет падение его прибыли также на 6,9 %.

8. Зная усреднённый производственный рычаг, который, как и леввериджи отдельных изделий, уравнивает соотношение степени доходности и уровня риска в процессе осуществления операционной деятельности, можно по аналогии с формулой (9.16) оценить степень риска производственной деятельности всего предприятия:

$$\bar{R} = 1 - \frac{1}{\bar{L}}. \quad (9.24)$$

В обсуждаемой задаче эта величина составляет

$$\bar{R} = 1 - \frac{1}{6,9} = 0,855.$$

Поэтому можно сделать вывод о том, что данный вид предпринимательской деятельности, связанной с производством и реализацией трёх изучаемых видов продукции, характеризуется достаточно высокой степенью риска, в первую очередь, вследствие выпуска товаров А и В, уровень операционного риска которых 0,94. Как было показано выше, фактические

объёмы их производства находятся вблизи точек безубыточности с запасом прочности всего 6,4 %.

Предпринимательский (производственный) риск заключается в том, что предприятие может не получить запланированную величину прибыли от реализации своей продукции (работ, услуг). Очевидно, что такому результату может способствовать множество различных факторов, например, снижение спроса на продукцию предприятия, усиление конкуренции, рост цен на сырьё и др. Наряду с ними увеличению степени производственного риска способствует высокая доля постоянных затрат предприятия в общей структуре расходов. Чем выше эта доля, тем сильнее вероятность того, что даже незначительное снижение объёма продаж обернется существенными убытками для предприятия.

Помимо влияния на скорость изменения прибыли от реализации продукции предприятия производственного леввериджа, который порождает предпринимательский риск, существует также возможность ускорения увеличения доходов за счёт использования заёмных финансовых средств – кредита банков, эмиссии акций, облигаций и т.п. Если цена привлечённых ресурсов (например, величина процентов по кредиту) ниже уровня доходности, обеспечиваемого активами предприятия, то выгода заимствования становится очевидной. Эффект от использования заёмных финансовых средств называют эффектом финансового рычага или финансовым леввериджем  $L_{\Phi}$ .

В связи с этим для предприятия возникает финансовый риск, связанный с возможностью неполучения бухгалтерской прибыли после выплаты процентов за заимствованные средства. Одним из измерителей риска такого рода является величина финансового рычага  $L_{\Phi}$ , который отражает степень зависимости предприятия от кредиторов, т.е. угрозу потери платёжеспособности.

Очевидно, что сумма процентных платежей увеличивается по мере роста удельного веса заёмного капитала в структуре капитала предприятия. Чем выше финансовый левверидж, тем выше риск, во-первых, неполучения бухгалтерской прибыли, а во-вторых – банкротства самого предприятия. С другой стороны, финансовый рычаг способствует повышению рентабельности собственного капитала: не вкладывая в производство дополнительные собственные средства, роль которых выполняет заёмный капитал, владельцы предприятия получают бо́льшую сумму чистой прибыли, «заработанную» заёмным капиталом.

Будучи постоянной величиной по отношению к прибыли от реализации продукции, сумма процентных платежей играет примерно ту же роль, что и сумма постоянных затрат  $C_0$  в случае операционной деятельности и производственного леввериджа: в точке её покрытия возникает бухгалтерская прибыль и, чем выше плата за кредит, тем быстрее растёт эта прибыль в окрестностях точки покрытия. По мере снижения прибыли от реализации, величина бухгалтерской прибыли также будет уменьшаться непропорционально быстро.

Увеличение доли заёмного капитала создает эффект рычага, действующего в обоих направлениях – как в сторону повышения бухгалтерской прибыли, так и в сторону её снижения. Увеличивая финансовую зависимость от кредиторов, руководство предприятия принимает на себя дополнительный финансовый риск: проценты по кредиту должны быть оплачены независимо от результатов работы, а распределение чистой прибыли, например, выплата дивидендов, осуществляется только на базе бухгалтерской прибыли, которую предприятие может и не получить.

Кроме того, в случае банкротства, кредиторы будут иметь преимущества по сравнению с акционерами предприятия на получение своей доли в его имуществе. Владельцы окажутся последними в очереди претендентов на остаточную стоимость ликвидированного предприятия. Такое значительное повышение риска акционеров компенсируется более высоким уровнем рентабельности собственного капитала, который обеспечивается в случае благополучного исхода использования заёмных финансовых средств.

9. Величину финансового левериджа можно измерять различными показателями. Наиболее распространенным из них является отношение суммы бухгалтерской прибыли от реализации продукции (работ, услуг) к величине этой же прибыли предприятия, уменьшенной на сумму платежей за кредит  $I$ , включающей проценты и «тело» кредита:

$$L_{\phi} = \frac{Pr}{Pr - I}. \quad (9.25)$$

При использовании формулы (9.25) предполагается, что предприятие эффективно применяет привлечённые средства и прибыль от реализации продукции (работ, услуг) не меньше суммы платежей за кредит, т.е.  $Pr \geq I \geq 0$ ;  $L_{\phi} \geq 1$ .

Пусть рассматриваемое предприятие, выпускающее продукцию А, В, С, имеет кредит банка, платежи за который в планируемом периоде составляют 25 тыс. грн. Рассчитаем величину финансового рычага, исходя из найденной по формуле (9.18) суммарной бухгалтерской прибыли предприятия в размере 80 тыс. грн.:

$$L_{\phi} = \frac{80}{80 - 25} = 1,455.$$

10. Зная финансовый леверидж, по аналогии с формулой (9.24) величину финансового риска предприятия можно оценить следующим образом:

$$R_{\phi} = 1 - \frac{1}{L_{\phi}}. \quad (9.26)$$

Отсюда степень финансового риска предприятия равняется:

$$R_{\phi} = 1 - \frac{1}{1,455} = 0,313.$$

11. Следует иметь в виду, что в реальной экономической действительности влияние финансового левеиджа всегда накладывается на эффект производственного рычага. Общий риск предприятия резко возрастает, если производственный и финансовый левеиджи имеют значения, которые существенно превышают единицу. Произведение двух этих показателей называется производственно-финансовым (совокупным) левеиджем  $L_C$ . Объединив формулы (9.23) и (9.25), получим:

$$L_C = \bar{L} \times L_\phi = \frac{MP}{Pr} \times \frac{Pr}{Pr-I} = \frac{MP}{Pr-I}. \quad (9.27)$$

На рассматриваемом предприятии совокупный рычаг составляет:

$$L_C = 6,9 \times 1,455 = 10.$$

Эта величина также может быть найдена как отношение суммарной маржинальной прибыли предприятия (550 тыс. грн.) к разности его бухгалтерской прибыли (80 тыс. грн.) и процентных платежей по кредиту (25 тыс. грн.):

$$L_C = \frac{550}{80 - 25} = 10.$$

12. Рассчитав совокупный левеидж  $L_C = 10$ , можно по аналогии с формулами (9.24), (9.26) определить степень общего риска предприятия, возникающего в результате его производственно-финансовой деятельности:

$$R_C = 1 - \frac{1}{L_C}. \quad (9.28)$$

В данной задаче степень совокупного риска анализируемого предприятия равняется:

$$R_\phi = 1 - \frac{1}{10} = 0,9.$$

Эта довольно высокая величина сигнализирует о том, что руководство предприятия должно оперативно принять эффективные меры по уменьшению степени как производственного, так и финансового рисков для ослабления угрозы падения прибыли от операционной деятельности, снижения платёжеспособности и потенциального банкротства.

Считается, что уменьшение степени производственно-финансового риска возможно на основе использованием одного из трёх следующих вариантов стратегии предприятия:

1) высокий уровень эффекта финансового рычага в сочетании со слабой силой воздействия производственного левеиджа;

2) низкий уровень влияния финансового рычага в сочетании с высокой силой воздействия производственного левеиджа;

3) умеренные уровни эффектов финансового и производственного рычагов.

В заключение приведём финальную табл. 9.4 анализа и планирования безубыточности на исследуемом предприятии – как в разрезе отдельных видов выпускаемой продукции, так и в целом по данному субъекту хозяйственной деятельности в плановом периоде.

Таблица 9.4

Основные показатели анализа и планирования  
безубыточности предприятия

| Показатели   | Обозначения | А      | В      | С      | Всего по предпр. |
|--|-------------|--------|--------|--------|------------------|
| 1. Бухгалтерская прибыль, тыс. грн.                        | $Pr$        | 14,4   | 3,6    | 62     | 80               |
| 2. Маржинальная прибыль, тыс. грн.                         | $MP$        | 240    | 60     | 250    | 550              |
| 3. Коэффициент маржинальной прибыли                        | $K$         | 0,5    | 0,5    | 0,625  | 0,55             |
| 4. Точка безубыточности в натуральном выражении, т         | $X_0$       | 11,28  | 3,76   | 3,76   | -                |
| 5. Точка безубыточности в стоимостном выражении, тыс. грн. | $pX_0$      | 451,2  | 112,8  | 300,8  | 854,546          |
| 6. Запас прочности, %                                      | $MS$        | 6,383  | 6,383  | 32,979 | 17,021           |
| 7. Производственный рычаг, %                               | $L$         | 16,667 | 16,667 | 4,032  | 6,875            |
| 8. Степень предпринимательского риска                      | $R$         | 0,94   | 0,94   | 0,752  | 0,855            |
| 9. Финансовый рычаг  | $L_{\Phi}$  | -      | -      | -      | 1,455            |
| 10. Степень финансового риска                              | $R_{\Phi}$  | -      | -      | -      | 0,313            |
| 11. Совокупный рычаг                                       | $L_C$       | -      | -      | -      | 10               |
| 12. Степень совокупного риска                              | $R_C$       | -      | -      | -      | 0,9              |

Систематическое и интерактивное использование показателей табл. 9.4 в плано-аналитической работе экономических служб предприятия позволит научно обоснованно сориентировать его менеджеров на достижение высокой прибыльности его производственно-финансовой деятельности.

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Имеются следующие данные по производству и реализации продукции А и В на предприятии (табл. 9.5). Известно, что постоянные затраты распределяются по видам продукции пропорционально объёмам их реализации.

Таблица 9.5

Исходные данные для проведения анализа и планирования безубыточности предприятия

| Вариант 1                                 |  | Изделие |    |
|---|--|---------|----|
| Плановые показатели                       |  | А       | В  |
| 1. Количество изделий, штук               |  | 20      | 10 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              |  | 40      | 30 |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          |  | 420     |    |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. |  | 20      | 15 |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      |  | 40      |    |
| Вариант 2                                 |  | Изделие |    |
| Плановые показатели                       |  | А       | В  |
| 1. Количество изделий, штук               |  | 25      | 8  |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              |  | 30      | 50 |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          |  | 650     |    |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. |  | 10      | 20 |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      |  | 35      |    |
| Вариант 3                                 |  | Изделие |    |
| Плановые показатели                       |  | А       | В  |
| 1. Количество изделий, штук               |  | 50      | 30 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              |  | 22      | 18 |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          |  | 450     |    |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. |  | 15      | 12 |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      |  | 25      |    |
| Вариант 4                                 |  | Изделие |    |
| Плановые показатели                       |  | А       | В  |
| 1. Количество изделий, штук               |  | 40      | 20 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              |  | 20      | 18 |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          |  | 250     |    |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. |  | 15      | 13 |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      |  | 20      |    |
| Вариант 5                                 |  | Изделие |    |
| Плановые показатели                       |  | А       | В  |
| 1. Количество изделий, штук               |  | 80      | 70 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              |  | 10      | 8  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          |  | 650     |    |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. |  | 5       | 3  |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      |  | 30      |    |
| Вариант 6                                 |  | Изделие |    |
| Плановые показатели                       |  | А       | В  |
| 1. Количество изделий, штук               |  | 60      | 55 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              |  | 10      | 8  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          |  | 550     |    |

|   |      |     |
|---|------|-----|
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 4    | 3   |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 15   |     |
| Вариант 7                                 |      |     |
| Изделие                                   |      |     |
| Плановые показатели                       | А    | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 100  | 75  |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 15   | 14  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 900  |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 9    | 8   |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 50   |     |
| Вариант 8                                 |      |     |
| Изделие                                   |      |     |
| Плановые показатели                       | А    | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 120  | 95  |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 25   | 40  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 1500 |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 15   | 28  |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 140  |     |
| Вариант 9                                 |      |     |
| Изделие                                   |      |     |
| Плановые показатели                       | А    | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 110  | 195 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 5    | 4   |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 500  |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 1    | 2   |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 30   |     |
| Вариант 10                                |      |     |
| Изделие                                   |      |     |
| Плановые показатели                       | А    | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 80   | 95  |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 25   | 45  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 1450 |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 19   | 26  |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 135  |     |
| Вариант 11                                |      |     |
| Изделие                                   |      |     |
| Плановые показатели                       | А    | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 800  | 250 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 2    | 4,5 |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 1300 |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 0,9  | 1,6 |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 45   |     |
| Вариант 12                                |      |     |
| Изделие                                   |      |     |
| Плановые показатели                       | А    | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 500  | 350 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 12   | 40  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 1700 |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 10   | 26  |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 200  |     |
| Вариант 13                                |      |     |
| Изделие                                   |      |     |
| Плановые показатели                       | А    | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 40   | 35  |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 22   | 55  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 900  |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 12   | 28  |

|   |         |     |
|---|---------|-----|
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 45      |     |
| Вариант 14                                | Изделие |     |
| Плановые показатели                       | А       | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 70      | 85  |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 12      | 25  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 1200    |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 4       | 8   |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 105     |     |
| Вариант 15                                | Изделие |     |
| Плановые показатели                       | А       | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 150     | 105 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 10      | 15  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 1400    |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 3       | 5   |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 100     |     |
| Вариант 16                                | Изделие |     |
| Плановые показатели                       | А       | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 170     | 135 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 31      | 17  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 1200    |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 23      | 11  |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 170     |     |
| Вариант 17                                | Изделие |     |
| Плановые показатели                       | А       | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 130     | 250 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 21      | 28  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 1700    |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 15      | 18  |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 280     |     |
| Вариант 18                                | Изделие |     |
| Плановые показатели                       | А       | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 30      | 20  |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 26      | 38  |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 700     |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 10      | 14  |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 60      |     |
| Вариант 19                                | Изделие |     |
| Плановые показатели                       | А       | В   |
| 1. Количество изделий, штук               | 200     | 270 |
| 2. Цена 1 изделия, тыс. грн.              | 6       | 8   |
| 3. Постоянные затраты, тыс. грн.          | 1550    |     |
| 4. Удельные переменные затраты, тыс. грн. | 2       | 4   |
| 5. Платёж за кредит банка, тыс. грн.      | 30      |     |

По данным, соответствующим номеру Вашего варианта, по каждому из запланированных к выпуску видов продукции на предприятии осуществить:

1. Расчёт удельных постоянных и переменных затрат на производство.
2. Нахождение точек безубыточности в натуральном выражении с помощью:
  - 2.1 метода уравнений;
  - 2.2 графического метода.
3. Расчёт точек безубыточности в стоимостном выражении на основе:
  - 3.1 метода предварительного нахождения маржинальной прибыли;
  - 3.2 метода определения коэффициентов маржинальной прибыли.
4. Проверить правильность нахождения точек безубыточности в натуральном и стоимостном выражении.
5. Анализ величины коэффициентов маржинальной прибыли.
6. Расчёт показателей запаса прочности.
7. Определение производственного рычага.
8. Оценку степени риска производства и реализации каждого вида продукции.

Результаты расчётов оформить в виде финальной таблицы по типу табл. 9.3.

9. Проведение анализа и планирования безубыточности на уровне предприятия. С этой целью для всего изучаемого предприятия определить:
  - 9.1 бухгалтерскую прибыль;
  - 9.2 маржинальную прибыль;
  - 9.3 коэффициент маржинальной прибыли;
  - 9.4 точку безубыточности в стоимостном выражении;
  - 9.5 запас прочности;
  - 9.6 производственный рычаг;
  - 9.7 степень производственного риска;
  - 9.8 финансовый рычаг;
  - 9.9 степень финансового риска;
  - 9.10 совокупный рычаг;
  - 9.11 степень совокупного риска.

Результаты расчётов оформить в виде финальной таблицы по типу табл. 9.4.

По каждому пункту дать краткие экономико-математические и экономико-статистические пояснения и выводы.

## ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 9

1. Анализ безубыточности [Электронный ресурс] / Корпоративные стратегии. – № 43. – Режим доступа : <http://www.eg-online.ru/article/54759/>
2. Бригхэм Ю. Финансовый менеджмент [Электронный ресурс] : учебник / Бригхэм Ю. – Режим доступа : <http://books.efaculty.kiev.ua/finan/1/>
3. Васина А. А. Дойти до точки ... безубыточности [Электронный ресурс] / Васина А. А. // The Chief. – 2002. – № 2. – Режим доступа к журн. : <http://www.ippnou.ru/article.php?idarticle=000568>
4. Егорова Л. И. Бухгалтерский управленческий учет / Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права. – М., 2003. – 55 с.
5. Ивахник Д. Е. Анализ безубыточности в маркетинговой деятельности предприятия [Электронный ресурс] / Ивахник Д. Е. // Маркетинг в России и за рубежом. – 2000. – № 1. – Режим доступа : <http://region.dn.ua/pages/business/746.html>
6. Керимов В. Э., Роженецкий О. А. Анализ соотношения «затраты – объём – прибыль» / Маркетинг в России и за рубежом. – № 4. – 2000 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : – <http://www.cfin.ru/press/management/2000-4/12.shtml>
7. Ковальов А. І., Янковий В. О. Управління прибутковістю підприємства на основі виробничо-фінансового левериджу / А. І. Ковальов, В. О. Янковий // Південноукраїнський правничий часопис. – Одеса, ОДУВС, 2008. – № 4. – С. 249-253.
8. Курятник П. Анализ чувствительности взаимосвязи «затраты – объём – прибыль» / П. Курятник // Справочник экономиста. – 2010. – № 9. – С. 23-31.
9. Лебеда Т. Анализ безубыточности и маржинальной прибыли в процессе планирования производства / Т. Лебеда // Теория и практика управления. – 2003. – № 4. – С. 13-17.
10. Лытнев О. Основы финансового менеджмента [Электронный ресурс] : курс лекций / О. Лытнев – Режим доступа : <http://books.efaculty.kiev.ua/fnmen/3/g5/7.htm>
11. Методика анализа безубыточности для многономенклатурного производства [Электронный ресурс] : Управление издержками предприятия и анализ безубыточности / Савчук В. П. – Режим доступа : <http://www.vuzlib.net/beta3/html/1/4470/4479>
12. Никонова И. А. Использование маржинального анализа в принятии управленческих решений [Электронный ресурс] / Никонова И. А. – Центр дистанционного образования «Элитариум» (Санкт-Петербург) – Режим доступа : <http://www.rusconsult.ru/cms-ews.php?mode=viewnews&id=192>
13. Орлов О. О. Планування діяльності промислового підприємства : [підруч.] / Орлов О. О. – К. : Скарби, 2002. – 336 с.

14. Орлов О. А. Маржинальная прибыль в экономических расчётах на промышленных предприятиях / О. А. Орлов, Е. Г. Рясных. – К. : Издательский дом «Скарбы», 2003. – 132 с.

15. Финансовый бизнес-план : Учеб. пособие / Под ред. В. М. Попова. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 480 с.

16. Цал-Цалко Ю. С. Фінансовий аналіз : [підруч.] / Цал-Цалко Ю. С. – К. : Центр учбової літератури, 2008. – 566 с.

17. Янковий О. Г., Гура О. Л. Оптимізація параметрів тактичних планів підприємства на основі граничного аналізу / Торгівля і ринок. – ДонНУЕТ, 2007, вип. 23, с. 148-153.

18. Янковий О. Г., Яшкіна О. І. Оптимізація параметрів маркетингової програми на базі граничного аналізу / Матер. 3-ї Міжнар. наук.-практ. конф. «Сучасні технол. управл. підприємством та можлив. використ. інф. систем : стан, проблеми, перспективи». – Одеса, 2008, ОНУ, с.145-149.

19. Янковой А. Г. Применение левириджа в финансовом анализе предприятий / Матер. 4-ї Міжнар. наук.-практ. конф. «Сучасні технол. управл. підприємством та можлив. використ. інф. систем: стан, проблеми, перспективи». – Одеса, 2009, ОНУ. – С.189-194.

20. Янковий О. Г., Кошельок Г. В., Куперман В.В. Дослідження чутливості прибутку підприємства за допомогою граничного аналізу / Південноукраїнський правничий часопис. – Одеса, ОДУВС, 2009. – № 1. – С. 253-255.

21. Янковой А. Г. *SVP*-анализ или как выжить предприятию в условиях кризиса. – Актуальные проблемы экономики и менеджмента : теория, инновации и современная практика : Монография // Под ред. Э. А. Кузнецова. – Харьков : Бурун Книга, 2011. – С.267-290.

22. Янковий В. О. Антикризове управління підприємством на основі аналізу беззбитковості / В. О. Янковий, В. В. Куперман // Вісник соціально-економічних досліджень : зб. наук. пр. – Одеса, 2009. – № 36. – С. 222-228.

## 10. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ

В условиях централизованной системы управления экономикой проблема формирования перечня видов выпускаемой продукции (работ, услуг) для предприятий практически не существовала. Ежегодно в централизованном порядке им устанавливались задания по номенклатуре и ассортименту, а «от достигнутого уровня» отчетного года планировалось увеличение объёма производства, повышение производительности труда, снижение себестоимости продукции, рост прибыли и т.п.

При переходе к рыночным отношениям никто самостоятельным предприятиям заданий по номенклатуре и ассортименту не устанавливает. Но для самих предприятий эта проблема становится актуальной, потому что, по сути, она тесно связана с их выживанием в острой конкурентной борьбе. И, естественно, главная цель – получение прибыли, т.к. предприятие, не ориентированное на получение растущей прибыли в условиях конкуренции, обречено на банкротство.

Функционирование современных предприятий, особенно в период экономического кризиса, требует от их руководства особой концентрации усилий на «выживании» в непростых рыночных условиях. Это, в свою очередь, требует повышенного внимания к планированию деятельности предприятия на предстоящий период, взвешенного подхода к формированию производственной программы и выбора рыночных приоритетов.

Очевидно, что одним из факторов успеха в конкурентной борьбе является разработка производственной программы, которая, с одной стороны, базировалась бы на эффективном использовании всех имеющихся в распоряжении предприятия материальных, финансовых, трудовых и др. ресурсов, а, с другой стороны, обеспечивала бы максимальный размер прибыли или выручки от реализации продукции (работ, услуг). Поэтому существенное значение приобретает анализ основных предпосылок производственного планирования, а также выбор методов и моделей оптимизации финансово-экономических результатов деятельности предприятия в условиях ограниченности ресурсов.

Анализ важнейших составляющих процедуры формирования плана производства на предприятии позволяет выделить следующие его четыре крупнённые стадии (см. рис. 10.1).

Если первые две стадии, а также их объединение – третья стадия (обоснование производственной программы по спросу, мощности и др. ресурсам предприятия) являются сравнительно хорошо изученными и не вызывают особых проблем, то четвёртая стадия – оптимизация производственной программы, не столь однозначна. Это связано, прежде всего, с выбором методов и подходов к осуществлению процедуры оптимизации.

Под оптимизацией производственной программы предприятия обычно понимают выбор такого плана производства, который в условиях заданных ресурсов обеспечивает достижение наилучших финансовых результатов.



Рис. 10.1. Укрупнённая процедура формирования производственной программы предприятия

Например, в качестве оптимального может рассматриваться план производства, максимизирующий бухгалтерскую прибыль или доход от реализации продукции, (работ, услуг), либо такая программа выпуска продукции, которая минимизирует общие издержки, потери на производстве – себестоимость продукции, простои оборудования, потери рабочего времени и т.п. Указанная стадия занимает одно из центральных мест в системе управления производством, поскольку от неё существенно зависят конечные результаты деятельности субъекта хозяйствования.

Распространённым является также такое определение: оптимальная производственная программа – это программа, которая наилучшим образом соответствует структуре ресурсов предприятия и обеспечивает наиболее эффективные результаты его деятельности по принятому критерию.

Оптимизация производственной программы базируется на следующем теоретическом положении: в условиях ограниченности ресурсов (трудовых, материальных, финансовых и др.) план производства предприятия должен быть сориентированным на максимально эффективное их использование. При переходе к рыночным отношениям и усилении конкурентной борьбы за рынки сбыта указанное положение приобретает особую актуальность, поскольку нерациональное применение производственных ресурсов неизбежно приводит к постепенному снижению конкурентоспособности как его продукции (работ, услуг), так и самого предприятия, а в итоге – к банкротству.

На практике наиболее распространённым является однокритериальный подход к нахождению оптимального годового плана производства продукции (работ, услуг). В качестве целевой функции или локального критерия функционирования промышленного предприятия обычно выступает один из результативных показателей его производственно-хозяйственной деятельнос-

ти – прибыль, рентабельность, объём реализации, себестоимость продукции и т.п. Данная ситуация объясняется тем, что исторически первыми экономико-математическими моделями оптимизации производства были однокритериальные модели задач линейного программирования, которые успешно решались с помощью симплекс-метода. В общем виде эта модель оптимизации производственной программы предприятия выглядит так:

$$Z = \tilde{n}_1 \tilde{O}_1 + \tilde{n}_2 \tilde{O}_2 + \dots + \tilde{n}_n X_n = \sum_{s=1}^n \tilde{n}_s \tilde{O}_s \rightarrow \max \text{ (min)},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} X_1 + a_{21} X_2 + \dots + a_{n1} X_n = \sum_{i=1}^n a_{i1} X_s \leq b_1, \\ a_{12} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{n2} X_n = \sum_{i=1}^n a_{i2} X_s \leq b_2, \\ \dots \\ a_{1k} X_1 + a_{2k} X_2 + \dots + a_{nk} X_n = \sum_{i=1}^n a_{ik} X_s \leq b_k. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq X_1 \leq \tilde{O}_{01} \\ 0 \leq X_2 \leq \tilde{O}_{02} \\ \dots \\ 0 \leq X_n \leq \tilde{O}_{0n}, \end{array} \right. \quad (10.1)$$

где  $i$  – номер вида продукции, запланированной к выпуску,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  
 $j$  – номер ресурса, используемого при производстве запланированного выпуска продукции,  $j = 1, 2, \dots, k$ ;  
 $X_i$  – искомый объём запланированной продукции  $i$ -го вида;  
 $a_{ij}$  – нормативная величина расходов  $j$ -го ресурса на производство единицы продукции  $i$ -го вида;  
 $b_j$  – объём ресурса  $j$ -го вида;  
 $c_i$  – коэффициенты при искомым неизвестных в целевой функции;  
 $X_{0i}$  – максимально возможный выпуск продукции  $i$ -го вида.

В модели (10.1) задается критерий оптимальности и его математическая форма – целевая функция  $Z$ , в роли которой, как уже говорилось, может выступать один из результативных показателей производственно-хозяйственной деятельности предприятия. Если  $c_i$  – показатели-стимуляторы, рост которых желателен с экономической точки зрения (удельная прибыль, рентабельность и т.п.), то задача решается на максимум целевой функции  $Z$ . В противном случае, когда  $c_i$  – показатели-дестимуляторы, которые необходимо снижать (себестоимость единицы продукции, потери рабочего времени, простой технологического оборудования и т.п.), то целевая функция  $Z$  минимизируется.

При этом принимается ряд ограничений, первая система которых означает, что трудоёмкость программы, затраты материальных, финансовых и др. производственных ресурсов не могут превышать их потенциально возможного лимита  $b_i$  на предприятии.

Левая часть второй системы ограничений указывает на то, что продукция  $X_i$  производится, а не потребляется. В модели оптимизации производственной программы предприятия в данных ограничениях часто добавляется правая часть неравенства (верхняя граница  $X_{0i}$  выпуска продукции), которая обусловлена реальным рыночным спросом на продукцию  $i$ -го вида или мощностью предприятия по её производству, когда спрос относительно неограниченный.

Множество планов производства  $y_1(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n}), y_2(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n}), \dots$ , удовлетворяющих обеим системам ограничений модели (10.1), называется допустимыми вариантами производственной программы. А допустимый план  $y_0(X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0n})$ , который обеспечивает экстремальное значение целевой функции  $Z$ , называется оптимальной производственной программой предприятия (рис. 10.2).

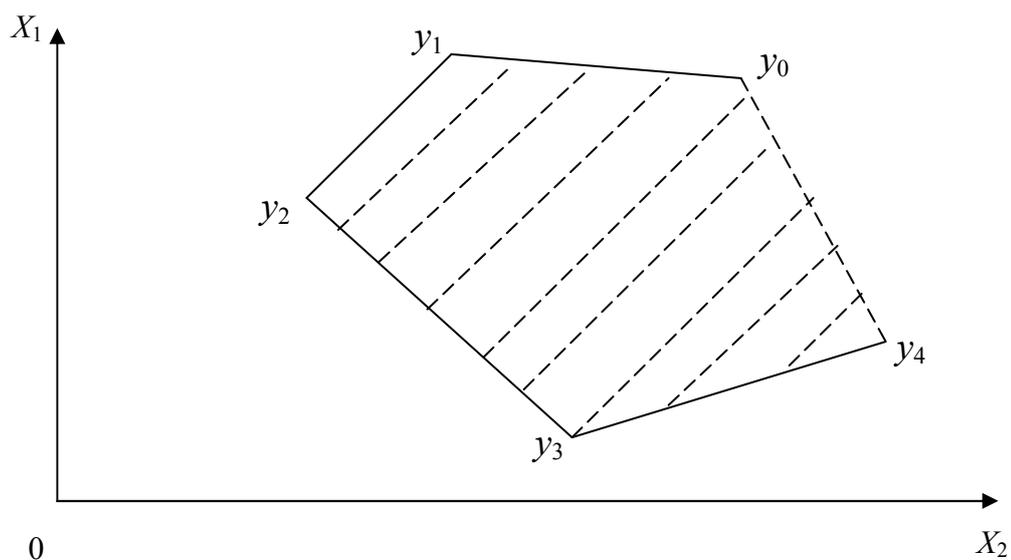


Рис. 10.2. Множество допустимых планов производства и оптимальный план  $y_0$  при условии выпуска двух видов продукции ( $n = 2$ ) и решении задачи на максимум целевой функции  $Z$

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие однокритериальную (по величине бухгалтерской прибыли и выручки от реализации продукции) оптимизацию производственной программы предприятия, выпускающего 6 видов изделий. Важнейшие удельные показатели по каждому виду продукции, наблюдаемые на предприятии в предплановом году, приведены в табл. 10.1.

Данные табл. 10.1 указывают на то, что производственная программа предприятия предполагала производство в предплановом году как

высокодоходной продукции, например, *B*, *D* (рентабельность 37,8 и 25,5 % соответственно), так и сравнительно низкодоходных товаров – *E*, *F* (рентабельность 10,8 и 0,7 % соответственно).

Таблица 10.1

Удельные показатели производства продукции  
на предприятии в предплановом году

| Виды продукции | Себестоимость продукции, грн. | Цена, грн. | Прибыль, грн. | Рентабельность продукции, % |
|----------------|-------------------------------|------------|---------------|-----------------------------|
| <i>A</i>       | 11819                         | 13600      | 1781          | 15,1                        |
| <i>B</i>       | 429                           | 591        | 162           | 37,8                        |
| <i>C</i>       | 2550                          | 3086,6     | 536,6         | 21,0                        |
| <i>D</i>       | 882                           | 1107       | 225           | 25,5                        |
| <i>E</i>       | 7479                          | 8290       | 811           | 10,8                        |
| <i>F</i>       | 5391                          | 5429       | 38            | 0,7                         |

Наличие средне- и низкодоходных видов продукции вызывает необходимость оптимизировать производственную программу, т.е. разработать такой план производства, который бы предусматривал выпуск наиболее прибыльных изделий.

Содержание задачи однокритериальной оптимизации заключается в следующем: с учётом ограниченного объёма ресурсов и производственной мощности предприятия определить такой план производства продукции *A* – *F*, который обеспечивал бы максимальную сумму прибыли от её реализации. Исходные данные для построения модели линейного программирования, обеспечивающей решение поставленной задачи, содержатся в табл. 10.1 – 10.3

Таблица 10.2

Нормы затрат на производство единицы  
продукции, грн.

| Виды продукции | Материальные затраты | Заработная плата | Электро-энергия |
|----------------|----------------------|------------------|-----------------|
| <i>A</i>       | 8478,10              | 850,66           | 236,71          |
| <i>B</i>       | 238,61               | 23,94            | 6,66            |
| <i>C</i>       | 1494,27              | 149,93           | 41,72           |
| <i>D</i>       | 570,71               | 57,26            | 15,93           |
| <i>E</i>       | 5381,02              | 539,91           | 150,24          |
| <i>F</i>       | 1587,59              | 159,29           | 44,33           |

Кроме того, известны предельные значения общих расходов, связанных с покупкой предприятием в плановом году сырья и материалов, рабочей силы, электроэнергии. Так, по материальным затратам предельный объём составляет 267525600 грн.; по расходам на заработную плату – 31983840 грн.; по затратам на электроэнергию – 276312200 грн.

Известны также предельные значения спроса на продукцию и мощность предприятия (табл. 10.3).

Таблица 10.3

Предельные значения выпуска и спроса на продукцию предприятия, ед.

| Виды продукции | Мощность оборудования | Реальный спрос на продукцию |
|----------------|-----------------------|-----------------------------|
| <i>A</i>       | 10000                 | 15000                       |
| <i>B</i>       | 130000                | 130000                      |
| <i>C</i>       | 2500                  | 3000                        |
| <i>D</i>       | 450000                | 45000                       |
| <i>E</i>       | 20000                 | 15000                       |
| <i>F</i>       | 100000                | 110000                      |

Таким образом, целевая функция, отображающая суммарную прибыль от реализации продукции предприятия, будет иметь следующий вид:

$$Z = 1781 X_1 + 162 X_2 + 536,6 X_3 + 225 X_4 + 811 X_5 + 38 X_6 \rightarrow \max, \quad (10.2)$$

где  $X_1$  – плановый объём производства продукции *A*;  
 $X_2$  – плановый объём производства продукции *B*;  
 $X_3$  – плановый объём производства продукции *C*;  
 $X_4$  – плановый объём производства продукции *D*;  
 $X_5$  – плановый объём производства продукции *E*;  
 $X_6$  – плановый объём производства продукции *F*.

Коэффициенты при неизвестных  $X_1 - X_6$  в выражении (10.2) – прибыль от реализации единицы продукции (см. предпоследний столбец табл. 10.1). Введём ограничения к заданной целевой функции:

1) стоимость потребленных ресурсов для производственной программы должна быть ограничена имеющимися на предприятии их объёмами. Ограничение на расходы материальных ресурсов будет иметь следующий вид:

$$8478,10 X_1 + 38,61 X_2 + 1494,27 X_3 + 570,71 X_4 + 5381,02 X_5 + 1587,59 X_6 \leq 267525600.$$

Ограничение на выплаты по заработной плате таково:

$$850,66 X_1 + 23,94 X_2 + 149,93 X_3 + 57,26 X_4 + 539,91 X_5 + 159,29 X_6 \leq 31983840.$$

Ограничения на расходы электроэнергии выглядят следующим образом:

$$236,71 X_1 + 6,66 X_2 + 41,72 X_3 + 15,93 X_4 + 150,24 X_5 + 44,33 X_6 \leq 76312200. \quad (10.3)$$

2) объёмы производства в оптимальной производственной программе должны быть неотрицательны и ограничены реальным спросом на продукцию предприятия в плановом году, поскольку имеющиеся производственные мощности предприятия используются далеко не полностью (см. табл. 10.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq X_1 \leq 10000 \\ 0 \leq X_2 \leq 130000 \\ 0 \leq X_3 \leq 2500 \\ 0 \leq X_4 \leq 45000 \\ 0 \leq X_5 \leq 15000 \\ 0 \leq X_6 \leq 100000 \end{array} \right. \quad (10.4)$$

Итак, модель однокритериальной оптимизации производственной программы включает целевую функцию (10.2) в виде суммарной прибыли от реализации продукции предприятия, систему ограничений на затраты материальных, трудовых ресурсов и электроэнергию (10.3), а также на выпуск продукции (10.4).

Данная задача была решена с помощью редактора *Excel* на базе стандартной программы «Поиск решения» (табл. 10.4).

Таблица 10.4

Результаты решения задачи однокритериальной оптимизации (по прибыли) производственной программы предприятия на плановый год

| Целевая функция: суммарная прибыль от реализации продукции предприятия |        |          |        |         |          |             |    |           |
|--|--------|----------|--------|---------|----------|-------------|----|-----------|
| $X_1$  | $X_2$  | $X_3$    | $X_4$  | $X_5$   | $X_6$    | $S$         |    |           |
| 10000  | 130000 | 2500     | 45000  | 15000   | 26198,44 | 63497040,57 |    |           |
| 1781   | 162    | 536,6    | 225    | 811     | 38       |             |    |           |
| Система ограничений  |        |          |        |         |          |             |    |           |
| 0  | <=     | 10000    |        |         |          | 10000       | <= | 10000     |
| 0  | <=     | 130000   |        |         |          | 130000      | <= | 130000    |
| 0  | <=     | 2500     |        |         |          | 2500        | <= | 2500      |
| 0  | <=     | 45000    |        |         |          | 45000       | <= | 45000     |
| 0  | <=     | 15000    |        |         |          | 15000       | <= | 15000     |
| 0  | <=     | 26198,44 |        |         |          | 26198,44    | <= | 100000    |
| 8478,1   | 238,61 | 1494,27  | 570,71 | 5381,02 | 1587,59  | 267525600   | <= | 267525600 |
| 850,66   | 23,94  | 149,93   | 57,26  | 539,91  | 159,29   | 26842123,87 | <= | 31983840  |
| 236,71   | 6,66   | 41,72    | 15,93  | 150,24  | 44,33    | 7469026,668 | <= | 76312200  |

Во второй строке табл. 10.4, в соответствующих столбцах показана производственная программа предприятия на плановый год, которая обеспечивает получение максимальной прибыли от реализации продукции  $A - F$  в размере 63497040,57 грн. (столбец  $S$ ).

Следовательно, максимизацию данного критерия обуславливает выпуск продукции  $A$  в размере 10000 ед.,  $B - 130000$  ед.,  $C - 2500$  ед.,  $D - 45000$  ед.,  $E - 15000$  ед.,  $F - 26198,44$  ед.

Сопоставляя данные табл. 10.3 и 10.4, можно проанализировать степень использования производственной мощности технологического оборудования и ресурсов предприятия при условии принятия данного оптимального плана производства. Так, оборудование, используемое при выпуске продукции  $F$ , мощность которого 100000 ед., будет задействовано лишь на 26,2 % (см. правое неравенство строки 11 табл. 10.4).

В то же время указанный оптимальный план обусловит недоиспользование имеющихся лимитов на затраты по заработной плате на 5141716,13 грн. и по электроэнергии на 68843173,33 грн. (см. правые неравенства строки 13 и 14 табл. 10.4).

Действуя аналогично, можно записать модель однокритериальной оптимизации производственной программы, которая включает целевую функцию в виде суммарного дохода (выручки от реализации продукции) предприятия (см. табл. 10.1, столбец «цена»):

$$Z = 13600 X_1 + 591 X_2 + 3086,6 X_3 + 1107 X_4 + 8290 X_5 + 5429 X_6 \rightarrow \max \quad (10.5)$$

и систему ограничений (10.3), (10.4).

Решение данной задачи с помощью редактора *Excel* на базе стандартной программы «Поиск решения» приведено в табл. 10.5.

Таблица 10.5

Результаты решения задачи однокритериальной оптимизации (по размеру дохода) производственной программы предприятия на плановый год

| Целевая функция: выручка от реализации продукции предприятия |        |         |        |         |         |            |    |           |
|--|--------|---------|--------|---------|---------|------------|----|-----------|
| $X_1$  | $X_2$  | $X_3$   | $X_4$  | $X_5$   | $X_6$   | $S$        |    |           |
| 5700,53  | 130000 | 2500    | 45000  | 0       | 100000  | 754788727  |    |           |
| 13600  | 591    | 3086,6  | 1107   | 8290    | 5429    |            |    |           |
| Система ограничений  |        |         |        |         |         |            |    |           |
| 0  | <=     | 5700,53 |        |         |         | 5700,53    | <= | 10000     |
| 0  | <=     | 130000  |        |         |         | 130000     | <= | 130000    |
| 0  | <=     | 2500    |        |         |         | 2500       | <= | 2500      |
| 0  | <=     | 45000   |        |         |         | 45000      | <= | 45000     |
| 0  | <=     | 0       |        |         |         | 0          | <= | 15000     |
| 0  | <=     | 100000  |        |         |         | 100000     | <= | 100000    |
| 8478,1   | 238,61 | 1494,27 | 570,71 | 5381,02 | 1587,59 | 267525600  | <= | 267525600 |
| 850,66   | 23,94  | 149,93  | 57,26  | 539,91  | 159,29  | 26841939   | <= | 31983840  |
| 236,71   | 6,66   | 41,72   | 15,93  | 150,24  | 44,33   | 7469322,78 | <= | 76312200  |

Из табл. 10.5 следует, что максимальная выручка от реализации продукции предприятия, равная 754788727 грн., будет достигнута при выпуске продукции  $A$  в размере 5700,53 ед.,  $B$  – 130000 ед.,  $C$  – 2500 ед.,  $D$  – 45000 ед.,  $E$  – 0 ед.,  $F$  – 100000 ед. Очевидно, что данная производственная

программа отличается от предыдущей, направленной на максимизацию бухгалтерской прибыли предприятия.

Для полученного плана, как и для предыдущей оптимальной производственной программы, возможен анализ степени использования производственной мощности технологического оборудования и ресурсов предприятия.

Например, оборудование, используемое при выпуске продукции  $E$ , мощность которого 15000 ед., вообще не будет задействовано, поскольку данный вид товара не предусмотрен планом. А оборудование, предназначенное для выпуска продукции  $A$ , будет использовано на 57 % (см. правые неравенства строк 10 и 6 табл. 10.5).

Кроме того, найденный план также предусматривает недоиспользование ресурсов предприятия, а именно: затрат по заработной плате и электроэнергии (см. правые неравенства строки 13 и 14 табл. 10.5).

Обсуждая преимущества и недостатки классической модели оптимизации (10.1) с целевой функцией  $Z$  в виде бухгалтерской прибыли, следует иметь в виду следующие реалии рыночной экономики.

1. В модели оптимизации производственной программы (10.1), которая разрабатывалась в эпоху централизованного управления в условиях «мягкой» конкуренции в виде социалистического соревнования между товаропроизводителями, предполагается, что предприятие обычно пользуется рыночными ценами, определяющими удельную прибыль – коэффициенты целевой функции  $Z$ . Однако в современных рыночных реалиях, особенно во время финансово-экономического кризиса, когда конкурентная борьба проявляется в довольно жёсткой форме, предприятия часто используют методы ценовой конкуренции. В этих условиях они могут устанавливать заниженные (демпинговые) или завышенные (монопольные) цены на производимую продукцию (работы, услуги).

Очевидно, что использование рыночных цен в принципе возможно, но лишь при условии совершенной конкуренции, когда все предприятия отрасли имеют небольшие размеры и выпускают однородную продукцию. При этом каждое из них не может существенно повлиять на рыночную цену определенного изделия. Поэтому проблемы ценовой политики товаропроизводителя сегодня также приобретают актуальность наряду с вопросами разработки оптимальной производственной программы предприятия, поскольку они существенно влияют на объективность коэффициентов  $c_i$  целевой функции  $Z$ , в частности, когда она выражает бухгалтерскую прибыль.

2. Необходимо помнить, что коэффициенты  $c_i$  целевой функции  $Z$ , характеризующие удельную бухгалтерскую прибыль предприятия, отражают доходность не будущих номенклатуры и ассортимента выпуска продукции (работ, услуг), а прошлых, зафиксированных в предплановом периоде. Поэтому коэффициенты целевой функции  $Z$  нельзя рассматривать как постоянные: с ростом объёмов производства  $X_i$  фактические величины  $c_i$  тоже растут, а с уменьшением  $X_i$  – снижаются. Это означает, что в условиях

экономического подъёма, когда производство на предприятии растёт, целевая функция модели (10.1) даёт несколько заниженную оценку прибыли в оптимальном плане. Причем последний на самом деле может оказаться и не совсем оптимальным вследствие изменений в структуре удельных постоянных и переменных затрат. По аналогичным причинам в условиях экономического кризиса целевая функция модели (10.1) даёт несколько завышенную оценку прибыли в конечном варианте, оптимальность которого также вызывает определённые сомнения.

Предложения применять в качестве коэффициентов целевой функции  $Z$  иные, зависящие от величины  $X_i$  величины, как правило, приводят к постановке задачи нелинейного программирования, в частности – динамического программирования.

Как было отмечено выше, однокритериальная оптимизация производственной программы предприятия является исторически первой и наиболее популярной в современной экономической теории и практике. Однако во второй половине XX века начал активно развиваться так называемый многокритериальный подход в экономико-математическом моделировании производственных систем. Теоретической базой многокритериального подхода служат основные положения стратегии развития предприятия, в частности, его миссия и целевые установки.

Общеизвестно, что деятельность любого предприятия объективно очень разнообразна, поэтому организация не может быть сосредоточена только на единственной цели, а должна определить несколько наиболее значимых ориентиров действия. Сегодня признанной является социальная ответственность бизнеса. Он должен благотворно влиять на общественную жизнь не только узко в смысле повышения возможностей для материального роста, но и широко, отвечая общепринятым человеческим ценностям, обеспечивая население страны качественными товарами и услугами, формируя благоприятную экологическую среду, участвуя в решении острых социальных проблем.

В связи с этим возникает следующий вопрос: какого рода цели можно считать наиболее важными, решающими для предприятия? Многолетняя научная дискуссия и опросы, проведенные в фирмах, показали примерно одни и те же результаты. Специалисты по планированию пришли к общему мнению, что наиболее значимыми являются финансовые цели, а если точнее – прибыль, показатели доходности. Прибыль занимает лидирующее положение в иерархии целей экономической организации.

Вместе с тем, ключевой для предприятия может стать совокупность нескольких, чаще всего двух-трёх взаимосвязанных целей. Так, компания «Лукойл», исходя из своей миссии, определила в качестве основных стратегических целей рост производственного потенциала и комплексную рационализацию управления компанией.

Нельзя преувеличивать значение прибыли как цели деятельности предприятия. Если руководство не будет обращать внимание на фундаментальные интересы, кроме интересов акционеров, то подобная

стратегия даст хорошие финансовые результаты только в краткосрочном периоде. А в долгосрочном периоде игнорирование ценностей других участников внутренней и внешней среды предприятия может создать серьёзные финансовые проблемы.

Если предприятие безразлично к проблемам окружающей среды и в погоне за прибылью нарушает нормы природопользования, то под угрозой может оказаться сама возможность его функционирования.

Недооценка мнения покупателей чревата снижением качества продукции (работ, услуг) и уменьшением объёма продаж. Не менее важными стратегическими факторами являются интересы работников самого предприятия.

Все указанные положения стали серьёзным импульсом для бурного развития в последние годы многокритериального подхода к оптимизации производственной программы предприятия, которая интерпретируется как процесс одновременной оптимизации двух или более целевых функций в заданной области определения. С позиций данного подхода целевая функция  $Z$  модели задачи линейного программирования (10.1) рассматривается как локальный критерий оптимальности.

Следует отметить, что в зависимости от целей, положенных в основу будущего плана производства продукции (работ, услуг), локальные критерии оптимальности могут находиться друг с другом в следующих отношениях:

1. Критерии оптимальности взаимно нейтральны, независимы. В этом случае процесс разработки производственной программы может состоять из отдельных частей и осуществляться в соответствии с локальными критериями независимо.

2. Критерии оптимальности взаимосвязаны, кооперированы. При этом процесс планирования производства удастся рассматривать применительно к одной цели, а другие достигаются одновременно.

3. Критерии оптимальности несовместимы, т.е. конкурируют между собой. В этом случае одну из целей производственной программы можно достичь лишь за счёт другой цели.

Поскольку в реальной экономике все производственно-финансовые показатели хозяйствующего субъекта взаимосвязаны между собой, то характерными являются второй и третий случаи процесса разработки производственной программы предприятия. Причем вследствие ограниченности производственных ресурсов зачастую возникает ситуация, когда отдельные цели и соответствующие локальные критерии несовместимы, конкурируют между собой.

Такая несовместимость проявляется в том, что разные целевые функции в однокритериальных задачах оптимизации генерируют различные производственные программы, которые могут существенно различаться между собой. Например, доказано, что целевые функции бухгалтерской прибыли и рентабельности продукции достигают максимума при различных планах её реализации.

Рассмотрим подробнее некоторые, наиболее известные, методы решения задачи многокритериальной оптимизации производственной программы предприятия.

Пусть при разработке плана производства, исходя из стратегических целей развития предприятия, определён набор  $S$  локальных критериев оптимальности  $K_1, K_2, \dots, K_S$ , которым соответствуют  $S$  целевых функций  $Z_1, Z_2, \dots, Z_S$ . Так, в роли локальных критериев в данной задаче можно использовать:

- максимум чистого дохода от реализации произведенной продукции, долю её рынка, объёма бухгалтерской, маржинальной прибыли, уровня рентабельности и др.;

- минимум себестоимости продукции, затрат финансовых, материальных, трудовых ресурсов и т.п.

При попытке решить многокритериальную задачу производственного планирования следует иметь в виду, что её глобальная целевая функция  $Z$  при формальной оптимизации математическими методами является не скаляром, а вектором и задача, по сути, сводится к векторной оптимизации номенклатуры и ассортимента будущей производственной программы.

Доказано, что многокритериальные задачи оптимизации не имеют универсального и точного способа решения. Можно говорить лишь о некотором приближении к оптимальному варианту их решения. Иными словами, выбор и корректное применение любого из известных в литературе способов, обеспечивающих получение приближенного оптимального варианта решения, остаётся за субъектом управления. Поэтому основная задача математического аппарата методов многокритериальной оптимизации заключается в обеспечении лица, принимающего управленческие решения, нужным количеством научно обоснованной информации в виде вариантов действий с указанием их экономической эффективности, на основании которых и осуществляется выбор будущего плана производства.

Впервые проблема оптимизации векторного критерия была поставлена представителями математической ветви лозаннской школы маржинализма в конце XIX века. Их заслуга состоит в том, что они предложили фундаментальное понятие данного направления оптимизации – понятие оптимальности (эффективности), которое носит имя одного из выдающихся представителей этой школы – В. Парето. Оно представляет собой обобщение понятия точки экстремума вектора целевых функций в случае нескольких критериев.

*Решение называется Парето-оптимальным, если значение каждого из локальных критериев, входящих в вектор оптимизации, можно улучшить только за счёт ухудшения значений других локальных критериев.*

Множество Парето-оптимальных решений является подмножеством допустимого множества решений задачи векторной оптимизации и обладает тем свойством, что все принадлежащие ему решения не могут быть улучшены одновременно по всем локальным критериям – компонентам вектора эффективности.

Итак, для любого решения, относящегося к области Парето-оптимальных решений, обязательно имеет место противоречие хотя бы с одним из локальных критериев. Это автоматически приводит к необходимости проводить выбор решения именно в области Парето-оптимальных решений на основе определённой схемы компромисса. Поэтому множество Парето-оптимальных решений иногда называют областью компромиссов (рис. 10.3).

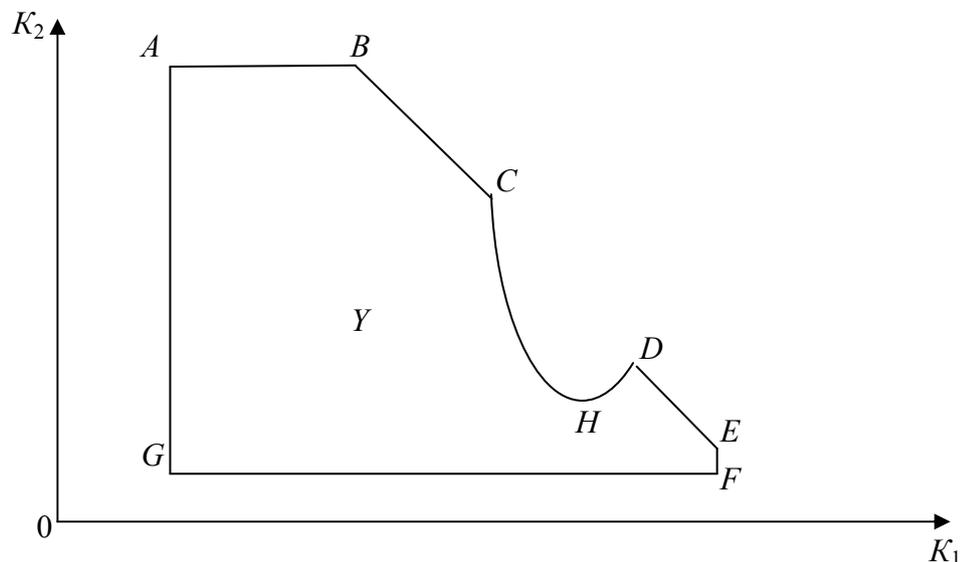


Рис. 10.3. Область Парето-оптимальных решений (область компромиссов)

На рис. 10.3, который иллюстрирует двухкритериальную задачу поиска оптимального решения на максимум, приняты следующие обозначения:  $K_1$ ,  $K_2$  – локальные критерии оценки вариантов решения; точки плоскости, окруженные многоугольником  $ABCHDEFG$ , – множество допустимых вариантов решения задачи многокритериальной оптимизации (множество  $Y$ ).

Область Парето-оптимальных оценок представляет собой «северо-восточную» границу множества  $Y$  без тех его частей, которые параллельны одной из координатных осей или лежат в «провале»  $CHD$ .

Для случая, изображенного на рис. 10.3, Парето-оптимальные оценки состоят из точек прямых  $BC$ ,  $DE$ . Очевидно, что для всех указанных точек выполняется условие  $K_1 + K_2 = const$ . Это означает, что повысить локальный критерий  $K_1$  можно только за счёт снижения локального критерия  $K_2$  и, наоборот. Для всех других вариантов решений из множества  $Y$ , например, для точки  $H$ , есть возможность увеличить один из локальных критериев не снижая (а иногда и повышая) другой локальный критерий. Поэтому они не относятся к области Парето-оптимальных решений (области компромиссов).

Таким образом, конечное решение задачи векторной оптимизации следует всегда выбирать из области компромиссов независимо от принятого принципа оптимальности, иначе оно может быть улучшено и, следовательно, не будет оптимальным. Отсюда следует важный вывод: множество Парето-оптимальных решений является областью потенциально оптимальных

решений задачи векторной оптимизации. Очевидно, что при выборе решения поставленной задачи можно ограничить поиск оптимального решения лишь областью компромиссов, которая, как правило, значительно уже всей области допустимых решений задачи векторной оптимизации  $Y$ .

Итак, в задачах выбора решения, которые формализованы в виде модели векторной оптимизации, первым естественным шагом следует считать нахождение области компромиссов или решений, оптимальных по Парето. Одним из распространенных подходов к поиску области Парето-оптимальных решений является группа методов, которые заключаются в сведении многокритериальной задачи к однокритериальной путем свёртывания векторного критерия в один глобальный критерий. Приведем несколько наиболее известных способов такого свёртывания при решении задачи многокритериальной оптимизации производственной программы предприятия:

1. Аддитивный.
2. Мультипликативный.
3. Максиминый (минимаксный).

При этом процесс решения поставленной задачи состоит из двух главных этапов:

- 1) объединение локальных критериев в один глобальный критерий;
- 2) дальнейший поиск его максимума (минимума) с помощью методов линейного (нелинейного) программирования или на основе др. методов.

При использовании глобального аддитивного критерия его целевая функция  $Z$  формируется путем взвешивания отдельных локальных критериев:

$$Z = d_1 Z_1 + d_2 Z_2 + \dots + d_S Z_S, \quad (10.5)$$

где  $d_1, d_2, \dots, d_S$  – положительные или отрицательные весовые коэффициенты, сумма которых равна единице.

Положительные коэффициенты соответствуют тем целевым функциям, которые следует максимизировать, а отрицательные – тем, которые минимизируются. Абсолютные значения коэффициентов  $d_1, d_2, \dots, d_S$  соответствуют приоритетности того или иного экономического показателя.

К преимуществам метода построения аддитивных глобальных критериев относят возможность взаимной компенсации локальных критериев, т.е. уменьшение одной из целевых функций может быть компенсировано увеличением другой и, наоборот. В результате, примерно постоянное значение аддитивного глобального критерия (10.5) в заданной окрестности некоторого допустимого плана может рассматриваться как сигнал обнаружения области Парето-оптимальных решений.

Главным недостатком обсуждаемого метода считается определённый субъективизм при установлении весовых коэффициентов  $d_1, d_2, \dots, d_S$ , поскольку априорный экономический анализ локальных критериев

оптимальности часто не даёт экспертам достаточно обоснованной информации относительно приоритетов того или иного показателя эффекта (эффективности) деятельности промышленного предприятия.

В случае использования мультипликативного глобального критерия целевая функция имеет следующий вид:

$$Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_s. \quad (10.6)$$

Главное отличие мультипликативной модели (10.6) от аддитивной модели (10.5) заключается в том, что суммирование в ней заменяется на произведение значений локальных критериев эффективности деятельности предприятия. Из математико-статистического моделирования известно, что мультипликативные уравнения достаточно легко превращаются в аддитивные путём логарифмированию левой и правой части выражения (10.6).

Итак, прологарифмировав стандартизованные данные и осуществив переобозначения переменных, достаточно легко получить выражение типа (10.5) со всеми преимуществами и недостатками, которые были определены выше для аддитивного метода. Дополнительным недостатком мультипликативного глобального критерия считается также угроза принятия им нулевого значения в случае  $Z_\nu = 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, s$ ) хотя бы для одной из целевых функций.

Максиминные (минимаксные) критерии работают по принципу компромисса, основанному на идее равномерности. Её сущность заключается в следующем. В ходе формирования производственной программы предприятия при наличии большого количества локальных критериев установить между ними аналитическую взаимосвязь очень сложно. Поэтому на практике варьируют значениями  $Z_1, Z_2, \dots, Z_s$  с целью последовательного «подтягивания» тех целевых функций, численные значения которых в конечном решении оказались наименьшими.

Поскольку эта операция осуществляется в области компромисса, то подтягивания «отстающего» критерия неизбежно приводит к снижению значений части других критериев. Но при проведении ряда шагов можно добиться определенной степени уравнивания противоречивых целевых функций, что и является главной целью принципа максимина. Формально принцип максимина формулируется следующим образом: выбрать такой набор значений локальных критериев, при котором реализуется максимум из минимальных их значений. Такой принцип выбора иногда называется гарантированным результатом. Он заимствован из теории игр, где является основополагающим.

Если же части глобального критерия необходимо минимизировать, то самым отстающим локальным критерием является тот, который принимает максимальное значение. В этом случае как раз и применяют принцип минимакса.

Выбор локальных критериев – сложное творческое задание, поскольку, как было указано выше, цели при формировании плана производства зачастую противоречивы (например, обеспечение максимальной доходности и минимальной степени риска). Поэтому при наличии нескольких локальных целевых функций рекомендуется выбирать вариант:

а) глобального аддитивного критерия, если существенную роль играют абсолютные значения локальных критериев;

б) глобального мультипликативного критерия, если важное значение имеет изменение относительных величин локальных критериев;

в) глобального максиминного (минимаксного) критерия, если ставится задача достижения примерного равенства значений его противоречивых (конкурирующих) частей.

Рассмотрим подробнее практическое применение модели многокритериальной оптимизации на основе аддитивной глобальной целевой функции (10.5) в задаче планирования производственной программы предприятия. Распишем данную модель следующим образом:

1) глобальный критерий оптимальности (целевая функция)

$$Z = d_1 Z_1 + d_2 Z_2 + \dots + d_s Z_s = \sum_{v=1}^s d_v \sum_{i=1}^n c_{vi} X_i \rightarrow \max (\min), \quad (10.7)$$

2) заданные условия и ограничения модели, связаны с:

а) локальными критериями оптимальности в виде линейных целевых функций

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + \dots + c_{1n} X_n = \sum_{i=1}^n c_{1i} X_i \\ Z_2 = c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + \dots + c_{2n} X_n = \sum_{i=1}^n c_{2i} X_i \\ \dots \\ Z_s = c_{s1} X_1 + c_{s2} X_2 + \dots + c_{sn} X_n = \sum_{i=1}^n c_{si} X_i \end{array} \right. \quad (10.8)$$

б) имеющимися ресурсами, мощностями и спросом на выпускаемую продукцию, роботы, услуги (см. системы неравенств (10.3)).

С учётом выражений (10.8) глобальный критерий оптимальности – целевую функцию (10.7) можно представить так:

$$Z = (d_1 c_{11} + d_2 c_{21} + \dots + d_s c_{s1}) X_1 + (d_1 c_{12} + d_2 c_{22} + \dots + d_s c_{s2}) X_2 + \dots + (d_1 c_{1n} + d_2 c_{2n} + \dots + d_s c_{sn}) X_n \rightarrow \max (\min). \quad (10.9)$$

Очевидно, что запись (10.9) принципиально ничем не отличается от любой целевой функции, которая входит в систему (10.1), в случае решения задачи линейной однокритериальной оптимизации производственной программы предприятия.

Таким образом, можно утверждать, что проблема многокритериальной оптимизации планирования на предприятии с помощью глобального критерия оптимальности (10.9) искусственно сводится к обычной и хорошо изученной однокритериальной задаче линейного программирования.

Итак, искомая модель многокритериальной оптимизации производственной программы промышленного предприятия принимает следующий окончательный вид: найти экстремум целевой функции (10.9) при условиях ограниченности соответствующих ресурсов у предприятия

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \dots + a_{n1}X_n = \sum_{i=1}^n a_{i1}X_s \leq b_1, \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{n2}X_n = \sum_{i=1}^n a_{i2}X_s \leq b_2, \\ \dots \\ a_{1k}X_1 + a_{2k}X_2 + \dots + a_{nk}X_n = \sum_{i=1}^n a_{ik}X_s \leq b_k. \end{cases} \quad (10.10)$$

А также с учётом неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq X_1 \leq X_{01} \\ 0 \leq X_2 \leq X_{02} \\ \dots \\ 0 \leq X_n \leq X_{0n}, \end{cases} \quad (10.11)$$

которые отражают ограничения, связанные с производственной мощностью, а также с реальным рыночным спросом на продукцию (работы, услуги) данного вида.

Ясно, что модель многокритериальной оптимизации (10.9) – (10.11), построенная на основе аддитивной глобальной целевой функции (10.5), принципиально ничем не отличается от обычной однокритериальной модели задачи линейного программирования (10.1). Главное – правильно оценить весовые коэффициенты  $d_1, d_2, \dots, d_s$  локальных целевых функций  $Z_1, Z_2, \dots, Z_s$ . Обычно такая оценка осуществляется с помощью экспертного опроса топ-менеджеров, которые, исходя из миссии и целей предприятия, устанавливают важность тех или иных локальных критериев его развития. При этом следует помнить, что аддитивная целевая функция (10.5) не имеет реального экономического смысла, поскольку состоит из различных взвешенных локальных критериев оптимальности.

Таким образом, задача многокритериальной оптимизации планирования производства, по сути, искусственно сводится к однокритериальной задаче. Рассмотрим её практическое применение по данным предыдущего примера, иллюстрирующего оптимизацию производственной программы предприятия, выпускающего 6 видов изделий.

Пусть наряду с максимизацией величины бухгалтерской прибыли руководство посчитало целесообразным одновременно максимизировать

общий доход (выручку от реализации изделий) с целью дальнейшего укрепления позиций предприятия на внутренних рынках данной продукции. При этом экспертный опрос руководящего звена субъекта хозяйствования показал, что статистический вес целевых функций  $Z_1$  (бухгалтерской прибыли) и  $Z_2$  (дохода от реализации) составил 0,92 и 0,08 соответственно.

Тогда с учётом данных о цене единицы продукции (см. табл. 10.1) глобальная аддитивная целевая функция, отображающая одновременно прибыль и доход от реализации продукции предприятия, будет иметь следующий вид:

$$Z = 0,92 \times (1781 X_1 + 162 X_2 + 536,6 X_3 + 225 X_4 + 811 X_5 + 38 X_6) + 0,08 \times (13600 X_1 + 591 X_2 + 3086,6 X_3 + 1107 X_4 + 8290 X_5 + 5429 X_6) = 2726,52 X_1 + 196,32 X_2 + 740,6 X_3 + 295,56 X_4 + 1409,32 X_5 + 469,28 X_6 \rightarrow \max. \quad (10.12)$$

Ограничения (10.3), (10.4), отражающие лимиты имеющихся материальных и трудовых ресурсов, а также спрос на продукцию  $A - F$  изучаемого предприятия, остаются, безусловно, в силе.

Данная задача была решена с помощью редактора *Excel* на базе стандартной программы «Поиск решения» (табл. 10.6).

Таблица 10.6

Результаты решения задачи двухкритериальной оптимизации производственной программы предприятия на плановый год

| Аддитивная глобальная целевая функция: веса локальных критериев составляют 0,92; 0,08 |        |           |        |         |           |             |    |           |
|---|--------|-----------|--------|---------|-----------|-------------|----|-----------|
| $X_1$   | $X_2$  | $X_3$     | $X_4$  | $X_5$   | $X_6$     | $S$         |    |           |
| 10000   | 130000 | 2500      | 45000  | 0       | 77039,837 | 104091754,8 |    |           |
| 2726,52   | 196,32 | 740,6     | 295,56 | 1409,32 | 469,28    |             |    |           |
| Система ограничений   |        |           |        |         |           |             |    |           |
| 0   | <=     | 10000     |        |         |           | 10000       | <= | 10000     |
| 0   | <=     | 130000    |        |         |           | 130000      | <= | 130000    |
| 0   | <=     | 2500      |        |         |           | 2500        | <= | 2500      |
| 0   | <=     | 45000     |        |         |           | 45000       | <= | 45000     |
| 0   | <=     | 0         |        |         |           | 0           | <= | 15000     |
| 0   | <=     | 77039,837 |        |         |           | 77039,837   | <= | 100000    |
| 8478,1  | 238,61 | 1494,27   | 570,71 | 5381,02 | 1587,59   | 267525600   | <= | 267525600 |
| 850,66  | 23,94  | 149,93    | 57,26  | 539,91  | 159,29    | 26841939    | <= | 31983840  |
| 236,71  | 6,66   | 41,72     | 15,93  | 150,24  | 44,33     | 7469322,78  | <= | 276312200 |

Решение данной задачи находится в третьей строке табл. 10.6: в соответствующих столбцах  $X_1 - X_6$  показана производственная программа предприятия на плановый год, которая обеспечивает одновременное получение максимальной прибыли и выручки от реализации продукции  $A - F$  (столбец  $S$ ). При этом само значение  $S = 104091754,8$  не имеет реального экономического смысла.

Сопоставление производственных программ, полученных в результате однокритериальной (по прибыли и по выручке от реализации продукции) и двухкритериальной оптимизации (табл. 10.7), показывает, что изменился выпуск сразу нескольких видов продукции –  $A$ ,  $E$  и  $F$ , объёмы которых  $X_1$ ,  $X_5$  и  $X_6$  соответственно.

Таблица 10.7

Производственные программы предприятия, полученные на основе однокритериальных и двухкритериальной оптимизации

| Оптимизация   | Производственная программа |        |       |       |       |           | Целевая функция |
|---|----------------------------|--------|-------|-------|-------|-----------|-----------------|
|   | $X_1$                      | $X_2$  | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$     | $S$             |
| 1. Однокритериальная (по прибыли)                         | 10000                      | 130000 | 2500  | 45000 | 15000 | 26198,44  | 63497040,57     |
| 2. Однокритериальная (по выручке от реализации)           | 5700,53                    | 130000 | 2500  | 45000 | 0     | 100000    | 754788727       |
| 3. Двухкритериальная (по прибыли и выручке от реализации) | 10000                      | 130000 | 2500  | 45000 | 0     | 77039,837 | 104091754,8     |

В процессе планирования следует помнить, что решающим условием для эффективного применения оптимизационных задач на предприятиях является удовлетворение следующих основных требований:

1) задача должна быть достаточно сложной и часто повторяться, тем самым обеспечивать многократное применение оптимизационного проекта, разработка которого обычно требует значительных затрат финансовых ресурсов и времени;

2) задача должна быть сложной по своей внутренней структуре и иметь достаточную степень свободы по отношению к переменным параметрам, что обеспечивает существенный экономический эффект от оптимизации по сравнению с решениями, полученными на основе опыта;

3) задача должна решаться со значительной скоростью реакции и быть направленной в будущее, т.е. иметь признаки интерактивного и преактивного планирования.

Главными составляющими процедуры оптимизации планирования на предприятии являются следующие этапы, включающие элементы как однокритериальной, так и многокритериальной оптимизации (см. рис. 10.4).

Следует ожидать, что по мере налаживания нормальных товарно-денежных отношений, свойственных развитому рыночному хозяйству, интерес к проблемам оптимизации производственной программы предприятия будет неуклонно расти. При этом многокритериальная оптимизация более адекватна миссии предприятия по сравнению с традиционной однокритериальной постановкой задачи.

Преимуществом данной процедуры является комплексное сочетание подходов однокритериальной и многокритериальной оптимизации, весьма положительно проявляется особенно в том случае, когда на предприятии в

ходе производственного планирования совсем не применяются никакие математические методы и модели.



Рис. 10.4. Процедура оптимизации производственной программы предприятия

В данной ситуации даже традиционный однокритериальный подход (блоки 4, 5) может обеспечить существенное повышение эффективности планирования производственной программы предприятия, а решение многокритериальной задачи (блоки 5, 6) позволит системно учесть многоцелевую направленность его операционной, финансовой и инвестиционной деятельности.

Очень важным условием успешного развития предприятия в современных изменяющихся условиях хозяйствования является рассмотрение процесса выбора оптимального плана производства как итеративного, который включает несколько вариантов, например, с различными ограничениями, с учётом привлеченных заёмных средств и т.п.

Иными словами, производственная программа не должна толковаться как нечто застывшее и неизменное на протяжении всего планового года.

Очевидно, что при расширении спроса на выпускаемую продукцию (работы, услуги) предприятия во время экономического подъёма верхняя граница (10.11) выпуска товаров  $X_{0i}$  будет расти, а во время экономического кризиса, наоборот, снижаться. Это, в свою очередь, должно вызвать пересмотр возможных вариантов производственного плана, их согласование с имеющимися ресурсами и, как следствие, поиск новой оптимальной производственной программы.

Такой подход к планированию производства на предприятии действительно обеспечит ему интерактивный и адаптивный характер, который, как известно, является свойством сложных вероятностных самонастраивающихся систем. Указанная самонастройка заключается в изменении программы своей деятельности (в данном случае – производственной программы), а также в структурных изменениях, например, расширении (или свертывании) производственных мощностей предприятия, варьировании численностью работников и т.п. Только постоянная адаптация предприятия посредством плана производства к меняющейся внешней среде в реальном времени позволит обеспечить ему высокие шансы в конкурентной борьбе за потребителя и прочные позиции на рынках сбыта.

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Имеется следующая нормативная информация по производству четырёх видов продукции на предприятии (табл. 10.8).

Таблица 10.8

Исходные нормативные данные для планирования производства

| Вариант 1  |                |      |      |      | Весы локальных критериев<br>0,8; 0,2 |                                      |
|--|----------------|------|------|------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Показатели   | Виды продукции |      |      |      |                                      |                                      |
|  | № 1            | № 2  | № 3  | № 4  |                                      |                                      |
| 1. Удельная прибыль, грн.  | 35             | 65   | 40   | 30   | Лимиты<br>потребляемых<br>ресурсов   |                                      |
| 2. Удельная выручка, грн.  | 85             | 90   | 75   | 55   |                                      |                                      |
| 3. Производственная мощность технологического оборудования, штук | 2300           | 1500 | 2000 | 2500 | 10000                                |                                      |
| 4. Норма затрат сырья на единицу продукции, кг                   | 2              | 3    | 1    | 0,5  |                                      |                                      |
| 5. Норма затрат труда на единицу продукции, чел-час              | 11             | 15   | 12   | 8    |                                      | 30000                                |
| 6. Норма затрат электроэнергии на единицу продукции, кВт-час     | 15             | 20   | 10   | 6    |                                      | 80000                                |
| Вариант 2  |                |      |      |      |                                      | Весы локальных критериев<br>0,6; 0,4 |
| Показатели   | Виды продукции |      |      |      |                                      |                                      |
|  | № 1            | № 2  | № 3  | № 4  |                                      |                                      |
| 1. Удельная прибыль, грн.  | 35             | 65   | 40   | 30   | Лимиты<br>потребляемых<br>ресурсов   |                                      |
| 2. Удельная выручка, грн.  | 85             | 90   | 75   | 55   |                                      |                                      |
| 3. Производственная мощность технологического оборудования, штук | 2300           | 1500 | 2000 | 2500 | 10000                                |                                      |
| 4. Норма затрат сырья на единицу продукции, кг                   | 2              | 3    | 1    | 0,5  |                                      |                                      |
| 5. Норма затрат труда на единицу продукции, чел-час              | 11             | 15   | 12   | 8    |                                      | 30000                                |
| 6. Норма затрат электроэнергии на единицу продукции, кВт-час     | 15             | 20   | 10   | 6    |                                      | 80000                                |
| Вариант 3  |                |      |      |      |                                      | Весы локальных критериев<br>0,3; 0,7 |
| Показатели   | Виды продукции |      |      |      |                                      |                                      |
|  | № 1            | № 2  | № 3  | № 4  |                                      |                                      |
| 1. Удельная прибыль, грн.  | 35             | 65   | 40   | 30   | Лимиты<br>потребляемых<br>ресурсов   |                                      |
| 2. Удельная выручка, грн.  | 85             | 90   | 75   | 55   |                                      |                                      |
| 3. Производственная мощность технологического оборудования, штук | 2300           | 1500 | 2000 | 2500 | 10000                                |                                      |
| 4. Норма затрат сырья на единицу продукции, кг                   | 2              | 3    | 1    | 0,5  |                                      |                                      |
| 5. Норма затрат труда на единицу продукции, чел-час              | 11             | 15   | 12   | 8    |                                      | 30000                                |
| 6. Норма затрат электроэнергии на единицу продукции, кВт-час     | 15             | 20   | 10   | 6    |                                      | 80000                                |

На основе данных, соответствующих номеру Вашего варианта, осуществить:

1. Запись в явном виде модели задачи однокритериальной оптимизации планового выпуска продукции на предприятии по локальному критерию «суммарная бухгалтерская прибыль». Результаты оформить в виде модели по типу модели (10.2) – (10.4).

2. Решение поставленной задачи с помощью редактора *Excel* на базе стандартной программы «Поиск решения». Результаты представить в виде таблицы по типу табл. 10.4.

3. Анализ полученной оптимальной программы с точки зрения номенклатуры выпускаемой продукции, прибыли, которую она обеспечивает, использования производственной мощности технологического оборудования, а также сырьевых, трудовых и энергетических ресурсов предприятия.

4. Запись в явном виде модели задачи однокритериальной оптимизации планового выпуска продукции на предприятии по локальному критерию «выручка от реализации продукции». Результаты оформить в виде модели по типу модели (10.5), (10.3), (10.4).

5. Решение поставленной задачи с помощью редактора *Excel* на базе стандартной программы «Поиск решения». Результаты представить в виде таблицы по типу табл. 10.5.

6. Анализ полученной оптимальной программы с точки зрения номенклатуры выпускаемой продукции, выручки от реализации продукции, которую она обеспечивает, использования производственной мощности технологического оборудования, а также сырьевых, трудовых и энергетических ресурсов предприятия.

7. Построение аддитивной целевой функции задачи двухкритериальной оптимизации, используя информацию о весах отдельных локальных критериев прибыли и выручки от реализации продукции.

8. Запись в явном виде модели задачи двухкритериальной оптимизации планового выпуска продукции на предприятии по глобальному аддитивному критерию. Результаты оформить в виде модели по типу модели (10.12), (10.3), (10.4).

9. Решение поставленной задачи с помощью редактора *Excel* на базе стандартной программы «Поиск решения». Результаты представить в виде таблицы по типу табл. 10.6.

10. Анализ полученной оптимальной программы с точки зрения номенклатуры выпускаемой продукции, использования производственной мощности технологического оборудования, а также сырьевых, трудовых и энергетических ресурсов предприятия.

11. Сравнение полученных вариантов оптимизации производственной программы предприятия. Результаты представить в виде таблицы по типу табл. 10.7.

По каждому пункту дать краткие экономико-математические пояснения и выводы.

## ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 10

1. Акутаев С. Г. Оптимизация производства на предприятиях консервной промышленности (на примере ОАО «Дербентский консервный комбинат») [Электронный ресурс] / С. Г. Акутаев. – Режим доступа : – [http://www.rae.ru/fs/?section=content&op=show\\_article&article\\_id=7798380](http://www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=7798380)
2. Багатокритеріальний підхід до оцінки ефективності складних систем. Постановка задачі багатокритеріального оцінювання ефективності [Електронний ресурс]. – Режим доступу : – <http://rekcon.narod.ru/opt.html>
3. Беляков В. В. Многокритериальная оптимизация / Беляков В. В., Бушуева М. Е., Сагунов В. И. – Нижний Новгород, 2001. – 317 с.
4. Виробнича програма підприємства, її зміст, календарний розподіл та оптимізація [Електронний ресурс]. – Режим доступу : – [http://buklib.net/index.php?option=com\\_jbook&task=view&Itemid=36&catid=89&id=989](http://buklib.net/index.php?option=com_jbook&task=view&Itemid=36&catid=89&id=989)
5. Волощук В. А. Оптимизация производственной программы промышленного предприятия / В. А. Волощук, С. А. Гулакова // Вісник Приазов. держ. техн. ун-ту : зб. наук. праць. – Маріуполь, 2008. – Вип. 18. – Ч. 1. – С. 304-308.
6. Гирич С. Пример решения задачи линейного программирования в Microsoft Excel с использованием модуля «Поиск решения» [Электронный ресурс] / Гирич С. – Режим доступа : – <http://first.boom.ru/Products/Excel.htm>
7. Гукалюк А. Ф. Моделювання процесу розробки оптимальної виробничої програми / А. Ф. Гукалюк, О. С. Сенишин // Актуальні проблеми економіки. – 2006. – № 9. – С. 204-211.
8. Экономика и оптимизация / [Л. В. Канторович, В. Лассман, Г. Шилар и др.]. – М. : «Наука», 1990. – 248 с.
9. Егупов Ю. А. Выбор эффективного решения многокритериальной задачи формирования производственного плана предприятия / Ю. А. Егупов // Экономист. – 2008. – № 11. – С. 76-80.
10. Егупов Ю. А. Планування виробничої потужності в контексті ресурсного обґрунтування виробничої програми підприємства / Ю. А. Егупов // Економист. – 2011. – № 11. – С. 49-52.
11. Ивахник Д. Е. Оптимизация производственной программы предприятия в условиях рыночных отношений / Д. Е. Ивахник, В. З. Григорьева // Маркетинг в России и за рубежом. – 1999. – № 1. – С.14-17.
12. Исаев С. А. Решение многокритериальных задач [Электронный ресурс] / Исаев С. А. – Режим доступа : – <http://bspu.ab.ru/Docs/~saisa/ga/ideal.html>.
13. Іщук С. О. Методи визначення оптимальних виробничих програм за фінансовими критеріями розвитку підприємства [Електронний ресурс] / Іщук С. О. – Режим доступу : - [http://www.ief.org.ua/Arjiv\\_EP/Ishchuk406.pdf](http://www.ief.org.ua/Arjiv_EP/Ishchuk406.pdf)

14. Куперман В. В. Багатовимірний статистичний метод побудови глобального критерію оптимальності виробничої програми підприємства / В. В. Куперман // Вісник соціально-економічних досліджень : зб. наук. пр. – Одеса, 2012. – № 45. – С. 126-131.
15. Малышева Л. А. Информационные технологии для планирования производственной программы в условиях риска и неопределенности [Электронный ресурс] / Малышева Л. А. – Режим доступа : – <http://www.ito.su/ipsvi4@mail.ru>
16. Масленіков О. Ю. Оптимізація виробничої програми підприємства / О. Ю. Масленіков, С. І. Савуляк // Науковий вісник НЛТУ України. – 2010. – Вип. 20.2. – С. 264-266.
17. Методы планирования и оптимизации производственной программы [Электронный ресурс] – Режим доступа : – <http://www.ilect.ru/articles-full-41/>
18. Наконечний С. І. Багатокритеріальна оптимізація [Електронний ресурс] / Наконечний С. І. – Режим доступу : – <http://fingal.com.ua/content/view/207/76/1/5/>
19. Подиновский В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука. – 1982. – 344 с.
20. Прус Н. В. Можливості застосування багатокритеріальної оптимізації при плануванні витрат промислового підприємства / Н. В. Прус // Вісник Хмельницького національного університету. – 2009. – № 3. – Т. 1. – С. 220-222.
21. Сабецька Т. І. Методико-методологічні аспекти процесу формування виробничої програми підприємства в умовах ринкової економіки [Електронний ресурс] / Сабецька Т. І. – Режим доступу : – [http://www.nbu.gov.ua/portal/Soc\\_Gum/Ekpr/2010\\_36/Zmist/23PDF.pdf](http://www.nbu.gov.ua/portal/Soc_Gum/Ekpr/2010_36/Zmist/23PDF.pdf)
22. Силаков А. В. Оптимальное планирование деятельности ассортиментного отдела промышленного предприятия / А. В. Силаков // Менеджмент в России и за рубежом. – 2010. – № 1. – С. 98-106.
23. Созонов С. В. Разработка моделей оптимизации производственной программы промышленного предприятия на основе формулирования целевых функций / С. В. Созонов // Математические и инструментальные методы экономики. Экономические науки. – 2010. – № 6 (67). – С. 231-235.
24. Трифонов А. Г. Многокритериальная оптимизация [Электронный ресурс] / Трифонов А. Г. – Режим доступа : – [http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book\\_1/16.php](http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book_1/16.php)
25. Шевченко Л. Г. Оптимізація виробничої програми рибоконсервного підприємства / Л. Г. Шевченко // Економіка і держава. – 2006. – № 5. – С. 77-79.
26. Янковой А. Г., Куперман В. В. Многомерные методы оптимизации производственной программы предприятия / А. Г. Янковой, В. В. Куперман // Сучасна економіка. – К. : ДІПК, 2011. – Вип. 4. – С.13-23.

