

Безсуднов И.А. Интернетика: Навигация в сложных сетях: модели и алгоритмы. – М.: Кижный дом «Либроком», 2009. – 264 с. 3. Гуркин Ю.Н. Семенов Ю.А. Файлообменные сети P2P: основные принципы, протоколы, безопасность // Сети и системы связи. – 2006. – № 11. – С. 62. 4. Таненбаум Э. ван Стеен М. Распределенные системы: принципы и парадигмы. – СПб.: Питер, 2003. 876 с. 5. Albert, R. and Barabasi A.-L. Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys. – Vol. 74, – 2002. – P.47–i97

УДК 621.37/39

Н.Ф. Казакова

Одеський національний економічний університет,
кафедра інформаційних систем в економіці

АСПЕКТИ НАДІЙНОЇ РОБОТИ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ З ПОСЛІДОВНО-ПАРАЛЕЛЬНИМ З'ЄДНАННЯМ РЕЗЕРВУЮЧИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Ї Казакова Н.Ф., 2012

Зосереджено увагу на доказі окремих теорем, які можна використати для розгляду та аналізу деяких аспектів інтервального оцінювання робочих параметрів при випробуваннях надійності автоматичних систем однократного використання. Отримані результати дають змогу визначити робочі плани випробувань, передбачити необхідну кількість резервного обладнання, структуру системи та інші технічні та виробничі параметри.

Ключові слова: інтервальне оцінювання, послідовно-паралельне з'єднання, надійність, випробування.

The article focuses on the demonstration of some theorems that can be used to review and analyze some aspects of interval estimation of operating parameters for reliability testing of automatic systems of single use. The obtained results allow to define work plans tests to predict the required number of backup equipment, structure, systems and other technical and industrial settings.

Key words: interval evaluation, consistently-parallel connection, reliability, test.

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. До необхідності доведення окремих теорем, які можна використати для розгляду та аналізу деяких аспектів інтервального оцінювання робочих параметрів надійності при випробуванні автоматичних систем однократного використання, наводять випадки суворого практичного характеру. Так, у зазначеному сенсі розглянемо процедуру випробування системи, яка автоматично виконує деяку функцію. Однократне максимально достовірне та надійне виконання зазначеної функції є основним та єдиним завданням системи. Після її виконання сенс роботи системи втрачається, а сама система ліквідується. До таких систем належить широке коло механічних, електронних, біологічних, хімічних та інших простих та складних приладів, серед яких математичні системи (наприклад, системи захисту інформації, криптографії та шифрування) тощо.

З огляду на те, що необхідність ввімкнення резервного устаткування такої системи є випадковою величиною, то проведення випробувань та планових перевірок апаратури повинне забирати мінімальний час. Його скорочення можливе за рахунок структурної надмірності або за рахунок запасу по ресурсу [1–4]. Вид випробувань вибирають з урахуванням конкретних задач та

залежно від способу побудови системи, яка підлягає випробовуванню. Отже, з метою вибору найефективнішого виду випробувань необхідно розв'язати всі наукові та практичні задачі, які стосуються оцінки надійності резервних компонентів у загальній структурі автоматичної системи і, зокрема, з їх послідовно-паралельним з'єднанням.

Метою статті є отримання результатів, які дозволять визначати та обґрунтовувати робочі плани випробувань, передбачати необхідну кількість резервних складових та загальну структуру автоматичної системи, а також в загальному вигляді встановлювати інші технічні та виробничі параметри, що, одночасно, є *раніше не вирішеною частиною загальної проблеми* надійного функціонування автоматичних систем. Отримання та впровадження у наукові розробки та у виробництво таких результатів приведе до зменшення фінансових витрат під час проведення випробувань систем, про які йдеться у статті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання цієї проблеми, виділення не вирішених частин раніше загальної проблеми. Методики проведення зазначених вище випробувань, технічні і математичні проблеми обробки результатів досить докладно розглянуті в технічній літературі. Однак зазначимо, що методики передбачають припинення функціонування об'єкта в складі технічної системи при проведенні випробувань і повернення його до складу системи після закінчення випробувань для подальшого використання. Така процедура випробувань великою мірою відповідає проблемі, розглянутій у цій статті. Цією проблемою займався достатньо широке коло вчених – Р.А. Мирний, І.В. Павлов, Л.Н. Большев, Р.С. Судаков та інші. Окремі результати щодо оцінки надійності резервних систем телекомунікацій з послідовним з'єднанням об'єктів за результатами їх біноміальних іспитів із зупинкою автор опублікувала самостійно або в співавторстві в [1–7]. Однак у публікаціях, які доступні для широкого кола науковців, оцінка надійності автоматичних систем однократного використання з послідовно-паралельним з'єднанням об'єктів не розглядалася.

Постановкою завдання для подальшого вирішення є доказ окремих теорем, які можна використати при розгляді та аналізі деяких аспектів інтервального оцінювання робочих параметрів під час випробувань надійності автоматичних систем однократного використання за схемою біноміальних іспитів із зупинкою.

Перейдемо до викладу *основного матеріалу* з математичним обґрунтуванням отриманих результатів.

Як зазначено вище, розглянемо автоматичну систему, завданням якої є однократне достовірне та надійне виконання встановленої функції, після чого система ліквідується. З метою забезпечення зазначеного вважатимемо, що система складена з m блоків, сполучених послідовно, а кожен з блоків, своєю чергою, містить n_i елементів, сполучених паралельно (рис. 1), що, як відомо, є одним зі способів підвищення надійності роботи автоматичних систем.

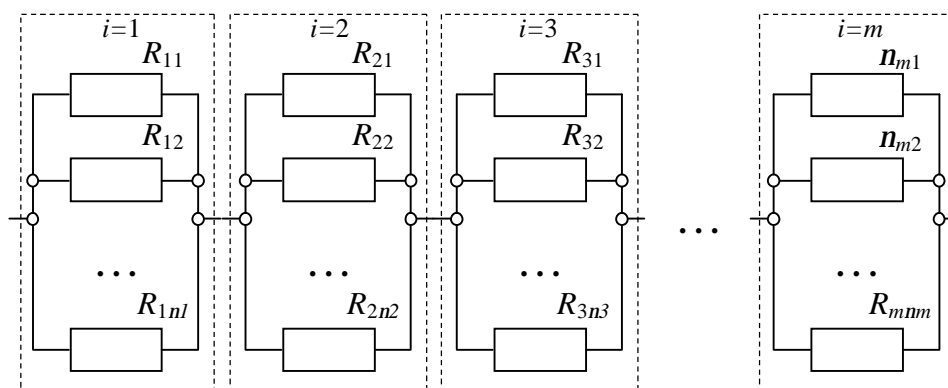


Рис. 1. Загальний вигляд з'єднання блоків, які резервуються в системі

Позначимо A_{ij} як подію, що полягає в успішному функціонуванні j -го елемента в i -му блоці та $R_{ij} = P(A_{ij})$ – як імовірність події A_{ij} . Вважатимемо, що при $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, v_i}$ події A_{ij} незалежні. В цьому випадку елементи системи рис. 1 називатимемо *незалежними*. Спочатку зупинимося на випадку, коли вихід з ладу кожного i -го блока можливий лише в разі відмови всіх його v_i елементів. Позначимо як C подію, яка полягає в успішному функціонуванні системи загалом. Тоді за зазначених допущень можна вважати, що

$$C = \bigcap_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{v_i} A_{ij}, \quad (1)$$

а $P_0 = P(C) \prod_{i=1}^m P_i$, $P_i = \prod_{j=1}^{v_i} [1 - (1 - R_{ij})]$, де P_0 – імовірність успішного функціонування системи загалом (P_0 – показник надійності системи); P_i – імовірність успішного функціонування i -го блока; $R_{ij} = P(A_{ij})$ – імовірність успішного функціонування j -го елемента з i -го блока. Перепишемо сказане в такому вигляді:

$$P_0 = \prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j=1}^{v_i} q_{ij} \right), \quad q_{ij} = 1 - R_{ij}. \quad (2)$$

Відповідно до [8], покажемо, що є можливість оцінити знизу вираз (2) за допомогою деякої функції від добутку імовірностей R_{ij} .

Теорема 1. Нехай v – менше з чисел v_i і з кожного блока вибрані довільні v елементів (рис. 2).

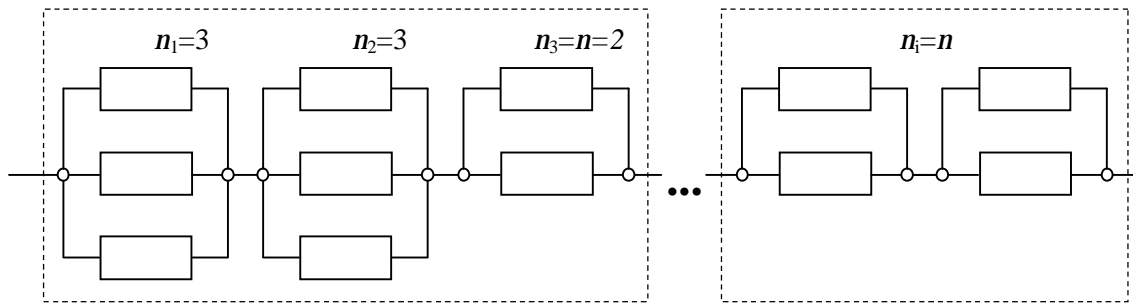


Рис. 2. Процедура вибору довільних v елементів з кожного блока системи з рис.1

Якщо позначити $\Pi_0 = \prod_{i=1}^m \prod_{j_0=1}^v R_{ij_0}$, $j_0 = \overline{1, v}$, то отримаємо нерівність:

$$P_0 = \prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j=1}^{v_i} q_{ij} \right) \geq 1 - (\Pi_0^{1/v})^v. \quad (3)$$

Доведення. Врахуємо, що для будь-яких множин A_{ij} справедливе включення [11] вигляду

$$d = \bigcap_{j=1}^v \bigcap_{i=1}^m A_{ij} \subset \bigcap_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^v A_{ij} = C_1, \quad \text{звідки для подій } A_{ij} \text{ випливає, що } P(D) \leq P(C_1) \text{ або (через}$$

незалежність цих подій):

$$P\left(\bigcap_{j=1}^v \bigcap_{i=1}^m A_{ij}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{j=1}^v \bigcup_{i=1}^m \overline{A_{ij}}\right) = 1 - \prod_{j=1}^v (1 - \prod_{i=1}^m P(\overline{A_{ij}})) \leq \prod_{i=1}^m P\left(\bigcap_{j=1}^v A_{ij}\right) = \prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j=1}^v P(\overline{A_{ij}})\right).$$

Зі сказаного очевидно, що при $P(A_{ij}) \triangleq 1 - a_{li} \rightarrow 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^m (1 - a_i)\right)^v \leq \prod_{i=1}^m (1 - a_i^v)$. Отже

$$\left[1 - \prod_{i=1}^m (1 - a_i^v)\right]^{1/v} \leq 1 - \prod_{i=1}^m (1 - a_i^v), a_i \in [0,1]. \quad (4)$$

Візьмемо до уваги, що $\prod_{j=1}^{v_i} q_{ij} \leq \prod_{j=1}^v q_{ij} \leq a_i^v$, $\prod_{j=1}^v q_{ij}^{1/v} + \prod_{j=1}^v R_{ij}^{1/v} \leq 1$. Тоді з (4) отримуємо:

$$\begin{aligned} \left(1 - \left[\prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j=1}^{v_i} q_{ij}\right)\right]^{1/v}\right)^v &\geq \left(1 - \left[1 - \prod_{i=1}^m (1 - a_i^v)\right]^{1/v}\right)^v \geq \prod_{i=1}^m (1 - a_i^v) = \\ &= \left(\prod_{i=1}^m \left[1 - \prod_{j=1}^v q_{ij}\right]\right)^v \geq \prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^v R_{ij}^{1/v}\right)^v = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^v R_{ij} = \Pi_0, \end{aligned}$$

або $1 - \Pi_0^{1/v} \geq \left[1 - \prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j=1}^{v_i} q_{ij}\right)\right]^{1/v} = (1 - \underline{P}_0)^{1/v}$, а значить $P_0 \geq 1 - (\Pi_0^{1/v})^v$, що й доводить теорему.

Вона узагальнює відому нерівність Мінковського на випадок, коли $m > 1$, оскільки при $m = 1$ з (3)

випливає, що $P = 1 - \prod_{i=1}^n q_i \geq 1 - \left(1 - \left(\prod_{i=1}^n R_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n$, що характеризує систему з паралельним з'єднанням резервуючих елементів [7].

Зазначимо, що тут велику увагу приділяють отриманню нових нерівностей. Це вважатимемо природним, оскільки g -нижня і g -верхня межі y та \bar{y} для функції $y = f(R_1, R_2, \dots, R_m)$ від параметрів R_i повинні задовольняти нерівності $P(\underline{y} \leq y) \geq g$ та $P(\bar{y} \geq y) \geq g$. Тому основним інструментом дослідження і доказів є метод нерівностей, що приводять до нетривіальних результатів.

Встановлена вище нерівність (3) дає змогу складне завдання знаходження g -нижньої межі \underline{P}_0 для імовірності \underline{P}_0 успішного функціонування системи (рис. 1) звести до простішого завдання знаходження g -нижньої межі $\underline{\Pi}_0$ для імовірності Π_0 успішного функціонування системи з послідовно з'єднаними v_m елементами (рис. 3).

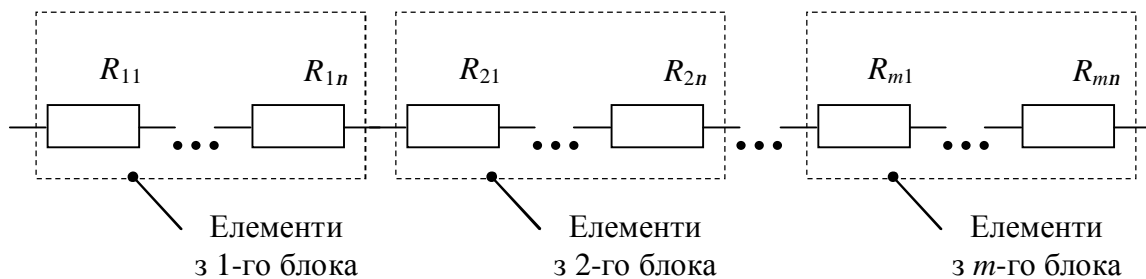


Рис. 3. Приведена система з послідовно з'єднаними елементами, яка асоційована з системою із рис. 1

При цьому $\Pi_0 = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^v R_{ij} = R_{11} \dots R_{1v} R_{21} \dots R_{2v} \dots R_{m1} \dots R_{mv}$ – показник надійності системи рис. 3,

яка асоційована з системою рис. 1. Для формування системи рис. 3 з кожного блока системи рис. 1 вибирається $v = \min_i v_i$ будь-яких елементів, для яких є дані випробувань, що дають змогу знайти g -нижню межу $\underline{\Pi}_0$ імовірності Π_0 .

Теорема 2. Нехай елементи в системі рис. 1 різні, а події A_{ij} при $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, v_i}$ – незалежні. Якщо за результатами випробувань v_m її елементів знайдена g -нижня межа $\underline{\Pi}_0$ для імовірності Π_0 успішного функціонування системи рис. 3, то статистика

$$\underline{P}_0 = 1 - \left(1 - \underline{\Pi}_0^{1/v}\right)^v \quad (5)$$

є нижньою межею для імовірності \underline{P}_0 успішного функціонування системи з рис. 1.

Доведення. Використовуючи теорему 1 та враховуючи, що за умовою теореми імовірність $P(\underline{\Pi}_0 > \Pi_0) \leq 1 - g$, отримуємо:

$$\begin{aligned} P(\underline{P}_0 > \underline{P}_0) &\leq P\left(\underline{P}_0 > 1 - \left(\underline{\Pi}_0^{1/v}\right)^v\right) = P\left(1 - \left(1 - \underline{\Pi}_0^{1/v}\right)^v > \left(1 - \underline{\Pi}_0^{1/v}\right)^v\right) = \\ &= P(\Pi_0 > \underline{\Pi}_0) \leq 1 - g, \text{ або } P(\underline{P}_0 \leq \underline{P}_0) \geq g. \text{ Теорему доведено.} \end{aligned}$$

Припустимо, що v_m елементів системи з рис. 1, які входять в систему з рис. 3, випробовуються (кожен) за схемою Бернуллі або за біноміальною схемою із зупинкою з реєстрацією значень випадкових величин n'_{ij} , де n'_{ij} дорівнює кількості випробувань i -го блока до першої відмови, якщо кількість відмов цього елемента $t_{ij} \neq 0$ та $t_{ij} = 0$. Якщо величини n'_{ij} при $i = \overline{1, m}$ та $j = \overline{1, v}$ незалежні, а n' – менша з них, то, згідно з [12], статистика $\Pi_0 = (1 - g)^{1/n'}$ є g -нижньою межею для Π_0 . Звідси та на підставі теореми 3 (див. далі) робимо висновок про те, що в такій ситуації як g -нижню межу для імовірності \underline{P}_0 успішного функціонування системи рис. 1 можна прийняти статистику

$$\underline{P}_0 = 1 - \left(1 - (1 - g)^{1/vn'}\right)^v. \quad (6)$$

За всіх відмов $t_{ij} = 0$ дістаємо часткове значення:

$$\underline{P}_0 = 1 - \left(1 - (1 - g)^{1/vn}\right)^v, \quad (7)$$

де $n = \min_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq v} n_{0j}$ – менше з чисел випробувань vm елементів системи з рис. 1.

Якщо vm елементів системи з рис. 1, що входять в систему рис. 3, випробовуються (кожен) n_{ij} раз за схемою Бернуллі з реєстрацією значень випадкових величин t_{ij} , то у разі їх незалежності зі співвідношення (5) отримуємо ще один вираз для g -нижньої межі:

$$\underline{P}_0 = 1 - \left(1 - f_2^{1/v}(n, t', g)\right)^v, \quad (8)$$

де $t' = n\hat{q}$, n – менше з чисел vm випробувань елементів $\hat{q} = -\ln \hat{\Gamma} - 1 - \hat{\Gamma}$, $\hat{\Pi} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^v \left(1 - \frac{t_{ij}}{n_{ij}}\right)$.

При всіх $t_{ij} = 0$ з (8) впливає формула (7). Для приблизних розрахунків можемо використовувати таку формулу:

$$\underline{P}_0 = 1 - \left(1 - (1 - \hat{q})^{1/v}\right) (1 - g)^{1/v(1 - \hat{q})n}. \quad (9)$$

Недоліком співвідношень (5)...(9) є те, що в них враховано лише менше значення v зі всіх чисел v_i , які можна отримати для всіх елементів у блоках. У найсприятливішому випадку, коли v_i рівні, вони дають відмінні результати, але в найменш сприятливому випадку, тобто коли $v = 1$, можливе набуття занижених значень величини g -нижньої межі для \underline{P}_0 . У зв'язку з цим також викликають інтерес інші розв'язання цієї задачі. Використовуючи матеріали, наведені в роботі [12], доведемо нові твердження, які викладемо у вигляді теорем.

Теорема 3. Нехай для кожного з елементів системи рис. 1 за наслідками випробувань знаходять g -нижню \underline{R}_{ij} та g -верхню \overline{R}_{ij} межі його успішного функціонування. Якщо \underline{R}_* – менша з величин \underline{R}_{ij} , а \overline{R}^* – більша з величин \overline{R}_{ij} , то статистика

$$\underline{P}_0 = \prod_{i=1}^b \left(1 - (1 - \underline{R}_*)^{v_i} \right) \quad (10)$$

є g -нижньою межею для імовірності \underline{P}_0 , а статистика

$$\overline{P}_0 = \prod_{i=1}^b \left(1 - (1 - \overline{R}^*)^{v_i} \right) \quad (11)$$

є g -верхньою межею для \overline{P}_0 .

Доведення. Нехай R_* – менша з імовірностей R_{ij} . Тоді

$$\begin{aligned} P(\underline{P}_0 > \underline{P}_0) &= P\left(\underline{P}_0 > \prod_{i=1}^m \left(1 - \prod_{j=1}^{v_i} (1 - r_{ij}) \right)\right) \leq P\left(\underline{P}_0 > \prod_{i=1}^m \left(1 - (1 - R_*)^{v_i} \right)\right) = P\left(\prod_{i=1}^m \left(1 - (1 - \underline{R}_*)^{v_i} \right) > \right. \\ &\quad \left. > \prod_{i=1}^m \left(1 - (1 - R_*)^{v_i} \right) \right) = P(\underline{R}_* > R_* \triangleq R_{i'j'}), \end{aligned}$$

де (i', j') – фіксована пара індексів i та j , для якої $R_* = \min_{i,j} R_{ij} = R_{i'j'}$.

Оскільки $\underline{R}_* \leq \underline{R}_{i'j'}$, то з врахуванням того, що $\underline{R}_{i'j'}$ є g -нижньою межею для $R_{i'j'}$, отримаємо:
 $P(\underline{P}_0 > \underline{P}_0) \leq P(\underline{R}_* > R_* = R_{i'j'}) \leq P(\underline{R}_{i'j'} > R_{i'j'}) \leq 1 - g$ або $P(\underline{P}_0 \leq \underline{P}_0) \geq g$. Аналогічно:

$P(\overline{P}_0 < \overline{P}_0) \leq P\left(\prod_{i=1}^m \left(1 - (1 - \overline{R})^{v_i} \right) < \left(\prod_{i=1}^m \left(1 - (1 - R^*)^{v_i} \right) \right) \right) = P(\overline{R}^* < R^* \triangleq R_{kl}) \leq P(\overline{R}_{kl} < R_{kl}) \leq 1 - g$ або
 $P(\overline{P}_0 \geq \overline{P}_0) \geq g$, де (k, l) – фіксована пара індексів i та j , для якої $R^* = R_{kl}$. Теорему доведено.

За рахунок «збереження» всіх чисел v_i (а не тільки меншого v з них) співвідношення (10) може давати кращі результати (5). За близьких v_i можливо зворотнє. Важливою властивістю статистики (10) є те, що для її використання не потрібне допущення про незалежність результатів випробувань.

Приклад 1. Нехай система рис. 1 складається з трьох блоків з числами елементів $v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $v_3 = 1$, кожен з яких випробовується за біноміальною схемою Бернуллі. Після випробувань отримано початкові дані у вигляді табл. 1.

Таблиця 1

Блок № 1	Блок № 2	Блок № 3
$n_{11} = 10, t_{11} = 1$ $t_{12} = 20, t_{12} = 0$	$n_{21} = 10, t_{21} = 1$ $n_{22} = 40, t_{22} = 2$ $n_{23} = 10, t_{23} = 0$	$n_{31} = 50, t_{31} = 1$

З таблиць [13] за цими даними знаходимо значення g -нижніх меж (якщо $g = 0,90$: $\underline{R}_{11} = 0,66$; $\underline{R}_{12} = 0,89$; $\underline{R}_{21} = 0,66$; $\underline{R}_{22} = 0,87$; $\underline{R}_{23} = 0,79$; $\underline{R}_{31} = 0,92$). Потрібно знайти значення g -нижньої межі \underline{P}_0 для імовірності \underline{P}_0 успішного функціонування системи загалом.

Розв'язання. За формулою (10) з урахуванням того, що в цьому випадку $\underline{R}_* = 0,66$, знаходимо: $\underline{P}_0 = (1 - 0,34^2)(1 - 0,34^3)(1 - 0,34) = 0,54$.

Нехай тепер результати випробувань елементів незалежні. Тоді, враховуючи, що тут $v=1$, для кожного блока по $v=1$ елементу (а саме: другий елемент з першого блока, третій елемент з другого і перший з третього) знайдемо значення g -нижньої межі \underline{p}_0 для імовірності $\Pi_0 = R_{12}R_{21}K_{31}$.

Для цього, визначивши значення $\hat{\Pi}_0 = 1 - \frac{1}{50} = 0,98$ незміщеної оцінки для Π_0 , із співвідношення (9)

отримуємо $\underline{p}_0 = 0,98 \cdot 0,1^{\frac{1}{10 \cdot 0,98}} = 0,77 > 0,54$.

Проте при іншому виборі – одного першого елементів з кожного блока отримуємо інший результат, оскільки в цьому випадку $\hat{\Pi}_0 = \left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{50}\right) = 0,79$, $\hat{q} = |\ln 0,79| = 0,24$, а значить (використовуємо таблиці з [13] і формулу (8)), шукане значення дорівнюватиме: $\underline{p}_0 = \underline{\Pi}_0 = f_2(n, n\hat{q}, g) = f_2(1; 2, 4; 0,90) = 0,51$.

Примітки.

а) За умовами прикладу число $v=1$. У зв'язку з цим вибрано по одному елементу з кожного блока для знаходження g -нижньої межі \underline{p}_0 . Через рівність $v=1$ при цьому, згідно з (8), виявлялося, що $\underline{p}_0 = \underline{\Pi}_0$. Якщо $v > 1$, з кожного блока вибирають вже не по одному, а по v елементів ($v > 1$).

б) Отримувані з (8) значення статистики \underline{p}_0 залежать від того, які саме v з v_i елементів у блоках підлягають вибору. Цей вибір абсолютно довільний. У зв'язку з цим допустима оптимізаційна постановка такого завдання: вибрати v з v_i елементів кожного блока так, щоб забезпечувався максимум середнього значення величини \underline{p}_0 за обмежень на вартість і час проведення випробувань.

Отримаємо ще одну формулу, що дає змогу знайти g -нижню межу для \underline{p}_0 .

Визначення. Нехай q – невідома константа, яка підлягає оцінюванню за результатами $w \in \Omega$ випробувань, де Ω – сукупність всіх результатів w . Статистика $q_g = q_g(w)$, для якої виконується нерівність $P(q_g \leq q) \geq g$, називається *правильною g -нижньою межею* для q , якщо $q \in (0, 1]$, її функція розподілу $P(q_g \leq c) = F(q, g, c)$, $c \in [0, 1]$ містить параметр q і правильно залежить від нього. Це означає, що відображення q , що задається за допомогою співвідношення $q(t) = 1 - F(t, g, c)$ або $q(t) = 1 - \cancel{F}(t, g, c) \geq 1 - F(t, g, c)$, задовольняє умови а та б, а саме:

а) Функція $q(t)$ має похідну $q'(t) > 0$ на $(y, 1)$, визначена і безперервна на $[y, 1]$, де $y \in (0, 1)$, причому $q(1) = 1$, а добуток

$$\Psi_k(t) q(t) q^k \left(\frac{y}{t} \right)^{1/k} \quad (12)$$

має на $(y, 1)$ єдиний постійний екстремум та дорівнює $q(y)$.

б) Якщо $t = c$, виконується співвідношення $\forall t \in (0, 1): 1 - F(t, g, t) \leq 1 - g$, $g \in (0, 1)$. Вважається, що за такого w значення $q_{g_k}^k, g_k = 1 - (1 - g)^{1/k}, k = \overline{1, m}$ утворюють незростаючу послідовність, так що

$$\forall k \in I_m = \{1, 2, \dots, m\}: q_{g_m}^m \leq q_{g_k}^k, q_{g_{k+1}}^{k+1} \leq q_{g_k}^k. \quad (14)$$

Сукупність всіх функцій $F(q, g, c)$, для яких вказані умови виконуються, позначимо буквою F_0 . Загальна назва для ідеальної і правильної g -межі – монотонна 0-нижня межа.

У [9, 10] показано, що клас F_0 не порожній. Зокрема, статистика $\underline{R} = f_2(n, t, g)$ має функцію розподілу з F , тобто g -нижня межа Клопера–Пірсона є правильною.

Покажемо, що клас F описує більше типових g -нижніх меж. У цьому напрямі справедливий такий результат.

Теорема 4. Статистика

$$\underline{R}_g = (1-g)^{1/n'}, \quad (16)$$

що є g -нижньою межею для параметра R біноміального розподілу (див. [9] та ін.), де n' – кількість випробувань до першої відмови при їх числі $t \neq 0$ та $n' = n$ при $t = 0$, є правильною і одночасно ідеальною g -нижньою межею R .

Доведення. Згідно з [12], справедливе співвідношення:

$$\begin{aligned} P(\underline{R}_g > c) &= P\left(n' > l = \frac{\ln(1-g)}{\ln c}\right) = 1 - P(n' \leq l) = 1 - \frac{1}{S_0} \sum_{k=0}^{[l]} R^k (1-R) = 1 - F(R, g, c) = \\ &= 1 - \frac{1-R}{S_0} \frac{1-R^{[l]+1}}{1-R} = 1 - \frac{1-R^{[l]+1}}{1-R^{n+1}} \leq 1 - (1-R^{[l]+1}) = R^{[l]+1} \leq R', \end{aligned}$$

де $S_0 = \sum_{k=0}^n R^k (1-R) = 1 - R^{n+1}$, $l = \frac{\ln(1-g)}{\ln c}$, $(1-g)^{1/n'} \leq (1-g)^{1/n} = c' \Rightarrow 1 - F(R, g, c) = 0$. При $c > c'$

функція $q(t) = 1 - F(t, g, c) = t^{[l]+1}$, $l = \frac{\ln(1-g)}{\ln c}$, має похідну $q'(t) = ([l]+1)t^{[l]} > 0$, визначена і

безперервна на $[0, 1]$, причому $q(1) = 1$, а $\max_{x_1, x_2, \dots, x_m = y} \prod_{i=1}^m q(x_i) = y^{[l]+1} = \max_{1 \leq k \leq m} q^k(y^{1/k})$. Тоді послідовність

$\underline{R}_{g_k}^k = (1-g)^{1/n}$, $k = 1, 2, \dots, m$ є постійною для $k \geq 1$. Нарешті $\forall t \in (0, 1)$:

$1 - F(t, g, t) = 1 - (1-t^{[l]+1}) = t^{[l]+1} \leq t' \equiv 1-g$, оскільки тут $l = \frac{\ln(1-g)}{\ln t}$. Теорема доведена.

Отже, ми маємо два приклади правильних g -нижніх меж: статистика $R = f_2(n, t, g)$ Клопера–Пірсона і статистика (16), запропонована в [9, 10]. Обидві вони є g -нижніми межами для параметра R біноміального розподілу. Цікаво відзначити, що g -нижня межа (16) є прикордонною для правильних та ідеальних g -нижніх меж, оскільки послідовність $\underline{R}_{g_k}^k = (1-g_k)^{k/n'} = (1-g)^{1/n'}$ постійна, тобто не зростає і не спадає по $k \geq 1$. Це означає, що теорема 4 є прикладом статистики, яка для параметра R біноміального розподілу є одночасно правильною та ідеальною. Для отримання інших ідеальних g -меж подамо такий допоміжний результат.

Лема. При $t \in (0, 1]$, $x \in [0, 1]$ та $v \geq 1$ виконується нерівність

$$\left(1 - (1-x^t)^v\right)^{1/t} \geq 1 - (1-x)^v \quad (17)$$

Знак рівності досягається, якщо $v = 1$ та якщо $t = 1$.

Доведення. Запишемо цю нерівність у вигляді $1 - (1-x^t)^v \geq (1 - (1-x)^v)^t$, $f(t) = (1-x^t)^v \leq (1 - (1-x)^v)^t = q(t)$ або $\frac{f(t)}{q(t)} = \frac{(1-x^t)^v}{1 - (1-x)^v} \leq 1$. Згідно з [14], f , q та $\frac{f'}{q'}$ – позитивні

зростаючі функції. Тоді при $f(0) = q(0) = 0$ функція $\frac{f}{q}$ зростає для $t > 0$. У нашому випадку

$f(0)=q(0)=0$, причому f та q позитивні і зростають по $t>0$, оскільки $f'(t)=-v(1-x^t)^{v-1}x^t\ln x>0$. Водночас відношення похідних $\frac{f'(t)}{q'(t)}=\frac{(1-x^t)^{v-1}}{(1-(1-x)^v)^t}\frac{vx^t\ln x}{\ln(1-(1-x)^v)}$ зростає

для $t>0$ та $v>1$, оскільки функція $(1-x^t)^{v-1}$ за цих умов зростає по $t>0$, тоді як функція $(1-(1-x)^v)^t$ спадає по $t>0$.

З урахуванням викладеного можемо зробити висновок, що $\frac{t}{q}$ зростає для $t>0$, а значить

$t<1\Rightarrow\frac{f(t)}{q(t)}<\frac{f(1)}{q(1)}=1$, що і доводить лему.

Теорема 5. Нехай у виразі $\underline{P}_g=1-(1-\underline{R}_g)^v$, що дає змогу знайти g -нижню межу \underline{P}_g для імовірності $\underline{P}=1-(1-R)^v$, статистика \underline{R}_g є ідеальною g -нижньою межею для імовірності R . Тоді статистика \underline{P}_g є ідеальною g -нижньою межею для \underline{P} .

Доведення. З формули $\underline{P}=1-(1-R)^v$ випливає, що $R=1-(1-\underline{P})^{1/v}$, а значить $(\underline{R}_g>c')=P(\underline{P}_g>c)=1-\overset{0}{F}=P(\underline{R}_g>c')=1-F(R,g,c')$, де $c'=1-(1-c)^{1/v}$, а $\overset{0}{F}$ та F – функції розподілу \underline{P}_g та \underline{R}_g . Далі слід встановити, що $F\in\overset{0}{P}_0\Rightarrow\overset{0}{F}\in\overset{0}{P}_0$. З цією метою розглянемо функцію $\overset{0}{q}(t)=1-\overset{0}{F}(t,g,c)=1-F(t,g,c')=q(1-(1-t)^{1/v})=q(Z_t)$, де $Z_t=1-(1-t)^{1/v}$. Оскільки за умовою теореми функція q визначена і спрямована на $[y,1]\subset(0,1)$, $q^{(1)}=1$ та $q'(t)>0$, причому $Z_t'>0$ на $(0,1)$, то цими ж властивостями володіє і функція $\overset{0}{q}(t)$. Крім того, оскільки за умовою теореми $\underline{R}_{g_{k+1}}^{k+1}\geq\underline{R}_{g_k}^k$, $k\geq 1$, то, позначаючи $t=k/k+1$, з (17) отримуємо:

$$\underline{P}_{g_{k+1}}^{k+1}=\left(1-(1-\underline{R}_{g_{k+1}})^v\right)^{k+1}=\left(1-\left(1-\underline{R}_{g_{k+1}}^{\frac{(k+1)}{k+1}}\right)^v\right)^{k+1}\geq\left(1-\left(1-\underline{R}_{g_k}^{\frac{k}{k+1}}\right)^v\right)^{k+1}=\left(1-(1-\underline{R}_{g_k}^t)^v\right)^{\frac{1}{t}k}\geq\left(1-(1-\underline{R}_{g_k})^v\right)^k,$$

або $\underline{R}_{g_{k+1}}^{k+1}\geq\underline{R}_{g_k}^k\Rightarrow\underline{P}_{g_{k+1}}^{k+1}\geq\underline{P}_{g_k}^k$. Теорему доведено.

Аналогічно викладеному встановлюємо такий результат.

Теорема 6. Нехай у виразі $\underline{P}_g=1-(1-\Pi_g^{1/v})^v$, який відповідно до викладеного дає змогу знайти g -нижню межу \underline{P}_g для імовірності $\underline{P}=1-(1-R_1)(1-R_2)\dots(1-R_v)$, статистика $\underline{\Pi}_g$ є ідеальною. Тоді статистика \underline{P}_g є ідеальною g -нижньою межею імовірності \underline{P} .

Теорему 6 можна довести аналогічно до теореми 5.

Висновок. Наведені теореми мають важливе значення для теорії дослідження автоматичних систем з послідовно-паралельним з'єднанням елементів та можуть бути використані для розгляду та аналізу багатьох аспектів інтервального оцінювання робочих параметрів під час випробувань надійності автоматичних систем однократного використання. Для отримання загального результату щодо зазначеного потрібно довести теорему:

Теорема. Нехай кожен з елементів $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ системи з послідовно-паралельним з'єднанням резервуючих елементів випробовується за біноміальним планом із зупинкою. Нехай за результатами випробувань реєструються значення випадкових величин $n'_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n_i}$. При цьому n'_{ij} – кількість випробувань до отримання першої відмови j -го елемента з i -го блока (якщо кількість r_{ij} його відмов не дорівнює нулю) та $n'_{ij} = n_{ij}$, якщо $r_{ij} = 0$, де n_{ij} – встановлений обсяг випробувань вказаного елемента. Тоді, якщо величини n'_{ij} при $i = \overline{1, m}$ та $j = \overline{1, n_i}$ є незалежними, як g -нижню межу \underline{P}_0 для імовірності $P_0 = \prod_{i=1}^m P_i$ (де $P_i = 1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - R_{ij})$) успішного функціонування автоматичної системи (рис. 1) з різноманітними елементами можна прийняти статистику

$$\underline{P}_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \underline{P}_{ig} = 1 - \max_{1 \leq i \leq m} \left(1 - (1 - g)^{\frac{1}{n_{n_i}}} \right)^{n_i}, \text{ де } n'_i = \min_{1 \leq j \leq n_i} n'_{ij} - \text{менша з величин } n'_{ij} \text{ в } j\text{-му блоці.}$$

Доведення цієї теореми є *перспективою подальших досліджень* щодо надійності автоматичних систем з послідовно-паралельним з'єднанням резервуючих елементів.

1. Скопа О.О. Інтервальне оцінювання надійності Т-систем з паралельним з'єднанням елементів за результатами їх біноміальних іспитів // Наукові праці ОНАЗ: період. наук. зб. з радіотехніки і телекомунікацій, електроніки та економіки в галузі зв'язку. – Одеса, 2002. – № 1. – С.65–71. 2. Казакова Н.Ф., Мухін О.М., Скопа О.О. Скорочення обсягу випробувань систем телекомунікацій на надійність за рахунок їх структурної надмірності // 1-й Міжнарод. радіоелектрон. форум «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития»: 8–10 октября 2002 г.: сб. научн. тр. – Харьков: ХНУРЕ. – 2002. – С.358–360. 3. Панфилов И.П., Скопа А.А. Надежность работы линии связи, состоящей из основного и резервного каналов // Радиотехника: Всеукр. межведомств. научн.-техн. сб. – Харьков. – 2002. – Вып. 128. – С.91–96. 4. Скопа О.О., Казакова Н.Ф., Мурін О.С. Вплив функціональної надмірності резервованих систем телекомунікацій на скорочення обсягів їх випробувань на надійність // Наук. праці ДонНТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. Вип. 58. – Донецьк: РВА ДонНТУ, 2003. – С.115–121. 5. Скопа О.О. Обслуговування резервних систем зв'язку // Наук. праці ДонДТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. Вип. 38. – Донецьк: РВА ДонДТУ, 2002. – С.89–91. 6. Скопа О.О. Оптимізація експлуатації резервних систем телекомунікацій // Праці УНДПРТ. – Одеса, 2002. – № 1(29). – С.91–93. 7. Скопа О.О. Інтервальне оцінювання надійності Т-систем з паралельним з'єднанням елементів за результатами їх біноміальних іспитів // Наукові праці ОНАЗ: період. наук. збір. з радіотехніки і телекомунікацій, електроніки та економіки в галузі зв'язку. – Одеса, 2002. – № 1. – С.65–71. 8. Скопа А.А., Казакова Н.Ф. Применение теории псевдополубратных матриц к решению задач по оценке надежности систем телекоммуникаций. Часть 1. Общие положения // Праці УНДПРТ. – Одеса, 2002. – № 4(32). – С.88–91. 9. Казакова Н.Ф. Технічне рішення задачі Клопера-Пірсона / Наук. записки Міжнар. гуманіт ун-ту. Вип. 3. – Одеса: МГУ, 2005. – С.89–94. 10. Казакова Н.Ф. Аналітичне розв'язання одновимірної задачі Клопера-Пірсона // Радиотехника: Всеукр. межведомств. научн.-техн. сб. – Харьков: ХНУРЕ. – 2002. – Вып. 128. – С.97–98. 11. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 465 с. 12. Судаков Р.С. Интервальная оценка монотонных функций по результатам испытаний // Техническая кибернетика. Изв. АН СССР. – 1986. – № 1. – С. 82–91. 13. Судаков Р.С., Северцев Н.А. и др. Статистические задачи отработки систем и таблицы для числовых расчетов показателей надежности. – М.: Высшая школа, 1975. – 607 с. 14. Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г. Неравенства. – [Электронный ресурс]: http://e-books.enigma.uran.ru/book_djvu/hardi/hardi.djvu: Доступ свободный.