МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Практикум
для иностранных граждан
подготовительного отделения

ОДЕССА ОНЭУ 2014

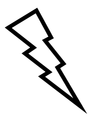
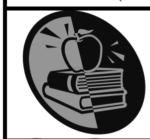
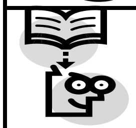
ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Практикум предназначен для иностранных студентов, обучающихся в ОНЭУ. В первой части изложены основные вопросы школьного курса алгебры: действия с рациональными и иррациональными выражениями. В методическом пособии большое количество как теоретического материала, решение основных типов примеров, так и задач для самостоятельного решения.

Практикум написан на основе рекомендованного Министерством образования и науки, молодежи и спорта Украины учебника «Математика. Книга 1» Саенко С.Л.

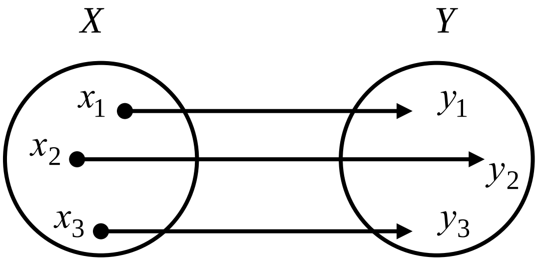
Условные обозначения:

!	- запомните
?	- вопросы и задания для повторения
*	- определение
	- теорема
	- проверь себя
	- это важно знать
	- упражнения
+	- это полезно знать (дополнительный материал)

ГЛАВА 3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 8. Функции и их графики

20. *Понятие функции*

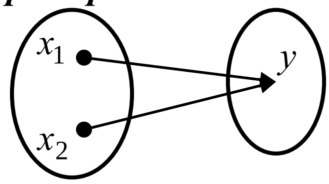


Есть соответствие между множествами X и Y: элементу x_1 соответствует элемент y_1, элементу x_2 соответствует элемент y_2 и т .д.

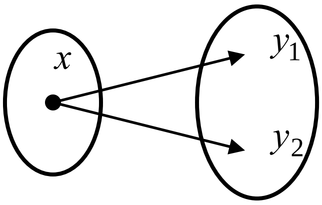
Например, $1 \to 1;\ 2 \to 4;\ 3 \to 9; \ldots; x \to x^2$ или $f(x) = x^2$.

Функция – это **соответствие** между множествами X и Y, когда каждому элементу множества X соответствует **только один** элемент множества Y.

Примеры:



1. Это соответствие – функция, потому что одному значению *x* соответствует только одно значение *y*. Например, $2 \to 4;\ -2 \to 4;\ x \to x^2$.



2. Это соответствие, при котором одному значению *x* соответствует два значения *y*. В высшей математике это многозначная функция. В элементарной математике это не функция.

Обозначения функции: $y = f(x); S = f(t); U = g(V) \ldots$.

Читаем: «*y равен f от x*».

$x -$ независимая переменная, **аргумент;**

$y -$зависимая переменная, функция, *y* зависит от *x*;

$f -$символ функциональной зависимости (формула, закон соответствия). Функция задана, если известны множества *X, Y* и закон соответствия *f*.

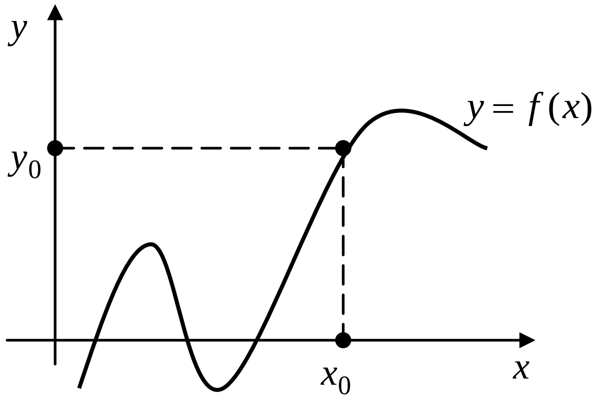
Способы задания функции

1. Аналитический способ: функция задана формулой.

Например: $y = x^2; f(x) = -5\sin x; C = 2\pi R$.

2. Табличный способ: функция задана таблицей.

x	0	1	2	3	…
y	0	0,5	1,8	2,9	…



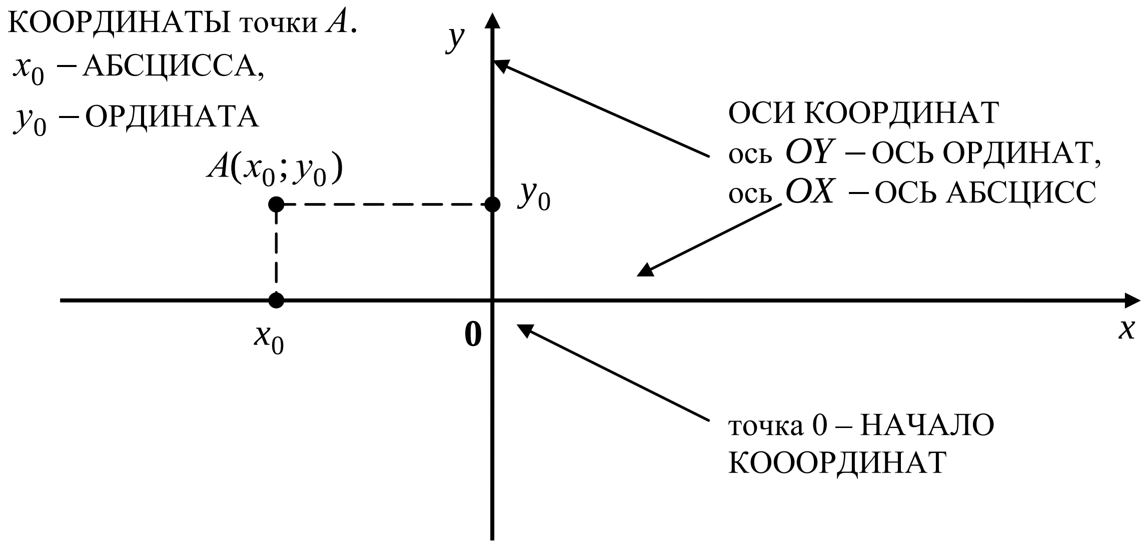
3. Графический способ: есть график функции.

График функции $y = f(x)$ это множество точек, координаты которых $(x, f(x))$.

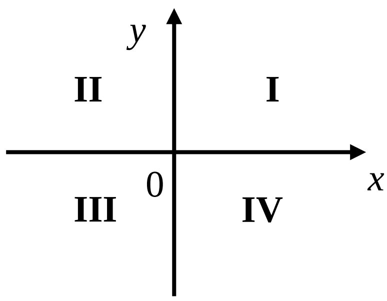
4. Словесный способ: есть описание функции словами. Например, значение функции равно 1, если x – рациональное число, и равно 0, если x – иррациональное число. В высшей математике это функция Дирихле.

Есть и другие способы задания функции.

Графики функций изображают в системе координат.



Оси координат делят координатную плоскость на 4 части: **четверти** или **квадранты**.



Область определения функции – это множество значений аргумента *x*. Множество $X = D(f)$

Примеры. Найти область определения функции:

1. $S = t^2 + 5$.

Решение. $t \in R$ или $D(S) = R$.

2. $y = \dfrac{1}{x+5}$.

Решение. $x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5 \Rightarrow x \in R \setminus \{2\}$.

3. $f(x) = \sqrt{x-4}$.

Решение. $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$ или $D(f) = [-3;+\infty)$.

Область значения (область изменения) функции – это множество значений функции *y*. Множество $Y = E(f)$

Примеры. Найти область значений функции:

1. $y = x^2$.

Решение. $x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow E(f) = [0;+\infty)$.

2. $y = t^3 - 8$.

Решение. $t^3 - 8 \in R \Rightarrow y \in R \Rightarrow E(f) = R$.

Нули функции – это значения аргумента, при которых функция равна нулю

Пример. Найти нули функции $y = 2x^2 - 3x$.

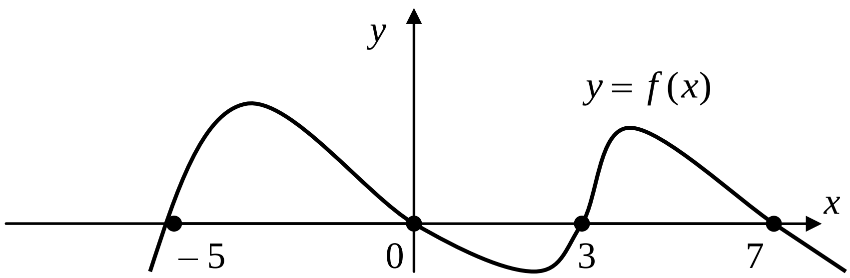
Решение. $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(2x-3) = 0$;

$x = 0$ или $x = 1{,}5$.

Ответ: нули функции $x_1 = 0$; $x_2 = 1{,}5$.

Графически нули функции – это **точки пересечения графика с осью *OX***

Например, нули функции на чертеже:
$x_1 = -5$; $x_2 = 0$;
$x_3 = 3$; $x_4 = 7$.



Интервалы знакопостоянства функции –
это интервалы, на которых функция имеет постоянный знак

На графике: $f(x) > 0$ при $x \in (-5;0) \bigcup (3;7)$;

$f(x) < 0$ при $x \in (-\infty;-5) \bigcup (7;+\infty)$.

21. *Виды функций*

Все функции, которые изучаются в курсе элементарной математики (не высшей математики) – это **элементарные функции**.

Элементарные функции

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
Это функции, которые можно записать как многочлены или в виде алгебраических действий над многочленами
$y = x^2 + 3;\ y = \sqrt{x-2};\ y = \dfrac{2}{x}$

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ
Такие функции нельзя записать в виде многочленов
$y = \sin x;\ y = \ln x;\ y = 5^x;$
$y = \arccos x$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
$y = 2x^2 + 7;\ y = \dfrac{x+3}{x-4}$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
$y = \sqrt{x};\ y = x^3 - 4\sqrt[5]{x}$

ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
Функцию можно записать как многочлен.
$y = \dfrac{1}{4}x^2 - 3x + 5$

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
Функцию можно записать как отношение многочленов.
$y = \dfrac{6x+3}{x^3 - x + 4}$

Алгебраические действия над элементарными функциями дают элементарные функции.

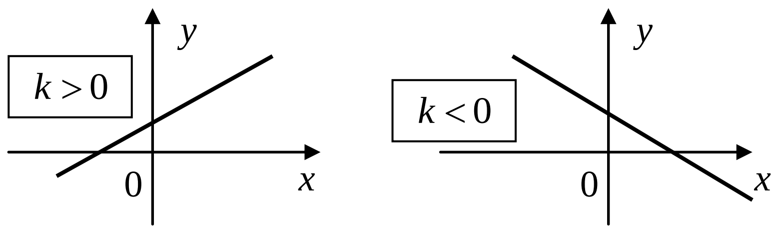
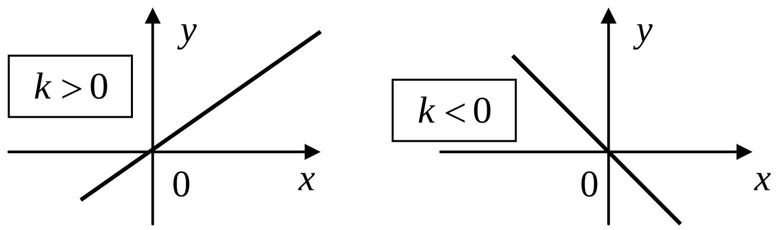
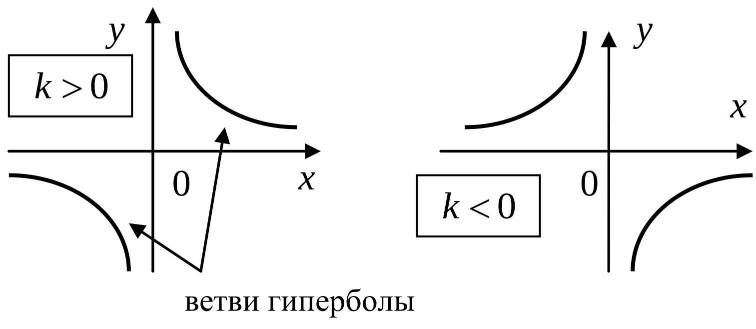
Примеры.

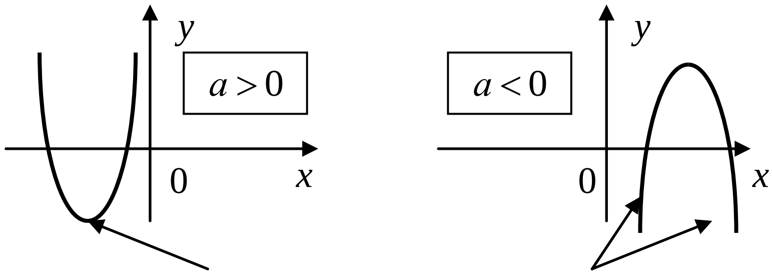
1. $y = \dfrac{2x-4}{x+9}$ – это дробно-рациональная функция.

2. $y = \sqrt{x} + 8$ – это целая иррациональная функция.

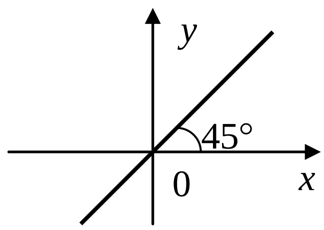
3. Функции $y = 3\cos x - 4e^{5x} + 6$; $y = x^{\sqrt{3}}$; $y = \sqrt{tgx}$ – это трансцендентные функции.

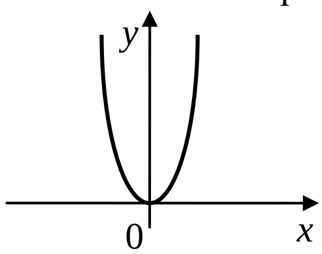
Алгебраические функции

Линейная функция	$y = kx + b$	График функции – **прямая** или **прямая линия.** 
Прямая пропорциональность	$y = kx$**.** Это частный случай линейной функции при $b = 0$.	График функции – **прямая, которая проходит через начало координат –** точку 0**.** 
Обратная пропорциональность	$y = \dfrac{k}{x}$	График функции – **гипербола.** 

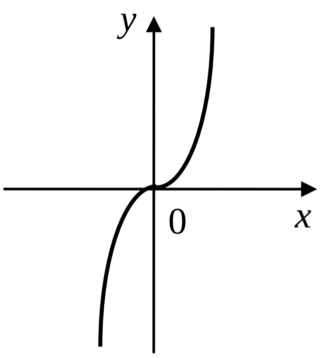
<table>
<tr>
<td>Квадратичная функция</td>
<td>$y=ax^2+bx+c$</td>
<td>График функции – парабола.


вершина параболы ветви параболы</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Степенная функция</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$y=x^{\alpha},\ \alpha\in Q$

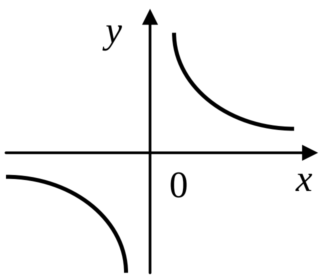
1. $\alpha=1$
$y=x$</td>
<td>График – прямая.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">2. $\alpha=2$
$y=x^2$

$y=x^{2n}$</td>
<td>График – парабола.


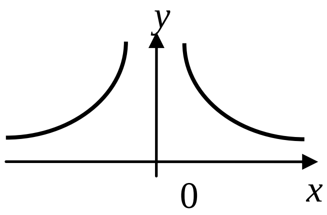
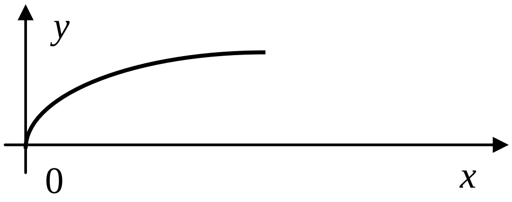
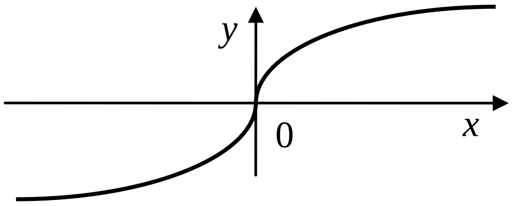
Графики функций вида $y=x^{2n}$ $(y=x^4, y=x^6,\ldots)$ имеют форму параболы.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">3. $\alpha=3$
$y=x^3$

$y=x^{2n+1}$</td>
<td>График – кубическая парабола.


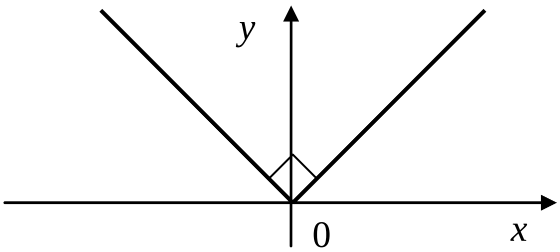
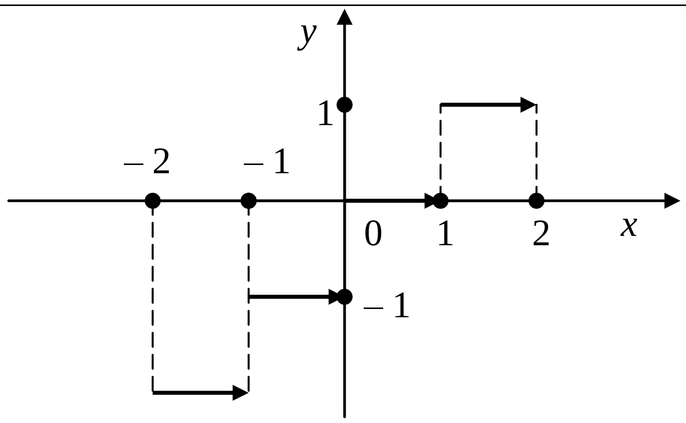
Графики функций вида $y=x^{2n+1}$ $(y=x^5, y=x^7,\ldots)$ имеют форму кубической параболы.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">4. $\alpha=-1$
$y=\dfrac{1}{x}$

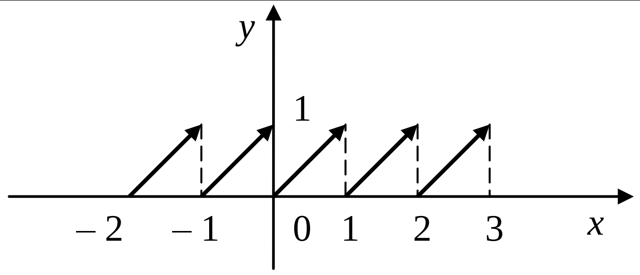
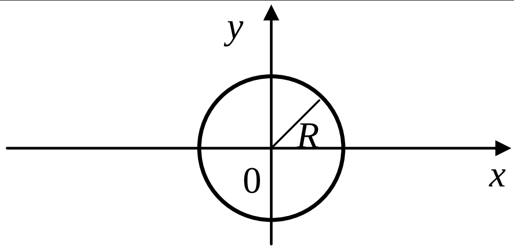
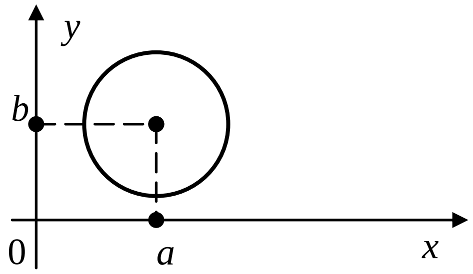
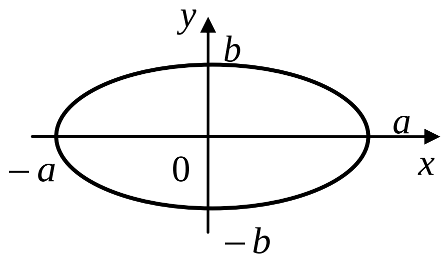
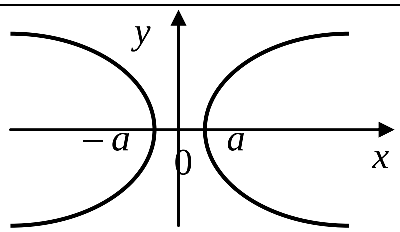
$y=\dfrac{1}{x^{2n+1}}$</td>
<td>График – гипербола.


Графики функций вида $y=\dfrac{1}{x^{2n+1}}$ $(y=x^{-3}, y=x^{-5},\ldots)$ имеют форму гиперболы.</td>
</tr>
</table>

5. $\alpha = -2n$ $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$	 $y = x^{-2}, y = x^{-4}, \ldots$
6. $\alpha = \dfrac{1}{2}$ $y = \sqrt{x}$	
7. $\alpha = \dfrac{1}{3}$ $y = \sqrt[3]{x}$	

Некоторые графики и кривые

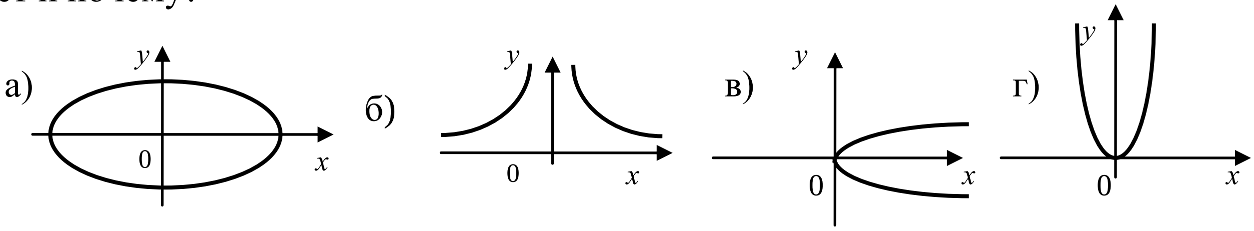
1	Модуль x	$y = \lvert x \rvert$	
2	Целая часть числа	$y = [x]$	

3	Дробная часть числа	$y = \{x\}$	
4	Окруж-ность	Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$	
		Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $(a;b)$: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	
5	Эллипс	Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
6	Гипер-бола	Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ § 8

57. Дайте определение функции (что называется функцией?).
58. Как в выражении $y = f(x)$ называется:
    а) x; б) y?
59. Какие способы задания функции вы знаете?
60. Как называется в системе координат: а) ось *ОХ*; б) ось *ОУ*; в) точка 0?
61. Что такое область определения функции?
62. Что такое область значений функции?

63. Что такое нули функции?
64. Как найти нули функции по графику?
65. Что такое интервалы знакопостоянства функции?
66. Какие виды функций вы знаете?
67. Какой формулой задается:
   а) линейная функция;
   б) обратная пропорциональность;
   в) квадратичная функция;
   г) степенная функция?
68. Как называется график:
   а) линейной функции;
   б) квадратичной функции;
   в) обратной пропорциональности;
   г) функции $y = x^3$?
69. Графиком какой функции является: а) парабола; б) гипербола; в) кубическая парабола; г) прямая?
70. Какие соответствия, заданные графически являются функциями, а какие нет и почему?



71. Где в системе координат находится точка, если:
   а) ее абсцисса положительная, а ордината отрицательная;
   б) абсцисса равна 0, а ордината положительная;
   в) координаты равны по абсолютной величине;
   г) ордината равна двум, а абсцисса – любое действительное число?
72. Что можно сказать о координатах точек, которые лежат на:
   а) оси абсцисс;
   б) оси ординат;
   в) прямой, параллельной оси абсцисс;
   г) прямой, параллельной оси ординат;
   д) биссектрисе первой и третьей четвертей;
   е) биссектрисе второй и четвертой четвертей?
73. Запишите аналитическое выражение функциональной зависимости между двумя переменными, если:
   а) одна переменная равна сумме квадрата второй переменной и числа 7;
   б) квадрат одной переменной равен обратной величине куба другой переменной;
   в) произведение переменных равно отношению их суммы к сумме квадратов;
   г) сумма квадратов переменных равна квадрату числа 5.

74. Задайте аналитически функцию (запишите формулу), область определения которой:

а) все действительные числа;

б) все действительные числа кроме числа 3;

в) все действительные числа, меньшие числа 1;

г) все действительные числа x такие, что $2 < x \le 9$.

75. Задайте графически функцию (постройте график), у которой:

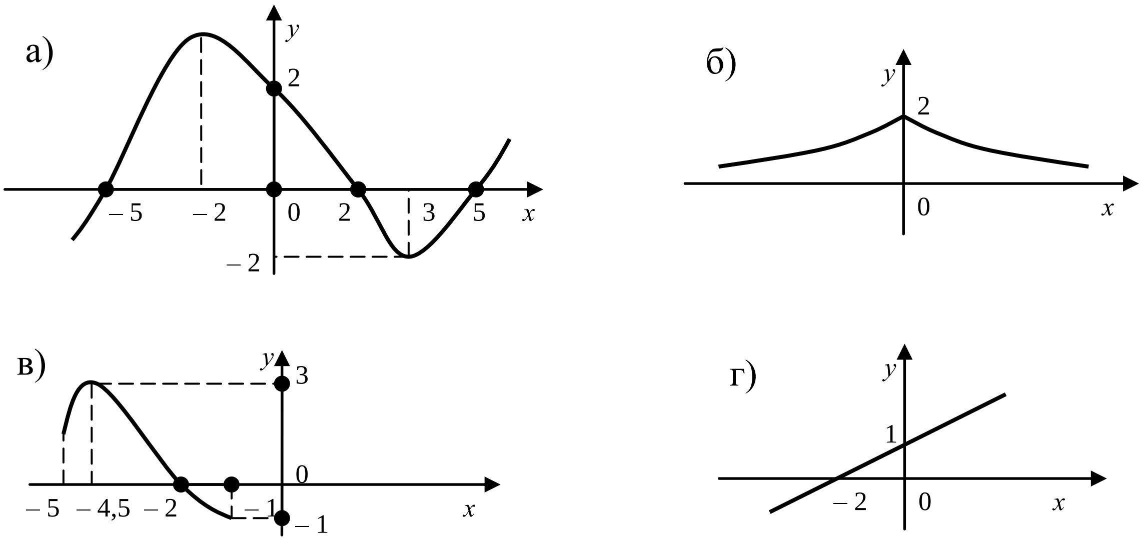
а) область определения и область значений – любые действительные числа; нуль функции $x = 2$;

б) область определения и область значений – любые действительные числа кроме 0;

в) $D(f) = R$; $E(f) = [-2;3)$; функция положительна при $x > 2$ и отрицательна при $x < 2$;

г) $D(f) = [-5;5]$; $E(f) = [-1;4]$; функция имеет два нуля $x = -3$ и $x = 3$.

76. Определите по графику область определения, область значений, нули и интервалы знакопостоянства функции:



§ 9. Уравнения и неравенства

22. Понятия уравнения и неравенства

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции от переменной x.

$f(x) = \varphi(x)$ – ***уравнение с одной переменной*** или	уравнение с одним неизвестным
$f(x) > \varphi(x)$ – ***неравенство с одной переменной*** или $(\ge, <, \le)$	неравенство с одним неизвестным
Решить уравнение (неравенство) – это значит найти все его решения или показать, что оно не имеет решений	

Примеры:

1. Решить уравнение: $2x-6=0$.

Решение. $2x=6 \Rightarrow x=3$ – это **корень уравнения** или **решение уравнения.**

Ответ: $x=3$.

2. Решить неравенство: $\sqrt{x+3}<-5$.

Решение. Неравенство не имеет решений, потому что арифметический корень не может быть меньше, чем -5.

Ответ: решений нет или $x \in \varnothing$.

Пустое множество Ø – это множество, которое не содержит элементов

При решении уравнений и неравенств нужно находить ОДЗ.

ОДЗ (область допустимых значений) уравнения или неравенства – это множество значений неизвестной, когда уравнение (неравенство) имеет смысл (существует)

Понятие ОДЗ для уравнения или неравенства означает то же, что область определения для функции. Для уравнений и неравенств вместо ОДЗ можно говорить «область определения».

Примеры. Найти ОДЗ.

1. $\dfrac{5}{x-2}+4x=7.$

Решение. Знаменатель дроби не равен нулю: $x-2\neq 0$; $x\neq 2$. Следовательно, ОДЗ: $x\neq 2$ или $x\in R\setminus\{2\}$.

2. $3x^2-5x+4=0.$

Решение. x может принимать любые значения. Поэтому: $x\in R$.

3. $\sqrt{x+3}<2.$

Решение. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3$.

Ответ. ОДЗ: $x\geq -3$.

<table><tr><td>При нахождении ОДЗ для уравнений и неравенств и области определения функций нужно помнить, что:
1. Если есть дробь, то знаменатель не равен нулю:
$\dfrac{A}{B} \Rightarrow B\neq 0$.
2. Если есть корень четной степени, то подкоренное</td></tr></table>

выражение должно быть неотрицательным: $\sqrt[2k]{A} \Rightarrow A \ge 0.$

23. Равносильность уравнений и неравенств

Уравнения (неравенства) называются **равносильными** или **эквивалентными**, если множества их решений совпадают

Например, уравнения $3x=18$ и $5x=30$ равносильные, потому что у них одинаковый корень $x=6$. Уравнения $2x=10$ и $2x^2=10x$ не равносильные, потому что первое уравнение имеет один корень $x=5$, а второе – два корня: $x_1=0$ и $x_2=5$.

При решении уравнений и неравенств нужно применять равносильные преобразования:

Равносильные преобразования

Дано уравнение $f(x)=\varphi(x)$	**Дано неравенство** $f(x)>\varphi(x)$
1. Можно переносить члены уравнения (неравенства) из одной части в другую.	
$f(x)-\varphi(x)=0$	$f(x)-\varphi(x)>0$
2. Можно прибавлять к обеим частям уравнения (неравенства) одно и то же число.	
$f(x)+C=\varphi(x)+C$	$f(x)+C>\varphi(x)+C$
3. Можно умножать уравнение на любое число, не равное нулю, а неравенство – на положительное число. Если неравенство умножить на отрицательное число, то знак неравенства изменяется: с $<$ на $>$ и с $>$ на $<$.	
$c\cdot f(x)=c\cdot\varphi(x)$; $c\in R\setminus\{0\}$	$c\cdot f(x)>c\cdot\varphi(x),\ \ c>0$; $c\cdot f(x)<c\cdot\varphi(x),\ \ c<0$
4. Можно возводить уравнение в нечетную степень. Неравенство можно возводить в степень, если его члены положительные.	
$f^{2n-1}(x)=\varphi^{2n-1}(x),$ $n\in N$	$f^n(x)>\varphi^n(x),\ f(x)>0,$ $\varphi(x)>0,\ n\in N$

Если выполнять неравносильные преобразования, то можно потерять корни или получить посторонние корни.

Если разделить уравнение на выражение с переменной, то можно потерять корни.

Например, при решении уравнения $x(x+5)=3(x+5)$ разделить его на $(x+5)$, то получим один корень $x=3$.

Если уравнение решать правильно:
$x(x+5)-3(x+5)=0;\ (x+5)(x-3)=0 \Rightarrow x+5=0,\ x-3=0;\ x_1=-5; x_2=3,$ то получим два корня.
При решении мы потеряли корень $x=-5$.

Если уравнение возвести в квадрат, то можно получить посторонние корни. **Посторонние корни** – корни, которые не являются решениями данного уравнения.

Например, чтобы решить уравнение $\sqrt{2x+5}=x+1$ возводим его в квадрат: $\left(\sqrt{2x+5}\right)^2=(x+1)^2$; $2x+5=x^2+2x+1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=2, x_2=-2$. Значение $x=-2$ не является решением, потому что при $x=-2$ имеем: $\sqrt{2\cdot(-2)+5}=-2+1 \Rightarrow \sqrt{1}\neq -1$. Это невозможно.
$x=-2-$это посторонний корень, не решение.

Для правильного решения уравнения нужно выполнить проверку решений (как было сделано) или найти ОДЗ.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+5\geq 0, \\ x+1\geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\geq -5, \\ x\geq -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -2{,}5, \\ x\geq -1, \end{cases} \Rightarrow x\geq -1.$

Из ОДЗ видно, что $x=-2$ не решение уравнения.

24.Числовые неравенства

Неравенство – это выражение со знаком > или <, ≥, ≤. $A>B$ означает, что $A-B>0$, $A<B$ означает, что $A-B<0$.

Виды неравенств

1 . **Строгое неравенство** $a>b$ или $a<b$	**Нестрогое неравенство** $a\geq b$ или $a\leq b$
2. Неравенства одинакового знака: $a>b$ **и** $c>d$	Неравенства противоположного знака: $a>b$ **и** $c<d$
3. **Двойное неравенство** $c<a<b$ или $c>a>b$	

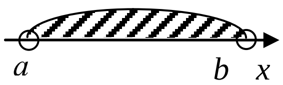
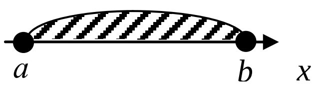
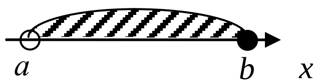
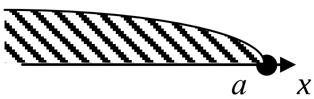
Свойства неравенств

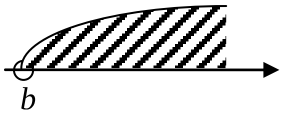
1. Если $a > b$, то $b < a$.	$7 > 4 \Rightarrow 4 < 7.$
2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.	$7 > 4$ и $4 > 2 \Rightarrow 7 > 2.$
3. Если $a > b$ и $c \in R$, то $a + c > b + c$.	$7 > 4 \Rightarrow 7 + 2 > 4 + 2.$
4. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$. Если $c < 0$, то $ac < bc$.	$7 > 4 \Rightarrow 7 \cdot 3 > 4 \cdot 3.$ $7 > 4 \Rightarrow 7 \cdot (-2) < 4 \cdot (-2).$
5. Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.	$7 > 4 \Rightarrow \frac{1}{7} < \frac{1}{4}.$

Действия над неравенствами

1. Неравенства одинакового знака можно почленно складывать (складывать левые и правые части).	$+\begin{array}{l} 6 < 8 \\ \underline{1 < 5} \\ 7 < 13 \end{array}$
2. Неравенства противоположного знака можно почленно вычитать.	$-\begin{array}{l} 6 < 8 \\ \underline{5 > 1} \\ 1 < 7 \end{array}$
3. Неравенства одинакового знака с положительными членами можно почленно умножать и возводить в натуральную степень.	$\times\begin{array}{l} 6 < 8 \\ \underline{1 < 5} \\ 6 < 40 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} 6 < 8 \\ 6^2 < 8^2 \\ 36 < 64 \end{array}$

Числовые промежутки

Интервал	$(a;b)$ или $]a;b[$		$a < x < b$ **открытый** интервал
Отрезок, сегмент	$[a;b]$		$a \le x \le b$ **закрытый** интервал
	$(a;b]$ или $]a;b]$		$a < x \le b$ **полуоткрытый** интервал
	$(-\infty; a]$		$x \le a$

	$(b;+\infty)$		$x > b$

Виды уравнений и неравенств такие же, как и виды функций, например:

1. $4x^3 + 5x^2 - 3 = 0$ – это целое рациональное уравнение третьей степени или кубическое уравнение.
2. $3\sin 2x - 4\cos x = 1$ – трансцендентное уравнение. Это тригонометрическое уравнение.
3. $\dfrac{x+3}{\sqrt{2x-5}} < 3x + 4$ – это дробное иррациональное неравенство.
4. $\dfrac{x^2 - 9}{x+3} = x - 3$ – это не уравнение, а тождество, потому что после сокращения дроби получаем равенство $x - 3 = x - 3$, которое верно при любых значениях $x \neq -3$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ § 9

77. Что называется: а) уравнением с одним неизвестным;
б) неравенством с одним неизвестным?

78. Что значит решить уравнение или неравенство?

79. Что называется областью допустимых значений уравнения или неравенства?

80. Какие уравнения или неравенства называются равносильными?

81. Назовите равносильные преобразования: а) уравнений; б) неравенств.

82. Какие неравносильные преобразования уравнений вы знаете?

83. Что называется неравенством?

84. Какие виды неравенств вы знаете?

85. Назовите свойства неравенств.

86. Назовите действия над неравенствами.

87. Какие числовые промежутки вы знаете?

88. Определите, какие из равенств являются тождествами, а какие уравнениями и назовите их:

а) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$; б) $\dfrac{2}{x+2} = 1$;

в) $2x + 5 = 2(x-1) + 7$; г) $\sqrt{x^2} = x$;

д) $\dfrac{1}{4}x - 3 = \dfrac{x-12}{4}$; е) $3^{x+3} = 27 \cdot 3^x$.

89. Определите, равносильны уравнения или нет и почему;

а) $6x+4=8$ и $3x+2=4$;

б) $x(x+3)=2x$ и $x+3=2$;

в) $(x-4)^2=36$ и $x-4=6$;

г) $\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{1-x}{x+1}$ и $x+3=1-x$;

д) $2x+\dfrac{x-3}{x+4}=-8+\dfrac{x-3}{x+4}$ и $x=-4$;

е) $\dfrac{x+4}{x-6}=\dfrac{2x-2}{x-6}$ и $x+4=2x-2$.

90. Определите, равносильны неравенства или нет и почему:

а) $x^2-5x-2>2$ и $x^2-5x-4>0$;

б) $3x^2<6x$ и $x<2$;

в) $4x+\dfrac{2}{x+3}>8+\dfrac{2}{x+3}$ и $4x>8$;

г) $\dfrac{x-4}{x+5}<0$ и $(x-4)(x+5)<0$;

д) $3x^2+\dfrac{1}{x-5}<9x+\dfrac{1}{x-5}$ и $3x^2-9x<0$;

е) $\dfrac{x+2}{x-7}\geq 0$ и $(x+2)(x-7)\geq 0$;

ж) $x^2\leq 2x$ и $x\leq 2$;

з) $x^4\geq x^2$ и $x^2\geq 1$.

91. Составьте:

а) уравнение, которое не имеет действительных корней;

б) тождество относительно x;

в) уравнение, равносильное уравнению $3x-5=8$;

г) неравенство не равносильное неравенству $3x-5>8$;

д) два уравнения $f(x)=0$ и $f(x)\cdot h(x)=0$, которые равносильны;

е) два уравнения $f(x)=0$ и $f(x)\cdot h(x)=0$, которые не равносильны;

ж) два неравенства $f(x)>0$ и $f(x)\cdot h(x)>0$, которые равносильны;

з) два неравенства $f(x)>0$ и $f(x)\cdot h(x)>0$, которые не равносильны.

§ 10. Линейная функция. Линейные уравнения и неравенства

Линейная функция
$y = kx + b$

Линейное уравнение
$kx + b = 0$

Линейное неравенство
$kx + b \geq 0$

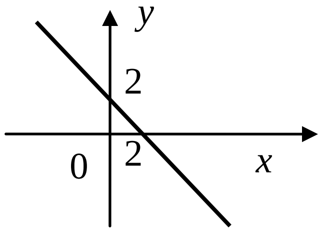
$k \in R \setminus \{0\}$ – коэффициент

$b \in R$ – свободный член

25. *Линейная функция*

График линейной функции – прямая. Для построения прямой нужно знать координаты двух точек. Обычно находят координаты точек пересечения графика с осями координат:

x	0	$-\dfrac{b}{k}$
y	b	0



Пример. Построить график функции $y = 2 - x$.

Решение. Находим координаты двух точек:

$x = 0 \Rightarrow y = 2$; $y = 0 \Rightarrow x = 2$.

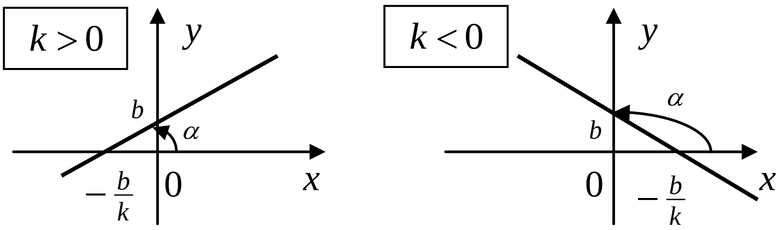
Через две точки проводим прямую.

Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$

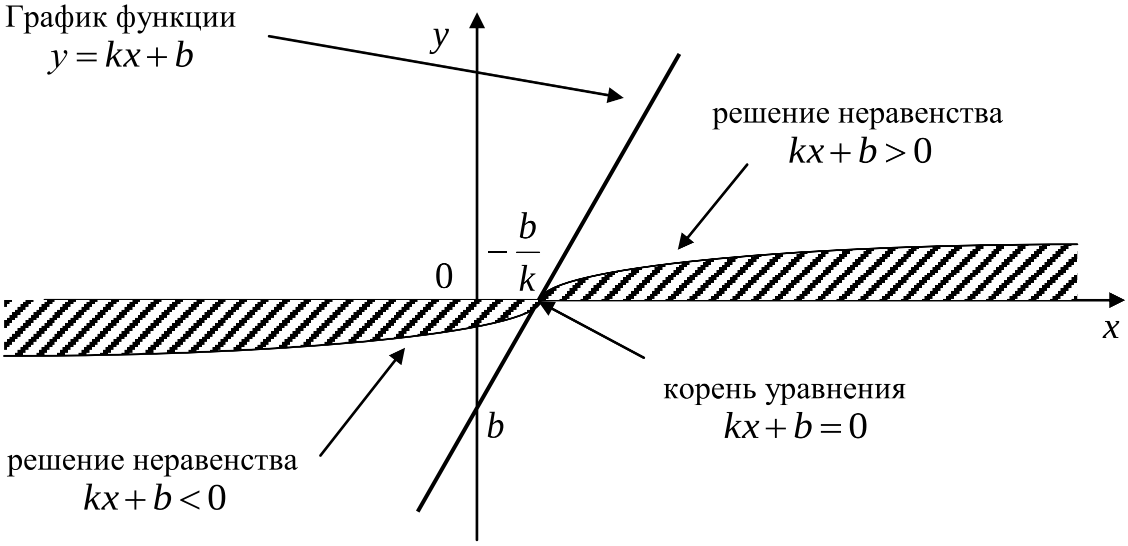
$A = 0$	$A \neq 0, B \neq 0$	$B = 0$
$By + C = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{C}{B}$ уравнение прямой, параллельной оси Ox: $y = k$. Это – **горизонтальная прямая.**	$y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ линейная функция $y = kx + b$	$Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{C}{A}$ уравнение прямой, параллельной оси Oy: $x = n$. Это – **вертикальная прямая.**

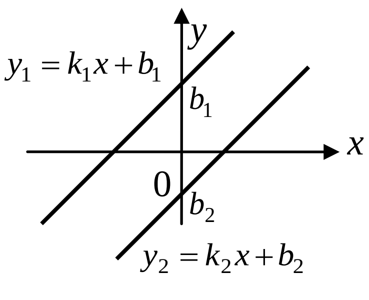
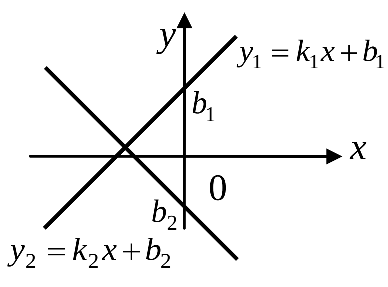
$C=0$	$C=0$	$C=0$
$By=0$	$Ax+By=0 \Rightarrow y=-\dfrac{A}{B}x$	$Ax=0$
Уравнение оси Ox: $y=0$.	Прямая пропорциональность $y=kx$	Уравнение оси Oy: $x=0$.

В общем виде график линейной функции имеет вид:



Прямая составляет с осью Ox угол α. Тангенс этого угла $tg\alpha = k$. Поэтому k – **угловой коэффициент прямой.**



Условие параллельности прямых: угловые коэффициенты прямых равны $y_1 \parallel y_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$	**Условие перпендикулярности прямых:** $y_1 \perp y_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$
	

Пример. Определить взаимное расположение графиков функций $5\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=\frac{10}{27}$ и $-0{,}02x+0{,}16y=1$.

Решение. Находим угловые коэффициенты прямых:

1) $\frac{2}{3}y=\frac{10}{27}-5\frac{1}{3}x;\quad y=-8x+\frac{5}{9}\Rightarrow k_1=-8.$

2) $0{,}16y=0{,}02x+1;\quad y=\frac{1}{8}x+\frac{1}{0{,}16}\Rightarrow k_2=\frac{1}{8}.$

Ответ: прямые перпендикулярны, потому что $k_1=-\frac{1}{k_2}$.

26. Линейные уравнения, неравенства и их системы.

Линейное уравнение $kx+b=0$ или $ax+b=0$ всегда имеет **один** корень $x=-\frac{b}{a}$, если $a\neq 0$.

Примеры. Решить уравнения:

1. $4x-9=2$.

Решение. Переносим свободный член – 9 вправо:
$4x=2+9;\quad 4x=11$. Находим x: $x=\frac{11}{4};\quad x=2\frac{3}{4}$.

2. $2x+6=2x-3$.

Решение. Переносим неизвестные влево, а свободные члены вправо:
$2x-2x=-3-6;\quad 0x=-9\Rightarrow x\in\varnothing$. Уравнение не имеет решений.

3. $6x-2x+4=4x+7-3$.

Решение. $4x-4x=4-4\Rightarrow 0x=0\Rightarrow 0=0\Rightarrow x\in R$. Уравнение имеет бесконечно много решений – это не уравнение, а тождество.

Исследовать уравнение – это значит сказать, когда оно имеет решения и сколько их, а когда нет.

Пример. Исследовать уравнение: $a^2x - a^3 = x - 1$.

Решение. Это уравнение с параметром, a – **параметр.**

Решаем уравнение относительно x (находим x):

$$a^2x - x = a^3 - 1 \Rightarrow \left(a^2 - 1\right)x = a^3 - 1 \Rightarrow x = \frac{a^3 - 1}{a^2 - 1};$$

$$x = \frac{(a-1)\left(a^2 + a + 1\right)}{(a-1)(a+1)} \Rightarrow x = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}, a \neq -1.$$

Ответ:

1) если $a \neq \pm 1$, то уравнение имеет единственное решение (одно решение) $x = \dfrac{a^2 + a + 1}{a + 1}$;

2) если $a = 1$, то уравнение имеет бесконечное множество решений, $x \in R$;

3) если $a = -1$, то уравнение решений не имеет, $x \in \varnothing$.

Это есть исследование уравнения с параметром.

Линейные неравенства $ax + b \substack{\geq \\ <} 0$ решаются так же, как линейные уравнения. Линейное неравенство всегда имеет решение, если $a \neq 0$.

Примеры. Решить неравенства:

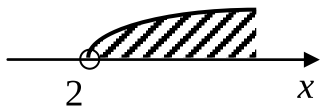
1. $4x + 7 \leq 3x + 10$.

Решение. Переносим неизвестные влево, свободные члены вправо и приводим подобные члены: $4x - 3x \leq 10 - 7 \Rightarrow x \leq 3$.

Ответ: $x \in (-\infty; 3]$.

2. $15 - 5x < 5$.

Решение. $-5x < 5 - 15 \Rightarrow -5x < -10$. Делим обе части неравенства на $-3 \Rightarrow x > 2$.



Ответ: $x \in (2; \infty)$

Рассмотрим выражения вида: $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ и $\left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right.$, где A и B – это уравнения или неравенства.

Система	**Совокупность**
$\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ **И.**	$\left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right.$ **ИЛИ.**
A и B выполняются одновременно	выполняется A или B

Примеры. Решить уравнения и неравенства.

1. $(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 0$.

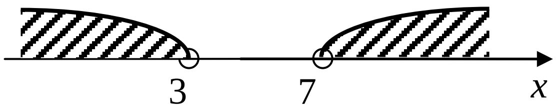
Решение. Уравнение можно записать как совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x+2=0; \\ x+4=0; \\ x+5=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2; \\ x=-4; \\ x=-5. \end{array}\right.$$

Ответ: уравнение имеет три корня: $x_1=-2; x_2=-4; x_3=-5$.

2. $\begin{cases} x>7; \\ x<3. \end{cases}$

Решение. Решений у системы нет, потому что:



Ответ: $x \in \varnothing$.

3. $\left[\begin{array}{l} x>7; \\ x<3. \end{array}\right.$

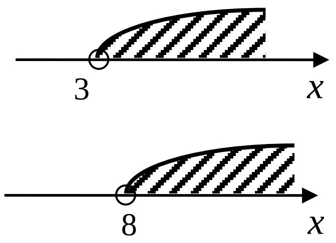
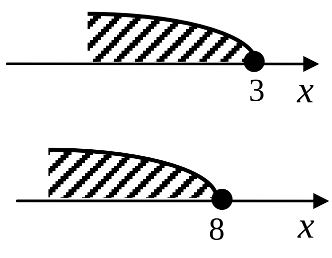
Ответ: решение совокупности неравенств: $x \in (-\infty;3) \cup (7;\infty)$.

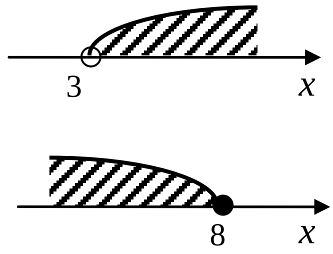
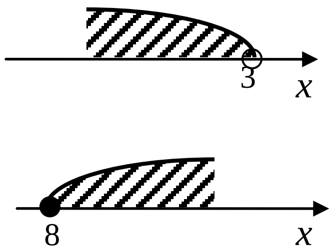
4. Решение неравенства $ab>0$ можно записать так: $a>0$ и $b>0$ или $a<0$ и $b<0$.

В символьной форме это будет

совокупность двух систем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0; \\ b>0; \end{cases} \\ \begin{cases} a<0; \\ b<0. \end{cases} \end{array}\right.$

Примеры решения систем линейных неравенств.

1. $\begin{cases} x>3; \\ x>8. \end{cases}$		$x>8$	x **больше большего числа**
2. $\begin{cases} x \le 3; \\ x \le 8. \end{cases}$		$x \le 3$	x **меньше меньшего числа**

3. $\begin{cases} x > 3; \\ x \le 8. \end{cases}$		$3 < x \le 8$	Двойное неравенство
4. $\begin{cases} x < 3; \\ x \ge 8. \end{cases}$		$x \in \varnothing$	Решений нет, **система несовместная**

Линейные уравнения и неравенства можно называть так: **уравнения и неравенства первой степени с одним неизвестным.**

Пример. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{7-x}{2} - 3 < \dfrac{3+4x}{5} - 4; \\ \dfrac{5x}{3} + 5(4-x) \le 2(4-x). \end{cases}$$

Решение. Умножаем первое неравенство на 10, а второе на 3. Это общие знаменатели неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{7-x}{2} - 3 < \dfrac{3+4x}{5} - 4 \Big| \cdot 10; \\ \dfrac{5x}{3} + 5(4-x) \le 2(4-x) \Big| \cdot 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35 - 5x - 30 < 6 + 8x - 40; \\ 5x + 60 - 15x \le 24 - 6x. \end{cases}$$

Переносим неизвестные влево, а свободные члены вправо:

$$\begin{cases} -5x - 8x < 6 - 40 - 35 + 30; \\ 5x - 15x + 6x \le 24 - 60. \end{cases}$$

Приводим подобные члены:

$$\begin{cases} -13x < -39; \\ -4x \le -36. \end{cases}$$

Делим первое неравенство на – 13, а второе на – 4. Знаки неравенств при этом изменяются:

$$\begin{cases} -13x < -39 \big| : (-13); \\ -4x \le -36 \big| : (-4); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3; \\ x \ge 9; \end{cases} \Rightarrow x \ge 9.$$

Ответ: $x \in [9;\infty)$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ § 10

92. Что называется:
   а) линейной функцией;
   б) линейным уравнением и неравенством?
93. Назовите:
   а) что такое угловой коэффициент прямой;
   б) условие параллельности прямых;
   в) условие перпендикулярности прямых.
94. Назовите уравнения:
   а) оси Ox; б) оси Oy;
   в) горизонтальной прямой;
   г) вертикальной прямой.
95. Сколько решений может иметь линейное уравнение?
96. Чем отличается система от совокупности?
97. Как изменится решение системы (совокупности) неравенств, если к ней добавить неравенство:
   а) не имеющее решений;
   б) имеющее решением любое число?
98. Составьте линейное уравнение, которое:
   а) имеет корень, равный трем:
   б) не имеет корней;
   в) имеет бесконечное множество решений;
   г) равносильно уравнению $4x-2=6$.
99. Определите равносильность:

а) $(x+3)(x-5)=0$ и $\left[\begin{aligned} x+3=0; \\ x-5=0; \end{aligned}\right.$

б) $(x+3)(x-5)>0$ и $\begin{cases} x+3>0; \\ x-5>0; \end{cases}$

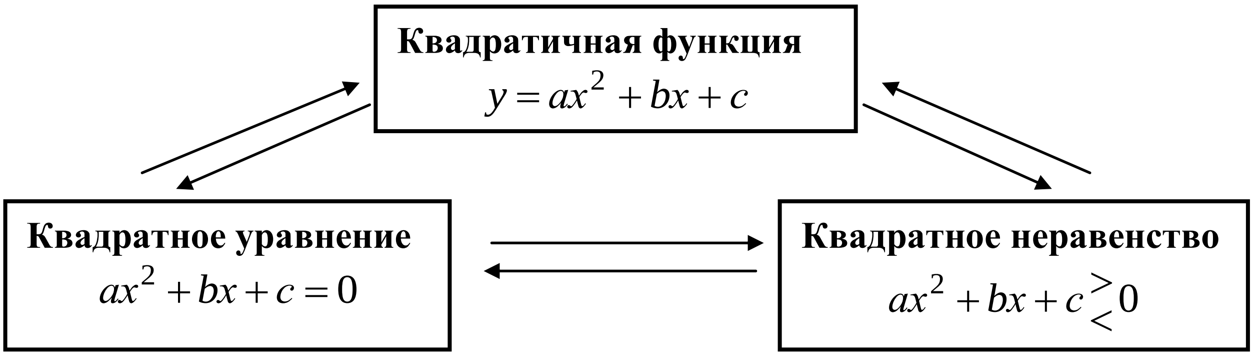
в) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x^2-1 \geq 0; \\ x>0; \end{cases}$

г) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \geq 0$ и $x>0$;

д) $\dfrac{|x^2-1|}{x} \geq 0$ и $\begin{cases} x^2-1 \geq 0; \\ x>0; \end{cases}$

е) $\dfrac{|x^2-1|}{x} \geq 0$ и $x>0$.

§ 11. Квадратные уравнения. Квадратичная функция



$a \in R \setminus \{0\}$ – первый коэффициент

$b \in R$ – второй коэффициент, $c \in R$ – свободный член.

27. Квадратные уравнения

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ какой-нибудь член, кроме первого, равен нулю, то уравнение будет **неполным**.

Неполные квадратные уравнения

$b = 0$	$c = 0$	$b = c = 0$

$ax^2+c=0;$ $ax^2=-c; x^2=-\frac{c}{a};$ $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2+bx=0;$ $x(ax+b)=0;$ $x_1=0; x_2=-\frac{b}{a}$	$ax^2=0;$ $x_{1,2}=0$
Если знаки a и c разные, то уравнение имеет два действительных корня. Если знаки a и c одинаковые, то $x\notin R$.	Уравнение всегда имеет два действительных корня. Один корень равен нулю.	Уравнение всегда имеет два действительных корня, равных нулю.
1) $2x^2-8=0;$ $x^2=4; x_{1,2}=\pm 2;$ 2) $2x^2+8=0;\ x\notin R.$	$5x^2+25x=0;$ $5x(x+5)=0;$ $x_1=0; x_2=-5$	$10x^2=0;$ $x_{1,2}=0$

Полное квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Это уравнение, в котором $b\neq 0$ и $c\neq 0$.

> Корни полного квадратного уравнения находятся
> по формуле $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ **(1)**

Доказательство теоремы. Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ и разделим его на a: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. Выделяем полный квадрат:

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

Решаем уравнение как неполное квадратное:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}};$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Теорема доказана.

> Выражение $D=b^2-4ac$ – это **дискриминант** квадратного уравнения.
> Если второй коэффициент уравнения – **четное число**: $b=2k$, то дискриминант квадратного уравнения $ax^2+2kx+c=0: D_1=k^2-ac$, а формула корней:
> $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$ **(2)**

Пример. Решить квадратное уравнение $3x^2+16x+13=0$.
Решение. Решаем уравнение по формуле (1):

$$D=16^2-4\cdot 3\cdot 13=100;\quad \sqrt{D}=\sqrt{100}=10;$$

$$x_{1,2}=\frac{-16\pm 10}{2\cdot 3}\Rightarrow x_1=-1;\, x_2=-\frac{13}{3}.$$

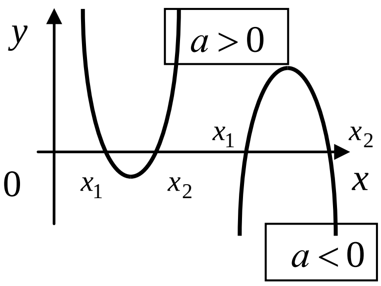
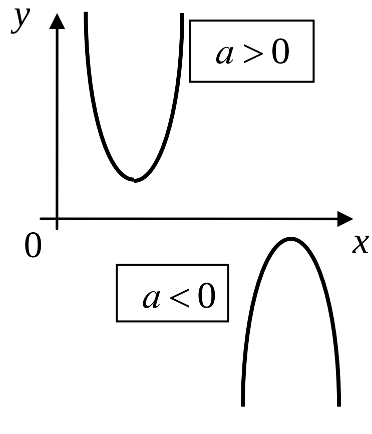
Решение по формуле (2) легче:

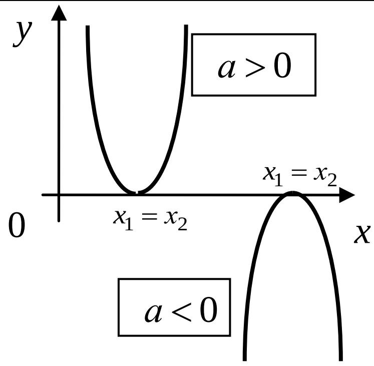
$$D_1=8^2-3\cdot 13=25;\quad \sqrt{D_1}=\sqrt{25}=5;$$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm 5}{3}\Rightarrow x_1=-1;\, x_2=-\frac{13}{3}.$$

Приведенное квадратное уравнение – это уравнение вида $x^2+px+q=0$. Это частный случай полного уравнения, когда $a=1$.

Исследование уравнения по дискриминанту

$D>0$	$D=0$	$D<0$
$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$; $x_1, x_2\in R;\quad x_1\neq x_2$ Уравнение имеет **два разных** действительных корня. График пересекается с осью *Ox* в двух точках. 	$x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$; $x_1, x_2\in R$ Уравнение имеет **два равных** действительных корня. График имеет с осью *Ox* одну общую точку.	$x_1, x_2\notin R$ Уравнение **не имеет** действительных корней. График не пересекается с осью *Ox*. 

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Теорема Виета

Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема Виета для приведенного уравнения: *сумма* корней приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна второму коэффициенту с противоположным знаком ($x_1 + x_2 = -p$ **)**, а *произведение* корней равно свободному члену ($x_1 \cdot x_2 = c$).

Верна и **обратная теорема.**

Если сумма двух чисел x_1 и x_2 равна *p*, а их произведение равно *q*, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

С помощью этой теоремы можно решать приведенные квадратные уравнения.

Примеры. Решить уравнения.

1. $x^2 + 8x + 12 = 0$.

Решение. По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -8, \\ x_1 \cdot x_2 = 12. \end{cases}$$

2. $x^2 - 9x + 8 = 0$.

Решение. Можно записать, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 \cdot x_2 = 8, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 8.$$

Если x_1 и x_2 $-$корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

> Для приведенного трехчлена формула имеет вид:
> $$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Доказательство теоремы.

Если x_1 и x_2 − корни трехчлена $ax^2 + bx + c$, то по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Рассмотрим трехчлен $ax^2 + bx + c =$ [*Вынесем за скобки* a] $=$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = -\frac{b}{a} = \left[\begin{array}{l}\textit{Заменяем выражения } \frac{b}{a} \textit{ и } \frac{c}{a} \textit{ по теореме}\\ \textit{Виета выражениями } -(x_1 + x_2) \textit{ и } (x_1 \cdot x_2)\end{array}\right] =$$

$$= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = [\textit{Раскрываем скобки}] = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\textit{Раскладываем выражение}\\ \textit{в скобках на множители}\\ \textit{способом группировки}\end{array}\right] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Теорема доказана.

Пример. Сократить дробь $\dfrac{3x^2 - 16x + 13}{x^2 + 10x - 11}$.

Решение. Раскладываем числитель и знаменатель на множители.

Трехчлен $3x^2 - 16x + 13$ имеет корни 1 и $\dfrac{13}{3}$. Поэтому

$$3x^2 - 16x + 13 = 3(x - 1)\left(x - \frac{13}{3}\right) = (x - 1)(3x - 13).$$

Корни трехчлена $x^2 + 10x - 11$: $x_1 = 1$ и $x_2 = -11$. Следовательно, $x^2 + 10x - 11 = (x - 1)(x + 11)$. Получаем:

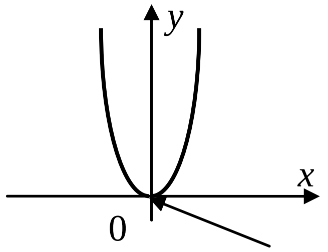
$$\frac{3x^2 - 16x + 13}{x^2 + 10x - 11} = \frac{(x-1)(3x-13)}{(x-1)(x+11)} = \frac{3x - 13}{x + 11}.$$

28. Квадратичная функция

График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ − **парабола**.

$y = x^2$

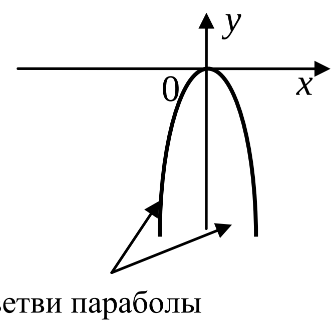
$(a = 1, b = c = 0)$



вершина параболы

$y = -x^2$

$(a = -1, b = c = 0)$



ветви параболы

> Если $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, то ветви параболы направлены **вверх**.
> Если $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, то – **вниз**.

Для построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ по характеристическим точкам нужно найти точки пересечения графика с осями координат и вершину параболы.

1. Точки пересечения графика с осью OX (нули функции):

$y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$; x_1, x_2 – корни, если $D \geq 0$.

2. Точка пересечения графика с осью OY: $x = 0 \Rightarrow y = c$.

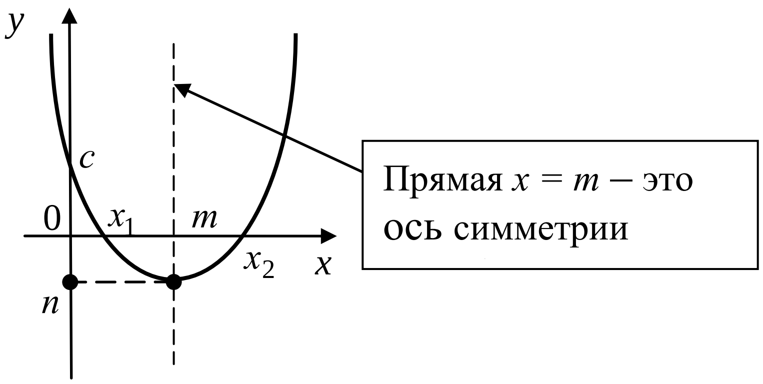
3. Вершина параболы. Координаты вершины (m, n) находятся по формулам:

$$m = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad n = f(m).$$

Координаты всех полученных точек можно внести в таблицу:

x	x_1	x_2	0	m
y	0	0	c	n

Для более точного построения графика можно найти координаты еще нескольких точек.



Примеры. Построить графики функций

1. $y = x^2 - 2x - 3$.

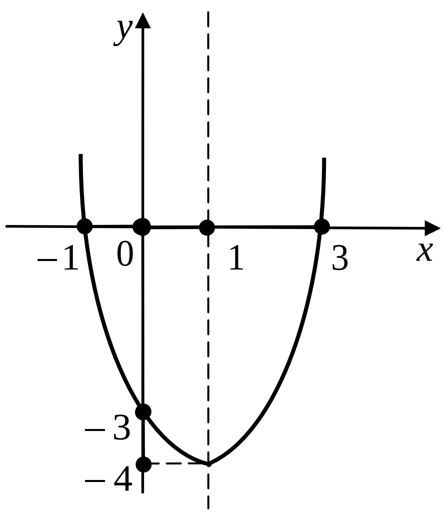
Решение. $a = 1 > 0$, поэтому ветви параболы направлены вверх. Нули функции:

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1; x = 3.$

Точка пересечения графика с осью OY: $x = 0 \Rightarrow y = -3$.

Координаты вершины параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} \Rightarrow m = -\frac{-2}{2} = 1; \ n = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4.$$



По полученным четырем точкам строим параболу:

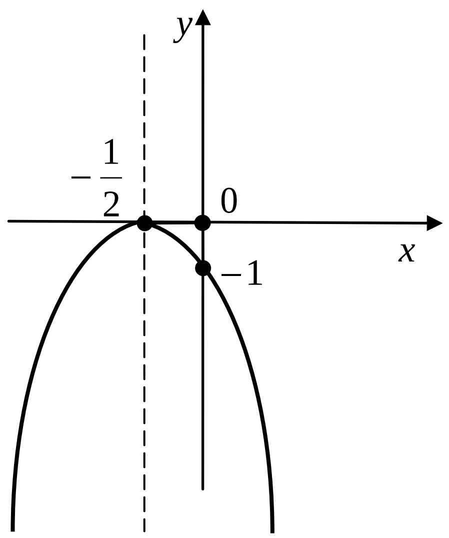
x	-1	3	0	1
y	0	0	-3	-4

2. $y = -4x^2 - 4x - 1$.

Решение. $a = -4 < 0 \Rightarrow$ ветви параболы направлены вниз.

Нули функции: $y = 0 \Rightarrow -4x^2 - 4x - 1 = 0; x_{1,2} = -\frac{1}{2}$. (Здесь $D = 0$).

x	$-\frac{1}{2}$	0
y	0	-9



Точка пересечения графика с осью OY: $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

Вершина параболы: $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. С осью OX график имеет только одну общую точку.

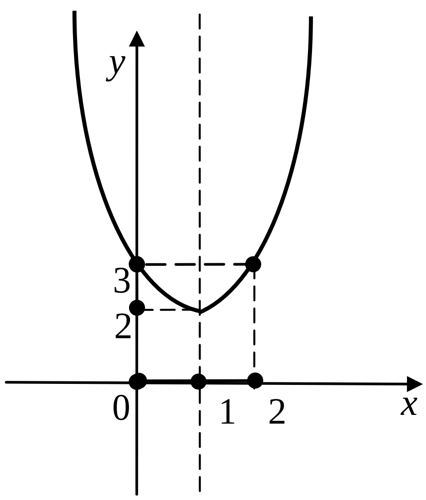
В случае, когда $D = 0$, функцию можно записать, как **полный** квадрат двучлена. В этом примере $y = -(2x+1)^2$.

3. $y = x^2 - 2x + 3$.

Решение. Ветви параболы направлены вверх, т.к. $a = 1 > 0$.

$D = -2 < 0$, следовательно, график не пересекается с осью абсцисс.

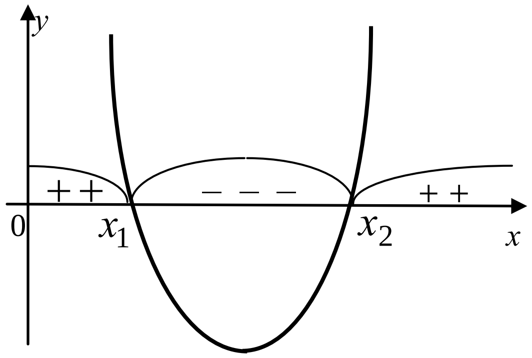
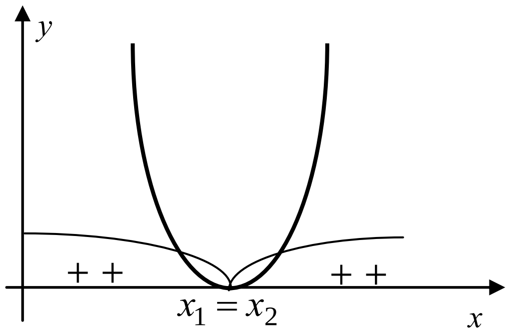
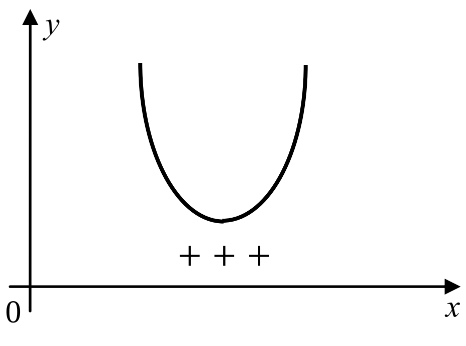
Строим график по точке пересечения с осью ординат (0; 3) и вершине параболы (1; 2). Прямая $x = 1 -$ ось симметрии параболы, поэтому для большей точности можно взять точку (2; 3) – симметричную точке (0; 3).



29. Квадратные неравенства.

Для решения квадратных неравенств $ax^2+bx+c \gtrless 0$ можно использовать графики квадратичных функций. Пусть в неравенстве $a>0$. Это означает, что ветви соответствующего графика направлены вверх. Могут быть три случая расположения параболы в зависимости от значения дискриминанта.

Рассмотрим решение неравенства $P(x)=ax^2+bx+c \gtrless 0$ по графику функции

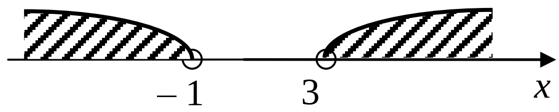
1. $D>0$ 	$P(x)=ax^2+bx+c \gtrless 0;$ $a(x-x_1)(x-x_2) \gtrless 0;$ $P(x)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty);$ $P(x)\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty);$ $P(x)<0 \Rightarrow x\in(x_1;x_2);$ $P(x)\leq 0 \Rightarrow x\in[x_1;x_2].$
2. $D=0$ 	$P(x)=ax^2+bx+c \gtrless 0;$ $a(x-x_1)^2 \gtrless 0;$ $P(x)>0 \Rightarrow x\in R\setminus\{x_1\};$ $P(x)\geq 0 \Rightarrow x\in R;$ $P(x)<0 \Rightarrow x\in\varnothing;$ $P(x)\leq 0 \Rightarrow x=x_1.$
3. $D<0$ 	$P(x)=ax^2+bx+c \gtrless 0;$ $P(x)>0; P(x)\geq 0 \Rightarrow x\in R;$ $P(x)<0; P(x)\leq 0 \Rightarrow x\in\varnothing$

Если в неравенстве $ax^2+bx+c \gtrless 0$ первый коэффициент меньше нуля, то умножаем неравенство на -1 и решаем его.

Примеры.

1. Решить неравенство: $x^2 - 2x - 3 > 0$.

Решение. Корни трехчлена – 1 и 3. Поэтому неравенство можно записать так: $(x+1)(x-3) > 0$



Ответ: $x \in (-\infty;-1) \bigcup (3;+\infty)$

2. Решить неравенство: $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x + 8} < 1$.

Решение. Переносим 1 влево и приводим неравенство к общему знаменателю.

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x + 8} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x + 8} < 0;$$

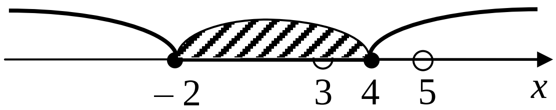
$$\frac{-5}{x^2 - 2x + 8} < 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 8 > 0; D < 0.$$

Ответ: $x \in R$.

3. Найти область определения функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{8 + 2x - x^2}}{x^2 - 8x + 15}$.

Решение. Очевидно, что

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + 8 \geq 0 \Big| \cdot (-1) \\ x^2 - 8x + 15 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\begin{cases} (x-4)(x+2) \leq 0 \\ (x-3)(x-5) \neq 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-2;3) \bigcup (3;4]$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ § 10

100. Приведите пример:
а) квадратного уравнения;
б) квадратичной функции;
в) квадратного неравенства.

101. Как называется график квадратичной функции?

102. В каком случае неполное квадратное уравнение не имеет решений? Приведите пример.

103. Назовите формулу корней полного квадратного уравнения.

104. Чему равен дискриминант квадратного уравнения?

105. Что можно сказать о корнях квадратного уравнения в зависимости от дискриминанта?

106. Докажите теорему Виета.

107. Как можно построить параболу по характеристическим точкам?

108. В каком случае ветви параболы направлены: а) вверх; б) вниз?

109. Сколько общих точек имеет парабола с осью OX в зависимости от дискриминанта?

110. Какую ось симметрии имеет парабола $y = ax^2 + bx + c$?

111. Решите уравнение устно и объясните ход решения:

а) $x^2 = 16$; б) $x^2 - 7x = 0$; в) $x^2 = 0{,}0025$;

г) $3x^2 = x$; д) $x^2 = 5\frac{4}{9}$; е) $x^2 + 36 = 0$;

ж) $x^2 - 1 = 24$; з) $x^2 + 0{,}6x = 0$; и) $x^2 - 7 = 0$.

112. Может ли квадратное уравнение с рациональными коэффициентами иметь:

а) разные иррациональные корни;

б) равные иррациональные корни;

в) один корень рациональный, а другой – иррациональный?

113. Решите уравнения устно по обратной теореме Виета:

а) $x^2 + 6x + 8 = 0;$ б) $x^2 + 10x + 9 = 0;$

в) $x^2 - 2x - 15 = 0;$ г) $x^2 - 12x + 35 = 0;$

д) $x^2 - x - 42 = 0;$ е) $x^2 + x - 2 = 0;$

ж) $x^2 + 2x - 15 = 0;$ з) $x^2 + 5x + 6 = 0;$

и) $x^2 + 11x + 10 = 0;$ к) $x^2 + 4x + 4 = 0;$

л) $x^2 - x - 12 = 0;$ м) $x^2 + 8x + 15 = 0;$

н) $x^2 + 11x + 30 = 0;$ о) $x^2 + 2x - 3 = 0;$

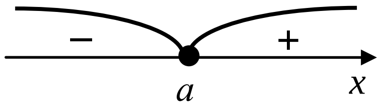
п) $x^2 - 18x + 81 = 0;$ р) $x^2 - 41x - 42 = 0.$

§ 12. Уравнения и неравенства, приводимые к линейным и квадратным

30. *Метод интервалов решения неравенств*

Для решения целого рационального неравенства $P(x)\overset{\geq}{<}0$, нужно найти его корни $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и разложить многочлен на множители, если это можно сделать: $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$.

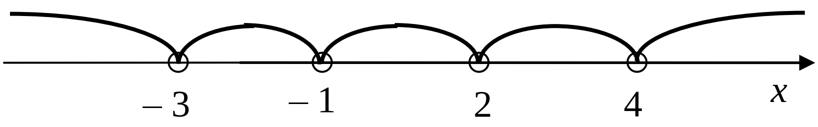
Каждый бином (двучлен) $x-a$ имеет знаки:



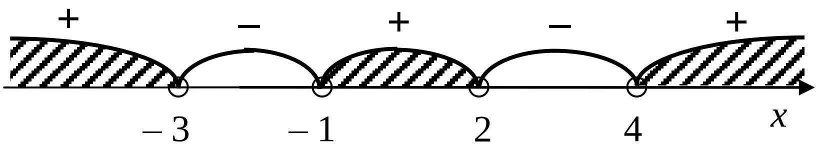
Пример. Решить неравенства.

1. $(x-2)(x+3)(x-4)(x+1)>0$.

Решение. Корни многочлена: $-3;\ -1;\ 2;\ 4.$ Рассмотрим знаки биномов на интервалах.

Знаки биномов					
$x+3$	–	**0** +	+	+	+
$x+1$	–	–	**0** +	+	+
$x-2$	–	–	–	**0** +	+
$x-4$	–	–	–	–	**0** +
Знак произведения	+	–	+	–	+

Решение можно показать так:

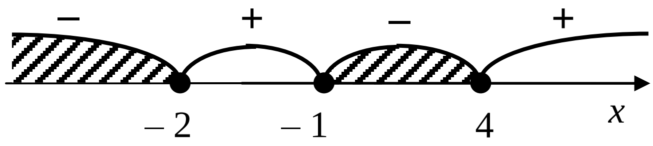


Ответ: $x\in(-\infty;-3)\bigcup(-1;2)\bigcup(4;+\infty)$.

2. $(x-1)(x+2)(x-4)\leq 0$.

Решение. Корни многочлена: $x_1=-2; x_2=1; x_3=4$.

Знаки многочлена:

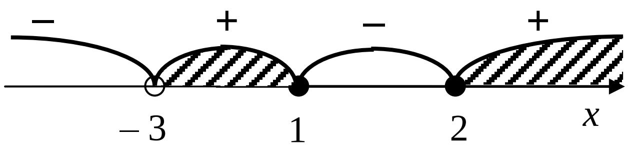


Ответ: $x\in(-\infty;-2]\bigcup[1;4]$.

3. $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x+3} \geq 0$.

Решение. Это дробно-рациональное неравенство. Оно равносильно системе:

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x+3) \geq 0; \\ x+3 \neq 0. \end{cases}$$



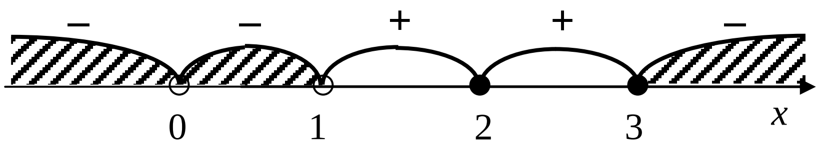
Ответ: $x \in (-3;1] \cup [2;+\infty)$.

4. $\dfrac{(4+x^2-4x)(3-x)^5}{x^8(x-1)^7} \leq 0$.

Решение. Преобразуем выражение: $4+x^2-4x=(x-2)^2$.

Получаем неравенство $\dfrac{(x-2)^2(3-x)^5}{x^8(x-1)^7} \leq 0$. Его корни 0; 1; 2; 3. В точках 0 и 2 знак неравенства не изменяется, потому что $(x-2)^2 \geq 0$ и $x^8 \geq 0$. Знаки биномов $(3-x)^5$ и $(x-1)^7$ такие же, как знаки выражений $(3-x)$ и $(x-1)$. Поэтому неравенство можно записать так: $\dfrac{(x-2)^2(3-x)}{x^2(x-1)} \leq 0; x \neq 0, x \neq 1$.

Первый знак справа «–», потому что в биноме $(3-x)$ знак x отрицательный.



Ответ: $x \in (-\infty;0) \cup (0;1) \cup [3;+\infty) \cup \{2\}$.

1. Если неравенство содержит полный квадрат $(x-a)^{2n}$, то в точке $x=a$ знак неравенства не изменяется.

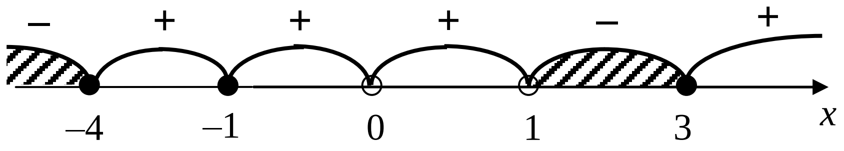
2. Если в целом рациональном неравенстве $P(x) \substack{\geq \\ <} 0$ знак x в наибольшей степени отрицательный, то первый знак справа будет «–».

3. $(x-a)^2=(a-x)^2$; $\quad (-x-a)^2=(x+a)^2$;

$(a-x)^3=-(x-a)^3$; $\quad (-x-a)^3=-(x+a)^3$.

Например, неравенство $\dfrac{(x^2+2x+1)(x^2+x-12)}{-x^4(1-x)^5}\le 0$ равносильно неравенству $\dfrac{(x+1)^2(x-3)(x+4)}{-x^2(1-x)}\le 0$ или системе

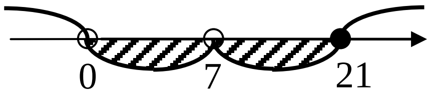
$$\begin{cases}-(x+1)^2(x-3)(x+4)x^2(1-x)\le 0;\\ x\ne 0, x\ne 1.\end{cases}$$



Ответ: $x\in(-\infty;-4]\cup(1;3]\cup\{-1\}$.

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений и неравенств

Для решения уравнения или неравенства нужно:	$\dfrac{x+6}{x^2-7x}-\dfrac{4}{x^2-14x+49}=$ $=\dfrac{1}{x-7}$	$\dfrac{x+6}{x^2-7x}-\dfrac{4}{x^2-14x+49}\le$ $\le\dfrac{1}{x-7}$
Перенести все члены влево	$\dfrac{x+6}{x^2-7x}-\dfrac{4}{x^2-14x+49}-$ $-\dfrac{1}{x-7}=0$	$\dfrac{x+6}{x^2-7x}-\dfrac{4}{x^2-14x+49}-$ $-\dfrac{1}{x-7}\le 0$
Разложить знаменатели на множители	$\dfrac{x+6}{x(x-7)}-\dfrac{4}{(x-7)^2}-$ $-\dfrac{1}{x-7}=0$	$\dfrac{x+6}{x(x-7)}-\dfrac{4}{(x-7)^2}-$ $-\dfrac{1}{x-7}\le 0$
Найти ОДЗ	$x\ne 0;\ x\ne 7.$	$x\ne 0;\ x\ne 7.$
Найти наименьший общий знаменатель и дополнительные множители	Общий знаменатель: $x(x-7)^2$ $\dfrac{x+6^{\backslash x-7}}{x(x-7)}-\dfrac{4^{\backslash x}}{(x-7)^2}-$ $-\dfrac{1^{\backslash x(x-7)}}{x-7}=0$	Общий знаменатель: $x(x-7)^2$ $\dfrac{x+6^{\backslash x-7}}{x(x-7)}-\dfrac{4^{\backslash x}}{(x-7)^2}-$ $-\dfrac{1^{\backslash x(x-7)}}{x-7}\le 0$
Привести уравнение (неравенство) к общему знаменателю	$(x+6)(x-7)-4x-$ $-x(x-7)=0.$ В уравнении знаменатель писать не нужно по свойству дроби: $\dfrac{A}{B}=0\Rightarrow A=0.$	$\dfrac{(x+6)(x-7)-4x-x(x-7)}{x(x-7)^2}\le 0$ В неравенстве знаменатель нужно **обязательно** писать

Выполнить действия и решить уравнение (неравенство)	$2x-42=0 \Rightarrow x=21$	$\dfrac{2x-42}{x(x-7)^2} \le 0$  $x \in (0;7) \bigcup (7;21]$

Примеры.

1. Найти область определения функции:

$$f(y)=\sqrt{-\left(\frac{y}{y^2-16}+\frac{2}{4y+y^2}-\frac{6}{4y-y^2}\right)}.$$

Решение. Подкоренное выражение должно быть неотрицательно:

$$-\left(\frac{y}{y^2-16}+\frac{2}{4y+y^2}-\frac{6}{4y-y^2}\right)\ge 0 \Rightarrow \frac{6}{y(4-y)}-\frac{y}{(y-4)(y+4)}-\frac{2}{y(4+y)}\ge 0.$$

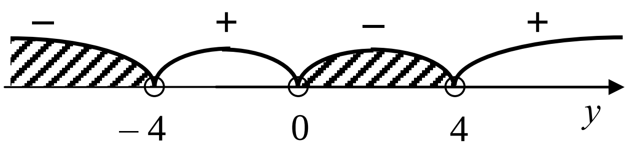
Изменяем знак знаменателя первой дроби и приводим выражение к общему знаменателю:

$$-\frac{6}{y(y-4)}-\frac{y}{(y-4)(y+4)}-\frac{2}{y(4+y)}\ge 0;$$

$$\frac{6}{y(y-4)}+\frac{y}{(y-4)(y+4)}+\frac{2}{y(4+y)}\le 0;$$

$$\frac{(y+4)^2}{y(y-4)(y+4)}\le 0; \qquad \begin{cases}\dfrac{y+4}{y(y-4)}\le 0;\\ y+4\ne 0.\end{cases}$$

Решаем неравенство методом интервалов:



Ответ: $x \in (-\infty;-4) \bigcup (1;4)$.

2. Решить уравнение $\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x-3}{x+2}=\dfrac{12}{x^2-4}$.

Решение. Находим ОДЗ: $x\ne 2$; $x\ne -2 \Rightarrow x\ne \pm 2$. После приведения дробей к общему знаменателю получим:

$(x+1)(x+2)-(x-3)(x-2)-12=0 \Rightarrow 8x-16=0 \Rightarrow x=2.$

Однако, по ОДЗ $x=2$ не является решением.

Ответ: $x \in \varnothing$. Решений нет.

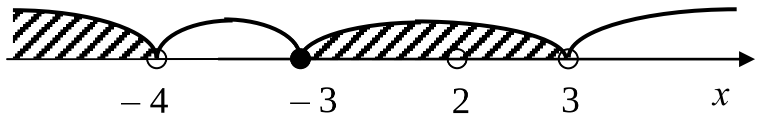
3. Найти область определения функции:

$$y=\sqrt{x^2+3x+10}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-5x+6}}+\sqrt{\frac{9-x^2}{x+4}}-2x^2+1.$$

Решение. Область определения – это решение системы:

$$\begin{cases} x^2+3x+10\geq 0 \Rightarrow \text{Трехчлен всегда положительный, потому что} \\ x^2-5x+6\neq 0 \qquad\qquad D<0 \Rightarrow x^2+3x+10>0,\ \forall\, x. \\ \dfrac{9-x^2}{x+4}\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)(x-3)\neq 0 \\ \dfrac{(3-x)(3+x)}{x+4}\geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $x\in(-\infty;-4)\bigcup[-3;2)\bigcup(2;3)$.

31. *Уравнения и неравенства степени выше второй (уравнения и неравенства высших степеней)*

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0-$это целое рациональное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами, если $a_0,a_1,\ldots,a_n-$целые числа; a_n-свободный член. Если $a_0=1$, то уравнение – приведенное. Такое уравнение может иметь не более *n* действительных корней. Степень уравнения равна *n*.

Рассмотрим решение некоторых видов уравнений и неравенств.

А. Решение трёхчленных уравнений и неравенств.

Трёхчленное уравнение – это уравнение вида $ax^{2n}+bx^n+c=0$. Такие уравнения решаются с помощью замены $x^n=t$. Тогда $x^{2n}=t^2(a\neq 0;n\geq 2;n\in N)$.

Если *n* = 2, то имеем уравнение $ax^4+bx^4+c=0$. Это **биквадратное уравнение.**

Примеры. Решить уравнения и неравенства:

1. $x^4-5x^4-36=0$

МАТЕМАТИКА

Практикум
для иностранных граждан
подготовительного отделения

СОСТАВИТЕЛИ: Шинкаренко Владимир Николаевич
Походина Валентина Николаевна