УДК 517.925

А. А. Козьма

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АСИМПТОТИКА ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

A. A. Kozma. *Conditions for the existence and asymptotic of a class of solutions of essential nonlinear differential equations of the second order*, Mat. Stud. **36** (2011), 176–187.

We consider the ordinary differential equation of the second order containing in the right-hand side the sum of nonlinearities correctly varying concerning unknown function and its derivative of the first order. Necessary and sufficient conditions of existence of a wide class of monotone solutions, and exact asymptotic representations of solutions from the given class in a neighborhood of a singular point are established.

А. А. Козьма. *Условия существования и асимптотика одного класса существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка* // Мат. Студії. – 2011. – Т.36, №2. – C.176–187.

Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися относительно неизвестной функции и её производной первого порядка нелинейностями, установлены необходимые и достаточные условия существования широкого класса монотонных решений, а также точные асимптотические представления для решений из данного класса в окрестности особой точки.

1. Введение. Уравнение Польвани, устанавливающее зависимость радиус-вектора r электрона от времени t при движении под действием магнитного поля, положило начало исследованию дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих в правой части суммы слагаемых со степенными нелинейностями и непрерывными на полуоси коэффициентами. Уравнениям такого вида посвящены работы Л.А. Беклимишевой, А.В. Костина, В.М. Евтухова и Е.В. Шебаниной, а так же других авторов. Были установлены условия существования и асимптотическое поведение достаточно широкого класса решений таких уравнений. В случае же, когда нелинейности отличны от степенных, законченных результатов для уравнений данного вида получить не удавалось. Для двучленных уравнений следует отметить работы Д.В. Изюмовой, И.Т. Кигурадзе, И.В. Каменева, Ю.А. Клокова, С.В. Олехника, Т.А. Чантурия, В. Марича (V. Maric), М. Томича (M. Tomic), С.Д. Талиаферро(S.D. Taliaferro), В.М. Евтухова, Л.А. Кирилловой, М.А. Белозёровой [1,2]. В общем же случае заслуживают внимания работы В.М. Евтухова и В.А. Касьяновой [3,4], в которых были установлены

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34E10.
Keywords: differential equation, asymptotic representation of solution.

точные асимптотические формулы для некоторых типов монотонных решений уравнения, правая часть которого содержит слагаемые с правильно меняющимися относительно неизвестной функции нелинейностями. Настоящая работа посвящена исследованию асимптотического поведения одного класса монотонных решений дифференциального уравнения второго порядка, содержащего в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися как относительно неизвестной функции, так и её производной первого порядка нелинейностями.

2. Постановка задачи. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)[1 + r_i(t)]\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'), \tag{1}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, ..., m)$, $p_i\colon [a, \omega) \to (0, +\infty)$ $(i = 1, ..., m;\ -\infty < a < \omega \le +\infty)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $r_i\colon [a, \omega) \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., m)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(t) = 0 \quad (i = 1, ..., m), \tag{2}$$

$\varphi_{ik}\colon \Delta_k \to (0, +\infty)$ ($k = 0, 1;\ i = 1, ..., m$)— непрерывно дифференцируемые функции,

$$\Delta_k = \begin{cases} \text{либо } [y_k, Y_k), \\ \text{либо } (Y_k, y_k], \end{cases} \quad y_k \in \mathbb{R}, \quad Y_k = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \quad (k = 0, 1), \tag{3}$$

причем φ_{ik} такие, что при $k = 0, 1,\ i = 1, ..., m$

$$\lim_{\substack{z\to Y_k\\ z\in\Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi^0_{ik}, 0 \le \varphi^0_{ik} \le +\infty \tag{4}$$

и

$$\lim_{\substack{z\to Y_k\\ z\in\Delta_k}} \frac{z\varphi'_{ik}(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Определение 1. Решение y уравнения (1), определенное на промежутке $[t_0, \omega) \subset [a, \omega)$ будем называть $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-*решением*, где $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, если оно удовлетворяет следующим условиям

$$y^{(k)}\colon [t_0, \omega) \to \Delta_k,\ \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = Y_k\ (k = 0, 1), \tag{6}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \mu_0,\ \text{в случае } \mu_0 = \pm\infty\ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2} = 1. \tag{7}$$

$\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решения представляют наиболее сложный для рассмотрения класс монотонных решений уравнения (1), поскольку при $t \uparrow \omega$ как само решение, так и его производная первого порядка стремятся либо к нулю, либо к бесконечности. Поэтому

при исследовании приходится накладывать на решения дополнительные ограничения-условия (7). Примером $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решений могут служить показательная, степенная и логарифмическая функции, а так же функции, полученные арифметическими действиями над данными и их суперпозициями. Величина μ_0 указывает на характер изменения решения в окрестности особой точки: если $\mu_0 = \pm\infty$, то решение является быстро изменяющимся при $t \uparrow \omega$, если $\mu_0 \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, то правильно меняющимся, если $\mu_0 = -1$, то медленно меняющимся.

В настоящей работе для $i \in M(M = \{1, ..., m\})$ и $\mu_0 = \pm\infty$ приведены условия, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решении уравнения (1) правая его часть асимптотически эквивалентна i-му слагаемому. При соблюдении этих условий установлены необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решений, а так же получены асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$. Аналогичные результаты для $\mu_0 \in \mathbb{R}$ содержатся в работах [5]–[7].

3. Некоторые априорные свойства $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$-решений.

Лемма 1. *Пусть $\mu_0 = \pm\infty$ и для некоторых $i \in M$ и $j \in M \setminus \{i\}$ соблюдаются условия*

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] < +\infty \tag{8}$$

и

$$\gamma(\sigma_{i0} - \sigma_{j0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j1}) \operatorname{sign} \pi_\omega(t) > 0, \tag{9}$$

где

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_0 = +\infty, \\ -1 & \text{при } \mu_0 = -\infty. \end{cases}$$

Тогда для каждого $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решения уравнения (1) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = 0. \tag{10}$$

Доказательство леммы 1. Пусть $y\colon [t_0, \omega) \to \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решение уравнения (1). Обозначим

$$z_j(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))},$$

тогда

$$z_j'(t) = z_j(t)\left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} + \frac{y'(t)\varphi_{j0}'(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} + \right.$$
$$\left. + \frac{y''(t)\varphi_{j1}'(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))} - \frac{y'(t)\varphi_{i0}'(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} - \frac{y''(t)\varphi_{i1}'(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right].$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$z_j'(t) = \frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{y(t)\varphi_{i0}'(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} - \frac{y(t)\varphi_{j0}'(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} + \frac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2}\left[\frac{y'(t)\varphi_{i1}'(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))} - \frac{y'(t)\varphi_{j1}'(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))}\right]\right)\right].$$

В силу условий (5) и (6)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{jk}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{jk}(y^{(k)}(t))}=\sigma_{jk},\quad \text{где } k=0,1;\ j=1,...,m. \tag{11}$$

Кроме того, согласно условию (7) и результатам работ [4], [5] имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)}=\pm\infty\ \ (k=0,1),\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2}=1. \tag{12}$$

Из (8), (9), (11) и (12) вытекает существование постоянных $z_j^0<0$ и $t_1\in[t_0,\omega)$ таких, что выполняется неравенство

$$z_j'(t)\le\frac{z_j^0\cdot z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\quad \text{при } t\in[t_1,\omega),$$

откуда следует

$$\ln\left|\frac{z_j(t)}{z_j(t_1)}\right|\le z_j^0\operatorname{sign}\pi_\omega(t)\ln\left|\frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_1)}\right|\quad \text{при } t\in[t_1,\omega).$$

Поскольку выражение, стоящее справа, стремится к $-\infty$ при $t\uparrow\omega$, то $\lim_{t\uparrow\omega}z_j(t)=0$. Из этого предельного соотношения вытекает справедливость (10). □

4. Основные результаты. Введём вспомогательные обозначения

$$I_i(t)=\int_{I_i^0}^{t}p_i(s)ds,\, Q_i(t)=\int_{Q_i^0}^{t}I_i(s)ds,$$

где пределы интегрирования I_i^0 и Q_i^0 равны или a, или ω и выбраны так, чтобы соответствующие интегралы стремились при $t\uparrow\omega$ либо к нулю, либо к бесконечности.

Теорема 1. *Пусть $\mu_0=\pm\infty$ и для некоторого $i\in M$ при всех $j\in M\setminus\{i\}$ соблюдаются условия (8), (9), а так же имеет место неравенство $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq1$. Тогда для существования у уравнения (1) $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-решений необходимо, а если выполняется одно из двух условий*

$$\sigma_{i1}\neq2;\quad \sigma_{i1}=2 \text{ и } \sigma_{i0}>-1, \tag{13}$$

то и достаточно, чтобы

$$Y_k=\begin{cases}\pm\infty, & \text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_i(t)|^{\Lambda_i}=+\infty,\\ 0, & \text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_i(t)|^{\Lambda_i}=0,\end{cases}\quad \left(k=0,1;\Lambda_i=\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\right), \tag{14}$$

при $t\in(a,\omega)$ выполнялись неравенства

$$\alpha_i y_0>0,\ \alpha_i\Lambda_i I_i(t)y_1>0 \tag{15}$$

и имело место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(I_i(t))^2}{p_i(t)Q_i(t)}=1. \tag{16}$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = \frac{\alpha_i}{\Lambda_i} I_i(t)[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\Lambda_i p_i(t)}{I_i(t)}[1+o(1)]. \tag{17}$$

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть $y\colon [t_0,\omega) \to \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решение уравнения (1). В силу выполнения условий (8) и (9) из уравнения (1) с учетом леммы 1 получим

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))[1+0(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{18}$$

Покажем, учитывая условие $\sigma_{i0}+\sigma_{i1} \neq 1$, что имеет место асимптотическое представление

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_i(t)[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{19}$$

Поскольку

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\right)' = \frac{y''(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\left[1 - \frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)}\frac{y(t)\varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} - \frac{y'(t)\varphi'_{i1}(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right],$$

то в силу (5)–(7) и (18) получим, что

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\right)' = \alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})p_i(t)[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Проинтегрировав это выражение от t_0 до $t (t \in (t_0,\omega))$, имеем

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = c_i + \alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_i(t)[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Если $I_i^0 = t_0$, то справедливо (19). Покажем, что $c_i = 0$ при $I_i^0 = \omega$. Предположим противное, тогда

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = c_i + o(1) \text{ и, в силу (18),} \quad \frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_i p_i(t)\left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Проинтегрировав последнее выражение от t_0 до $t (t \in (t_0,\omega))$, находим, что

$$\ln|y'(t)| = C + \alpha_i I_i(t)\left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

В данном соотношении левая часть при $t \uparrow \omega$ стремится к бесконечности, а правая — к константе. Полученное противоречие доказывает справедливость (19) в случае, когда $I_i^0 = \omega$. Из (18) и (19) следует, что

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p_i(t)}{(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_i(t)}[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega \tag{20}$$

и, с учётом второго из условий (7),

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{p_i(t)}{(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_i(t)}[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{21}$$

Из (20) и (21) вытекает справедливость условий (14), неравенств (15) и, принимая во внимание (19), асимптотических предсталений (17).
Далее, поскольку

$$\left(\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\right)' = \frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\left[1 - \frac{y(t)\varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} - \frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2}\frac{y'(t)\varphi'_{i1}(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right],$$

то рассуждая таким же образом, как при доказательстве соотношения (19), получим

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})^2 Q_i(t)[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega. \tag{22}$$

Из (18), (19) и (22) с учётом второго из условий (7) следует, что имеет место предельное соотношение (16).
Достаточность. Пусть выполняются условия (13)–(16). Зафиксировав с помощью (14), (15) значения Y_k и $\Delta_k (k=0,1)$, докажем существование у уравнения (1) хотя бы одного $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решения, допускающего при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (17).

Рассмотрим сначала систему соотношений вида

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = \frac{\alpha_i}{\Lambda_i^2}Q_i(t)[1+v_1], \frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = \frac{\alpha_i}{\Lambda_i}I_i(t)[1+v_2], \tag{23}$$

и установим, что она однозначно определяет заданные на множестве $D_0 = [t_0,\omega)\times V_0$, где $t_0\in[a,\omega), V_0=\{(v_1,v_2)\colon |v_k|\le 0,5 (k=1,2)\}$ непрерывно дифференцируемые неявные функции $y^{(k)} = Y_{ik}(t,v_1,v_2) (k=0,1)$ следующего вида

$$Y_{ik}(t,v_1,v_2) = y_k^0|I_i(t)|^{\Lambda_i + z_{k+1}(t,v_1,v_2)} \quad (k=0,1), \tag{24}$$

где $y_k^0 = \operatorname{sign} y_k$, $|z_{k+1}(t,v_1,v_2)|\le|\Lambda_i|/2$ при $(t,v_1,v_2)\in D_0$ и $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z_{k+1}(t,v_1,v_2)=0$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$. Для этого, полагая в (23)

$$y^{(k)} = y_k^0|I_i(t)|^{\Lambda_i+z_{k+1}} \quad (k=0,1), \tag{25}$$

получим систему соотношений вида

$$\begin{cases} y_0^0|I_i(t)|^{(1-\sigma_{i1})(\Lambda_i+z_2)-\sigma_{i0}(\Lambda_i+z_1)} = \frac{\alpha_i}{\Lambda_i^2}Q_i(t)[1+v_1]\prod\limits_{k=0}^{1}\psi_{ik}(y_k^0|I_i(t)|^{\Lambda_i+z_{k+1}}), \\ y_1^0|I_i(t)|^{(1-\sigma_{i0})(\Lambda_i+z_1)-\sigma_{i1}(\Lambda_i+z_2)} = \frac{\alpha_i}{\Lambda_i}I_i(t)[1+v_2]\prod\limits_{k=0}^{1}\psi_{ik}(y_k^0|I_i(t)|^{\Lambda_i+z_{k+1}}), \end{cases} \tag{26}$$

в которой функции $\psi_{ik}(k=0,1)$, определяемые формулой $\psi_{ik}(z) = \frac{\varphi_{ik}(z)}{|z|^{\sigma_{ik}}}$, в силу соотношения (5) обладают следующим свойством

$$\lim_{\substack{z\to Y_k \\ z\in\Delta_k}} \frac{z\psi'_{ik}(z)}{\psi_{ik}(z)} = 0.$$

Поскольку в силу условия (16) имеем $Q_i(t) = |I_i(t)|^{1+u(t)}$, где $u(t)$-непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $t\uparrow\omega$, то с учётом знаковых условий (15) систему (3.14) можно переписать в виде

$$\begin{cases} (1-\sigma_{i0})z_1 - \sigma_{i1}z_2 = u(t) + \dfrac{\ln\left|\frac{1+v_1}{\Lambda_i^2}\prod\limits_{k=0}^{1}\psi_{ik}(y_k^0|I_i(t)|^{\Lambda_i+z_{k+1}})\right|}{\ln|I_i(t)|} \\ -\sigma_{i0}z_1 + (1-\sigma_{i1})z_2 = \dfrac{\ln\left|\frac{1+v_2}{\Lambda_i}\prod\limits_{k=0}^{1}\psi_{ik}(y_k^0|I_i(t)|^{\Lambda_i+z_{k+1}})\right|}{\ln|I_i(t)|}. \end{cases} \tag{27}$$

Частично разрешая эту систему относительно z_1, z_2 (как линейную неоднородную), получим
$$z_k = a_k(t) + b_k(t, v_1, v_2) + Z(t, z_1, z_2) \quad (k = 1, 2),$$
в которой

$$a_1(t) = \Lambda_i((1-\sigma_{i1})u(t) - \ln|\Lambda_i|^{2-\sigma_{i1}}/\ln|I_i(t)|),\ a_2(t) = \Lambda_i(\sigma_{i0}u(t) - \ln|\Lambda_i|^{1+\sigma_{i0}}/\ln|I_i(t)|),$$
$$b_1(t, v_1, v_2) = \Lambda_i \frac{\ln|[1+v_1]^{1-\sigma_{i1}}[1+v_2]^{\sigma_{i1}}|}{\ln|I_i(t)|},\ b_2(t, v_1, v_2) = \Lambda_i \frac{\ln|[1+v_1]^{\sigma_{i0}}[1+v_2]^{1-\sigma_{i0}}|}{\ln|I_i(t)|},$$
$$Z(t, z_1, z_2) = \Lambda_i \ln\left[\prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}(y_k^0 |I_i(t)|^{\Lambda_i + z_{k+1}})\right] / \ln|I_i(t)|.$$

В силу свойств функций $u, I_i, \psi_{ik} (k = 0, 1)$ и условий (14), (15) имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} a_k(t) = 0 \quad (k = 1, 2), \lim_{t\uparrow\omega} b_k(t, v_1, v_2) = 0 \quad (k = 1, 2) \text{ равномерно по } (v_1, v_2) \in V_0, \tag{28}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t, z_1, z_2) = 0, \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z(t, z_1, z_2)}{\partial z_k} = 0 \quad (k = 1, 2) \text{ равномерно по } (z_1, z_2) \in Z_0.$$

Поскольку выполняется (28), то существует число $t_0 \in [a, \omega)$ такое, что на множестве $[t_0, \omega) \times Z_0 \times V_0$ соблюдаются неравенства

$$|a_k(t) + b_k(t, v_1, v_2) + Z(t, z_1, z_2)| \le |\Lambda_i|/4 \quad (k = 1, 2) \tag{29}$$

и условия Липшица

$$|Z(t, z_1^2, z_2^2) - Z(t, z_1^1, z_2^1)| \le \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{2} |z_k^2 - z_k^1|. \tag{30}$$

Зафиксировав число t_0, обозначим через B банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega = [t_0, \omega) \times V_0$ вектор-функций $(z_1, z_2) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|z\| = \sup\left\{\sum_{k=1}^{2} |z_k(t, v_1, v_2)| \colon (t, v_1, v_2) \in \Omega\right\}.$$

Выберем из него подпространство B_0 таких функций из B, для которых $\|z\| \le |\Lambda_i|/2$, и рассмотрим на B_0, выбрав произвольное число $\nu \in (0, 1)$, оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, определённый соотношениями

$$\Phi_k(z)(t, v_1, v_2) = z_k(t, v_1, v_2) -$$
$$-\nu|z_k(t, v_1, v_2) - a_k(t) - b_k(t, v_1, v_2) - Z(t, z_1(t, v_1, v_2), z_2(t, v_1, v_2))| \quad (k = 1, 2). \tag{31}$$

Для любого $z \in B_0$ в силу условия (29) имеем

$$|\Phi_k(z)(t, v_1, v_2)| \le (1-\nu)|z_k(t, v_1, v_2)| + \frac{\nu|\Lambda_i|}{4} (k = 1, 2) \text{ при } (t, v_1, v_2) \in \Omega.$$

Поэтому на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2}|\Phi_k(z)(t,v_1,v_2)| \le (1-\nu)\sum_{k=1}^{2}|z_k(t,v_1,v_2)| + \frac{\nu|\Lambda_i|}{2} \le$$
$$\le (1-\nu)\|z\| + \frac{\nu|\Lambda_i|}{2} \le (1-\nu)\frac{|\Lambda_i|}{2} + \frac{\nu|\Lambda_i|}{2} = \frac{|\Lambda_i|}{2}.$$

Отсюда вытекает, что $\|\Phi(z)\| \le |\Lambda_i|/2$ и, следовательно, $\Phi(B_0) \subset B_0$. Пусть теперь $z^1, z^2 \in B_0$. Тогда в силу (30) при $(t,v_1,v_2) \in \Omega$

$$|\Phi_k(z^2)(t,v_1,v_2) - \Phi_k(z^1)(t,v_1,v_2)| \le (1-\nu)|z_k^2(t,v_1,v_2) - z_k^1(t,v_1,v_2)|+$$
$$+\nu|Z(t,z_1^2,z_2^2) - Z(t,z_1^1,z_2^1)| \le (1-\nu)|z_k^2(t,v_1,v_2) - z_k^1(t,v_1,v_2)|+$$
$$+\frac{\nu}{3}\sum_{k=1}^{2}|z_k^2(t,v_1,v_2) - z_k^1(t,v_1,v_2)| \quad (k=1,2).$$

Значит, на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2}|\Phi_k(z^2)(t,v_1,v_2) - \Phi_k(z^1)(t,v_1,v_2)| \le$$
$$\le \left(1-\frac{\nu}{3}\right)\sum_{k=1}^{2}|z_k^2(t,v_1,v_2) - z_k^1(t,v_1,v_2)| \le \left(1-\frac{\nu}{3}\right)\|z^2 - z^1\|,$$

откуда следует, что $\|\Phi(z^2) - \Phi(z^1)\| \le (1-\nu/3)\,\|z^2 - z^1\|$. Таким образом показано, что оператор Φ отображает пространство B_0 в себя и является на нём оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z \in B_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (31) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением системы (27), удовлетворяющим условию $\|z\| \le |\Lambda_i|/2$. Из (27) с учётом (28) следует, что компоненты данного решения стремятся к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $(v_1,v_2) \in V_0$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве Ω непосредственно вытекает из известной локальной теоремы о существовании неявных функций, определённых системой соотношений. В силу замены (25) полученной вектор-функции (z_1,z_2) соответствует вектор-функция (Y_{i0},Y_{i1}) с компонентами вида (24), которая является решением системы (23), причём, с учётом (14), (15),

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y_{ik}(t,v_1,v_2) = Y_k \text{ равномерно по } (v_1,v_2) \in V_0 \quad (k=0,1),$$

$$Y_{ik}(t,v_1,v_2) \subset \Delta_k \text{ при } (v_1,v_2) \in V_0, yt \in [t_1,\omega), \text{ где } t_1 \in [t_0,\omega)(k=0,1). \tag{32}$$

Рассмотрим некоторые свойства функций Y_{ik} $(k=0,1)$. В силу (32) и (5) при $j \in M,\ k=0,1$ равномерно по $(v_1,v_2) \in V_0$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} G_{jk}(t,v_1,v_2) = \sigma_{jk}, \text{ где } G_{jk}(t,v_1,v_2) = \frac{Y_{ik}(t,v_1,v_2)\varphi'_{jk}(Y_{ik}(t,v_1,v_2))}{\varphi_{jk}(Y_{ik}(t,v_1,v_2))}. \tag{33}$$

Теперь положим в системе (23) $y^{(k)} = Y_{ik}(t,v_1,v_2)$ $(k=0,1)$ и продифференцируем полученные соотношения по t. В результате имеем систему уравнений, линейных относительно $(Y_{i0})'_t$ и $(Y_{i1})'_t$

$$\begin{cases} (1-G_{i0}(t,v_1,v_2))(Y_{i0})'_t - \frac{Y_{i0}(t,v_1,v_2)\varphi'_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}(Y_{i1})'_t = \frac{\alpha_i}{\Lambda_i^2}I_i(t)[1+v_1], \\ -\frac{Y_{i1}(t,v_1,v_2)\varphi'_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))}{\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))}(Y_{i0})'_t + (1-G_{i1}(t,v_1,v_2))(Y_{i1})'_t = \frac{\alpha_i}{\Lambda_i}p_i(t)[1+v_2]. \end{cases} \tag{34}$$

Определитель данной системы равен $1-G_{i0}(t,v_1,v_2)-G_{i1}(t,v_1,v_2)$, поэтому в силу (33) и условия $1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}\neq 0$ найдётся $t_2\in[t_1,\omega)$ такое, что на множестве $[t_2,\omega)\times V_0$ у системы (34) существует единственное решение, заданное формулами

$$(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t=\frac{\alpha_i}{\Lambda_i^2}\frac{I_i(t)}{h_i(t)}\frac{[h_i(t)-h_i(t)G_{i1}(t,v_1,v_2)+G_{i1}(t,v_1,v_2)]}{1-G_{i0}(t,v_1,v_2)-G_{i1}(t,v_1,v_2)}\times$$
$$\times\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))[1+v_1],$$
$$(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t=\frac{\alpha_i}{\Lambda_i}p_i(t)\frac{[1-G_{i0}(t,v_1,v_2)+h_i(t)G_{i0}(t,v_1,v_2)]}{1-G_{i0}(t,v_1,v_2)-G_{i1}(t,v_1,v_2)}\times$$
$$\times\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))[1+v_2].$$

Далее, учитывая (16) и определения функций I_i,Q_i, нетрудно показать, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p_i(t)}{I_i(t)}=\infty,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_i(t)}{Q_i(t)}=\infty.$$

Из этих предельных соотношений, (16) и представлений для $(Y_{i0})'_t$, $(Y_{i1})'_t$ следует, что равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ справедливы равенства

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_{ik}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{ik}(t,v_1,v_2)}=\infty\quad(k=0,1),\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_tY_{i0}(t,v_1,v_2)}{Y_{i1}(t,v_1,v_2)(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t}=1. \tag{35}$$

Таким образом, функции $Y_{ik}(k=0,1)$ обладают всеми свойствами $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-решения, которые использовались при доказательстве леммы 1, и, следовательно, равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}H_i(t,v_1,v_2)=1,$$

$$\text{где } H_i(t,v_1,v_2)=\alpha_i\sum_{j=1}^{m}\alpha_j[1+r_j(t)]\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{j1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}. \tag{36}$$

Теперь, применяя к уравнению (1) преобразование

$$y^{(k)}(t)=Y_{ik}(t,v_1(x),v_2(x))\ (k=0,1),\ x=\beta\ln|I_i(t)|,\ \beta=\begin{cases}1, & \text{если } I_i^0=a,\\ -1, & \text{если } I_i^0=\omega,\end{cases} \tag{37}$$

и учитывая, что функции $Y_{ik}(k=0,1)$ при $t\in[t_2,\omega)$ и $(v_1(x),v_2(x))\in V_0$ являются решением соотношений

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=\frac{\alpha_i}{\Lambda_i^2}Q_i(t)[1+v_1(x)],\ \frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=\frac{\alpha_i}{\Lambda_i}I_i(t)[1+v_2(x)], \tag{38}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases}v_1'=\beta[-h_i(t)[1+v_1]+\Lambda_ih_i(t)(1-G_{i0}(t,v_1,v_2))[1+v_2]-\Lambda_i\frac{1+v_1}{1+v_2}G_{i1}(t,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2)],\\ v_2'=\beta[-[1+v_2]-\Lambda_iG_{i0}(t,v_1,v_2)h_i(t)\frac{[1+v_2]^2}{1+v_1}+\Lambda_i(1-G_{i1}(t,v_1,v_2))H_i(t,v_1,v_2)],\end{cases} \tag{39}$$

в которой $h_i(t)=\frac{(I_i(t))^2}{p_i(t)Q_i(t)}$, t-функция, обратная к $x=\beta\ln|I_i(t)|$. Данную систему рассмотрим на множестве $[x_0,+\infty)\times V_0$, где $x_0=\beta\ln|I_i(t_2)|$.

Поскольку выполняются (33) и (36), то имеют место равенства

$$G_{ik}(t,v_1,v_2)=\sigma_{ik}+R_k(x,v_1,v_2)(k=0,1)\ \text{и}\ H_i(t,v_1,v_2)=1+R_2(x,v_1,v_2), \tag{40}$$

где функции $R_k(x, v_1, v_2)$ $(k = 0, 2)$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$. Кроме того, допустимы представления

$$\frac{1+v_1}{1+v_2} = 1 + v_1 - v_2 + R_3(x, v_1, v_2) \text{ и } \frac{[1+v_2]^2}{1+v_1} = 1 - v_1 + 2v_2 + R_4(x, v_1, v_2), \tag{41}$$

в которых функции обладают свойством: $\lim\limits_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{R_k(x,v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|} = 0$ $(k = 3, 4)$ равномерно по $x \in [x_0; +\infty)$. Учитывая (40) и (41), систему (39) можно переписать в виде

$$\begin{cases} v_1' = \beta[f_1(x) + c_{11}(x)v_1 + c_{12}(x)v_2 + V_{11}(x, v_1, v_2) + V_{12}(x, v_1, v_2)], \\ v_2' = \beta[f_2(x) + c_{21}(x)v_1 + c_{22}(x)v_2 + V_{21}(x, v_1, v_2) + V_{22}(x, v_1, v_2)], \end{cases} \tag{42}$$

где

$$f_1(x) = -h_i(t) + \Lambda_i h_i(t)(1 - \sigma_{i0}) - \Lambda_i \sigma_{i1}, \ c_{11}(x) = -h_i(t) - \Lambda_i \sigma_{i1},$$
$$c_{12}(x) = \Lambda_i h_i(t)(1 - \sigma_{i0}) + \Lambda_i \sigma_{i1},$$
$$f_2(x) = -1 - \Lambda_i \sigma_{i0} h_i(t) + \Lambda_i(1 - \sigma_{i1}), \ c_{21}(x) = \Lambda_i \sigma_{i0} h_i(t), \ c_{22}(x) = -1 - 2\Lambda_i \sigma_{i0} h_i(t),$$
$$V_{11}(x, v_1, v_2) = -\Lambda_i h_i(t) R_0(x, v_1, v_2)[1 + v_2] - \Lambda_i \frac{1+v_1}{1+v_2} R_1(x, v_1, v_2) H_i(t, v_1, v_2) -$$
$$-\Lambda_i \frac{1+v_1}{1+v_2} G_{i1}(t, v_1, v_2) R_2(x, v_1, v_2), V_{12}(x, v_1, v_2) = -\Lambda_i R_3(x, v_1, v_2) G_{i1}(t, v_1, v_2) H_i(t, v_1, v_2),$$
$$V_{21}(x, v_1, v_2) = -\Lambda_i h_i(t) R_0(x, v_1, v_2) \frac{[1+v_2]^2}{1+v_1} - \Lambda_i R_1(x, v_1, v_2) H_i(t, v_1, v_2) +$$
$$+\Lambda_i(1 - G_{i1}(t, v_1, v_2)) R_2(x, v_1, v_2), V_{22}(x, v_1, v_2) = -\Lambda_i h_i(t) G_{i0}(t, v_1, v_2) R_4(x, v_1, v_2).$$

В силу (16), (40), (41) и замены независимой переменной имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = -1 - \Lambda_i \sigma_{i1}, \ \lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = \Lambda_i(1 - \sigma_{i0} + \sigma_{i1}),$$
$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = \Lambda_i \sigma_{i0}, \ \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = -1 - 2\Lambda_i \sigma_{i0},$$

а функции $V_{lk}(x, v_1, v_2)$ $(l = 1, 2; k = 1, 2)$ таковы, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} V_{l1}(x, v_1, v_2) = 0 \ (l = 1, 2) \text{ равномерно по } (v_1, v_2) \in V_0,$$
$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V_{l2}(x, v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0 \ (l = 1, 2) \text{ равномерно по } x \in [x_0; +\infty).$$

Таким образом, система (42) является квазилинейной системой дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами. Характеристическое уранение для предельной матрицы коэффициентов линейной части имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\beta(1 + \Lambda_i \sigma_{i1}) - \lambda & \beta \Lambda_i(1 - \sigma_{i0} + \sigma_{i1}) \\ \beta \Lambda_i \sigma_{i0} & -\beta(1 + 2\Lambda_i \sigma_{i0}) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda^2 + \beta\Lambda_i(2 - \sigma_{i1})\lambda + \Lambda_i = 0$. Поскольку выполняется условие (13), данное характеристическое уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (42) выполнены все условия теоремы 2.2 работы [8]. Согласно данной теореме система (42) имеет хотя бы одно решение

$(v_1, v_2)\colon [x_1, +\infty) \to \mathbb{R}($ где $x_1 \geq x_0)$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Этому решению, с учётом преобразования (37), соответствует решение уравнения (1) $y(t)$, которое является $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решением (в силу (32), (35)) и вместе со своей производной допускает асимптотические представления (17) (принимая во внимание (16), (38)). $\square$

Заметим, что если наложить некоторые дополнительные ограничения на функции $\varphi_{ik}(k = 0, 1)$, то асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решений и их производных первого порядка можно записать в явном виде.

Определение 2. Будем говорить, что функция $\varphi_{jk}(j = 1, ..., m;\ k = 0, 1)$ *удовлетворяет условию* S, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $L\colon \Delta_k \to (0; +\infty)$ такой, что $\lim\limits_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0$, имеет место соотношение $\psi_{jk}(zL(z)) = \psi_{jk}(z)[1 + o(1)]$ при $z \to Y_k$ $(z \in \Delta_k)$.

Теорема 2. *Пусть соблюдаются условия теоремы 3.1 и, кроме этого, функции* $\varphi_{ik}(k = 0, 1)$ *обладают свойством* S. *Тогда при выполнении (13)–(16) каждое* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-*решение уравнения (1) при* $t \uparrow \omega$ *представимо в виде*

$$y(t) = y_0^0 \left(\frac{|I_i(t)|^{2-\sigma_{i1}}}{|\Lambda_i|^{2-\sigma_{i1}}(p_i(t))^{1-\sigma_{i1}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}(y_k^0 |I_i(t)|^{\Lambda_i}) \right)^{\Lambda_i} [1 + o(1)], \tag{43}$$

$$y'(t) = y_1^0 \left(\frac{|I_i(t)|^{1+\sigma_{i0}}}{|\Lambda_i|^{1+\sigma_{i0}}(p_i(t))^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}(y_k^0 |I_i(t)|^{\Lambda_i}) \right)^{\Lambda_i} [1 + o(1)]. \tag{44}$$

Доведення. Для начала покажем, что функция $L_1(z) = \dfrac{y'(t(z))}{|I_i(t(z))|^{\Lambda_i}}$, где $z = y_1^0 |I_i(t)|^{\Lambda_i}$, является медленно меняющейся при $z \to Y_1 (z \in \Delta_1)$:

$$\lim_{\substack{z \to Y_1 \\ z \in \Delta_1}} \frac{zL_1'(z)}{L_1(z)} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[y_1^0 |I_i(t)|^{\Lambda_i} \times \frac{1}{y_1^0 \Lambda_i |I_i(t)|^{\Lambda_i(\sigma_{i0}+\sigma_{i1})} p_i(t) \operatorname{sign} I_i(t)} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{y''(t)|I_i(t)|^{\Lambda_i} - y'(t)\Lambda_i |I_i(t)|^{\Lambda_i(\sigma_{i0}+\sigma_{i1})} p_i(t) \operatorname{sign} I_i(t)}{|I_i(t)|^{2\Lambda_i}} \times \frac{|I_i(t)|^{\Lambda_i}}{y'(t)} \right] =$$
$$= \frac{1}{\Lambda_i} \lim_{t \uparrow \omega} \left[\frac{I_i(t) y''(t)}{p_i(t) y'(t)} - \Lambda_i \right] = 0.$$

Поскольку функция φ_{i1} обладает свойством S, то с учётом медленной изменяемости функции L_1 при $z \to Y_1 (z \in \Delta_1)$ и условия (14) получим

$$\varphi_{i1}(y'(t)) = |y'(t)|^{\sigma_{i1}} \psi_{i1}(y_1^0 |I_i(t)|^{\Lambda_i})[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{45}$$

Аналогично доказывается, что функция $L_0(z) = \frac{y(t(z))}{|I_i(t(z))|^{\Lambda_i}}$, где $z = y_0^0 |I_i(t)|^{\Lambda_i}$, является медленно меняющейся при $z \to Y_0 (z \in \Delta_0)$ и, следовательно, $\varphi_{i0}(y(t)) = |y(t)|^{\sigma_{i0}}$ $\psi_{i0}(y_0^0 |I_i(t)|^{\Lambda_i})[1 + o(1)]$ при $t \uparrow \omega$. Поэтому, с учётом второго из соотношений (17), при $t \uparrow \omega$ имеет место равенство

$$\varphi_{i0}(y(t)) = \frac{|I_i(t)|^{\sigma_{i0}}}{|\Lambda_i|^{\sigma_{i0}}(p_i(t))^{\sigma_{i0}}} |y'(t)|^{\sigma_{i0}} \psi_{i0}(y_0^0 |I_i(t)|^{\Lambda_i})[1 + o(1)]. \tag{46}$$

Принимая во внимание (45), (46) и (15), первое из соотношений (17) можно переписать в виде

$$|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} = \frac{|I_i(t)|^{1+\sigma_{i0}}}{|\Lambda_i|^{1+\sigma_{i0}}(p_i(t))^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}(y_k^0|I_i(t)|^{\Lambda_i})[1+o(1)],$$

откуда вытекает асимптотическое представление (44). В свою очередь, из (44) с учётом второго из (17) получаем, что имеет место (43). □

5. Выводы. В настоящей работе для каждого $i \in M$ получены условия, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решении уравнения (1) правая его часть асимптотически эквивалентна i-му слагаемому. При соблюдении этих условий приведены необходимые и достаточные признаки существования у уравнения (1) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решений, а также асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belozerova M.A. *Asymptotic properties of a class of solutions of essential nonlinear differential equations of the second order*// Mat. Stud. – 2008. – V.29, №1. – P. 52–62. (in Ukrainian)
2. Belozerova M.A. *Asymptotic representations of solutions of a nonautonomous second order differential equations with close to power-type nonlinearities.* // Nonlinear Oscilations. – 2009. – V.12, №1. – P. 3–15. (in Russian)
3. Kasianova V.A. *Asymptotical representations of the disappearing solutions of sufficiently non-linear differential equations of the second order*// Nauk. Visn. Chernivets'kogo Univ. Mat. – 2004. – V.228. – P. 5–19. (in Ukrainian)
4. Evtukhov V.M., Kas'yanova V.A. *Asymptotic behavior of unbounded solutions of essentially nonlinear second-order differential equations. I.*// Ukr. Mat. Zh. – 2005. – V.57, №3. – P. 338–355. (in Russian)
5. Kozma A.A. *Asymptotic representations of a certain class of solutions of essentially nonlinear second order differential equations*// Nonlinear Oscilations. – 2006. – V.9, №4. – P. 490–501. (in Russian)
6. Kozma A.A. *Asymptotic behavior of solutions of essentially non-linear differential equations of the second order*// Nauk. Visn. Chernivets'kogo Univ. Mat. – 2008. – V.374. – P. 55–65. (in Ukrainian)
7. Kozma A.A. *Existence conditions for one class solutions of second-order nonlinear differential equations*// Bulletin of the Odessa National University. Mathematics and mechanics. – 2009. – V.14, №20. – P. 75–90. (in Russian)
8. Evtukhov V.M., Samoilenko A.M. *Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point*// Ukr. Mat. Zh. – 2010. – V.62, №1. – P. 52–80. (in Russian)

Одесский государственный экономический университет,
sanjakos@ukr.net

Поступило 18.11.2010
После переработки 26.03.2011