УДК 621.3.019 : 621.395.2.019.5

Скопа А.А., к.т.н., доц., Международный гуманитарный унив-т (г.Одесса)
Никифоренко К.Б., к.т.н., Киевский колледж связи
Согина Н.М., ГАО КБ "Днепровское", аспирантка УНИИС

ПРИКЛАДНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КЛОППЕРА-ПИРСОНА В СИСТЕМАХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

У статті розглядаються рівняння Клоппера-Пирсона, які мають прикладне значення для випадків визначення невимірюваних показників у системах телекомунікацій. Використання рівнянь Клоппера-Пирсона дозволяє з необхідною точністю дати оцінку показників надійності засобів телекомунікацій, базуючись на результатах їхні періодичні випробування й перевірок, що дає можливість планування обсягу переданої інформації залежно від надійності окремих об'єктів системи зв'язку.

В статье рассматриваются уравнения Клоппера-Пирсона, которые имеют прикладное значение для случаев определения неизмеряемых показателей в системах телекоммуникаций. Использование уравнений Клоппера-Пирсона позволяет с необходимой точностью дать оценку показателей надежности средств телекоммуникаций, базируясь на результатах их периодических испытания и проверок, что дает возможность планирования объема передаваемой информации в зависимости от надежности отдельных объектов системы связи.

The use of equalizations of Clopper-Pearson is examined in the article. These equalizations can be applied for the cases of especially practical character. Using equalizations of Clopper-Pearson, it is possible with necessary exactness to execute estimation of reliability indexes of facilities of telecommunications on results their periodic tests and verifications, to plan the volume of the passed information depending on reliability of separate objects of communication network, etc.

Уравнения Клоппера-Пирсона используются при оценке показателей надежности информационных систем и средств телекоммуникаций по результатам их периодических испытаний и проверок, планирования объемов переданной информации в зависимости от надежности отдельных объектов сети связи [1] и т.п. Наиболее часто такие проверки проводят при анализе надежности резервных каналов и объектов [2, 3]. Несмотря на некоторую громоздкость, уравнения позволяют получить неизмеряемые показатели надежности с необходимой достаточно высокой точностью [4, 5]. Исходя из вышесказанного, ***актуальной*** является задача упрощения уравнений Клоппера-Пирсона с целью их практического использования не только при разработке и проектировании объектов информационного и телекоммуникационного обеспечения, но и на производственных предприятиях при плановых испытаниях и проверках [5 – 8].

В [5, 9, 10] указанные уравнения рассмотрены применительно к теории испытаний на надежность средств и сетей телекоммуникаций одноразового и кратковременного использования, проведео их обобщение применительно к многомерным случаям параметров надежности таких систем. Аналогичные проблемные задачи применительно к теории функционирования *сложных систем*, освещены во многих доступных литературных источниках. Среди ученых проблемами анализа надежности резервных каналов и объектов информационного и телекоммуникационного обеспечения занимались как отечественные, так и зарубежные теоретики и практики. Среди них можно назвать Р.В.Судакова [1], Г.А.Птицына, Е.Ю.Барзиловича, В.А.Каштанова, В.И.Борща, Б.В.Гнеденко, Ю.К.Беляева, А.Д.Соловьева, Ф.А.Мирталибова и др.

Недостатоно решенной частью общей проблемы (а в ряде случаев вообще *нерешенной)* является задача адаптации уравнений Клоппера-Пирсона к задачам их простого и логичного практического использования, а также усиление указанных уравнений для отдельных теоретически возможных случаев [11, 12], их упрощение и новое смысловое трактование.

Постановкой задания для последующего решения является задача упрощения математического аппарата [13–15] на основе доказательства ряда лемм.

Перейдем к изложению ***основного материала*** с математическим обоснованием полученных результатов.

Уравнениями Клоппера-Пирсона называются уравнения вида [4]:

$$1-\gamma=\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}t^{n-k}\left(1-t\right)^{k}, \tag{1}$$

$$\gamma=\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{k}t^{n-k}\left(1-t\right)^{k}, \tag{2}$$

где: $\gamma\in\left[0,1\right]$; n, k и l – целые неотрицательные числа; $t\in\left[0,1\right]$

Рассмотрим уравнения (1) и (2), обозначив, соответственно, корень каждого из них, как $t=f_2\left(n,l,\gamma\right)=\underline{x}$ и $t=f_1\left(n,l,\gamma\right)=\overline{x}$. Так как уравнение (1) можно записать в виде

$$1-\gamma=I_t\left(n-l,l+1\right), \tag{3}$$

а функция $I_t\left(n-l,l+1\right)$ строго возрастает и непрерывна по $t\in\left[0,1\right]$, то его решение $t=\underline{x}$ существует и является единственным. Аналогичные рассуждения относятся и к уравнению (2). Отметим, что функции $f_2\left(n,l,\gamma\right)$ и $f_1\left(n,l,\gamma\right)$ табулированы и имеются в справочниках по определению показателей надежности. Однако ранее не приводились данные по их аналитической оценке и не рассматривались особенности указанных функций применительно к многомерным случаям оценки параметров надежности сложных систем.

Рассмотрим поставленную задачу, так как результаты ее решения важны для получения последующих результатов.

Рассмотрим функцию $\underline{x}=f_2\left(n,l,\gamma\right)$. Так как $\underline{x}$ является корнем уравнения (1), то

$$1-\gamma\equiv\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\underline{x}^{n-k}\left(1-\underline{x}\right)^{k}=I_{\underline{x}}\left(n-l,l+1\right). \tag{4}$$

Используя это тождество, приходим к следующему результату:

Лемма 1. Функция $\underline{x}=f_2\left(n,l,\gamma\right)$ удовлетворяет неравенству

$$\hat{R}\hat{q}^{s}\left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}}\le f_2\left(n,l,\gamma\right)\le\left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}}, \tag{5}$$

где знак равенства достигается при $l=0$, а $\hat{R}=1-\hat{q}$, $\hat{q}=\dfrac{l}{n}$, $s=\dfrac{\hat{q}}{\hat{R}}$.

Доказательство. Так как согласно (4) справедливо тождество $1-\gamma\equiv\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\underline{x}^{n-k}\left(1-\underline{x}\right)^{k}=\underline{x}^{n-l}\varphi\left(\underline{x}\right)$,

где $\varphi\left(\underline{x}\right)=\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\underline{x}^{l-k}\left(1-\underline{x}\right)^{k}$ и выполняется неравенство $1\le\varphi\left(\underline{x}\right)\le\binom{n}{l}\le\dfrac{1}{\hat{q}^{l}\hat{R}^{n-l}}$ [1], то

$$\hat{R}\hat{q}^{s}\left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}}\le\left(\underline{x}=\frac{\left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}}}{\varphi\left(\underline{x}\right)^{\frac{1}{n-l}}}\right)\le\left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}}.$$

Лемма доказана. Используя полученный результат и факт убывания на интервале $[0,1]$ функции $\varphi(x) = \dfrac{I_x(a,b)}{x^a}$ (где $I_x(a,b)$ – бета-функция), приходим к усилению неравенства (5). Изложим его в виде леммы 2.

Лемма 2. Пусть известно, что $\underline{x}_k \le \underline{x} = f_2(n,l,\gamma) \le \underline{x}^*$, где в частности можно положить $\underline{x}_k = \hat{R}^{\hat{l}}(1-\gamma)^{\frac{1}{n-l}}$; $\underline{x}^* = (1-\gamma)^{\frac{1}{n-l}}$. Тогда выполняется неравенство:

$$\left(\frac{1-\gamma}{k_1}\right)^{\frac{1}{n-l}} \le f_2(n,l,\gamma) \le \left(\frac{1-\gamma}{k_1'}\right)^{\frac{1}{n-l}}, \tag{6}$$

где $k_1 = \sum\limits_{k+0}^{l} \binom{n}{k} \underline{x}_*^{l-k} (1-\underline{x}_*)^k = \varphi(\underline{x}_*)$, $k_1' = \varphi(\underline{x}^*) = \sum\limits_{k+0}^{l} \binom{n}{k} \underline{x}^{*l-k} (1-\underline{x}^*)^k$, причем $k_1 \ge 1$, $k_1' \ge 1$, а знак равенства в (6) достигается при $l = 0$.

Доказательство. В выражении $1-\gamma \equiv \sum\limits_{k+0}^{l} \binom{n}{k} \underline{x}^{n-k} (1-\underline{x})^k = \underline{x}^{n-l}\varphi(\underline{x})$ функция φ убывает на $[0,1]$ при $l > 0$, а значит $\underline{x} \le \underline{x}^* \Rightarrow 1-\gamma \ge \underline{x}^{n-l}\varphi(\underline{x}^*) \Rightarrow \underline{x} \le \left(\dfrac{1-\gamma}{k_1}\right)^{\frac{1}{n-l}}$, где $k_1' = \varphi(\underline{x}^*)$.

Аналогично, если $\underline{x} \ge \underline{x}_*$, то $1-\gamma \equiv \underline{x}^{n-l}\varphi(\underline{x}) \le \underline{x}^{n-l}\varphi(\underline{x}_*) \Rightarrow \underline{x} \ge \left(\dfrac{1-\gamma}{k_1}\right)^{\frac{1}{n-l}}$, где $k_1 = \varphi(\underline{x}_*)$.

Лемма 3. Функция $f_2(n,l,\gamma)$ удовлетворяет неравенству

$$\underline{x}_N = \left(\frac{1-\gamma}{k_{N-1}}\right)^{\frac{1}{n-l}} \le f_2(n,l,\gamma) \le \left(\frac{1-\gamma}{k_{N-1}'}\right)^{\frac{1}{n-l}} = \underline{x}_N' \tag{7}$$

при любом заданном $N = 1, 2, \ldots$, причем

$$f_2(n,l,\gamma) = (1-\gamma)^{\frac{1}{n-l}} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{k_{N-1}} = \lim_{N\to\infty} \underline{x}_N, \tag{8}$$

$$f_2(n,l,\gamma) = (1-\gamma)^{\frac{1}{n-l}} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{k_{N-1}'} = \lim_{N\to\infty} \underline{x}_N', \tag{9}$$

где $k_{N-1} = \varphi(\underline{x}_{N-1}) = \sum\limits_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \underline{x}_{N-1}^{l-k} (1-\underline{x}_{N-1})^k$;

$$k_{N-1}' = \varphi(\underline{x}_{N-1}') = \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \underline{x}_{N-1}'^{\,l-k} (1-\underline{x}_{N-1}')^k ;$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} x^{l-k} (1-x)^k = x^l + \binom{n}{1} x^{l-1}(1-x) + \ldots + \binom{n}{l}(1-x)^l ;$$

$$k_0 = k_0' = 1; \quad \underline{x}_1 = \hat{R}^{\hat{l}}(1-\gamma)^{\frac{1}{n-l}}; \quad \underline{x}_1' = (1-\gamma)^{\frac{1}{n-l}}; \quad \hat{R} = 1-\hat{l} = 1-\frac{l}{n}.$$

Доказательство. Неравенство (7) получаем индукцией по N из (6), а формулы (8) и (9) – по известной теореме анализа о сходимости числовых последовательностей.

Заметим, что точное значение функции $f_2(n,l,\gamma)$ может быть найдено по формуле из [1] в виде:

$$f_2(n,l,\gamma)=\frac{\hat{p}}{\hat{p}+\left(\hat{q}+\frac{1}{n}\right)F_{1-\gamma}}, \tag{10}$$

где $F_{1-\gamma}=F_{1-\gamma}(\nu_1,\nu_2)$ – квантиль функции F-распределения Фишера уровня $1-\gamma$ с числом степеней свободы $\nu_1=2(n-l)$ и $\nu_2=2(n+l)$. Из (10) получаем выражение:

$$F_{1-\gamma}(\nu_1,\nu_2)=\frac{\nu_1}{\nu_2}\left(\frac{1}{f_2\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2},\ \frac{\nu_2}{2}-1,\ \gamma\right)}-1\right) \tag{11}$$

или

$$F_{1-\gamma}\left(2(n-l),2(l+1)\right)=\frac{\hat{p}}{\hat{q}+\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{f_2(n,l,\gamma)}-1\right). \tag{12}$$

Отсюда и на основании леммы 3 приходим к результату, изложенному в виде леммы 4.

Лемма 4. Квантиль $F_{1-\gamma}=F_{1-\gamma}(\nu_1,\nu_2)$ уровня $1-\gamma$ распределения Фишера с числом степеней свободы ν_1 и ν_2 удовлетворяет соотношениям:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}\left(\frac{1}{\underline{x}'_N}-1\right)\le F_{1-\gamma}(\nu_1,\nu_2)\le\frac{\nu_1}{\nu_2}\left(\frac{1}{\underline{x}_N}-1\right), \tag{13}$$

$$F_{1-\gamma}(\nu_1,\nu_2)=\frac{\nu_1}{\nu_2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\underline{x}_N}-1\right)=\frac{\nu_1}{\nu_2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\underline{x}'_N}-1\right), \tag{14}$$

где $N=1,2,\ldots$, если $\nu_1=2(n-l)$, $\nu_2=2(l+1)$, а $\underline{x}_N$ и $\underline{x}'_N$ находятся из условий леммы 3.

В частности, при $N=1$, имеем:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}\left(\frac{1}{(1-\gamma)^{\frac{2}{\nu_1}}}-1\right)\le F_{1-\gamma}(\nu_1,\nu_2)\le\frac{\nu_1}{\nu_2}\left(\frac{1}{\hat{p}\hat{q}^{s}(1-\gamma)^{\frac{2}{\nu_1}}}-1\right), \tag{15}$$

где $\hat{p}=\dfrac{\nu_1}{\nu_1+\nu_2+1}=1-\hat{q}$, $\quad s=\dfrac{\hat{q}}{\hat{p}}$.

Пример 1. Пусть даны $n=10$, $l=1$ и $\gamma=0{,}90$, для которых требуется найти двустороннюю оценку значения $f_2(n,l,\gamma)=f_2(10;1;0{,}90)$.

Решение. Учитывая, что здесь $\hat{p}=0{,}90$, $\hat{q}=0{,}10$, $s=\dfrac{\hat{q}}{\hat{p}}=\dfrac{1}{9}$ и $\underline{x}_*=\hat{p}\hat{q}^{s}(1-\gamma)^{\frac{1}{n-l}}=0{,}53$, из (5) получаем:

$$0{,}53 \le f_2\left(n,l,\gamma\right) \le \left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}} = 0{,}1^{\frac{1}{9}} = 0{,}77\,.$$

Из (6), определив значения $k_1' = \underline{x}^* + n\left(1-\underline{x}^*\right) = 0{,}77 + 10\cdot 0{,}23 = 3{,}07$ и $k_2 = \underline{x}^* + n\left(1-\underline{x}^*\right) = 0{,}53 + 10\cdot 0{,}53 = 5{,}83$, получаем более сильное неравенство для $\underline{x}$ в виде:

$$0{,}64 \le f_2\left(10;1;0{,}90\right) \le 0{,}68\,.$$

Возможно дальнейшее усиление этого неравенства с помощью леммы 3 из которой следует, что $0{,}659 = \left(\dfrac{0{,}1}{0{,}64+10\cdot 0{,}36}\right)^{\frac{1}{9}} \le f_2\left(10;1;0{,}90\right) \le 0{,}666$.

Отметим, что точное значение для $f_2\left(n,l,\gamma\right)$ можно найти из таблиц [1] или по формуле (11). В последнем случае, определив из таблиц по $\nu_1 = 2\left(n-l\right) = 18$, $\nu_2 = 2\left(l+1\right) = 4$ и $\gamma = 0{,}90$ коэффициент $F_\gamma = 2{,}29$, получаем, что $f_2\left(n,l,\gamma\right) = \dfrac{0{,}90}{0{,}90+0{,}20-2{,}29} = 0{,}663$.

Лемма 5. Функция $\underline{x}_\gamma = f_2\left(n,l,\gamma\right)$ удовлетворяет соотношению $\gamma_1 \le \gamma \Rightarrow \dfrac{\underline{x}_\gamma}{\left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}}} \le \dfrac{\underline{x}_{\gamma_1}}{\left(1-\gamma_1\right)^{\frac{1}{n-l}}}$, причем $\dfrac{1}{\binom{n}{l}^{\frac{1}{n-l}}} \le \dfrac{\underline{x}_\gamma}{\left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}}} \le 1$.

Доказательство. Доказательство следует из того, что $\dfrac{\underline{x}_\gamma}{\left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}}} = \dfrac{1}{\varphi\left(\underline{x}_\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}}}$, а также из факта убывания на интервале $\left[0,1\right]$ функции $\varphi\left(x\right)$.

Пусть $\gamma_t = 1 - \dfrac{1}{t}\left(1-\gamma\right)$ при $t \ge 1$.

Тогда $\gamma_t \ge \gamma$, а значит $\dfrac{\underline{x}_{\gamma_t}}{\left(1-\gamma_t\right)^{\frac{1}{n-l}}} = \dfrac{\underline{x}_{\gamma_t}}{\left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}}} t^{n-l} \le \dfrac{\underline{x}_\gamma}{\left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{n-l}}}$.

Отсюда следует, что $\dfrac{1}{t^{\frac{1}{n-l}}} f_2\left(n,l,\left(1-\dfrac{1-\gamma}{t}\right)\right) \le f_2\left(n,l,\gamma\right)$, если $t \ge 1$.

Лемма 6. Функция $\underline{x}_\gamma = f_2\left(n,l,\gamma\right)$ удовлетворяет соотношению

$$f_2^t\left(n,l,\left(1-\left(1-\gamma\right)^{\frac{1}{t}}\right)\right) \le f_2\left(n,l,\gamma\right) \le f_2^{\frac{1}{t}}\left(n,l,\left(1-\left(1-\gamma\right)^t\right)\right) \quad \text{при } t \ge 1.$$

Доказательство. Доказательство следует из того, что выполняется неравенство

$$I_{x^t}^{\frac{1}{t}}\left(a,b\right) \le I_x\left(a,b\right) \le I_{x^{\frac{1}{t}}}^t\left(a,b\right) \quad \text{при } t \ge 1.$$

Действительно, обозначая $\underline{x} = f_2(n,l,\gamma)$, $\underline{x}_1 = f_2^t(n,l,\gamma_t)$ и $\gamma_t = 1-(1-\gamma)^{\frac{1}{t}}$ при $t \geq 1$, из второго неравенства получаем, что $1-\gamma \equiv I_{\underline{x}}(n,l,\gamma) \equiv\ \equiv I_{\underline{x}_1^{\frac{1}{t}}}(a,b) \geq I_{\underline{x}_1}(a,b) \Rightarrow \underline{x}_1 \leq x$.

В качестве **выводов** дадим трактование полученных основных неравенств:

Значение неравенств (7), (13) и (15) состоит в том, что они позволяют в ряде случаев обходиться без специальных таблиц [1, 15] для определения $f_2(n,l,\gamma)$ и $F_{1-\gamma}(\nu_1,\nu_2)$. Кроме того они дают возможность с помощью уравнений (8), (9) и (14) дать точные рекуррентные методы вычисления этих функций при $\nu_1 = 2(n-l)$, $\nu_2 = 2(n+l)$ и $(\nu_1+\nu_2) = (2n+1)$. Т.о. основными положениями, *перспективными для последующего исследования*, являются методы программной реализации уравнений Клоппера-Пирсона и создание специальных процедур для их практического использования.

Литература

1. Судаков Р.С. Теория испытаний. – М.: Изд-во военной академии ПВО. – 1985. – 228 с.

2. Скопа О.О. Обслуговування резервних систем зв‘язку // Наук. праці ДонДТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація.– 2002. – Вип. 38. – С.89-91.

3. Казакова Н.Ф. Методи оцінки надійності систем телекомунікацій з резервом // Праці УНДІРТ. – 2003. – №2(34). – С.109-112.

4. Казакова Н.Ф. Аналітичне розв’язання одновимірної задачі Клопера-Пірсона // Радиотехника: Всеукр. межведомств. научн.-техн. сб. – 2002. – Вып. 128. – С.97-98.

5. Скопа О.О. Властивості багатомірної функції біноміального розподілу // Наук. записки Міжнар. гуманіт ун-ту.– 2004. – Вип. 1. – С.148-159.

6. Казакова Н.Ф. Оптимізація стратегії обслуговування резервних систем зв’язку // Вісник УБЕНТЗ. – 2002. – №2. – С.79-80.

7. Скопа О.О. Оптимізація експлуатації резервних систем телекомунікацій // Праці УНДІРТ. –2002. – №1(29). – С.91-93.

8. Казакова Н.Ф. Надійність функціонування морських супутникових систем телекомунікацій // Зб. науков. праць Укр. держ. морськ. техн. ун-ту. – 2002. – №7(385). – С.109-115.

9. Скопа О.О. Однобічна процедура контролю надійності резервних каналів зв'язку // Матер. Міжнар. конф. з управління «АВТОМАТИКА – 2002», 16–20 вересня 2002 р., Донецьк. – 2002. – Т.2. – С.79-80.

10. Казакова Н.Ф. Порівняння методів управління вибором резервного радіоканалу // Праці УНДІРТ. – 2002. – №1(29). – С.49-51.

11. Мухін О.М., Казакова Н.Ф., Скопа О.О. Планування обсягу випробувань в мережах телекомунікацій // Вісник УБЕНТЗ. – 2002. – №2. – С.104-109.

12. Панфилов И.П., Скопа А.А. Надежность работы линии связи, состоящей из основного и резервного каналов // Радиотехника: Всеукр. межведомств. научн.-техн. сб. – 2002. – Вып. 128. – С.91-96.

13. Скопа О.О. Однобічна процедура контролю надійності резервних каналів зв'язку // Наук. праці ДонДТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація.– 2002. – Вип. 47. – С.168-175.

14. Скопа О.О. Біноміальна схема контрольних випробувань резервних систем зв'язку // Зб. науков. праць Укр. держ. морськ. техн. ун-ту. – 2002. – №7 (385). – С.116-124.

15. Скопа О.О. Плани проведення випробувань надійності систем телекомунікацій з накопиченням пошкоджень // Праці УНДІРТ. –2003. – №3(35). – С.104-106.

16. Скопа О.О., Казакова Н.Ф., Мурін О.С. Вплив функціональної надмірності резервованих систем телекомунікацій на скорочення обсягів їх випробувань на надійність // Наук. праці ДонНТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. –2003. – Вип. 58. – С.115-121.