Нескінченно малі перетворення у просторах сталої скалярної кривини та інваріантність певних геометричних об'єктів

О. Є. Чепурна

Анотація Розглянуто інфінітезимальні перетворення ріманових просторів з умовою інваріантності тензору Ейнштейна. Визначено умови інваріантності цього тензору. Також, знайдені інші тензорні інварінти перетворень. Також, розглянуті перетворення у просторах сталої скалярної кривини.

Ключові слова Рімановий простір · Інфінітезимальні перетворення · Тензор Ейнштейна

УДК 514.752.7

1 Вступ

Багато дослідницьких робіт присвячено конформним, проективним відображенням риманових многовидів та голоморфно-проективним відображенням келерових многовидів. Зокрема, певна кількість з них пресвячена вивченням таких відображень, що зберігають Тензор Ейнштейна (наприклад, [6], [7]):

$$E_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij} \tag{1}$$

Зауважимо, що у багатьох класичних джерелах, зокрема, такі визначні вчені, як А. З. Петров [5], Еддінгтон, та інші, тензором Ейнштейна називають праву частину рівнянь Ейнштейна, а саме

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}. \tag{2}$$

Однак, останнім часом, сучасні дослідники закріпили цю назву за (1), виходячи з міркувань, що виникають у зв'язку з дослідженням просторів Ейнштейна. Крім того, додамо, що тензори мают унікальні властивості. Тензор (2) має нульову дивергенцію $\nabla_\alpha G^\alpha_j$, що відзеркаленням закону збереження енергії [2, с. 373]. Тензор (1) – єдиний тензор з сімейства тензорів вигляду $R_{ij} - \kappa R g_{ij}$, $\kappa = \text{const}$ збереження якого під час конформного перетворення не вимагає быльш жорсткої умови – сбереження тензору кривини R^h_{ijk} [11]. У цій статті ми вивчатимемо інфінітезимальні перетворення, що також, зберігатимуть тензор Ейнштейна (1) у просторах сталої скалярної кривини R.

2 Попередні відомості

Нехай, ми досліджуємо простір (V_n, g) на якому задана метрика g, і відповідно, існує узгоджена с цією метрикою зв'язність Γ^h_{ij}, і тензор риманової кривини цієї зв'язності R^h_{ijk}. Тоді, $R_{ij} = R^\alpha_{ij\alpha}$ – тензор Річі, і, нарешті, $R = R_{ij}g^{ij}$ – скалярна кривина, що у нашому дослідженні є сталою: $R = \text{const}$.

Ми вивчатимо перетворення ріманового простору V_n

$$\overline{x}^h = x^h + t\xi^h(x^1, x^2, \dots, x^n), \tag{3}$$

де t є довільний малий параметр, що є незалежним від координат x^i має назву *інфінітезимального перетвореннmя* ріманового простору. Кажуть, що векторне поле $\xi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ генерує це перетворення. Центральним рівнянням теорії інфінітезимальних перетворень є

$$\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + g_{hi} L_\xi \Gamma^h_{jk},$$

де $L_\xi \Gamma^h_{jk}$ похідна Лі коефіцієнту зв'яності $L_\xi \Gamma^h_{jk}$, а R^h_{kji} – тензор кривини цієї зв'яності. Явний вигляд $L_\xi \Gamma^h_{jk}$ залежатиме від типу перетворень. Також, якщо це перетворення зберігає тензор Ейнштейна, похідна Лі вздовж векторного поля $\xi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ має дорівнювати нулю:

$$L_\xi E_{ij} = \xi^\alpha E_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} E^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} E^\alpha_i = 0 \tag{4}$$

3 Інфінітезимальні конформні перетворення

Якщо векторне поле $\xi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ генерує інфінітезимальне конформне перетворення, воно має задовільняти системі рівнянь [1],[3]:

$$\begin{aligned}
&1)\xi_{i,j} = \xi_{ij};\\
&2)\varphi_{,i} = \varphi_i;\\
&3)\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \varphi g_{ij};\\
&4)\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \tfrac{1}{2}(\varphi_k g_{ij} + \varphi_j g_{ik} - \varphi_i g_{jk});\\
&5)\varphi_{i,j} = \tfrac{2}{n-2}\left(\xi^\alpha R_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} R^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} R^\alpha_i - \tfrac{g_{ij}}{2(n-1)}\left(\xi^\alpha R_{,\alpha} + \varphi R\right)\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Тут φ є певним скаляром, g_{ij} – ріманова метрика ріманового простору, R^h_{kji} – тензор кривини, та $Rij = R^\alpha_{ij\alpha}$ – Річчі. Нарешті, коваріантна похідна, узгоджена з рімановою метрикою g_{ij} позначена як кома. Запишемо (4) більш розгорнуто:

$$\xi^\alpha R_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} R^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} R^\alpha_i - \frac{1}{n}\varphi R g_{ij} - \frac{1}{n} R_{,\alpha}\, \xi^\alpha g_{ij} = 0$$

Тоді

$$\xi^\alpha R_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} R^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} R^\alpha_i = \frac{1}{n}\varphi R g_{ij} + \frac{1}{n} R_{,\alpha}\, \xi^\alpha g_{ij} \tag{6}$$

Підставляючи цей вираз у (5_5) замість $\xi^\alpha R_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} E^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} R^\alpha_i$ та зводячи подібні, отримуємо:

$$\varphi_{i,j} = \frac{g_{ij}}{n(n-1)}\left(R\varphi + R_{,\alpha}\, \xi^\alpha\right). \tag{7}$$

Відомо, якщо ковекторне поле σ_i задовільняє рівнянням

$$\sigma_{i,j} = \rho g_{ij},$$

то воно має назву конциркулярного. Простори, в яких таке поле існує, мають назву еквідістантних. З (7) маємо, що вектор φ^i задовільняє узагальненим рівнянням Кілінга дя конформних перетворень.

$$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i} = \tilde{\varphi} g_{ij}, \tag{8}$$

де $\tilde{\varphi} = \frac{2}{n(n-1)}\left(R\varphi + R_{,\alpha}\, \xi^\alpha\right)$. Це означає, що вектор φ^i є конформним вектором, тобто є генератором конформних нескінченно малих перетворень. Беручи до уваги (7) та 8), ми отримуємо теорему.

Теорема 1 *Якщо псевдоріманoвий простір V_n допускає конформні інфінітезимальні перетворення, що зберігають тензор Ейнштейна, то V_n є* *еквідістантним.Крім того, асоційований з ξ^i, вектор φ^i, також є генератором конформного перетворення:*

$$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i} = \tilde{\varphi} g_{ij},$$

де $\tilde{\varphi} = \frac{2}{n(n-1)}\left(R\varphi + R_{,\alpha}\,\xi^\alpha\right)$.

Умови інтегровності (5_4) є такими [1]:

$$\begin{aligned} \xi_m\big(R^m_{kij,l} - R^m_{lij,k}\big) + \xi_{m,l}R^m_{kij} - \xi_{m,k}R^m_{lij} + \xi_{i,m}R^m_{jkl} + \xi_{m,j}R^m_{ikl} \\ + \frac{1}{2}\big(g_{il}\varphi_{,jk} - g_{ik}\varphi_{,jl} + g_{jk}\varphi_{,il} - g_{jl}\varphi_{,ik}\big) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Внаслідок тотожності Біанкі

$$R_{kij,l} + R_{kjl,i} + R_{kij,l} + R^m_{kjl,k} = 0,$$

та тотожностей

$$\begin{aligned} R_{kijl} &= -R_{ikjl}, \\ R_{kijl} &= -R_{kilj}, \\ R_{kijl} &= R_{jlki}, \end{aligned} \tag{10}$$

рівняння (9) можуть бути записані таким чином:

$$\begin{aligned} -\xi^m R_{ijkl,m} + \xi_{m,l}R^m_{kij} - \xi_{m,k}R^m_{lij} + \xi_{i,m}R^m_{jkl} + \xi_{m,j}R^m_{ikl} \\ + \frac{1}{2}\big(g_{il}\varphi_{j,k} - g_{ik}\varphi_{j,l} + g_{jk}\varphi_{i,l} - g_{jl}\varphi_{i,k}\big) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Якщо (7) підставити у (11) ми отримуємо:

$$\begin{aligned} -\xi^m R_{ijkl,m} + \xi_{m,l}R^m_{kij} - \xi_{m,k}R^m_{lij} + \xi_{i,m}R^m_{jkl} + \xi_{m,j}R^m_{ikl} \\ + \frac{1}{n(n-1)}\big(R\varphi + R_{,\alpha}\,\xi^\alpha\big)\big(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}\big) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Далі, піднімаючи індекс i за допомогою g^{hi} і беручи до уваги (10), внаслідок (12) ми отримуємо:

$$\begin{aligned} \xi^m R^h_{jlk,m} + \xi^m{}_{,j}R^h_{mlk} + \xi^m{}_{,l}R^h_{jmk} + \xi^m{}_{,k}R^h_{jlm} - \xi^h{}_{,m}R^m_{jlk} \\ + \frac{1}{n(n-1)}\big(R\varphi + R_{,\alpha}\,\xi^\alpha\big)\big(\delta^h_l g_{jk} - \delta^h_k g_{jl}\big) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Відомо, що похідні Лі вздовж векторного поля ξ тензорів R^h_{jkl}, g_{jl}, δ^j_i та скаляру R можуть бути знайдені за формулами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi R^h_{jlk} &= \xi^m R^h_{jlk,m} + \xi^m{}_{,j}R^h_{mlk} + \xi^m{}_{,l}R^h_{jmk} + \xi^m{}_{,k}R^h_{jlm} - \xi^h{}_{,m}R^m_{jlk}, \\ \mathfrak{L}_\xi g_{ij} &= \varphi g_{ij}, \\ \mathfrak{L}_\xi \delta^j_i &= 0, \\ \mathfrak{L}_\xi R &= R_{,\alpha}\,\xi^\alpha. \end{aligned} \tag{14}$$

Крім (14), відомо, що похідна Лі суми тензорів однакового типу дорівнює похідній Лі сумі цих тензорів, а для похідної добутку тензорів, чи їх згортки є справеливим правило Лейбніца. Отже, ми маємо:

$$\mathfrak{L}_\xi \big(R^h_{jlk} - \frac{R}{n(n-1)}\big(\delta^h_k g_{jl} - \delta^h_l g_{jk}\big)\big) = 0. \tag{15}$$

Заради короткcті, введоно поняття *тензору конциркулярної кривини*:

$$Z^h_{jkl} \overset{\text{def}}{=} R^h_{jkl} - \frac{R}{n(n-1)}\big(\delta^h_k g_{jl} - \delta^h_l g_{jk}\big)\big), \tag{16}$$

Тоді (15) може бути записано:

$$\mathfrak{L}_\xi Z^h_{jlk} = 0. \tag{17}$$

Згортаючи (16) індекси h та k ми знаходимо

$$Z^\alpha_{jl\alpha} = R^\alpha_{jl\alpha} - \frac{R}{n(n-1)}\big(\delta^\alpha_\alpha g_{jl} - \delta^\alpha_l g_{j\alpha}\big) = R_{jl} - \frac{1}{n} R g_{jl}.$$

З іншого боку, відомо, що похідна Лі згортки дорівнює згортці похідної Лі. Отже, ми отримуємо теорему.

Теорема 2 *Для того, щоб рімановий простір V_n допускав інфінітезимальне конформне перетворення, породжене деяким векторним полем ξ, що зберігає тенор Ейнштена $E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij}$, необхідно та достатньо, щоб похідна Лі тензору конциркулярної кривини тотожно дорівнювала нулю:*

$$\mathfrak{L}_\xi Z^h_{ijk} = 0.$$

Нарешті, знайдемо умови інтегровності рівняння (7). Диференціюючи ці рівняння коварінтно за x^k, ми отримуємо:

$$\varphi_{i,jk} = \frac{g_{ij}}{n(n-1)}\big(R_{,k}\varphi + R\varphi_k + R_{,\alpha k}\, \xi^\alpha + R_{,\alpha}\, \xi^\alpha{}_{,k}\big)$$

Альтернуючи за j та k це рівняння, та використовуючи тотожність Річчі

$$\varphi_{i,jk} - \varphi_{i,kj} = \varphi_\alpha R^\alpha_{ijk},$$

отримуємо:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = {}& \frac{1}{n(n-1)}\big(R_{,k}\varphi g_{ij} + R\varphi_k g_{ij} + R_{,\alpha k}\, \xi^\alpha g_{ij} + R_{,\alpha}\, \xi^\alpha{}_{,k} g_{ij}\big) \\ & - \frac{1}{n(n-1)}\big(R_{,j}\varphi g_{ik} + R\varphi_j g_{ik} + R_{,\alpha j}\, \xi^\alpha g_{ik} + R_{,\alpha}\, \xi^\alpha{}_{,j} g_{ik}\big),\end{aligned}$$

або

$$\varphi_\alpha\big(R^\alpha_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}\big(\delta^\alpha_k g_{ij} - \delta^\alpha_j g_{ik}\big)\big) = \frac{1}{n(n-1)}\big(R_{,k}\varphi g_{ij} + R_{,\alpha k}\,\xi^\alpha g_{ij} + R_{,\alpha}\,\xi^\alpha{}_{,k} g_{ij}\big)$$
$$-\frac{1}{n(n-1)}\big(R_{,j}\varphi g_{ik} + R_{,\alpha j}\,\xi^\alpha g_{ik} + R_{,\alpha}\,\xi^\alpha{}_{,j} g_{ik}\big). \tag{18}$$

Для короткості можна рівняння (18) записати

$$\varphi_\alpha Z^\alpha_{ijk} = \frac{1}{n(n-1)}\mathfrak{L}_\xi\big(R_{,k}g_{ij} - R_{,j}g_{ik}\big).$$

Якщо $R = \mathrm{const} \neq 0$, ми матимемо з (4), що

$$\mathfrak{L}_\xi R_{ij} = \frac{R}{n}\mathfrak{L}_\xi g_{ij}. \tag{19}$$

Користуючись (19), з (7) матимемо:

$$\varphi_{i,j} = \frac{R\varphi}{n(n-1)}g_{ij}. \tag{20}$$

З рівняння (20) ми бачимо, що у випадку сталої скалярної кривини, вектор φ_i лишається кілінговим, а умова інтегровності цього рівняння прийме вигляд:

$$\varphi_\alpha\big(R^\alpha_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}\big(\delta^\alpha_k g_{ij} - \delta^\alpha_j g_{ik}\big)\big) = 0.$$

Якщо $R = \mathrm{const} = 0$, то ми бачимо, що внаслідок цього (20) можна записати так:

$$\varphi_{i,j} = 0,$$

з чого одразу випливає, що

$$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i} = 0,$$

тобто, вектор φ_i є кілінговим вектором, генератором ізометричних перетворень. Далі, якщо ми випишемо (11)

$$-\xi^m R_{ijkl,m} + \xi_{m,l}R^m_{kij} - \xi_{m,k}R^m_{lij} + \xi_{i,m}R^m_{jkl} + \xi_{m,j}R^m_{ikl} = 0,$$

або, коротше

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = 0.$$

Це означає, що при таких перетвореннях, зберігатиметься тензор кривини. Звідси маємо теорему.

Теорема 3 *Якщо рімановий простір V_n такий, що має нульову скалярну кривину, допускає інфінітезимальне конформне перетворення, породжене деяким векторним полем ξ, що зберігає тензор Ейнштейна, то асоційований з ним ковектор φ_i, є вектором Кілінга:*

$$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i} = 0.$$

Крім того, похідна Лі тензора кривини дорівнюватиме нулю:

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = 0.$$

4 Інфінітезимальні проективні перетворення

інфінітезимальні проективні(такі, що зберігають геодезчні) перетворення [5, с. 348] характеризуються умовою:

$$L_\xi \Gamma^h_{ij} = \psi_i \delta^h_j + \psi_j \delta^h_i$$

Якщо векторне поле $\xi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ генерує інфінітезимальне проективне перетворення, воно має задовільняти системі рівнянь [9, с. 133],[4]:

$$\begin{aligned}
&1)\xi_{i,j} = \xi_{ij};\\
&2)\psi_{,i} = \psi_i;\\
&3)\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \psi_k g_{ij} + \psi_j g_{ik};\\
&4)\psi_{i,j} = \tfrac{1}{n-1}\left(\xi^\alpha R_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} R^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} R^\alpha_i\right).
\end{aligned} \tag{21}$$

Враховуючи необхідність збереження тензору (3), матиме слушність (6), отже підставивши (6) у (21_4), отримуємо

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{n(n-1)}\left(R\mathfrak{L}_\xi(g_{ij}) + R_{,\alpha}\,\xi^\alpha g_{ij}\right), \tag{22}$$

що цілком збігається з (7). Випишемо умови інтегровності (21_3) [1]:

$$\begin{aligned}
\xi_m\left(R^m_{kij,l} - R^m_{lij,k}\right) + \xi_{m,l} R^m_{kij} - \xi_{m,k} R^m_{lij} + \xi_{i,m} R^m_{jkl} + \xi_{m,j} R^m_{ikl}&\\
+ g_{il}\psi_{j,k} - g_{ik}\psi_{j,l} = 0.&
\end{aligned} \tag{23}$$

Підставиши (22) у (23), та піднімаючи індекс i за допомогою g^{ih}, отримуємо умову:

$$\begin{aligned}
\xi^m R^h_{jlk,m} + \xi^m{}_{,j} R^h_{mlk} + \xi^m{}_{,l} R^h_{jmk} + \xi^m{}_{,k} R^h_{jlm} - \xi^h{}_{,m} R^m_{jlk}&\\
+ \frac{R}{n(n-1)}\left(\delta^h_l \mathfrak{L}_\xi(g_{jk}) - \delta^h_k \mathfrak{L}_\xi(g_{jl})\right) + \frac{R_{,\alpha}\,\xi^\alpha}{n(n-1)}\left(\delta^h_l g_{jk} - \delta^h_k g_{jl}\right) = 0,&
\end{aligned} \tag{24}$$

яку можна записати у вигляді, схожим з (15)

$$\mathfrak{L}_\xi\big(R^h_{jlk} - \frac{R}{n(n-1)}\big(\delta^h_k g_{jl} - \delta^h_l g_{jk}\big)\big) = 0. \tag{25}$$

Виходячи з (22), та (25), можна сформулювати теорему.

Теорема 4 *Для того, щоб рімановий простір V_n допускав інфінітезимальне проективне перетворення, породжене деяким векторним полем ξ, що зберігає тензор Ейнштейна $E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{n}Rg_{ij}$, необхідно та достатньо, щоб похідна Лі тензору концциркулярної кривини*

$$Z^h_{jkl} = R^h_{jkl} - \frac{R}{n(n-1)}\big(\delta^h_k g_{jl} - \delta^h_l g_{jk}\big).$$

тотожно дорівнювала нулю:

$$\mathfrak{L}_\xi Z^h_{ijk} = 0.$$

Тепер, перейдемо до просторів, що задовільняють вимозі $R = \mathrm{const} \neq 0$. Внаслідок (19) рівняння (22) прийме вигляд:

$$\psi_{i,j} = \frac{R}{n(n-1)}\mathfrak{L}_\xi(g_{ij}). \tag{26}$$

З (26) отримуємо, що

$$\mathfrak{L}_\psi(g_{ij}) = \psi_{i,j} + \psi_{j,i} = \frac{2R}{n(n-1)}\mathfrak{L}_\xi(g_{ij}). \tag{27}$$

Для симетричної зв'язності маємо:

$$g_{kt}\mathfrak{L}_\psi \Gamma^t_{ij} = \frac{1}{2}\big(\nabla_j\mathfrak{L}_\psi(g_{ik}) + \nabla_i\mathfrak{L}_\psi(g_{jk}) - \nabla_k\mathfrak{L}_\psi(g_{ij})\big)$$
$$= \frac{R}{n(n-1)}\big(\nabla_j\mathfrak{L}_\xi(g_{ik}) + \nabla_i\mathfrak{L}_\xi(g_{jk}) - \nabla_k\mathfrak{L}_\xi(g_{ij})\big) = \frac{2R}{n(n-1)}g_{kt}\mathfrak{L}_\xi \Gamma^t_{ij}.$$

Звідси ми бачимо, що вектор задовільняє рівнянню (21_3), яке в цьому випадку прийме вигляд:

$$\psi_{i,jk} = \psi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{2R}{n(n-1)}(\psi_k g_{ij} + \psi_j g_{ik}). \tag{28}$$

Якщо $R = \mathrm{const} = 0$, рівняння (27) дає

$$\mathfrak{L}_\psi(g_{ij}) = \psi_{i,j} + \psi_{j,i} = 0, \tag{29}$$

а (27), відповідно

$$\psi_{i,jk} = \psi_\alpha R^\alpha_{kji}. \tag{30}$$

Умова (24) виглядатиме як

$$\xi^m R^h_{jlk,m} + \xi^m{}_{,j} R^h_{mlk} + \xi^m{}_{,l} R^h_{jmk} + \xi^m{}_{,k} R^h_{jlm} - \xi^h{}_{,m} = 0,$$

або

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{jlk} = 0,$$

тобто тензор кривини зберігається, як і у випадку конформних перетворень. Отримане можна підсумувати у вигляді теореми.

Теорема 5 *Якщо рімановий простір V_n такий, що має сталу скалярну кривину ($R = \mathrm{const} \neq 0$), допускає інфінітезимальне проективне перетворення, породжене деяким векторним полем ξ, що зберігає тензор Ейнштейна, то асоційований з ним ковектор ψ_i, також породжуватиме проективні перетворення. У випадку, коли скалярна кривина тотожно дорівнює нулю($R = \mathrm{const} = 0$), асоційований ковектор ψ_i є вектором Кілінга:*

$$\psi_{i,j} + \psi_{j,i} = 0.$$

Крім того, у випадку нульової скалярної кривини, похідна Лі тензора кривини вздовж породжуючого поля ξ дорівнюватиме нулю:

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = 0.$$

5 Інфінітезимальні голоморфно-проективні перетворення келерових просторів

Розглянемо n-вимірний ($n = 2m$) Келерів многовид, з локальними координатами (x^i). Тоді позитивно-визначена Ріманова метрика g_{ij} та комплексна структура F^j_i задовільнятимуть рівнянням [8]:

$$F^r_i F^j_r = -\delta^j_i, \quad g_{kl} F^k_i F^l_j = g_{ij}$$
$$\nabla_k F^j_i = 0, \quad \nabla_k g_{ij} = 0.$$

інфінітезимальні голоморфно-проективні перетворення визначаються умовою:

$$L_\xi \Gamma^h_{ij} = \rho_i \delta^h_j + \rho_j \delta^h_i - \rho_s F^s_i F^h_j - \rho_s F^s_j F^h_i. \tag{31}$$

Крім того, вимагатимемо збереження комплексної структури:

$$\mathfrak{L}_\xi F^i_j = F^i_{j,k} \xi^k - F^\alpha_j \xi^i{}_{,\alpha} + F^i_\alpha \xi^\alpha{}_{,j} = 0. \tag{32}$$

В цьому випадку векторне поле ξ має назву *контраваріантного аналітичного.* Тоді, система диференціальних рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
&1)\xi_{i,j} = \xi_{ij};\\
&2)\rho_{,i} = \rho_i;\\
&3)\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_s F^s_j F_{ki} - \rho_s F^s_k F_{ji};\\
&4)\rho_{i,j} = \tfrac{1}{n+2}\left(\xi^\alpha R_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} R^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} R^\alpha_i\right).
\end{aligned} \tag{33}$$

Оскільки тензор (3) зберігається, підставляємо (6) у (33_4), отримуємо

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{n(n+2)}\left(R\mathfrak{L}_\xi(g_{ij}) + R_{,\alpha}\,\xi^\alpha g_{ij}\right), \tag{34}$$

Випишемо умови інтегровності (33_3)

$$\begin{aligned}
-\xi^m R_{ijkl,m} + \xi_{m,l} R^m_{kij} - \xi_{m,k} R^m_{lij} + \xi_{i,m} R^m_{jkl} + \xi_{m,j} R^m_{ikl}\\
+g_{il}\rho_{j,k} - g_{ik}\rho_{j,l} + \rho_{s,l} F^s_k F_{ji} + \rho_{s,l} F^s_j F_{ki} - \rho_{s,k} F^s_l F_{ji} - \rho_{s,k} F^s_j F_{li} = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Підставимо (34) у (35). Піднявши індекс i за допомогою g^{hi}, маємо таке рівняння:

$$\begin{aligned}
\xi^m R^h_{jlk,m} + \xi^m{}_{,j} R^h_{mlk} + \xi^m{}_{,l} R^h_{jmk} + \xi^m{}_{,k} R^h_{jlm} - \xi^h{}_{,m} R^m_{jlk}\\
+\frac{R}{n(n+2)}\big(\delta^h_l \mathfrak{L}_\xi(g_{jk}) - \delta^h_k \mathfrak{L}_\xi(g_{jl}) + \mathfrak{L}_\xi(g_{sl}) F^s_k F^h_j\\
+\mathfrak{L}_\xi(g_{sl}) F^s_j F^h_k - \mathfrak{L}_\xi(g_{sk}) F^s_l F^h_j - \mathfrak{L}_\xi(g_{sk}) F^s_j F^h_l\big)\\
+\frac{R_{,\alpha}\,\xi^\alpha}{n(n+2)}\big(\delta^h_l g_{jk} - \delta^h_k g_{jl} + g_{sl} F^s_k F^h_j + g_{sl} F^s_j F^h_k - g_{sk} F^s_l F^h_j - g_{sk} F^s_j F^h_l\big) = 0.
\end{aligned} \tag{36}$$

Враховуючи (32), а також, що $g_{sl}F^s_k = F_{kl} = -F_{lk}$, (36) можна записати наступним чином:

$$\mathfrak{L}_\xi\big(R^h_{jlk} - \frac{R}{n(n+2)}\left(\delta^h_k g_{jl} - \delta^h_l g_{jk} + F^h_k F_{jl} - F^h_l F_{jk} + 2\,F^h_j F_{lk}\right)\big) = 0 \tag{37}$$

Тензор

$$Y^h_{jlk} \overset{\mathrm{def}}{=} R^h_{jlk} - \frac{R}{n(n+2)}\left(\delta^h_k g_{jl} - \delta^h_l g_{jk} + F^h_k F_{jl} - F^h_l F_{jk} + 2\,F^h_j F_{lk}\right)$$

має назву *тензора H-конциркулярної кривини.* З (37) випливає теорема.

Теорема 6 *Для того, щоб келеровий многовид K_n допускав інфінітезимальне голоморфно-проективне перетворення, породжене деяким векторним полем ξ, що зберігає коплексну структуру F^j_i та тензор Ейнштейна*

$E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij}$, необхідно та достатньо, щоб похідна Лі тензору H-конциркулярної кривини

$$Y^h_{jlk} = R^h_{jlk} - \frac{R}{n(n+2)}\,(\delta^h_k g_{jl} - \delta^h_l g_{jk} + F^h_k F_{jl} - F^h_l F_{jk} + 2\,F^h_j F_{lk}).$$

тотожно дорівнювала нулю:

$$\mathfrak{L}_\xi Y^h_{ijk} = 0.$$

Дослідимо голоморфно-проективні перетворення, що зберігають тенор Ейнштейна у випадку, коли $R = \mathrm{const} \neq 0$. Внаслідок (19) рівняння (34) прийме вигляд:

$$\rho_{i,j} = \frac{R}{n(n+2)}\mathfrak{L}_\xi(g_{ij}). \tag{38}$$

З (38) отримуємо похідне Лі метрики уздовж поля ρ:

$$\mathfrak{L}_\rho(g_{ij}) = \rho_{i,j} + \rho_{j,i} = \frac{2R}{n(n+2)}\mathfrak{L}_\xi(g_{ij}). \tag{39}$$

Оскільки, за умовами дослідження, зв'язність є зв'язністю Леві-Чівіта, отже, симетричною, маємо:

$$g_{kt}\mathfrak{L}_\psi \Gamma^t_{ij} = \frac{1}{2}\big(\nabla_j \mathfrak{L}_\psi(g_{ik}) + \nabla_i \mathfrak{L}_\psi(g_{jk}) - \nabla_k \mathfrak{L}_\psi(g_{ij})\big)$$
$$= \frac{R}{n(n-1)}\big(\nabla_j \mathfrak{L}_\xi(g_{ik}) + \nabla_i \mathfrak{L}_\xi(g_{jk}) - \nabla_k \mathfrak{L}_\xi(g_{ij})\big) = \frac{2R}{n(n+2)} g_{kt}\mathfrak{L}_\xi \Gamma^t_{ij}.$$

Звідси ми бачимо, що вектор задовільняє рівнянню (33_3), яке в цьому випадку прийме вигляд:

$$\rho_{i,jk} = \rho_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{2R}{n(n+2)}(\rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_s F^s_j F_{ki} - \rho_s F^s_k F_{ji}). \tag{40}$$

Крім того, оскільки метрика є ермітивою:

$$F^t_i g_{tj} + F^t_j g_{ti} = 0,$$

та збереження комплескної структури(умова (32)), маємо:

$$F^t_i \mathfrak{L}_\xi(g_{tj}) + F^t_j \mathfrak{L}_\xi(g_{ti}) = 0,$$

Врахувавши (38), отримуємо:

$$F^t_i \rho_{t,j} + F^t_j \rho_{t,i} = 0,$$

або:

$$\nabla_j(\rho_t F^t_i) + \nabla_i(\rho_t F^t_j) = 0.$$

Таким чином, коваріантний вектор $\rho_t F_i^t$ є вектором Кілінга.

Якщо $R = \mathrm{const} = 0$, рівняння (39) дає

$$\mathfrak{L}_\rho(g_{ij}) = \rho_{i,j} + \rho_{j,i} = 0, \tag{41}$$

а (39), відповідно

$$\rho_{i,jk} = \rho_\alpha R^\alpha_{kji}. \tag{42}$$

Умова (36) знов дає

$$\xi^m R^h_{jlk,m} + \xi^m{}_{,j} R^h_{mlk} + \xi^m{}_{,l} R^h_{jmk} + \xi^m{}_{,k} R^h_{jlm} - \xi^h{}_{,m} = 0,$$

або

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{jlk} = 0,$$

тобто тензор кривини зберігається, як і у попередніх випадках. Маємо теорему.

Теорема 7 *Якщо келеровий простір V_n такий, що має сталу скалярну кривину ($R = \mathrm{const} \neq 0$), допускає інфінітезимальне голоморфно-проективне перетворення, породжене деяким векторним полем ξ, що зберігає тензор Ейнштейна, то асоційований з ним ковектор ρ_i, також породжуватиме проективні перетворення, а вектор $F_i^t \rho_t$ є вектором Кілінга. У випадку, коли скалярна кривина тотожно дорівнює нулю($R = \mathrm{const} = 0$), асоційований ковектор ρ_i також буде вектором Кілінга:*

$$\rho_{i,j} + \rho_{j,i} = 0.$$

Крім того, у випадку нульової скалярної кривини, похідна Лі тензора кривини вздовж породжуючого поля ξ дорівнюватиме нулю:

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = 0.$$

Література

1. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия /*Л. П. Эйзенхарт* – М.: ИЛ, 1948.
2. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория поля./*Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц* Наука. 1988. 512 с.
3. *Микеш Й., Молдобаев Д.* О распределении порядков групп конформных преобразований римановых пространств // Изв. вузов. Матем. – 1991. №12, –С. 24-–29.
4. *Mikeš J., Vanžurovà A., Hinterleitner I.*Geodesic mappings and some generalizations. /*J. Mikeš* –Olomouc: Palacky University Press, 2009, 304p.
5. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности/ *А. З. Петров* Наука. 1966. 496 с
6. *Chepurna O., Kiosak V., Mikeš J.* Conformal mappings of Riemannian spaces which preserve the Einstein tensor. // J. Appl. Math. Aplimat 3, 1 (2010), 253–258.

7. *Киосак В. А. Чепурная Е. Е.* Инвариантные преобразования с сохранением геодезических,- Proc. Intern. Geom. Center 2011 4(2) 36-42.
8. *Tachibana S. Ishihara S.* On infinitesimal holomorphically projective transformations in kahlerian manifolds./*S. Tachibana S. Ishihara*- Tohoku Math. J. (2) 12 (1960), no. 1, 77–101.
9. *Yano K.* The Theory Of Lie Derivatives And Its Applications /*K. Yano*–Amsterdam: North Holland Publishing Company – 1957, 321p.
10. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.*Современная геометрия: методы и приложения / *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко*- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 760 с.
11. *Черевко Є. В.*Сохранение тензора энергии-импульса при конформных отображениях /*Є. В. Черевко* // Proc. of the Intern. Geom. Center.-2012.-V.5, №1-2.-С.51-58

О. Є. Чепурна
Одеський національний економичний університет, Одеса, Україна.
E-mail: chepurna67@gmail.com

Olena Chepurna

Infinitesimal transformations of Riemannian spaces preserving certain geometric objects[1]

In the article we study such infinitesimal transformations of Riemannian spaces that preserve the Einstein tensor, including conformal, projective and holomorphically projective ones. We have found conditions to be satisfied when the transformation is to admit preserving the tensor. Also we consider the infinitesimal transformations of spaces with constant scalar curvature.

Надійшла до редколегії 20.2.2016

[1] This talk was made at the AUI seminar on January 14, 2016 and the work was partially supported by the Project between the Austrian Academy of Sciences and the National Academy of Sciences of Ukraine on New mathematical methods in astroparticle and quantum physics (2015–2017).