МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Навчальний посібник

за заг.редакцією Мацкул В.М.

Одеса 2018

УДК 336:51

ББК 22.1

М 36

Рекомендовано до друку Вченою радою Одеського національного економічного університету (протокол № від жовтня 2018 р.)

Рецензенти:

О.М. Гончаренко, д-р екон. наук, проф., декан фінансово-економічного факультету Одеського національного економічного університету

О.Г.Янковий, д-р екон. наук, проф., завідувач кафедри економіки підприємства та організації підприємницької діяльності Одеського національного економічного університету

Воропай Н.Л., Герасименко Т.В., Кирилова Л.О., Клименко С.С., Корсун Л.М., Мацкул М.В., Мальцева Є.В., Михайленко А.В., Орлов Є.В., Окара Д.В., Чернишев В.Г., Чепурна О.Є., Шинкаренко В.М. (за заг.редакцією Мацкул В.М.) Фінансова математика для економістів: Навчальний посібник.- Одеса: ОНЕУ, 2018.- 143 с.

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал курсу «Фінансова математика» для економічних спеціальностей, приклади (багато з яких із розв’язанням) математичних моделей різноманітних економічних задач, набір прикладів та вправ для самостійного розв’язування, а також індивідуальні науково-дослідні завдання. Усі розрахунки проводяться із застосуванням електронних таблиць Excel.

Зміст

Вступ

Основною метою фінансової діяльності (як і будь-якої економічної) є отримання прибутку. Якщо підприємство - кредитор надає свої грошові засоби в розпорядження іншого підприємства - позичальника, то цілком очевидно, що кредитор розраховує не тільки повернути ту суму, яка була позичена (основна сума, капітал або початкова вартість), а й отримати деяку винагороду за свою послугу (прибуток). Операція надання (взяття) кредиту характеризується наступними моментами:

1) кредитор на деякий час втрачає можливість використати власні гроші на свій розсуд. Наприклад, помістити їх більш вигідно або використати на власні цілі: розширення виробництва, особисте споживання;

2) завжди існує ризик неповернення кредиту. Причини: банкрутство підприємства-позичальника, його нечесність та інше (приклади горезвісних фінансових пірамід МММ, МІНАТЕП тощо);

3) платіжна спроможність грошей зменшується з часом внаслідок інфляції.

Перший момент пояснює існування прибутку від кредиту, другий та третій впливають на розмір прибутку.

Прибуток **(***Interest***)** – це ціна, яку треба сплатити за використання грошей. Кількість позичених (взятих у позику) або вкладених (інвестованих) грошей називається ***капіталом***, ***основною сумою*** або ***початковою вартістю*** (*Principal*).

Прибуток з капіталу підраховується у вигляді процентів від основної суми. Ці проценти називаються ***ставкою процента*** (*Interest Rate*). Ставка процента визначається як обумовлений процент за одиницю часу, за яку найчастіше приймається рік.

Операція надання або взяття кредиту в тій чи іншій формі називається фінансовою операцією. Фінансова операція вважається короткотерміновою, якщо кредит надано на термін до одного року. Вважається, що фінансові операції здійснюються на фінансовому ринку. На фінансовому ринку товаром є як гроші, так і цінні папери.

Фінансова математика – прикладна математична наука, що вивчає математичні моделі, які реально застосовуються в області фінансової діяльності. Такі моделі дають можливість різним фінансовим операторам ефективно працювати з **інструментами фінансового ринку** (як з **основними**: банківськими рахунками, облігаціями державних, муніципальних і банківських позик, акціями підприємств; так і з **похідними**: депозитними сертифікатами, векселями та іншими).

Детерміновані та імовірнісні (стохастичні) математичні моделі фінансової математики дозволяють (базуючись на наявних даних) визначати як поточні так і майбутні характеристики фінансових інструментів, а отже, найкращим чином розраховувати момент для здійснення тієї чи іншої фінансової операції.

“Вищі фінансові обчислення” – так називалась дисципліна, в рамках якої в вищих комерційних учбових закладах дореволюційної Росії вивчались методи фінансових розрахунків, що застосовувались в фінансових операціях. Сучасна назва дисципліни – фінансова математика й вона широко застосовується в курсах “Кредит”,”Фінансовий менеджмент”, ”Інвестиції” та інші.

Як наука, фінансова математика, утвердилась після виходу чудових робіт Х.Марковіця (1952) і Д.Тобіна (1958), за які їх автори отримали Нобелівські премії. Ідеї Марковіця і Тобіна про будову оптимального портфеля цінних паперів доступні і домогосподаркам. Припустимо, Ви маєте 1000000 у.о. і бажаєте на них купити цінні папери: облігації, акції чи інші. Звичайно, Ви бажаєте отримати деякий прибуток, проте без зайвого ризику. Теорія Марковіця і Тобіна диктує вишукане рішення: структура ризикових цінних паперів Вашого портфеля повинна повторити структуру великого ринку цих паперів.

В науці про фінанси, як в ніякій іншій , важлива оцінка дійовою особою (інвестором, учасником ринку тощо) прибутку і ризику фінансової операції. Будь-яка фінансово-кредитна операція, інвестиційна чи комерційна угода потребують наявності ряду умов їх виконання, з якими погоджуються дійові особи. До таких умов відносяться наступні кількісні дані: грошові суми, часові параметри, процентні ставки і деякі інші додаткові величини. Кожна із характеристик може бути представлена різними способами. Наприклад, платежі можуть бути разовими або потоком, сталими або змінними в часі. Існує більше десяти видів процентних ставок і методів нарахування процентів. Час встановлюється у вигляді фіксованих термінів платежів, інтервалів надходжень прибутків, моментів погашення заборгованості тощо. В рамках однієї фінансової операції перераховані показники утворюють деяку взаємопов'язану систему, яка підкоряється відповідній логіці. У зв'язку з множиною параметрів такої системи кінцеві результати часто не завжди очевидні. Більш того, зміна значень навіть однієї із величин в системі обов'язково вплине (в більшій чи меншій мірі) на результат відповідної операції. Звідси випливає, що такі системи можуть і повинні бути об'єктом застосування кількісного фінансового аналізу. ***Перевірені практикою методи цього аналізу і складають предмет фінансової математики***.

Кількісний фінансовий аналіз може використовуватись для розв'язання різноманітних задач. В першу чергу слід виділити основні або "класичні" задачі:

- вимірювання кінцевих фінансових результатів операції (угоди, контракту) для кожного з її учасників;
- розробка планів виконання фінансових операцій, в тому числі і планів погашення заборгованості;

- вимірювання залежності кінцевих результатів операції від її основних параметрів;
- визначення допустимих критичних значень цих параметрів і розрахунок параметрів еквівалентної зміни початкових умов операції.

Зрозуміло, що даний перелік задач фінансової математики не є вичерпним. Сучасна практика ставить нові задачі. До їх числа, наприклад, відноситься оптимізація портфеля інвестицій, і що більш цікаво – оптимізація портфеля заборгованості тощо.

Розділ 1. **Класичний короткотерміновий кредит. Формула простого процента.**

Нарощування за простою процентною ставкою.

У випадку короткотермінових фінансових операцій часто застосовується формула простого процента (*simple interest*).

Нехай $\boldsymbol{r}$ – процентна ставка (*rate*) за період $\boldsymbol{T}$ використання грошових ресурсів (частіше $\boldsymbol{T}$ - рік), тобто плата за використання кредиту на протязі часу $\boldsymbol{T}$. Прибуток з капіталу $\boldsymbol{I}$ (*Interest*) є зростаюча функція, що залежить від об'єму основної суми $\boldsymbol{P}$ (або $\boldsymbol{PV}$ - *Present Value*) і часу $\boldsymbol{t}$.

Якщо $\boldsymbol{t = T}$, то прибуток за один період часу :

$$\boldsymbol{I = Pr}. \tag{1.1}$$

Таким чином, на кінець періоду кредитування ($\boldsymbol{T}$) позичальник повинен повернути загальну суму $\boldsymbol{S}$ (або $\boldsymbol{FV}$ - *Future Value*), яка визначається формулою:

$$\boldsymbol{S = P + Pr = P(1 + r)}. \tag{1.2}$$

Дану формулу називають формулою простого процента.

Якщо $\boldsymbol{t < T}$, то

$$\boldsymbol{I(t) = Pr\frac{t}{T}, \quad S(t) = P(1 + r\frac{t}{T})}. \tag{1.3}$$

Формулу (1.3) використовують і у випадку $\boldsymbol{T < t < 1}$.

Приклад 1.1. Знайти прибуток з капіталу в 10000 грн. за 6 місяців при ставці процента у 8% річних.

Розв'язування. За першою із формул (1.3): I(6)=10000*0,08*6/12=400 (грн).

Зауважимо, що зазвичай процентна ставка є річною і для короткотермінових фінансових операцій розрахунковий рік складається або з $\boldsymbol{T}$ = 360 (тобто 12 місяців по 30 днів) або $\boldsymbol{T}$ = 365 днів. Якщо $\boldsymbol{T}$ = 360, то отримують звичайні або комерційні розрахунки, а при T = 365 отримують точні проценти. Кількість днів позики також можна вимірювати точно або приблизно. У першому випадку кожний місяць приймається рівним 30 дням. У другому випадку рахують точну кількість днів між виданням та погашенням позики, приймаючи день видачі та день погашення за один день.

На практиці застосовуються три варіанти розрахунку простих процентів:

1) Якщо t – наближена кількість днів інвестування, T = 360, то проценти, що нараховуються за формулою (1.3), називаються звичайними, а метод обчислення – німецьким (360/360). Цей метод застосовують в практиці комерційних банків Німеччини, Швеції, Данії.
2) Якщо t – точна кількість днів інвестування, T = 360, то обчислені проценти за формулою (1.3) називають комерційними, а метод обчислення – французьким (365/360). Даний метод іноді називають банківським і він поширений в міждержавних позикових операціях комерційних банків і внутрішньодержавних – у Франції, Бельгії, Швейцарії.
3) Якщо t – точна кількість днів інвестування, T = 365, то обчисленні проценти називають точними, а метод – англійським (365/365). Даний метод застосовується центральними банками багатьох країн (Великобританії, США)

Найпоширеніший у фінансовій практиці – комерційний метод нарахування простих процентів. Він вигідний інвестору. Для боржника вигідний (у більшості випадків) точний метод нарахування простих процентів. Його використовують при міжрегіональних валютних операціях.

Приклад 1.2. 12 вересня інвестор надав позику в 150000 грн. до кінця року при річній процентній ставці 10%. Яку суму боржник повинен сплатити в кінці терміну?

Розв’язування. 1) У випадку німецького методу t =18+3*30=108 – наближена кількість днів інвестування, T = 360. За формулою (1.3): S(t)=FV=PV*(1+r*t/T)=150000(1+0,1*108/360)= 154500 (грн).

2) У випадку французького (або комерційного чи банківського) t – точна кількість днів інвестування, T = 360. Точну кількість днів між датами початку операції 12.09.2018 та її кінця 31.12.2018 зручно знайти за допомогою відповідної функції електронних таблиць Excel (DAYS):

t=DAYS(“31.12.2018”;”12.09.2018”)=110.

За формулою (1.3): S(t)=FV=PV*(1+r*t/T)=150000(1+0,1*110/360)=154583,33 (грн).

3) У випадку англійського методу за формулою (1.3): S(t)=FV=PV*(1+r*t/T)=150000(1+0,1*110/365)=154520,55 (грн).

Поточна вартість кредиту.

Інколи буває потрібно підрахувати **поточну вартість** (капітал), якщо відома майбутня вартість (загальна сума). Розв’язавши рівняння (1.3) загальної суми відносно P, дістанемо:

$$P = \frac{S}{1 + r \cdot t/T}. \quad (1.4)$$

Така операція має назву математичного дисконтування.

Приклад 1.3. Яку суму треба інвестувати зараз на умовах 6% річних, щоб через 7 місяців з моменту інвестування отримати 8000 грн.?

Розв’язування. За формулою (1.4): P=S/(1+r*t/T)=PV=FV/(1+ r*t/T)= =8000/(1+0,06*7/12)=7729,47 (грн).

Нагадаємо, що в англомовній літературі використовують спеціальне позначення PV (*Present Value*) для теперішньої вартості.

Відповідно, теперішнє значення сум грошей у момент часу t - S_t позначається як $PV(S_t)$, а формула (1.4) для кожного такого моменту t матиме вигляд:

$$PV(S_t) = \frac{S_t}{1 + r \cdot t/T}. \qquad (1.4')$$

У випадку, коли $S = 1$ теперішнє значення співпадає із дисконтним множником:

$$V(t) = \frac{1}{1 + r \cdot t/T} = PV(t).$$

Теперішнє значення фіксованої суми S є спадною функцією від терміну t. Отже, необхідний капітал для нагромаджування суми S зменшується, якщо термін інвестування збільшується.

Поточне значення (теперішня вартість) відіграє дуже важливу роль при фінансовому аналізі суб'єкта фінансової діяльності. Часто фінансова діяльність вимагає вибору альтернативного рішення, наприклад: купувати за готівку чи взяти для купівлі позику; чи варто брати позику під запропонований банком відсоток на реконструкцію виробництва тощо.

Теперішня вартість є основною характеристикою для порівняння різних фінансових проектів, оскільки дозволяє звести різні суми в майбутньому до одного й того ж моменту часу та порівняти їх за поточною (теперішньою) вартістю.

Приклад 1.4. Підприємець може купити лінію для переробки м'яса за 10000 грн. готівкою або заплатити 11400 грн. через рік. У підприємця на рахунку не менше 12000 грн. і банк нараховує 12% річних. Яка з альтернатив є більш вигідною для підприємця?

Розв'язування. У першому випадку на залишок коштів на рахунку в банку підприємець матиме не менше 2000*1,12=2240 (грн). В іншому, через рік на рахунку підприємця буде не менше 12000*1,12=13440 (грн). Сплативши 11400 грн, у підприємця залишиться не менше 13440-11400=2040 (грн). Отже, перший варіант більш вигідний для підприємця.

Короткострокові боргові зобов'язання.

Фінансовий документ, який засвідчує кредитну операцію називають борговим зобов'язанням. Короткотермінові (до одного року) боргові зобов'язання – це векселі, депозитні сертифікати, облігації та інші ціні папери. Документ, за яким боржник укладає угоду з позикодавцем і зобов'язується сплатити певну суму до позначеної в документі дати, називають **простим векселем**, або **борговою розпискою** (*Note*). Майбутня вартість позики називається майбутньою вартістю векселя або **завершеною вартістю векселя**.

Пред'явник простого векселя може продати його до закінчення терміну виплати завершеної вартості, яка позначена в борговій розписці. Покупець, як правило, сплачує суму, меншу ніж завершена вартість. Коли позичальник сплачує позику (разом з прибутком від основної суми), гроші (завершена вартість) автоматично переходить до покупця, тобто до нового пред'явника простого векселя.

Приклад 1.5. Пан Д. бажає купити простий вексель, який має завершену вартість 3000 грн. Термін боргової розписки 9 місяців. Якщо пан Д. хоче заробити 8% річних за свої вкладені гроші, то яку суму він має сплатити за вексель?

Розв'язування. Знайдемо теперішню вартість векселя за формулою (1.4):

$PV=FV/(1+r*t/T)=3000/(1+0,08*9/12)=2830,19$ (грн). Отже, пан Д. має сплатити 2830,19 грн, якщо хоче заробити 8% річних за свої вкладені гроші.

Приклад 1.6. Пані М. взяла шестимісячну позику під 10% річних і видала банку А простий вексель із завершеною вартістю 15000 грн. За два місяці до закінчення терміну банк А продав банку В цей вексель. а) Яку суму отримала пані М.? в) Яку суму сплатив банк В, якщо вкладені ним гроші повинні дати прибуток 12% річних?

Розв'язування. а) Пані М. отримала в банку А суму PV= 15000/(1+0,1*6/12)=14285,71 (грн); в) при умові прибутку в 12% річних банк В викупив у банка А вексель за PV1=15000/(1+0,12*2/12)=14705,88 (грн).

Облікова ставка і дисконт.

У фінансових розрахунках часто виникає задача, обернена нарощенню процентів: по заданій сумі S, яку слід заплатити через деякий час t , необхідно визначити суму отриманої позики P. Така ситуація виникає, наприклад, при розробці умов контрактів. Як було вже відмічено, така операція визначення теперішньої (поточної) вартості позики називається математичним дисконтуванням.

Розрахунок поточної вартості P по майбутній S необхідний і тоді, коли проценти з суми S утримуються наперед, тобто безпосередньо при видачі позики, кредиту. В цих випадках кажуть, що сума S дисконтується або обліковується, а сама операція нарахування процентів і їх утримання називається **обліком**, а утриманні проценти – **дисконтом** *D* (*Discount*) або **скидкою**. Таку операцію утримання процентів в короткотермінових фінансових операціях називають **банківським дисконтуванням**. Її застосовують у комерційних банках Франції, а в практиці вітчизняних банків вона застосовується при банківському обліку векселів.

За певний період обліковою ставкою d називається відношення різниці між повною та викупною ціною цінного паперу (дисконту) до його повної вартості: $d = \frac{D}{S} = \frac{S-P}{S}$, де P – викупна сума грошей, виручка; S – сума боргу при погашенні.

Простий дисконт визначається формулою :

$$D = Sd\frac{t}{T}, \qquad P = S - D = S(1-d\frac{t}{T}), \qquad (1.5)$$

де $\boldsymbol{d}$ – облікова ставка за період $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{t}$ – час (період) кредитування, або термін від моменту обліку до дати погашення векселя.

Облік за річними обліковими ставками частіше здійснюється при часовій базі $\boldsymbol{T}$ = 360 днів, число днів позики зазвичай береться точним.

Приклад 1.7. Власник векселя на 1000 грн. з терміном його погашення 6 місяців через 2 місяці з моменту отримання продає його банку для отримання готівки. Банк обліковує вексель за 920 грн. Визначити дисконт і річну облікову ставку банку. Яку суму готівки отримав би власник за два місяці до терміну погашення за таких самих умов обліку?

Розв'язування. В нашій задачі банківський дисконт (за період t=6-2=4 місяці) становить D=S-P=1000-920=80 (грн), а за формулами (1.5) річна (T=12) облікова ставка банку d=D*T/(S*t)=80*12/(1000*4)=0,24 (24% річних).

Відмітимо, що при $\boldsymbol{t} > \dfrac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{d}}$ розрахунки за формулою (1.5) не мають сенсу, оскільки виручка $\boldsymbol{P}$ буде від'ємною. Така ситуація не виникає при математичному дисконтуванні: при будь-якому терміні теперішня вартість платежу більша нуля (подумайте, чому?).

Нарощення за обліковою ставкою.

Проста облікова ставка іноді застосовується і при розрахунках нарощеної суми. Наприклад, при необхідності визначення суми завершеної вартості векселя, якщо задана поточна сума боргу. У цьому випадку

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{t}/\boldsymbol{T}}. \qquad (1.6)$$

Еквівалентність процентних ставок.

Для банку, який обліковує вексель на суму грошей S, облікова вартість векселя є теперішньою вартістю суми грошей S, тобто це сума, яку банк виплатить пред'явнику векселя, а D – дисконт, сума, яку банк отримує з векселедавача в момент погашення, тобто через термін t, що залишився до погашення.

На відміну від звичайної ситуації, коли інвестується відома сума P, на яку за час t нараховуються проценти за процентною ставкою r, при обліку наперед відомо нарощену суму S, а її поточну вартість знаходимо з урахуванням облікової ставки d і терміну, що залишився до погашення. Отже, дисконт та дисконтна (облікова) ставка є такими ж характеристиками кредитної угоди, як процент і процентна ставка. Вони відрізняються лише напрямком схеми розрахунків.

У фінансових розрахунках треба навчитись розрізняти ставку процентів та облікову ставку. Вони характеризують кредитну угоду по-різному. Різниця між ними – у виборі часової бази, а саме моменту часу, відносно якого обчислюється вигідність кредитної угоди (фінансової операції). Для ставки процентів це – початок терміну угоди, а для облікової ставки – кінець терміну.

Різні за видом процентні ставки називаються еквівалентними, якщо в однотипних фінансових операціях вони дають у розрахунках однакові остаточні результати.

Із формул (1.4) та (1.5) випливає, що еквівалентність облікової ставки d і ставки процентів r для одного і того ж періоду t встановлює співвідношення:

$$\frac{S}{1+r\cdot t/T}=S\,(1-d\cdot\frac{t}{T}).$$

Звідси отримуємо:

$$r = \frac{d}{1 - d \cdot t/T}; \qquad d = \frac{r}{1 + r \cdot t/T}. \tag{1.7}$$

Зокрема, у прикладі 1.7, виручена сума – 920 грн., а завершена вартість – 1000 грн. Визначимо річну ставку процента, яка дає прибуток 1000 – 920 = 80 (грн.) із суми 920 грн.:

$$I = P \cdot r \frac{t}{T} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{I}{P \cdot \frac{t}{T}} = \frac{80}{920 \cdot \frac{4}{12}} = \frac{24}{92} = 0{,}2609 \text{ (26,09\%).}$$

Той самий результат можна дістати відразу за формулою (1.7):

$$r = \frac{d}{1 - d \cdot t/T} = \frac{0{,}24}{1 - 0{,}24 \cdot 4/12} = 0{,}2609.$$

Для випадку t = 2 міс. і облікової ставки d = 24% еквівалентна річна процентна ставка складе:

$$r = \frac{0{,}24}{1 - 0{,}24 \cdot 2/12} = 0{,}25 \text{ (25\%).}$$

Отже, слід пам'ятати, що про еквівалентність ставки процентів та облікової ставки, можна говорити лише відносно певного фіксованого терміну. Ставки, які еквівалентні стосовно одного фіксованого періоду часу, не будуть еквівалентними відносно іншого періоду часу.

Приклад 1.8. Банк пропонує підприємцю дисконтний вексель на суму 50000 грн. Ставка дисконту 12%. Знайти суму, яку отримає підприємець. Яку реальну процентну ставку кредиту він буде сплачувати, якщо термін векселя: а) 1 рік; б) 1/2 року?

Розв'язування. Підприємець в обох випадках отримає P=S-D=50000-50000*0,12=44000 (грн). У випадку а), за формулою (1.7), реальна процентна ставка кредитування становитиме r=d/(1-d*t/T)= 0,12/(1-0,12*12/12)=0,1364 (13,64%). У випадку б), за формулою (1.7), реальна процентна ставка кредитування становитиме r=d/(1-d*t/T)= 0,12/(1-0,12*6/12)=0,1277 (12,77%).

Як бачимо, при збільшенні терміну облікової операції реальна процентна ставка зростає.

Враховування інфляції у короткотермінових фінансових операціях.

Відомо, що інфляція спричинює падіння купівельної спроможності грошей, тобто знецінює їх вартість. Щоб зменшити фінансові втрати інвестора від інфляції, для обох видів короткотермінових фінансових операцій застосовують один і той самий спосіб врахування інфляції – корегування процентних ставок.

У розрахунках, що стосуються позикових операцій, ставку процентів $\boldsymbol{r}$ замінюють ставкою-брутто $\boldsymbol{r_i}$, виходячи з таких міркувань: якщо $\boldsymbol{i}$ – річний рівень інфляції (у відсотках), то знецінення остаточної суми боргу $\boldsymbol{S}$ за термін $\boldsymbol{t}$ складе $\boldsymbol{\Delta S = Sit}$, а сума грошей, яка компенсує втрати від інфляції $\boldsymbol{S_i = S + \Delta S = S(1+it)}$.

За формулою (1.3) $\boldsymbol{S = P(1+rt)}$, тому $\boldsymbol{S_i = P(1+rt)(1+it)}$.

Якщо ж скористатись ставкою-брутто $\boldsymbol{r_i}$, то $\boldsymbol{S_i = P(1+r_i t)}$.

Із умови еквівалентності $\boldsymbol{P(1+rt)(1+it) = P(1+r_i t)}$. Спростивши цю рівність, отримаємо:

$$\boldsymbol{r_i = r + i + rit}. \qquad (1.8)$$

При невисокій інфляції величини $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{ri}$ незначні, тому третім доданком у формулі (1.8) можна знехтувати.

Приклад 1.9. 14 березня інвестовано 20000 грн. під 10% річних. Визначити просту процентну ставку та суму погашення 28 грудня з урахуванням інфляції (річний темп інфляції – 6%).

Розв'язування. Просту ставку-брутто визначимо за формулою (1.8), нехтуючи третім доданком: r_i =0,1+0,06=0,16. Точну кількість днів між датами початку операції 14.03.2018 та її кінця 28.12.2018 зручно знайти за допомогою відповідної функції електронних таблиць Excel (DAYS):

t=DAYS(“28.12.2018”;”14.03.2018”)=289.

За формулою (1.3): S(t)=FV=PV*(1+r*t/T)=20000(1+0,16*289/360)=20329,96 (грн).

При розрахунках у облікових операціях замінюють облікову ставку d обліковою ставкою-брутто d_i, яка враховує інфляцію i.

З формули (1.7): $S_i = \dfrac{P}{1-d_i t}$, $S = \dfrac{P}{1-d t}$.

З іншого боку, компенсація знецінення остаточної суми боргу S на величину річного темпу інфляції i за термін t складе: $S_i = S(1+i t)$.

Порівнюючи формули для S_i, отримаємо рівність $\dfrac{1}{1-d_i t} = \dfrac{1+i t}{1-d t}$.

Звідки

$$d_i = \frac{i+d}{1+i t}. \qquad (1.9)$$

Приклад 1.10. Як зміниться облікова ставка і сума дисконту після врахування інфляції (i =5%) при проведенні операції обліку векселя на 6000 грн. за три місяці до терміну погашення, якщо банківська облікова ставка – 12%?

Розв’язування. За формулою (1.9) d_i =(0,05+0,12)/(1+0,05*3)=0,1478 (14,78%). Як бачимо, при врахуванні інфляції банківська облікова ставка зросла. Зросте й сума дисконту: за формулою (1.5) D=6000*0,1478*3/12=221,7 (грн).

Нарощення процентів і конверсія валюти.

Розглянуті вище методи нарахування процентів дозволяють перейти до вивчення більш складніших і важливіших в практичному відношенні задач. В першу чергу це поєднання операцій конверсії (обміну) валюти і нарахування процентів. При можливості обміну гривневих коштів на ВКВ і зворотної конверсії доцільно порівнювати прибутки від безпосереднього розміщення наявних коштів на депозитах і опосередковано через іншу валюту.

Можливі два варіанти нарощення процентів з конверсією грошових ресурсів:

1) Грн. → ВКВ → ВКВ → Грн.;
2) ВКВ → Грн. → Грн. → ВКВ.

В операціях нарощення з конверсією валют існує два джерела отримання прибутку – зміна курсу і нарощення процентів, причому, якщо друге з них безумовне (ставка процентів фіксована), то цього не можна сказати про перше джерело. Більш того, подвійна конвертація валюти може бути при несприятливих умовах збитковою.

Визначимо суму в кінці операції і її прибутковість для першого варіанту. Нехай

$\boldsymbol{P_B}$ – сума депозиту в ВКВ; $\boldsymbol{S_B}$ – нарощена сума в ВКВ;

$\boldsymbol{P_Г}$ – сума депозиту в гривнях; $\boldsymbol{S_Г}$ – нарощена сума в гривнях;

$\boldsymbol{j}$ – ставка нарощення для конкретного виду ВКВ; $\boldsymbol{r}$ – ставка нарощення для гривневих сум; $\boldsymbol{t}$ – термін депозиту;

$\boldsymbol{K_0}$ – курс обміну на початку операції; $\boldsymbol{K_1}$ – курс обміну в кінці операції;

Операція передбачає три кроки: обмін валюти на гривні, нарахування процентів на цю суму і, нарешті, конвертація у вихідну валюту. Нарощена сума в валюті визначається за формулою:

$$\boldsymbol{S_B = P_B\, K_0 (1 + r\, t) \frac{1}{K_1}}. \qquad (1.10)$$

Множник нарощення з врахуванням подвійної конвертації має вигляд:

$$v_B(t;r)=\frac{K_0}{K_1}(1+r\,t)=\frac{1+r\,t}{K_1/K_0}. \qquad (1.11)$$

Взаємодія двох факторів зміни початкової суми в цій формулі проявляється більш наочно. Якщо позначити темп зростання курсу $k = K_1/K_0$, то легко помітити, що множник нарощення збільшується лінійно при зростанні ставки r, а при зростанні кінцевого курсу обміну (а відповідно і k) він зменшується.

Приклад 1.11. Передбачається розмістити 2000$ на гривневому депозиті терміном 3 місяці. Курс продажу на початок терміну депозиту 5,25 грн. за 1$, курс купівлі долара в кінці операції 5,37 грн. Процентні ставки: $r = 22\%$; $j = 10\%$ (нараховуються звичайні проценти – 360/360). Визначити нарощену суму.

Розв'язування. Нарощена сума у ВКВ на кінець терміну складе:

$$S_B = 2000\cdot\frac{5{,}25}{5{,}37}\left(1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}22\right) = 2062{,}85\,\$.$$

Пряме ж нарощення вихідної доларової суми за доларовою ставкою дає:

$$S_B = 2000\cdot\left(1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}1\right) = 2050\,\$.$$

Визначимо прибутковість проведеної операції в цілому. В якості вимірювача прибутковості (за термін операції) візьмемо просту річну ставку процента $r_{еф}$. Ця ставка визначає зростання суми P_B до величини S_B: $r_{еф}=\dfrac{S_B-P_B}{P_B\,t}$. Підставивши значення S_B з (1.10), отримаємо:

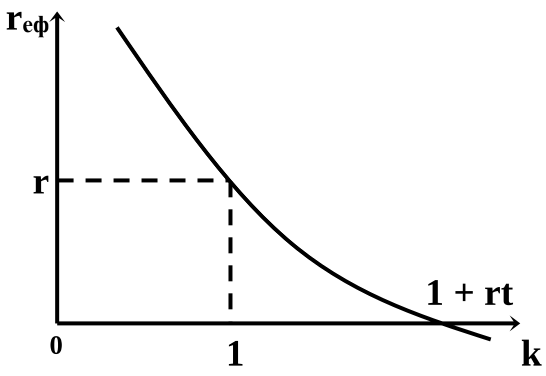
$$r_{еф}=\left[\frac{K_0}{K_1}\cdot(1+r\,t)-1\right]\Big/t$$

Легко помітити, що при зростанні темпу зростання курсу $k = K_1/K_0$ ефективність операції падає. При $k=1$ параметр $r_{еф}=r$, при $k>1$ параметр $r_{еф}<r$:

Розглянемо тепер другий варіант. В ньому трьом крокам операції відповідають три співмножника формули:

$$S_r = \frac{P_r}{K_0}(1 + jt)K_1 = P_r \cdot (1 + jt)\frac{K_1}{K_0}. \qquad (1.12)$$

Як і у попередньому варіанті, множник нарощення лінійно залежить від ставки (ставка процента для ВКВ) і темпу зростання кінцевого курсу $k = K_1 / K_0$.



Приклад 1.12 Припустимо, необхідно розмістити на валютному депозиті суму в гривнях (20 тис). Інші умови з прикладу 1.11. Визначити нарощену суму.

Розв'язування. За формулою (1.12) нарощена сума в гривнях на кінець терміну складе: $S_Г = 20\,000 \cdot (1 + 3/12 \cdot 0{,}1) \cdot \frac{5{,}37}{5{,}25} = 20968{,}6$ (грн.). Пряме інвестування в гривневий депозит дає більше:

$S_Г = 20000 \cdot (1 + 3/12 \cdot 0{,}22) = 21100$ (грн.)

Проаналізуємо ефективність (прибутковість операції): у першому випадку $r_{еф} = \frac{S_Г - P_Г}{P_Г}$ =(20968,6-20000)/20000=0,0484 (4,84%); у другому =5,5%..

Розділ 2. **Формули складних процентів**

Нарахування складних річних процентів.

При середньо та довготермінових кредитних операціях, якщо проценти не виплачуються після їх нарахування відразу, а приєднуються до суми боргу, то для нарахування застосовують складні проценти (*compound interest*). Приєднання нарахованих процентів до суми, яка є базою для їх нарахування, називають капіталізацією процентів. Загальна величина капіталу, яка є сумою основної суми грошей та нарахованих на неї процентів називається нарощеною (або акумульованою) сумою.

Нехай P – початковий капітал (поточна вартість або PV);

r – річна процентна ставка (*rate*);

n – загальний термін інвестування (в роках);

S_n – нарощена сума на кінець терміну інвестування (або FV_n).

Тоді в кінці першого року ($n=1$) прибуток складе $I = P\,r$, а загальна сума $S_1 = P(1+r)$.

В кінці другого року ($n=2$):

$$I = S_1 r, \quad S_2 = S_1 + S_1 r = S_1(1+r) = P(1+r)^2,$$

а в кінці n -го року:

$$S_n = P(1+r)^n. \qquad (2.1)$$

Формула (2.1) нарощує або "рухає, переносить" основну суму (поточну вартість) P на n років "вперед" при ставці прибутку r за рік.

Приклад 2.1. 50000 гривень покладено на банківський рахунок на 3 роки при річній ставці 8%. Обчислити суму, отриману в кінці терміну.

Розв'язування. За формулою (2.1):
FV=PV*(1+r)^n=50000*(1+0,08)^3=62985,6 (грн).
Використовуючи відповідну функцію Excel FV(8%;3;;-50000)=62985,6 (грн).

Множник $(1+r)^n$ називають множником нарощення, або процентним фактором майбутньої вартості. В англомовній літературі його позначають $FVIF(n;r)$ – *Future Value Interest Factor*. При великому терміні нарощення навіть мала величина процентної ставки помітно впливає на величину множника нарощення. Так, наприклад, острів Манхеттен, на якому розташована центральна частина Нью-Йорку, був куплений (точніше виміняний) за 24 дол., а через 350 років вартість землі цього острову оцінювалась в 40 млрд. дол. Таке зростання досягається всього лише при процентній ставці в 6,3% річних. Ще більший вплив на множник нарощення має висока (інфляційна) процентна ставка. Так у випадку r = 110% (а така інфляційна ставка не так вже і давно мала місце в Україні) і n = 5 маємо дуже значний множник нарощення: $FVIF(5;1{,}1) = (1+1{,}1)^5 = 40{,}84$.

Нарощення процентів m разів на рік. Номінальна та ефективна ставки.

При укладанні фінансових контрактів фіксується переважно річна процентна ставка, проте проценти можуть нараховуватись не один раз на рік, а декілька – по півріччях, кварталах тощо. Деякі зарубіжні комерційні банки практикують навіть щоденне нарахування процентів.

При нарахуванні процентів декілька разів на рік можна скористатись формулою (2.1). Параметр n в цьому випадку буде означати число періодів нарахувань (конверсійних періодів), а під ставкою r слід розуміти ставку за відповідний конверсійний період. На практиці, як правило, в контрактах фіксується не ставка за період нарахування, а річна ставка. Така річна сумарна ставка складних процентів при нарахуванні процентів m разів на рік називається **номінальною ставкою**. Ставку процента i за конверсійний період можна обчислити діленням номінальної ставки r на кількість m періодів нарахувань за рік: $i = r/m$.

Така процентна ставка називається пропорційною, а нарощена сума грошей S_n за n років обчислюється за формулою:

$$S_n(m) = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}, \qquad (2.2)$$

де mn – загальна тривалість терміну інвестування (число конверсійних періодів).

Приклад 2.2. Знайти нарощену суму грошей за умовою прикладу 2.1, якщо проценти нараховуються: а) кожних півроку; б) щоквартально; в) щомісячно.

Розв'язування. Скористуємось відповідною функцією Excel FV:

а) при піврічному нарахуванні процентів FV(8%/2;3*2;;-50000)=63265,95 (грн)

б) при щоквартальному FV(8%/4;3*4;;-50000)=63412,09 (грн)

в) при щомісячному FV(8%/12;3*12;;-50000)=63511,85 (грн).

Результати прикладу 2.2 свідчать, що зі збільшенням кількості нарахувань процентів за рік зростає абсолютний річний прибуток. Реальна прибутковість або, іншими словами – норма прибутку інвестицій, виражається **річною ефективною процентною ставкою.**

Означення. Річна ставка складних процентів, еквівалентна номінальній при нарахуванні процентів m разів на рік, називається **ефективною ставкою** (*Effective Rate*).

Ефективну ставку будемо позначати $r_{еф}$. Річна ефективна ставка пов'язана з номінальною ставкою співвідношенням, яке випливає із порівняння правих частин формул (2.1) та (2.2):

$$1 + r_{еф} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m}.$$

Звідси

$$r_{еф} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m} - 1, \qquad (2.3)$$

де r – річна номінальна процентна ставка; m – кількість нарахувань процентів за рік.

Приклад 2.3. Знайти річну ефективну ставку для випадку щомісячного нарахування зі ставкою 6%.

Розв'язування. За формулою (2.3) скористуємось функцією Excel r_{effect}=EFFECT(0,06;12)= 0,061678 (6,17%).

При підготовці контрактів іноді виникає необхідність визначення номінальної ставки (є відповідна функція NOMINAL), якщо відома ефективна ставка та кількість (m) нарахувань процентів у році. З формули (2.3) отримуємо:

$$r = m \cdot \left(\sqrt[m]{1 + r_{еф}} - 1 \right) . \qquad (2.4)$$

Означення. Процентні ставки за певний період часу називаються **еквівалентними** (*Equivalent Rates*), якщо кінцеві результати нарощення інвестованого капіталу в кінці цього проміжку часу співпадають. За період, як правило, беруть 1 рік.

Нехай P гривень інвестовано з річною ставкою прибутку r і нарахуванням m разів на рік. У іншому випадку ці ж P гривень інвестовано з річною ставкою прибутку s і нарахуванням k разів на рік. Процентні ставки будуть еквівалентні, якщо

$$P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = P\left(1 + \frac{s}{k}\right)^k .$$

Звідси отримаємо рівняння для визначення еквівалентних ставок:

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{s}{k}\right)^k . \qquad (2.5)$$

Приклад 2.4. Яка величина процентної ставки при щомісячному нарахуванні буде еквівалентна процентній ставці 8% при щоквартальному нарахуванні?

Розв’язування. Знаходимо ефективну річну ставку при щоквартальному нарахуванні: r_{effect}=EFFECT(0,08;4)= 0,082432 (8,24%). Потім із рівняння еквівалентності (2.5), за допомогою відповідної функції Excel NOMINAL(0,082432;12)= 0,079473 (7,95%). Таким чином 7,95%, які нараховуються щомісячно, еквівалентні 8%, які нараховуються щоквартально.

Приклад 2.5 Банк А. сплачує своїм клієнтам прибуток із ставкою 8,65% при щоквартальному нарахуванні, а банк В. сплачує 8,7% при піврічному нарахуванні. В якому банку вигідніше розмістити свій вклад?

Розв’язування. Розрахуємо відповідні ефективні річні ставки. Для банку А: r_{effect}=EFFECT(0,0865;4)=0,089347 (8,93%), а для банку В: r_{effect}=EFFECT(0,087;2)= 0,088892 (8,89%). Вигідніше розмістити вклад у банку А, оскільки він пропонує більшу ефективну річну ставку.

Дисконтування за складними процентними ставками.

Дуже часто інвестор хоче знати, яку грошову суму $\boldsymbol{P}$ йому треба вкласти під складні проценти сьогодні, щоб в майбутньому фіксованому часі отримати суму грошей $\boldsymbol{S}$. Як вже було зазначено, такий процес визначення теперішньої вартості майбутньої суми $\boldsymbol{S}$ називається **дисконтуванням**. Дисконтування за складними процентними ставками поділяється на математичне та банківське.

Формула для обчислення теперішньої вартості $\boldsymbol{P}$ при фіксованих $\boldsymbol{S, r, n}$ випливає з формули (2.1) і має вигляд:

$$\boldsymbol{P = S_n \cdot (1+r)^{-n}}. \qquad (2.6)$$

Дана формула є формулою **математичного дисконтування**, в ній бере участь складна ставка процентів $\boldsymbol{r}$. Вираз $\boldsymbol{(1+r)^{-n}}$ називається дисконтним множником зі складною процентною ставкою. В зарубіжній літературі його позначають $\boldsymbol{PVIF(n;r)}$ – *Present Value Interest Factor.*

У випадку, коли проценти нараховуються $\boldsymbol{m}$ разів на рік за номінальною ставкою $\boldsymbol{r}$, теперішня вартість $\boldsymbol{P}$ дорівнює:

$$P = S_n(m) \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-mn}. \qquad (2.6')$$

Приклад 2.6. Яку суму треба інвестувати на 4 роки під 9% із щомісячним нарахуванням, щоб забезпечити нарощену суму у 8000 грн.?

Розв'язування. Скористуємось відповідною функцією Excel: PV=PV(9%/12;4*12;;8000)=-5588,91 (грн). Таким чином, необхідно інвестувати 5588,91 (грн).

У практиці облікових операцій іноді застосовують складну облікову ставку (ставку дисконту). В таких випадках процес дисконтування за складною обліковою ставкою d здійснюється за формулою:

$$P = S \cdot (1 - d)^n, \qquad (2.7)$$

і називається **банківським дисконтуванням**.

Приклад 2.7. Фінансовий актив на суму 500000 грн., термін платежу якого наступає через 5 років, проданий з дисконтом за складною обліковою ставкою 15% річних. За скільки продали актив?

Розв'язування. За формулою (2.7) PV=500000*(0,85)^5=221852,66 (грн).

Дисконтування за складною обліковою ставкою призводить до результатів, вигідніших для боржника, аніж при дисконтуванні за простою обліковою ставкою. Банківське дисконтування можна проводити m разів на рік. У цьому випадку застосовують номінальну облікову ставку d, а кожне дисконтування проводиться за ставкою d/m. Формула банківського дисконтування m разів на рік за номінальною обліковою ставкою d має вигляд:

$$P = S \cdot \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mn}. \qquad (2.7')$$

Неперервне нарощення та дисконтування.

У практиці фінансово-кредитних операцій неперервне нарощення, тобто нарощення за нескінченно малі відрізки часу, застосовується дуже рідко. Значно більше значення неперервне нарощення має в аналізі складних фінансових проблем, наприклад, при виборі та обґрунтуванні інвестиційних рішень, у фінансовому проектуванні. При неперервному нарощенні процентів застосовують особливий вид процентної ставки – силу зростання (*force of interest*). Сила зростання характеризує відносний приріст нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу. Вона може бути сталою або змінюватись з часом.

Як було вказано раніше, при нарахуванні процентів m разів на рік за номінальною ставкою r, нарощена сума знаходиться за формулою: $S_n(m) = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$. Чим більше значення m, тим менший проміжок між моментами нарахування процентів. В граничному випадку при $m \to \infty$ маємо:

$$S = \lim_{m\to\infty} S_n(m) = \lim_{m\to\infty} P\left[\left(1+\frac{1}{m/r}\right)^{m/r}\right]^{rn} = P\,e^{rn},$$

де e – основа натуральних логарифмів.

Щоб відрізнити неперервну ставку від дискретної, позначимо силу зростання через δ. Тоді

$$S = P\,e^{\delta n}. \tag{2.8}$$

Дисконтний множник на основі сили зростання (математичне дисконтування) знаходиться з формули (2.8) після її розв’язування відносно P:

$$P = S\cdot e^{-\delta n}. \tag{2.9}$$

Отже, дисконтний множник дорівнює $e^{-\delta n}$.

Ефективна ставка при неперервному нарахуванні може бути знайдена із співвідношення $(1+r_{еф})^n = e^{\delta n}$:

$$r_{еф} = e^{\delta} - 1. \qquad (2.10)$$

Приклад 2.8. Яку суму грошей треба вкласти на 5 років з 6% неперервним нарахуванням, щоб забезпечити нарощену суму у 9000 грн.?

Розв'язування. За формулою (2.9) PV=9000*EXP(-0,06*5)= 6667,364 (грн).

Приклад 2.9. Через скільки років початкова сума P=2000 грн. подвоїться, якщо процентна ставка складає 8%, а нарахування проводяться а) щоквартально? б) неперервно?

Розв'язування. а) при щоквартальному нарахуванні процентів n=abs(ln0,5)/4ln1,02=8,75 (або через 8 років і 9 місяців).

б) при неперервному нарахуванні процентів n=ln0,5/(-0,08)=8,66 (або через 8 років і 6 місяців).

Врахування інфляції в довгострокових фінансових операціях.

Знецінення грошей, викликане інфляцією, завдає значної шкоди інвесторам. Якщо припустити, що упродовж n років темп зростання інфляції i був сталим, тоді за цей час індекс цін становитиме $I_p = (1+i)^n$ (у стільки разів зросли ціни за n років). Отже нарощена сума до кінця зазначеного терміну знецінилася в стільки ж разів у зв'язку з інфляцією.

Відомо, що індекс купівельної спроможності грошей дорівнює $\dfrac{1}{I_p} = (1+i)^{-n}$ (обернений до індексу цін). Таким чином, реальна вартість $S_n{}^p$ нарощеної суми S_n дорівнюватиме:

$$S_n{}^p = P \cdot (1+r)^n \cdot (1+i)^{-n} = P \cdot \left(\frac{1+r}{1+i} \right)^n . \qquad (2.11)$$

Величина $\left(\frac{1+r}{1+i} \right)^n$ – множник нарощення за складною ставкою процентів r, з урахуванням річного темпу інфляції i. Якщо річний темп інфляції за величиною збігається зі ставкою кредиту ($r = i$), то нарощення суми P поглинається інфляцією і не буде реального збільшення початкової суми.

Якщо $i > r$, то відбуватиметься "поїдання" капіталу, і реальна сума через n років буде меншою навіть від початкової суми P.

Щоб зберегти прибутковість позики на рівні r в умовах інфляції, здійснюють корегування ставки шляхом введення ставки-брутто $r_i = r + i + ri$.

На практиці дуже рідко темп інфляції залишається незмінним упродовж кількох років. Зазвичай він постійно змінюється – то збільшується, то зменшується. У цьому випадку використовується інший показник виміру інфляції – індекс інфляції (позначатимемо $I_{інф.}$), який відображає зміну вартості грошей за весь період кредитування.

Щоб зменшити вплив інфляції на знецінення нарощеної суми кредиту, проводять індексацію цієї суми на розмір індексу інфляції, що виражається формулою:

$$S_n{}^i = P \cdot (1+r)^n \cdot I_{інф.} \qquad (2.12)$$

Розділ 3. **Фінансова еквівалентність. Рівняння еквівалентності**

На практиці нерідко виникають випадки, коли необхідно замінити одне грошове зобов'язання іншим, наприклад з більш віддаленим терміном сплати, об'єднати декілька платежів в один тощо. Такі зміни не можуть бути довільними. Виникає принципове питання: на основі чого повинні змінюватись умови контрактів. Загальним принципом є фінансова еквівалентність зобов'язань.

Еквівалентними вважаються такі платежі, які після приведення до одного моменту часу, будуть рівними. Приведення здійснюється шляхом дисконтування (приведення до більш ранньої дати) або, навпаки шляхом нарощення суми платежу, якщо ця дата відноситься до майбутнього. Найпростішим проявом принципу еквівалентності є зв'язок теперішньої вартості $\boldsymbol{P}$ та нарощеної суми $\boldsymbol{S}$, що випливає з формул нарощення та дисконтування. Сума $\boldsymbol{P}$ еквівалентна $\boldsymbol{S}$ при прийнятій процентній ставці і методі її нарахування. Дві суми грошей $\boldsymbol{S_1}$ та $\boldsymbol{S_2}$, які виплачуються в різні моменти часу, вважаються еквівалентними, якщо їх поточні вартості (або нарощені суми), розраховані по одній і тій же ставці і на один і той же момент часу, однакові.

Приклад 3.1. Борг розміром 10000 грн. слід сплатити через 3 роки. Знайти еквівалентне значення боргу за ставкою 12% через: а) рік; б) 5 років.

Розв'язування. Нехай $\boldsymbol{S_1}$ – еквівалентна сума боргу для випадку а), $\boldsymbol{S_2}$ – для випадку б).

Зобразимо ситуацію графічно:

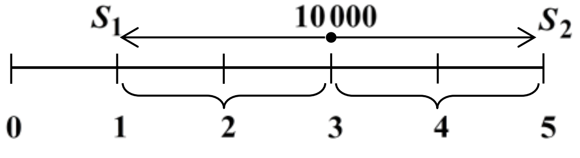


Рис. 3.1

Принцип фінансової еквівалентності застосовується при різних змінах умов виплат грошових сум: їх об'єднання, зміна термінів (дострокове погашення заборгованості або, навпаки пролонгація терміну) і т.п. Загальний метод розв'язування задач такого типу полягає в розробці так званого **рівняння еквівалентності** (*equation of value*), в якому сума замінюваних платежів, приведених до певного моменту часу, прирівнюється до суми платежів по новому зобов'язанню, приведених до тієї ж дати.

Приклад 3.2. Борг необхідно повернути двома платежами: 2000 грн. у кінці другого року та 4500 грн. у кінці п'ятого. Якщо проценти нараховуються за ставкою 15% річних то:
1) яка сума боргу сьогодні; 2) яка еквівалентна сума одного платежу у кінці четвертого року?

Р**озв'язування**. Діаграма виплат буде такою:

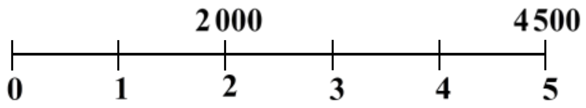


Рис. 3.2

На принципах еквівалентності базується порівняння різних за часом платежів.

Приклад 3.3. Маємо два зобов'язання при ринковій ставці 36% річних. Умови першого: сплатити 120 тис.грн. через 4 місяці; умови другого: сплатити 130 тис.грн. через 9 місяців. Чи можна вважати їх еквівалентними?

Розв'язування. Знайдемо теперішню вартість обох зобов'язань: для першого - PV=PV(36%;4/12;;-120000)=108309,93 (грн), а для другого - PV=PV(36%;9/12;;-130000)=103226,02 (грн).

Як бачимо, зобов’язання, що порівнюються не є еквівалентними при заданій ринковій ставці і тому не можуть замінити одне одного.

Порівняння платежів допускає використання деякої процентної ставки і, отже, його результат залежить від вибору її величини. Нехай порівнюються два платежі S_1 і S_2 з термінами t_1 і t_2, причому $t_1 < t_2$ і $S_1 < S_2$. Залежність їх теперішніх вартостей P_1, P_2 від величини процентної ставки r показана на рис.3.3:

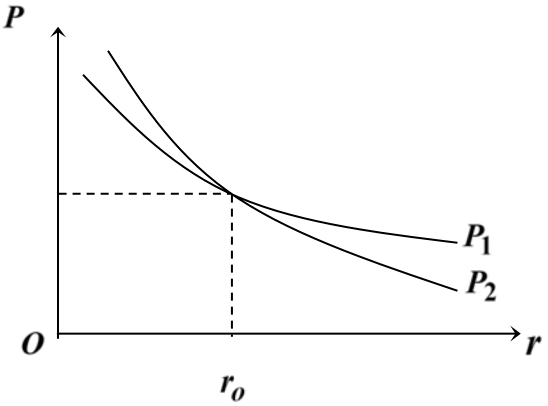


Рис. 3.3

При зростанні r величини теперішніх вартостей зменшуються. Для будь-якої ставки $r < r_0$ маємо $P_1 < P_2$, а для $r > r_0$, навпаки $P_1 > P_2$. Таким чином, результат порівняння залежить від величини ставки. При значенні $r = r_0$ маємо рівність $P_1 = P_2$. Таку ставку називають **критичною** або **бар’єрною**. На основі рівності $\frac{S_1}{1 + r_0 t_1} = \frac{S_2}{1 + r_0 t_2}$ знаходимо:

$$r_0 = \frac{S_2 - S_1}{S_1 t_2 - S_2 t_1}. \qquad (3.1)$$

Очевидно, що критичне значення r_0 може бути знайдене лише при умові $S_1 t_2 > S_2 t_1$.

Приклад 3.4. Визначити процентну ставку за умовами прикладу 3.3, у випадку еквівалентності зобов’язань.

Розв’язування. За формулою (3.1): r0=(130000-120000)/(120000*9/12-130000*4/12)= 0,2143 (21,43%).

Якщо дисконтування проводиться за складною ставкою, то критичну точку знайдемо з рівності:

$$S_1 \cdot (1+i_0)^{-n_1} = S_2 \cdot (1+i_0)^{-n_2},$$

де n_1, n_2 – число конверсійних періодів, i_0 – критична ставка для конверсійного періоду.

Звідси

$$ln(1+i_0) = \frac{ln(S_2/S_1)}{n_2-n_1} \iff i_0 = \left(S_2/S_1\right)^{1/(n_2-n_1)} - 1. \quad (3.2)$$

Якщо проценти нараховуються m разів на рік за номінальною ставкою r, то $i_0 = r/m$, а річна критична ставка $r_0 = m \cdot i_0$.

Приклад 3.5. Нехай в умовах прикладу 3.3 проценти нараховуються щомісячно. При якій номінальній процентній ставці зобов’язання будуть еквівалентними?

Розв’язування. За формулою (3.2) i0=(130/120)^1/(9-4)-1=0,0161 (1,61%). А річна номінальна критична ставка складатиме r0=36*1,61=57,96%.

Розділ 4. **Потоки платежів**

Види потоків платежів та їх основні параметри.

Сучасні фінансові операції часто передбачають не окремі чи разові платежі, а деяку їх послідовність в часі. Наприклад, платежі за закладними, періодичні надходження прибутків від інвестицій, виплати страхових внесків і т.п. Такого роду послідовність чи ряд платежів, називають потоком платежів (*flow*), а окремий елемент – членом потоку (*cash flow*). Потоки платежів можуть бути регулярними (розміри платежів сталі або відповідають встановленому правилу, за яким внески здійснюються через рівні проміжки) і нерегулярними.

Потік платежів, всі члени якого – додатні (надходження), часові проміжки між платежами однакові, називають ***фінансовою рентою***, або ***ануїтетом*** (*annuity*). Кожна рента описується або задається такими параметрами:

- ***член ренти (періодичний внесок)*** – розмір окремого платежу (позначається $\boldsymbol{R}$);
- ***період ренти*** – часовий проміжок між двома послідовними платежами (визначається кількістю $\boldsymbol{p}$ платежів на рік);
- ***термін ренти*** – час від початку першого періоду ренти до кінця останнього;
- ***процентна ставка*** – ставка, що використовується при нарощенні або дисконтуванні платежів, із яких складається рента (умовне позначення – $\boldsymbol{i}$ або $\boldsymbol{d}$).

В основу класифікації фінансових рент можна покласти ряд ознак, за якими ренти поділяються на різні види:

1) залежно від кількості виплат протягом року розрізняють ренти :

- річні ($\boldsymbol{p = 1}$);
- $\boldsymbol{p}$ – термінові ($\boldsymbol{p > 1}$);

2) за частотою платежів ренти поділяють на:

- дискретні (виплати вносяться періодично);
- неперервні (платежі вносяться дуже часто);

3) за кількістю нарахувань процентів розрізняють ренти:

- із щорічним нарахуванням ($\boldsymbol{m = 1}$);
- із нарахуванням $\boldsymbol{m}$ разів на рік ($\boldsymbol{m > 1}$);
- із неперервним нарахуванням ($\boldsymbol{m}$ - дуже велике);

4) за величиною членів ренти бувають:

- сталі (з рівними членами);
- змінні (з різними членами);

5) за кількістю членів розрізняються ренти:

- обмежені (зі скінченим числом членів);
- необмежені, вічні (з нескінченим числом членів);

6) за моментами виплати платежів в межах періоду ренти їх поділяють на:

- звичайні, постнумерандо (платежі здійснюються в кінці кожного періоду);
- зведені, пренумерандо (платежі вносяться на початку кожного періоду);

7) за збігом моментів нарахувань процентів та виплат членів ренти бувають:

- прості (кількість нарахувань процентів збігається з кількістю платежів);
- загальні (кількість нарахувань процентів не збігається з кількістю платежів);

8) за умовами оплати ренти поділяють на:

- умовні (число членів наперед невідоме);
- безумовні, правильні (обов’язково оплачуються);

9) за відповідністю початку терміну ренти і будь-якого фіксованого моменту часу, наприклад – початок дії контракту і час оцінки ренти:

- термінові (обидва вказані моменти збігаються);
- відкладені, відстрочені (початок терміну запізнюється відносно вказаного моменту);

Наприклад:

а) Періодичне рівномірне погашення за півріччя кредиту з фіксованим терміном погашення та піврічним нарахуванням процентів – це піврічна, безумовна, обмежена рента.

б) Абонентна плата за телефон: $\boldsymbol{p}$– термінова, вічна, постійна рента пренумерандо.

в) Виплати дивідендів за акціями – умовна, вічна рента постнумерандо.

Для характеристики фінансової ренти у фінансовому аналізі передбачається у більшості практичних випадків розрахунок двох узагальнюючих величин:

- нарощеної (загальної) суми ренти (*amount of cash flows*);
- теперішньої (поточної) вартості (*present value of cash flows*).

Нарощена (загальна) сума – це сума всіх членів ренти з нарахованими на них процентами на кінець її терміну, яку позначатимемо $\boldsymbol{FV}$ - *Future Value*

Теперішня (поточна) вартість **–** це сума всіх членів ренти¸ дисконтованих на початок її терміну, яку позначатимемо $\boldsymbol{PV}$ - *Present Value*.

На основі нарощеної та теперішньої величин ренти розробляються плани погашення боргів, порівнюються або незбитково замінюються умови контрактів, оцінюється ефективність інвестицій, обчислюється ринкова вартість облігацій, акцій.

Теперішня (поточна) та нарощена вартість простої ренти.

Розглянемо сталу, звичайну, просту ренту (ануїтет), яка містить $\boldsymbol{n}$ виплат. Кожний внесок $\boldsymbol{R}$ приносить прибуток у вигляді складних процентів. Будемо розглядати ренти, для яких період сплати та період нарахування процентів (конверсійний період) співпадають.

Сума періодичних внесків $\boldsymbol{R}$ плюс проценти на них складуть загальну суму $\boldsymbol{FV}$. Побудуємо спочатку часову схему виплат (рис. 4.1):

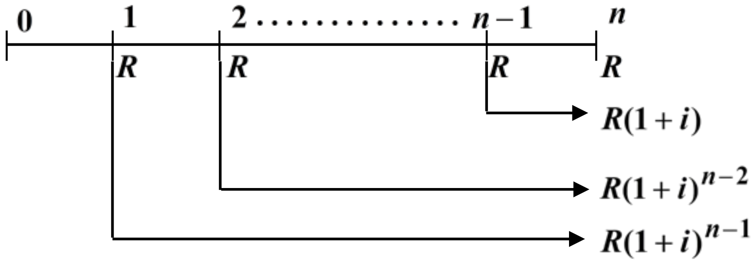


Рис. 4.1

Складемо рівняння еквівалентності на момент останньої виплати:

$$FV = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}$$

або $$FV = R \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k},$$

де i – ставка процентів за конверсійний період (період ренти), n – кількість конверсійних періодів. Якщо скористатись формулою суми перших n членів геометричної прогресії з першим членом $b_1 = R$ і знаменником $q = (1+i)$, то

$$FV = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (4.1)$$

Величина $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} = \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k}$ позначається $FVIFA(n;i)$ - *Future Value Interest Factor Annuities* і називається ***множником нарощення звичайної ренти***. У розрахунках використовують відповідну функцію пакету Excel.

Приклад 4.1. Пан **В**. вносить по 200 грн. в кінці кожного кварталу у пенсійний фонд. Внески приносять прибуток 8% річних при щоквартальному нарахуванні. Знайти суму вкладу через 10 років і величину прибутку, який буде накопичено за 10 років.

Розв'язування. Застосуємо відповідну функцію пакету Excel для знаходження суми вкладу через 10 років:

FV= FV(8%/4;10*4;-200)=12080,4 (грн). За 10 років пан В. внесе 10*800=8000 (грн). Отже, величина накопиченого за 10 років прибутку становитиме 12080,4-8000=4080,4 (грн).

Поточна вартість ($\boldsymbol{PV}$) простої ренти – це сума поточних вартостей усіх періодичних внесків $\boldsymbol{R}$. Часова схема виплат показана на рис.4.2.

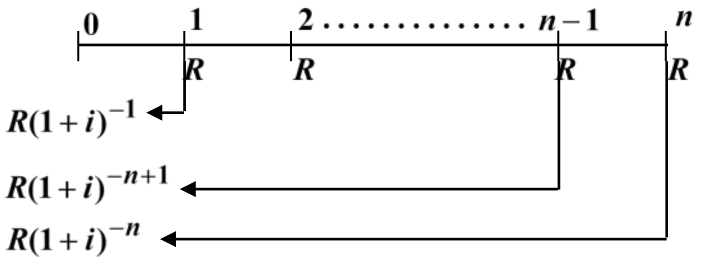


Рис. 4.2

$$\boldsymbol{PV = R(1+i)^{-n} + R(1+i)^{-(n-1)} + \cdots + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-1} =}$$

$$\boldsymbol{= R \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k} = \frac{R + R(1+i) + \cdots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n}} =}$$

$$\boldsymbol{= R \cdot \frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n}} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}.$$

Звідси остаточно отримаємо:

$$\boldsymbol{PV = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}. \qquad (4.2)$$

Позначимо через $\boldsymbol{PVIFA(n;i) = \frac{1-(1+i)^{n}}{i} = \sum_{k=1}^{n}(1+i)^{-k}}$ - число, яке називається ***дисконтним, зведеним множником звичайної ренти*** ($\boldsymbol{PVIFA}$ – *Present Value Interest Factor Annuities*).

Зазначимо, що поточну вартість ренти $\boldsymbol{PV}$ можна також визначити із умови еквівалентності, як теперішню вартість нарощеної суми $\boldsymbol{FV}$:

$$PV = FV \cdot (1+i)^{-n}.$$

Приклад 4.2. Як плату за навчання сина пан Н вноситиме по 8000 грн. в кінці кожного семестру (півріччя) протягом 4 років. Яку суму мусить інвестувати пан Н для такої оплати навчання зараз, якщо гроші можуть приносити прибуток 8% річних при піврічному нарахуванні процентів.

Розв'язування. За навчання сина у бакалавріаті пан Н повинен створити фонд (напр., депозитний рахунок у банку) із відповідними умовами (щопівроку отримувати по 8000 грн для сплати навчання). Знайдемо параметри такого фонду за допомогою відповідної фінансової функції:
PV=PV(8%/2;4*2;8000)=-53861,96 (грн). Отже, пан Н повинен для створення навчального фонду інвестувати на початку першого навчального року 53861,96 грн.

Зведені прості ренти.

На відміну від звичайних рент, виплата у зведених рентах відбувається на початку кожного періоду (пренумерандо). Прикладами зведеної ренти є земельна рента, рахунок у банку, премії по страхуванню.

Як і раніше, PV – поточна вартість, FV – нарощена (майбутня) сума зведеної ренти, R – величина періодичних внесків, i – процентна ставка за період ренти. Є два методи обчислення теперішньої (поточної) та нарощеної сум.

Метод 1. Поряд зі зведеною рентою розглянемо звичайну ренту з тією ж самою множиною платежів, що й у зведеної, яка починається на період раніше. Оскільки множини виплат обох рент однакові, тоді відповідні їм поточні значення еквівалентні. Отже, ми можемо записати рівність:

$$PV \cdot (1+i)^{-1} = R \cdot PVIFA(n;i).$$

Звідси теперішня сума зведеної ренти:

$$PV = (1+i) \cdot R \cdot PVIFA(n;i). \qquad (4.3)$$

Нарощені суми розглянутих рент також еквівалентні. Тому

$$FV = (1+i)\cdot R\cdot FVIFA(n;i). \qquad (4.4)$$

Метод 2. У цьому методі теперішня сума зведеної ренти розглядається як сума платежу R у початковий момент часу та поточного значення звичайної ренти з платежами розміром R, терміном $(n-1)$ період. Таким чином:

$$PV = R + R\cdot PVIFA(n-1;i) = R\cdot(1+PVIFA(n-1;i)). \qquad (4.3')$$

Тепер розглянемо ренту, яка складається з $(n+1)$ виплат розміром R і початок якої є на один період раніше, ніж зведеної ренти. Оскільки розглянута рента має n спільних виплат з нашою зведеною рентою, тоді з рівняння еквівалентності випливає таке співвідношення між нарощеними сумами рент: $FV + R = R\cdot FVIFA(n+1;i)$. Звідси отримуємо:

$$FV = R\cdot FVIFA(n+1;i) - R = R\cdot\left(FVIFA(n+1;i)-1\right). \qquad (4.4')$$

Порівнюючи отримані результати, можна довести, що мають місце такі співвідношення для множників нарощення та дискотування:

$$(1+i)\cdot PVIFA(n;i) = 1 + PVIFA(n-1;i), \qquad (4.5)$$

$$(1+i)\cdot FVIFA(n;i) = FVIFA(n+1;i) - 1. \qquad (4.6)$$

Приклад 4.3. Знайти теперішню та нарощену суму грошей зведеної ренти з виплатами розміром 500 грн. на початок кожного кварталу при щоквартальному нарахуванні процентів за ставкою 8% річних. Термін ренти – 4 роки.

Розв'язування. Використаємо відповідні фінансові функції:

PV=PV(8%/4;4*4;-500;;1)=6924,63 (грн);

FV=FV(8%/4;4*4;-500;;1)=9506,04 (грн).

Відкладені прості ренти.

Згідно з класифікацією, якщо рента починається не в початковий момент часу, а в деякий момент в майбутньому, то вона називається ***відкладеною рентою***. Відкладену ренту завжди вважають звичайною (внески здійснюються в кінці періодів). Час, який пройшов від теперішнього моменту, до початку ренти, називається ***періодом відтермінування***. Так, період відтермінування ренти з виплатами кожних півроку і першою виплатою через 6 років дорівнює 5,5 років. Поточну та нарощену суми грошей відкладеної ренти знаходимо з рівняння еквівалентності аналогічним чином, як ми робили це раніше при знаходженні аналогічних характеристик зведеної ренти.

Приклад 4.4. Обчислити теперішню вартість та нарощену суму грошей відкладеної ренти з виплатами 60000 грн. у кінці кожного півріччя, якщо перша виплата здійснюватиметься через 3,5 року, а остання – через 6 років. Проценти нараховуються за ставкою 14% піврічних.

Розв'язування. Покажемо на схемі (рис.4.3) часові виплати

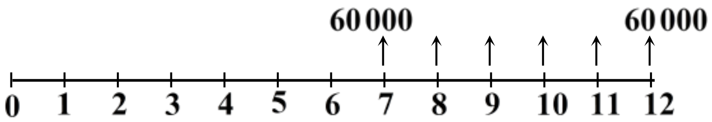


Рис. 4.3

FV=FV(14%/2;3*2;-60000)=429197,44 (грн);

PV=190 568,80 (грн).

Таким чином, застосовуючи перший метод до відкладеної на k періодів простої ренти, отримаємо, що теперішня вартість задовольняє рівність:

$$PV = PVIF(k;i) \cdot R \cdot PVIFA(n;i). \qquad (4.7)$$

За другим методом отримаємо, що

$$PV = R \cdot \left(PVIFA(n+k;i) - PVIF(k;i)\right). \qquad (4.8)$$

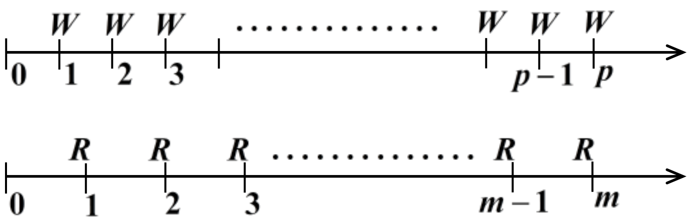
Порівнявши праві частини (4.7) та (4.8), дістаємо:

$$PVIF(n+k;i) - PVIFA(k;i) = (1+i)^{-k} \cdot PVIFA(n;i).$$

Загальні ренти.

Загальною рентою за класифікацією називається рента, період якої (інтервал між послідовними внесками) не збігається з періодом нарахувань процентів (конверсійним періодом).

Існує декілька способів розрахунку характеристик загальної ренти. Основне завдання теорії загальних рент – навчитись зводити загальну ренту до еквівалентної їй простої ренти. Побудуємо дві схеми виплат загальної та простої рент:



$\boldsymbol{p}$ виплат на рік

$\boldsymbol{m}$ виплат на рік

Тут: $\boldsymbol{W}$ – величина внеску загальної ренти;

$\boldsymbol{R}$ – величина внеску простої ренти, яка еквівалентна загальній;

$\boldsymbol{p}$ – кількість грошових виплат на рік загальної ренти;

$\boldsymbol{m}$ –кількість періодів нарахувань протягом року;

$\boldsymbol{i}$ – процентна ставка за період нарахування.

Проста та загальна ренти будуть еквівалентними, якщо виконуються такі умови:

а) процентні ставки за періоди нарахувань еквівалентні;

б) еквівалентні заданим рентам значення, які відповідають одному і тому ж моменту часу, повинні бути однакові.

Якщо $\boldsymbol{j}$ – процентна ставка, яка відповідає періоду загальної ренти, то з умови еквівалентності процентних ставок маємо:

$$\boldsymbol{(1+i)^m = (1+j)^p}. \qquad (4.9)$$

Використавши умову б) і порівнявши нарощені суми грошей за рік обох рент, отримаємо:

$$\boldsymbol{R \cdot FVIFA(m;i) = W \cdot FVIFA(p;j)}. \qquad (4.10)$$

Розписавши множники нарощення рент, маємо:

$$R \cdot \frac{(1+i)^m - 1}{i} = W \cdot \frac{(1+j)^p - 1}{j}.$$

Звідси, врахувавши (4.9), отримаємо:

$$\frac{R}{i} = \frac{W}{j}. \qquad (4.11)$$

З формул (4.11) та (4.9) просто отримати наступну формулу для виплат простої ренти:

$$R = W \cdot \frac{i}{(1+i)^{m/p} - 1} = \frac{W}{FVIFA(m/p;i)}. \qquad (4.12)$$

Для обчислення поточної суми загальної ренти ми спочатку перетворимо її в еквівалентну просту ренту, а потім знайдемо поточне значення нової ренти за формулою:

$$PV = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (4.13)$$

До цієї формули підставимо замість R його значення з формули (4.12):

$$PV = W \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{m/p} - 1} \text{ або } PV = \frac{W \cdot PVIFA(n;i)}{FVIFA(m/p;i)}. \qquad (4.14)$$

де W – величина внеску загальної ренти;

n – термін ренти в періодах нарахувань процентів;

p – кількість грошових виплат на рік загальної ренти;

m – кількість періодів нарахувань протягом року;

i – процентна ставка за період нарахування (конверсійний період).

На практиці, якщо r –річна процентна ставка, t – термін ренти в роках, то $n = t \cdot m, \quad i = r/m$.

Аналогічно можна вивести формулу для знаходження нарощеної суми $\boldsymbol{FV}$ загальної ренти:

$$\boldsymbol{FV = W \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{m/p}-1}} \text{ або } \boldsymbol{FV = \frac{W \cdot FVIFA(n;i)}{FVIFA(m/p;i)}}. \quad (4.15)$$

Приклад 4.5 Обчислити майбутню та поточну вартість ренти з семи виплат по 1000 грн. кожна, які зроблено в кінці кожного кварталу зі ставкою процента 12% річних при щомісячному нарахуванні.

Розв'язування. Побудувавши діаграму виплат, дістанемо: FV=FV(3%;7;-1000)=7662,46 (грн); PV=6230,28 (грн).

У випадку, коли виплати загальної ренти здійснюються на початку періоду, то у формулах (4.14), (4.15) для обчислення теперішньої та майбутньої вартості з'явиться додатковий множник нарощення $\boldsymbol{1+j=(1+i)^{m/p}}$ за період ренти, тобто

$$\boldsymbol{PV = W \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{m/p}-1} \cdot (1+i)^{m/p}},$$

$$\boldsymbol{FV = W \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{m/p}-1} \cdot (1+i)^{m/p}}.$$

Важливою для практики є рента з виплатами в середині періодів. Наприклад, у випадках, коли надходження від виробничих інвестицій розподіляються більш–менш рівномірно, застосування рент пренумерандо або постнумерандо при визначенні характеристик таких потоків може призвести до значних помилок. В таких ситуаціях для зменшення похибки рекомендується суми надходжень за період віднести до середини періодів. Нарощені суми і теперішні вартості таких рент знаходимо шляхом множення відповідних узагальнюючих характеристик рент постнумерандо на множник нарощення за половину періоду. Так, для теперішніх вартостей маємо такі співвідношення для простої та загальної рент відповідно:

$$PV_{1/2} = PV \cdot (1+i)^{1/2}, \quad PV_{1/2} = PV \cdot (1+i)^{m/2p}.$$

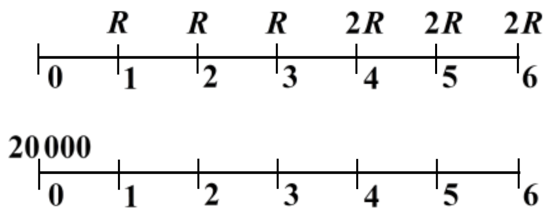
Змінні ренти.

В практиці зустрічаються випадки, коли розміри членів потоку платежів змінюються з часом. Такі зміни можуть бути пов'язані з деякими обставинами об'єктивного характеру (наприклад, умовами виробництва та збуту продукції, пільговими умовами на ранніх стадіях погашення заборгованості і т.п.). При сталих періодах внесків такий потік платежів представляє ***змінну ренту***.

Розглянемо деякі види змінних рент, причому менш детально, ніж сталі ренти. Основну увагу звернемо на принципові залежності, знання яких дозволяє знайти розрахункові формули для будь-яких конкретних видів змінних рент.

Приклад 4.6 Фермер сплачує покупку нового автомобіля, ціна якого готівкою 20000 грн., за допомогою змінної ренти. Протягом перших 3-ох років він вноситиме потрібну суму в кінці кожного року, а протягом наступних 3-ох років його річний внесок подвоїться порівняно з початковим. Якщо ставка процента буде незмінною і складатиме 12% при щорічному нарахуванні, то якими будуть щорічні внески?

Розв'язування. Побудуємо діаграму виплат:



При розв'язуванні потрібно визначити розмір щорічних платежів R та 2R. Скористуємось опцією «Підбір параметра» у надбудові «Аналіз якщо» та функцією NPV. Для цього в комірці J7 встановимо значення R=1000 (грн) і вимагатимемо, щоб NPV даної інвестиції розміром у 20000 (грн) стала рівною 0 (тобто, вартість авто була повністю погашена). Підбір параметра дає значення R=3435,85 (грн): NPV(12%;20000;-J4;-J4;-J4;-2*J4;-2*J4;-2*J4)=0.

Якщо періодичні виплати ренти мають сталий приріст $\boldsymbol{b}$, тобто утворюють зростаючу арифметичну прогресію, то така рента називається зростаючою. Послідовність виплат такої ренти терміном $\boldsymbol{n}$ має вигляд:

$$\boldsymbol{R, R+b, R+2b, \dots, R+(n-1)b}.$$

Поточна вартість даного потоку платежів, якщо вони здійснюються в кінці періоду, дорівнює:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PV} &= \boldsymbol{R(1+i)^{-1} + (R+b)(1+i)^{-2} +} \\ &\boldsymbol{+ \dots + [R+(n-1)b](1+i)^{-n}}\end{aligned} \qquad (4.16)$$

Помножимо цю рівність на $\boldsymbol{(1+i)}$ і віднімемо від обох частин отриманого виразу відповідні частини (4.16). Отримаємо:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i \cdot PV = R + b(1+i)^{-1} + b(1+i)^{-2} + \cdots + b(1+i)^{-(n-1)} -} \\ &\boldsymbol{- [R+(n-1)b](1+i)^{-n} =} \\ &\boldsymbol{= R \cdot \left(1-(1+i)^{-n}\right) + b \cdot \sum_{k=1}^{n-1}(1+i)^{-k} - nb \cdot (1+i)^{-n} + b \cdot (1+i)^{-n}}\end{aligned}$$

.

Звідки $\boldsymbol{PV = R \cdot PVIFA(n;i) + b \cdot \dfrac{PVIFA(n;i)}{i} - \dfrac{nb \cdot (1+i)^{-n}}{i}}$,

або

$$\boldsymbol{PV = \left(R + \frac{b}{i}\right) \cdot PVIFA(n;i) - \frac{nb \cdot (1+i)^{-n}}{i}}. \qquad (4.17)$$

Нарощену суму легко отримати, помноживши поточну вартість на $(1+i)^n$:

$$FV = \left(R + \frac{b}{i} \right) \cdot FVIFA(n;i) - \frac{nb}{i}. \qquad (4.18)$$

Визначимо вплив на поточну вартість ренти абсолютного приросту платежів. Для цього перетворимо (4.17):

$$PV = R \cdot PVIFA(n;i) + \frac{PVIFA(n;i) - n \cdot (1+i)^{-n}}{i} \cdot b. \qquad (4.19)$$

Дана формула показує, що величина поточної вартості PV лінійно залежить від b. Аналогічно на основі (4.18) отримаємо лінійну залежність для нарощеної суми FV:

$$FV = R \cdot FVIFA(n;i) + \frac{FVIFA(n;i) - n}{i} \cdot b. \qquad (4.20)$$

Формули (4.17) та (4.18) отримані для звичайної ренти. Нарощені суми та теперішні вартості для зведених рент знаходимо шляхом множення відповідних узагальнюючих характеристик рент постнумерандо на множник нарощення за конверсійний період $(1+i)$.

Приклад 4.7 Очікується, що реалізація продукції буде збільшуватись на протязі двох років – щоквартально на 25000 грн. Початкова реалізація за квартал 500000 грн. Визначити нарощену суму на кінець терміну при умові, що гроші за продукцію надходять в кінці кварталу, а проценти нараховуються щоквартально за ставкою 20% річних.

Розв'язування. Рішення оформимо у вигляді таблиці:

квартали	реалізація	FV
1	50000	50 000,00 ₽
2	75000	153 750,00 ₽
3	100000	315 250,00 ₽
4	125000	538 765,63 ₽
5	150000	828 844,69 ₽
6	175000	1 190 334,74 ₽
7	200000	1 628 401,69 ₽
8	225000	2 148 549,50 ₽
загальна	сума	6 853 896,24 ₽

Розглянемо також випадок, коли виплати змінюють свої розміри із сталим відносним приростом, тобто утворюють геометричну прогресію. Потік таких платежів складається з членів $R, Rq, Rq^2, \ldots, Rq^{n-1}$ (q – знаменник прогресії, або темп росту).

Нехай розглядуваний ряд представляє ренту постнумерандо. Поточна вартість такого потоку платежів дорівнює сумі дисконтованих виплат:

$$PV = R(1+i)^{-1} + Rq(1+i)^{-2} + \cdots + Rq^{n-1}(1+i)^{-n}$$

Отримали геометричну прогресію з першим членом $R(1+i)^{-1}$ і знаменником $\frac{q}{1+i}$. Сума членів цієї прогресії дорівнює:

$$PV = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{q}{1+i} - 1} = R \cdot \frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{q - (1+i)}. \qquad (4.21)$$

Якщо $q = 1 + k$, де k – темп приросту виплат, то після нескладних перетворень отримаємо:

$$PV = R \cdot \frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i - k}. \qquad (4.22)$$

Нарощена сума ренти знаходиться як

$$FV = PV \cdot (1+i)^n = R \cdot \frac{(1+i)^n - (1+k)^n}{i - k}. \qquad (4.23)$$

Приклад 4.8 Дещо змінимо умови **прикладу 4.7**. Нехай члени ренти збільшуються щоквартально на 8%**.** Визначити нарощену суму на кінець терміну.

Розв'язування. Рішення оформимо у вигляді таблиці:

квартали	реалізація	FV
1	50000	50 000,00 ₽
2	54000	110 700,00 ₽
3	58320	183 853,80 ₽
4	62985,6	271 475,81 ₽
5	68024,45	375 878,02 ₽
6	73466,4	499 712,07 ₽
7	79343,72	646 017,21 ₽
8	85691,21	818 274,73 ₽
загальна	сума	2 955 911,63 ₽

Вічні (нескінченні) ренти.

За класифікацією рента, грошові виплати якої необмежені терміном, називається нескінченною (вічною). На практиці іноді стикаються з випадками, коли є сенс перейти до такого поняття, наприклад, коли термін потоку платежів дуже великий і конкретно не обумовлюється (в зарубіжній практиці до нескінченних відносять ренти з терміном 50 років і більше). Прикладом може бути послідовність періодичних виплат процентів на інвестований капітал.

Очевидно, що нарощена сума вічної ренти зростає до нескінченності. Поточна ж вартість вічної ренти є скінчена величина, яка визначається досить просто. Нехай, як і раніше, $\boldsymbol{PV}$ – поточна вартість суми грошей звичайної простої нескінченної ренти, $\boldsymbol{i}$ – процентна ставка, яка відповідає періоду виплат, а $\boldsymbol{R}$ – грошова сума виплат за ставкою $\boldsymbol{i}$. Оскільки сума грошей $\boldsymbol{PV}$ в початковий момент часу забезпечує виплати процентів у кінці кожного періоду доти, доки сума грошей залишиться інвестованою, виконується рівність:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{PV} \cdot \boldsymbol{i}, \quad \text{або} \quad \boldsymbol{PV} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{i}}.$$

Оскільки поточна сума грошей $\boldsymbol{PV}$ еквівалентна послідовності виплат за процентною ставкою $\boldsymbol{i}$, її можна знайти із наступних міркувань. Знайдемо поточне значення звичайної ренти терміном $\boldsymbol{n}$:

$$PV_n = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Очевидно поточне значення PV нескінченної ренти дорівнює граничному значенню послідовності PV_n при $n \to \infty$. Отже

$$PV = \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}. \qquad (4.24)$$

Таким чином

$$R = PV \cdot i, \qquad (4.25)$$

тобто член вічної ренти дорівнює проценту від її капіталізованої вартості.

Приклад 4.9 Знайти суму грошей для заснування фонду допомоги розвитку малого бізнесу, який забезпечував би виплати 150000 грн. у кінці кожного року, якщо гроші можуть бути інвестовані за ефективною ставкою 12% річних.

Розв'язування. За формулою (4.24): PV=150000/0,12=1250000 (грн).

У багатьох випадках період виплати не збігається із періодом нарахування процентів. В такому випадку нескінченна рента є загальною нескінченною рентою. Зв'язок між виплатами загальної та простої нескінченної рент описується формулою (4.12).

$$R = W \cdot \frac{i}{(1+i)^{m/p} - 1},$$

де

p – кількість виплат загальної ренти за рік;

m – кількість нарахувань процентів за рік.

Поточне значення такої ренти можна обчислити за допомогою перетворення її в просту ренту та використання формули (4.25).

Приклад 4.10 Фірма орендує житло для співробітника за 1000 грн. в місяць. Яка викупна ціна оренди, якщо проценти нараховуються кожних півроку за ставкою 12% річних?

Розв'язування. За півроку фірма платить за житло 6000 грн. Якщо всі параметри звести до піврічної ренти, то:

PV=6000/0,06=100000 (грн) – викупна ціна оренди.

Визначення параметрів сталих рент постнумерандо.

Як відомо, стала рента описується набором основних параметрів:

$\boldsymbol{R}$ – величина внеску,

$\boldsymbol{n}$ – кількість внесків,

$\boldsymbol{i}$ – процентна ставка за конверсійний період;

та додаткових параметрів:

$\boldsymbol{p}$ – кількість внесків за рік,

$\boldsymbol{m}$ – кількість нарахувань процентів за рік.

Проте при розробці контрактів і умов фінансових операцій можуть виникнути випадки, коли задається одна з двох узагальнюючих характеристик – $\boldsymbol{FV}$ (нарощена сума) або $\boldsymbol{PV}$ (поточна вартість), а необхідно визначити параметр ренти, значення якого невідоме.

а) *Визначення розміру члена ренти.*

Вихідні умови: задається одна з двох узагальнюючих характеристик – $\boldsymbol{FV}$ (нарощена сума) або $\boldsymbol{PV}$ (поточна вартість) і набір параметрів, крім $\boldsymbol{R}$ (або $\boldsymbol{W}$).

Приклад 4.11. Відомо, що принц Чарльз при розлученні з принцесою Діаною виплатив останній 17 млн. ф. ст. Як повідомлялось, ця сума була визначена в розрахунку на те, що принцеса проживе 50 років. Вказану суму можна розглядати як сучасну вартість сталої ренти. Визначити розмір члена цієї ренти при умові, що процентна ставка 10% річних, а виплати проводяться щомісячно.

Розв’язування. Скористуємось опцією «Підбір параметра» у надбудові «Аналіз якщо» та функцією PV. Для цього в комірці J4 встановимо значення R=100 (ф. ст) і вимагатимемо, щоб PV даної інвестиції з визначеними параметрами стала рівною 17000000 (ф. ст). Підбір параметра дає значення R=142647,9422 (ф. ст). Отже, принцеса протягом 50 років щомісяця отримуватиме 142647,9422 (ф. ст).

б) *Розрахунок терміну ренти.*

При розробці умов контракту іноді виникає необхідність у визначенні терміну ренти (а разом з ним і числа її членів). Розв’язуючи рівняння, що визначають $\boldsymbol{FV}$ або $\boldsymbol{PV}$, відносно $\boldsymbol{n}$, отримаємо шукані величини.

Так для річної ренти постнумерандо із щорічним нарахуванням процентів знаходимо:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{FV} \cdot \boldsymbol{i}}{\boldsymbol{R}} + \mathbf{1}\right)}{\boldsymbol{ln}(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{ln}\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{PV} \cdot \boldsymbol{i}}{\boldsymbol{R}}\right)^{-\mathbf{1}}}{\boldsymbol{ln}(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})}. \qquad (4.26)$$

Аналогічно визначаються терміни і для інших видів рент. При обчисленні терміну ренти слід ураховувати наступні моменти:

1. Розрахункові значення терміну будуть, як правило, дробові. У цих випадках результат округляється до найближчого цілого числа років (періодів).
2. Якщо округлення знайденого терміну проводиться до меншого цілого числа, то нарощена сума чи поточна вартість з таким терміном буде меншою заданих розмірів. Виникає необхідність у відповідній компенсації. Наприклад, якщо мова йде про погашення заборгованості шляхом виплат сталої ренти, то компенсація може бути здійснена в кінці або на початку терміну відповідним платежем.

Окрім сказаного, якщо PV – поточна величина боргу і він погашається за допомогою сталої ренти, то слід пам'ятати, що борг може бути погашеним за скінчене число років лише при умові $R > PV \cdot i$. Якщо умови ренти такі, що $R = PV \cdot i$, то $n \to \infty$, тобто рента буде вічною і борг практично неможливо погасити.

Приклад 4.12. Підприємство отримало кредит на 500 тис. грн. Визначити термін погашення боргу, якщо борг амортизується щомісячними виплатами по 25000 грн., на які щомісячно нараховуються проценти за ставкою 6% річних. Вказати розмір останнього внеску, якщо необхідна компенсація при округленні терміну здійснюватиметься в кінці терміну ренти.

Розв'язування. За другою із формул (4.26):
n=21,12474 (місяців) . Якщо здійснити округлення до 21 місяця, то дістанемо: PV=PV(0,005;21;-25000) =497199,48 (грн). Отже, розмір останнього 21 внеску становитиме 25000 (грн) +компенсація 2800,52 (грн).

Зауваження. Крім компенсації додатковим внеском можлива компенсація зміною величини окремого внеску.

в) *Визначення розміру процентної ставки.*

Необхідність у визначенні величини процентної ставки виникає кожен раз, коли визначається ефективність (дохідність, прибутковість) відповідної фінансово-банківської або комерційної операції. Відмітимо, що розрахунок процентної ставки по іншим параметрам ренти не зовсім простий. У найпростішому випадку виникає необхідність розв'язання рівняння (4.1) або (4.2):

$$FV = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ або } PV = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Неважко впевнитись, що дані рівняння відносно i можна розв'язати лише наближено. Для отримання шуканої величини застосовується або лінійна інтерполяція, або наближений ітераційним метод. В сучасних умовах для визначення ставки по заданим параметрам сталої ренти зручно скористатись пакетом *Excel*. В розділі "Фінансові функції" є функція, яка визначає таку ставку. Проте ця програма не дозволяє визначити ставку для змінних та нескінченних рент, тому для загального знайомства з методами визначення процентних ставок розглянемо метод лінійної інтерполяції.

По заданим величинам $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{FV}$, або $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{PV}$ знаходимо значення коефіцієнтів нарощення або приведення ренти:

$$\boldsymbol{FVIFA(n;i)=\frac{FV}{R};\quad PVIFA(n;i)=\frac{PV}{R}}.$$

Для оцінки $\boldsymbol{i}$ застосовується наступна інтерполяційна формула:

$$\frac{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i_H}}{\boldsymbol{i_B}-\boldsymbol{i_H}}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a_H}}{\boldsymbol{a_B}-\boldsymbol{a_H}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{i}=\boldsymbol{i_H}+\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a_H}}{\boldsymbol{a_B}-\boldsymbol{a_H}}\left(\boldsymbol{i_B}-\boldsymbol{i_H}\right), \qquad (4.27)$$

де $\boldsymbol{a_B}$, $\boldsymbol{a_H}$ – табличні значення коефіцієнтів нарощення або приведення відповідно для верхнього та нижнього рівня ставок $\boldsymbol{i_B}$ та $\boldsymbol{i_H}$; $\boldsymbol{a}$ – значення коефіцієнту нарощення чи приведення, для якого визначається розмір ставки. При знаходженні $\boldsymbol{a_B}$, $\boldsymbol{a_H}$ можливе використання Excel. Для заданого $\boldsymbol{n}$ визначається функція $\boldsymbol{a=PVIFA(i)}$ або $\boldsymbol{a=FVIFA(i)}$. Із заданим кроком знаходяться відповідні значення. Достатньо вибрати два значення $\boldsymbol{i_B}$ та $\boldsymbol{i_H}$, для яких відповідні значення $\boldsymbol{a_B}$, $\boldsymbol{a_H}$ більші та менші коефіцієнта $\boldsymbol{a}$.

Приклад 4.13. Припустимо, що підприємець шляхом щомісячних внесків по 2000 грн. на протязі двох років бажає накопичити 60000 грн. Якою повинна бути річна процентна ставка, щоб забезпечити таке накопичення, якщо проценти на внески нараховуються щомісячно?

Розв'язування. Скористуємось опцією «Підбір параметра» у надбудові «Аналіз якщо» та функцією FV. Для цього в комірці J4 встановимо значення i=0,01 (1%) і вимагатимемо, щоб FV даної інвестиції з визначеними параметрами стала рівною 60000 (грн). Підбір параметра дає значення i=0,01885 (1,88%). Отже, річна ставка становитиме 22,62%.

Зауваження. Якщо проценти на внески нараховуються один раз на рік, то відповідну процентну ставку знайдемо з рівняння:

$$FV = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{m/p} - 1}.$$

Коефіцієнт нарощення $a = \frac{FV}{R} = 30$. При $m = 1; \quad p = 12; \quad n = 2$ підберемо відповідні значення $a_B, \quad a_H$ для функції $a(i) = \frac{(1+i)^2 - 1}{(1+i)^{1/12} - 1}$.

Наприклад: $a_B = a(0{,}3) = 31{,}21, \quad a_H = a(0{,}2) = 28{,}74$. За формулою (4.27) дістаємо:

$$i = 0{,}2 + \frac{30 - 28{,}74}{31{,}21 - 28{,}74}\left(0{,}03 - 0{,}02\right) = 0{,}251 \quad (25{,}1\%).$$

У даному випадку i - річна процентна ставка.

Розділ 5. **Застосування теорії рент у фінансовому аналізі**

Амортизація.

Жодне підприємство, якщо воно прагне розвиватись, не може обходитись без довготермінових позик. Ці позики підприємство бере в банку або в інших підприємств. Розрахунки між підприємствами можуть мати різний характер, оскільки погашати свій борг підприємство–боржник може у вигляді готової продукції або іншого бартеру. Якщо ж борг береться в банку, то його слід гасити тільки грошовими безготівковими виплатами. Перш ніж взяти довготерміновий кредит, підприємство повинно зважити свої можливості повернути його, тобто прорахувати свої зобов'язання при поверненні боргу.

Розробка плану погашення позики полягає у складанні графіка періодичних виплат боржника. Такі витрати боржника називають витратами по обслуговуванню боргу (*debt service*) або, більш коротко, терміновими виплатами. ***Термінові виплати*** **–** це разові суми погашення, які охоплюють поточні процентні платежі разом із сумами, які призначено для погашення основного боргу.

Методи визначення розміру термінових виплат суттєво залежать від умов погашення боргу, які включають: термін позики, тривалість пільгового періоду (*grace period*), рівень і вид процентної ставки, методи виплати процентів і способи погашення основної суми боргу.

Амортизація означає погашення боргу (основної суми боргу та процентів на неї) послідовністю періодичних виплат. У більшості випадків періодичні виплати є рівними. Проценти при амортизації нараховуються на невиплачений залишок основної суми боргу. Амортизацію будемо зображати у вигляді простої звичайної ренти.

Приклад 5.1. Дехто взяв у позику 7000 грн. Позика плюс проценти на неї повинні бути сплачені рівними внесками на погашення в кінці кожного кварталу протягом двох років. Ставка процента 16% при щоквартальному нарахуванні. Треба визначити щоквартальний внесок на погашення боргу.

Розв’язування. Часова схема виплат має вигляд:

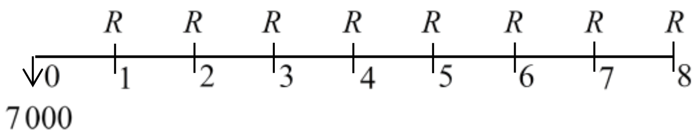


Рис. 5.1

Очевидно, що невиплачений залишок на початку ренти збігається з основною сумою боргу $\boldsymbol{PV}$.

Амортизацію позики (або погашення боргу) рівними внесками можна проілюструвати за допомогою графіка амортизації:

період	сума позики на початок періоду	загальна сума платежу	платежі за процентами	сума основного платежу за позикою	сума позики на кінець періоду
0	7000				7280
1	7280	1 039,69 ₽	280,00 ₽	759,69 ₽	6 489,92 ₽
2	6 489,92 ₽	1 039,69 ₽	249,61 ₽	790,08 ₽	5 668,23 ₽
3	5 668,23 ₽	1 039,69 ₽	218,01 ₽	821,69 ₽	4 813,68 ₽
4	4 813,68 ₽	1 039,69 ₽	185,14 ₽	854,55 ₽	3 924,94 ₽
5	3 924,94 ₽	1 039,69 ₽	150,96 ₽	888,74 ₽	3 000,66 ₽
6	3 000,66 ₽	1 039,69 ₽	115,41 ₽	924,28 ₽	2 039,40 ₽
7	2 039,40 ₽	1 039,69 ₽	78,44 ₽	961,26 ₽	1 039,69 ₽
8	1 039,69 ₽	1 039,69 ₽	39,99 ₽	999,71 ₽	-0,00 ₽
разом		8 317,56 ₽	1 317,56 ₽	7 000,00 ₽	

Способи обчислення невиплаченого залишку основної суми боргу.

Досить часто виникає необхідність у визначенні невиплаченого залишку боргу після фіксованого числа виплат. Нехай, як і раніше:

$\boldsymbol{PV}$ – основна сума боргу, $\boldsymbol{R}$ – величина виплат, $\boldsymbol{n}$ – число виплат, $\boldsymbol{i}$ – процентна ставка за період (припускається, що період виплат і період нарахування процентів співпадають), $\boldsymbol{PV_k}$ – невиплачений залишок основної суми $\boldsymbol{PV}$ після $\boldsymbol{k}$ виплат.

Побудуємо часову діаграму виплат (рис. 5.2):

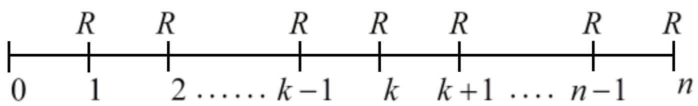


Рис. 5.2

У кінці кожного періоду на невиплачений залишок боргу за процентною ставкою i нараховуються складні проценти та проводиться виплата R. Отже,

$$PV_{k+1} = PV_k \cdot (1+i) - R. \qquad (5.1)$$

З даної рівності випливає, що $PV_k = \dfrac{PV_{k+1} + R}{1+i}$.

Оскільки $PV_n = 0$, то

$$PV_{n-1} = \frac{R}{1+i}; \quad PV_{n-2} = \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{1+i} \quad \Rightarrow$$

$$PV_k = \frac{R}{(1+i)^{n-k}} + \frac{R}{(1+i)^{n-k-1}} + \cdots + \frac{R}{1+i} \quad .$$

Таким чином, невиплачений залишок PV_k після k виплат визначається наступними $(n-k)$ виплатами:

$$PV_k = R \cdot PVIFA(n-k;i). \qquad (5.2)$$

З іншого боку, якщо записати рівняння вартості на кінець k-го періоду, то отримаємо

$$PV_k = PV \cdot FVIFA(k;i) - R \cdot FVIFA(k;i).$$

Приклад 5.2. Фермер отримав позику 20000 грн. за ставкою 16% річних при щоквартальному нарахуванні і погашатиме її рівними квартальними внесками протягом 4 років. Через 2 роки фермер вирішив погасити залишок боргу рівними квартальними виплатами протягом року. Визначити розмір внеску на погашення.

Розв’язування. Побудуємо початковий графік виплат за позикою:

період	сума позики на початок періоду	загальна сума платежу	платежі за процентами	сума основного платежу за позикою	сума позики на кінець періоду
0	20000				20800
1	20800	1 716,40 ₽	800,00 ₽	916,40 ₽	19 846,94 ₽
2	19 846,94 ₽	1 716,40 ₽	763,34 ₽	953,06 ₽	18 855,77 ₽
3	18 855,77 ₽	1 716,40 ₽	725,22 ₽	991,18 ₽	17 824,94 ₽
4	17 824,94 ₽	1 716,40 ₽	685,57 ₽	1 030,83 ₽	16 752,88 ₽
5	16 752,88 ₽	1 716,40 ₽	644,34 ₽	1 072,06 ₽	15 637,94 ₽
6	15 637,94 ₽	1 716,40 ₽	601,46 ₽	1 114,94 ₽	14 478,40 ₽
7	14 478,40 ₽	1 716,40 ₽	556,86 ₽	1 159,54 ₽	13 272,48 ₽
8	13 272,48 ₽	1 716,40 ₽	510,48 ₽	1 205,92 ₽	12 018,33 ₽
9	12 018,33 ₽	1 716,40 ₽	462,24 ₽	1 254,16 ₽	10 714,00 ₽
10	10 714,00 ₽	1 716,40 ₽	412,08 ₽	1 304,32 ₽	9 357,51 ₽
11	9 357,51 ₽	1 716,40 ₽	359,90 ₽	1 356,50 ₽	7 946,75 ₽
12	7 946,75 ₽	1 716,40 ₽	305,64 ₽	1 410,76 ₽	6 479,57 ₽
13	6 479,57 ₽	1 716,40 ₽	249,21 ₽	1 467,19 ₽	4 953,69 ₽
14	4 953,69 ₽	1 716,40 ₽	190,53 ₽	1 525,87 ₽	3 366,78 ₽
15	3 366,78 ₽	1 716,40 ₽	129,49 ₽	1 586,91 ₽	1 716,40 ₽
16	1 716,40 ₽	1 716,40 ₽	66,02 ₽	1 650,38 ₽	0,00 ₽
разом		27 462,40 ₽	7 462,40 ₽	20 000,00 ₽	

Побудуємо новий графік сплати залишку позики (12018,33 грн):

період	сума позики на початок періоду	загальна сума платежу	платежі за процентами	сума основного платежу за позикою	сума позики на кінець періоду
0	12018,33				12499,0632
1	12499,0632	3 310,93 ₽	480,73 ₽	2 830,20 ₽	9 555,66 ₽
2	9 555,66 ₽	3 310,93 ₽	367,53 ₽	2 943,40 ₽	6 494,52 ₽
3	6 494,52 ₽	3 310,93 ₽	249,79 ₽	3 061,14 ₽	3 310,93 ₽
4	3 310,93 ₽	3 310,93 ₽	127,34 ₽	3 183,59 ₽	0,00 ₽
разом		13 243,72 ₽	1 225,39 ₽	12 018,33 ₽	

Викупні фонди (фонди нагромадження).

Однією з форм цільового накопичення коштів у банку є створення рахунків у формі фондів. Якщо накопичення потрібної суми вирішується методом періодичних внесків у фонд, то такі фонди називають ***викупними***. Від інших форм інвестування їх відрізняє те, що одночасно зі створенням фіксується термін існування та сума, яка повинна бути нагромаджена за даний термін. Вищезгадані параметри та відповідна процентна ставка визначає саме розмір виплат.

Приклад 5.3. Підприємець передбачає, що через 2 роки йому треба буде купити нове обладнання, причому коштуватиме воно 5000 грн. Підприємець бажає накопичити цю суму методом внесків кожні півроку по R грн. протягом двох років. Кожний внесок у цей фонд приносить 12% при піврічному нарахуванні. Підприємцю необхідно визначити розмір піврічного внеску.

Розв'язування. Застосуємо опцію «Підбір параметру» R грн для отримання майбутньої вартості 5000 грн. Дістаємо, що розмір піврічного внеску становитиме R =1142,96 (грн).

Фонд погашення боргу.

При амортизації боргу кредитор повертає свій капітал невеликими частинами, які він завжди може інвестувати. Дуже вірогідно, що одержані гроші деякий час не даватимуть прибуток. З цієї причини кредитор може бажати отримати основну суму повністю в кінці строку. Проценти ж на надану суму кредиту повинні виплачуватись періодично. Наприклад, якщо 2000 грн. надано в кредит на два роки за процентною ставкою 14% річних, то борг можна погасити двома щорічними виплатами по 280 грн. кожна та однією в розмірі 2000 грн. в кінці другого року. Коли кредит надано на таких умовах, боржник у більшості випадків створює фонд погашення цього боргу. Виплати у фонд проводяться одночасно з виплатами процентів, при цьому суму цих двох періодичних виплат називають терміновим видатком за боргом.

Необхідність формування такого фонду іноді обумовлюється в угоді на надання позики в якості гарантії її повернення.

Приклад 5.4. Кредит на суму 50 тис.грн надано на 5 років за процентною ставкою 20% річних, причому проценти повинні виплачуватись в кінці кожного кварталу. Обчислити необхідну величину термінових виплат у фонд погашення боргу, якщо проценти на інвестовані в ньому кошти нараховуються за процентною ставкою 16% річних.

Розв'язування. Щоквартальні процентні платежі становитимуть по 2500 грн. Побудуємо графік фонду погашення боргу:

період	сума позики на початок періоду	загальна сума платежу	платежі за процентами	сума основного платежу за позикою	сума позики на кінець періоду
0	50000				52000
1	52000	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	50 253,75 ₽
2	50 253,75 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	48 437,65 ₽
3	48 437,65 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	46 548,90 ₽
4	46 548,90 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	44 584,61 ₽
5	44 584,61 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	42 541,74 ₽
6	42 541,74 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	40 417,16 ₽
7	40 417,16 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	38 207,60 ₽
8	38 207,60 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	35 909,65 ₽
9	35 909,65 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	33 519,78 ₽
10	33 519,78 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	31 034,32 ₽
11	31 034,32 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	28 449,45 ₽
12	28 449,45 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	25 761,17 ₽
13	25 761,17 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	22 965,37 ₽
14	22 965,37 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	20 057,73 ₽
15	20 057,73 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	17 033,79 ₽
16	17 033,79 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	13 888,89 ₽
17	13 888,89 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	10 618,19 ₽
18	10 618,19 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	7 216,67 ₽
19	7 216,67 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	3 679,09 ₽
20	3 679,09 ₽	3 679,09 ₽	2 500,00 ₽	1 179,09 ₽	0,00 ₽
разом		73 581,75 ₽	50 000,00 ₽	23 581,75 ₽	

Отже, щоквартальні виплати до фонду погашення боргу становитимуть 3679,09 (грн).

Пільгові кредити. Оцінка втрат кредитора.

Довготермінові пільгові кредити надають юридичним особам в окремих випадках. Наприклад: на реконструкцію важливого об'єкта економіки, для побудови вкрай необхідних очисних споруд, сільським господарствам у зв'язку із сезонністю робіт та можливими додатковими витратами на виробництво сільськогосподарської продукції. Такі кредити надає Міжнародний валютний фонд державам, які перебувають у складних економічних ситуаціях, пов'язаних з інфляцією, перебудовою виробничих відносин, воєнними та стихійними подіями. Іноді надання таких кредитів пов'язане з певними причинами політичного характеру.

Особливістю пільгового кредиту є те, що його надають під низьку процентну ставку на досить великий термін з можливістю виділення пільгового періоду відтермінування, протягом якого можуть сплачуватись лише проценти. Низька (відносно ставки на ринку кредитів) процентна ставка в поєднанні з великим терміном і пільговим періодом надають боржнику суттєву вигоду, яку можна розглядати як субсидію або допомогу. Кредитор при таких умовах кредитування зазнає певних збитків, оскільки він міг би інвестувати цю суму грошей на більш вигідних умовах.

Проблема визначення розміру такого роду допомоги обговорюється в міжнародних організаціях з позиції міждержавних співставлень – для порівняння розмірів фінансової допомоги, що надається ряду слаборозвинених держав.

Для вимірювання втрат кредитора при видачі пільгового кредиту використовують показник, що називається ***грант-елемент***.

Грант-елемент (*grant-element*) – це умовна втрата кредитора, пов'язана із застосуванням більш низької процентної ставки, аніж відповідні ставки кредитного ринку. Грант-елемент розраховується в двох видах: у вигляді абсолютної та відносної величин.

Абсолютний грант-елемент розраховується як різниця між номінальною сумою боргу та сучасною вартістю платежів по погашенню боргу, розрахованою за ринковою ставкою. Проблема, як бачимо, зводиться до вибору відповідної ставки процента для розрахунку сучасної вартості. Рекомендації по вибору конкретного значення цієї ставки дуже розпливчаті. Зазвичай використовують найпоширенішу на ринку ставку довготермінових кредитів.

Розмір абсолютного грант-елемента знаходимо за формулою:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{PV}, \qquad (5.3)$$

де W – абсолютний грант-елемент, A – сума наданого кредиту, PV – теперішня вартість платежів, які надходять у рахунок погашення боргу, визначена за ринковою ставкою.

Відносний грант-елемент характеризує відношення абсолютного грант-елемента до суми боргу:

$$w = \frac{W}{A} = 1 - \frac{PV}{A}. \qquad (5.4)$$

Якщо борг та проценти погашатимуться рівними терміновими виплатами, то пільговий кредит, наданий на n років під ставку процентів g буде погашатися щорічними сумами

$$Y = \frac{A}{PVIFA(n;g)}. \qquad (5.5)$$

Теперішня вартість усіх платежів, дисконтованих за ринковою ставкою i, дорівнює:

$$PV = Y \cdot PVIFA(n;i).$$

Підставивши значення PV та Y у формули (5.3) та (5.4), отримаємо:

$$W = A - \frac{A}{PVIFA(n;g)} \cdot PVIFA(n;i) = A \cdot \left(1 - \frac{PVIFA(n;i)}{PVIFA(n;g)}\right); \qquad (5.6)$$

$$w = 1 - \frac{PVIFA(n;i)}{PVIFA(n;g)}, \qquad (5.7)$$

де $PVIFA(n;i)$, $PVIFA(n;g)$ -- коефіцієнти приведення сталих річних рент постнумерандо, визначених для процентних ставок i та g, $i > g$.

Приклад 5.5. Надано пільговий кредит – 16 млн. грн. на 6 років під 12% річних. Звичайна ставка для довготермінових кредитів – 24%. Визначити абсолютну та відносну величини грант-елементів (втрати кредитора), якщо планується погашати кредит рівними річними виплатами.

Розв'язування. Знайдемо розмір виплат на погашення пільгового кредиту. Для цього скористуємось опцією «Підбір параметру»: R=3891611,5 (грн).

Далі знайдемо теперішню вартість платежів, які надходять у рахунок погашення боргу, визначену за ринковою ставкою 24%:

PV=11754500,84 (грн).

Абсолютна величина грант-елемента за формулою (5.3): W=A-PV=16000000-11754500,84=4245499,16 (грн). Відносна величина грант-елемента: w=W/A=4245499,16/16000000=0,2653437 (або 26,53%).

Наявність пільгового періоду $(\boldsymbol{L})$ збільшує грант-елемент. Якщо в пільговому періоді боржник сплачує проценти, то теперішня вартість надходжень по боргу визначається як сума двох елементів – теперішніх вартостей процентних платежів у пільговому періоді і термінових виплат в час, що залишився. Таким чином маємо:

$$\boldsymbol{PV = A \cdot g \cdot PVIFA(L;i) + Y \cdot PVIFA(n-L;i) \cdot (1+i)^{-L}}, \quad (5.8)$$

)

де $\boldsymbol{L}$ – тривалість пільгового періоду; $\boldsymbol{(n-L)}$ - тривалість терміну погашення заборгованості.

Після перетворень отримаємо:

$$\boldsymbol{w = 1 - \frac{PV}{A} = 1 - \left(\frac{PVIFA(n-L;i)}{PVIFA(n-L;g)} \cdot (1+i)^{-L} + g \cdot PVIFA(L;i) \right)} \quad (5.9)$$

Якщо проценти у пільговому періоді не сплачуються, а додаються до основної суми боргу, то відносний грант-елемент обчислюється за формулою:

$$w = 1 - \frac{PVIFA(n-L;i)}{PVIFA(n-L;g)} \cdot \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{L}. \qquad (5.10)$$

Так, наприклад, втрати кредитора від надання пільгового кредиту по даним **прикладу 5.5** за умови відтермінування погашення позики на два роки складуть:

а) зі сплатою процентів під час пільгового періоду 31,07%:

$$w = 1 - \left(\frac{PVIFA(4;0{,}24)}{PVIFA(4;0{,}12)} \cdot (1+0{,}24)^{-2} + 0{,}12 \cdot PVIFA(2;0{,}24)\right) =$$

$$= 1 - \frac{2{,}404}{3{,}0373} \cdot 0{,}65 - 0{,}12 \cdot 1{,}457 = 0{,}3107 \quad (31{,}07\%)$$

б) з додаванням процентів до основної суми боргу 35,43%:

$$w = 1 - \frac{PVIFA(4;0{,}24)}{PVIFA(4;0{,}12)} \cdot \left(\frac{1{,}12}{1{,}24}\right)^{2} = 1 - \frac{2{,}404}{3{,}0373} \cdot (0{,}9032)^{2} =$$

$$= 0{,}3543 \quad (35{,}43\%).$$

Граничним випадком пільгового кредиту є безпроцентний кредит. Видача такої позики призводить до ще більших втрат кредитора. Якщо безпроцентний кредит не передбачає пільгового періоду, то відносна величина втрат кредитора визначається за формулою:

$$w = 1 - \frac{PVIFA(n;i)}{n}, \qquad (5.11)$$

де i – ринкова процентна ставка.

Наприклад, безпроцентний кредит на 6 років за ринкової процентної ставки на довготермінові кредити 24% фактично завдає втрат кредитору на суму половини позики:

$$w = 1 - \frac{PVIFA(6;i)}{6} = 1 - 0{,}5034 = 0{,}4966 \quad (49{,}66\%).$$

Іпотечні позики.

Позики під заставу нерухомості або іпотеки (mortgage) набули широкого розповсюдження в державах із розвинутою ринковою економікою як одне із важливих джерел довготермінового кредитування.

Така операція полягає в тому, що власник майна отримує позику у заставотримача, а в якості забезпечення повернення боргу передає останньому право на першочергове вдоволення його вимог із вартості майна-застави. Найбільш поширеними об'єктами застави є житлові будинки, ферми, земля, інші види нерухомості. Іпотечні позики надаються комерційними і спеціальними іпотечними банками. Характерною особливістю іпотеки є довготривалий термін погашення заборгованості. Іпотечний кредит для придбання житла почали практикувати і в Україні.

Існує декілька видів іпотечних позик, які різняться, в основному, способами погашення заборгованості. Більшість способів є варіантами ***стандартної іпотеки***, за якою позичальник отримує від кредитора (заставотримача) деяку суму під заставу нерухомості, а потім погашає борг разом із процентами рівними, зазвичай щомісячними, внесками. Коротко охарактеризуємо деякі схеми іпотек.

Позика зі зростанням платежів *(graduated mortgage, GPM)*. Даний вид позики передбачає стале зростання витрат по обслуговуванню боргу в перші роки, а потім, протягом часу, що залишився, погашення здійснюється сталими внесками.

Позика з пільговим періодом. В умовах іпотеки ***передбачається*** наявність пільгового періоду, протягом якого виплачуються лише проценти по боргу. Така схема в більшій мірі переміщує в часі фінансове навантаження боржника.

Оскільки іпотечні позики надаються на дуже тривалий термін, то ***навіть*** в умовах стабільної економіки виникає ризик зміни ринкової процентної ставки кредитування. Певну страховку від такого ризику забезпечують умови позик, що пов'язані з рівнем процентної ставки.

Позика з періодичною зміною процентної ставки *(rollover mortgage, RM)*. ***Схема*** цієї позики передбачає, що сторони кожні 3-5 років переглядають рівень процентної ставки. Таким чином періодично поновлюється середньотермінове кредитування при довготерміновому погашенні всієї заборгованості.

Іпотека зі змінною процентною ставкою *(variable-rate mortgage, VRM)*. Рівень ставки в цих іпотеках прив'язується до якогось ***поширеного*** фінансового показника або індексу. Корегування ставки здійснюють частіше усього кожних півроку.

Основним завданням при аналізі іпотек є розробка планів погашення заборгованості. Важливо також вміти розраховувати невиплачений залишок боргу на будь-який момент часу терміну погашення. Нижче розглянемо методи вирішення цих проблем для двох поширених іпотечних схем.

1) Найбільш розповсюдженою є іпотечна позика, умови якої передбачають рівні щомісячні внески боржника, які здійснюються або в кінці, або на початку місяця. В угоді також обумовлюється місячна (рідше – річна номінальна) процентна ставка. Оскільки внески на погашення утворюють сталу фінансову ренту, то при розрахунках їх розмірів та залишку заборгованості (на момент чергового погашення і до повної виплати боргу) застосовують формули (4.2) та (5.2).

Нехай $\boldsymbol{PV}$ - сума позики, $\boldsymbol{N}$ - загальне число виплат ($\boldsymbol{N = 12 \cdot n}$, де $\boldsymbol{n}$ - термін погашення в роках); $\boldsymbol{i}$ - місячна процентна ставка; $\boldsymbol{R}$ - місячна сума внеску; $\boldsymbol{PVIFA(N;i)}$ - коефіцієнт приведення сталої ренти. Шукана величина внеску складе для рент постнумерандо

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{PVIFA(N;i)}}, \tag{5.12}$$

а для рент пренумерандо

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{PVIFA(N;i)}}\boldsymbol{(1+i)}\ . \tag{5.13}$$

Знайдені за формулами (5.12) та (5.13) величини термінової виплати слугують базою для розробки плану погашення боргу. За загальним правилом із цієї суми спочатку виплачуються проценти, а залишок іде на погашення боргу.

Залишок боргу після $\boldsymbol{k}$ виплат ренти постнумерандо знаходимо за формулою:

$$\boldsymbol{PV_k} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{PVIFA(N-k;i)} = \boldsymbol{PV} \cdot \frac{\boldsymbol{PVIFA(N-k;i)}}{\boldsymbol{PVIFA(N;i)}}. \tag{5.14}$$

Приклад 5.6. Під заставу нерухомості надана позика в розмірі 50000 грн. на 10 років. Погашення щомісячне постнумерандо, на борг нараховуються проценти за номінальною річною ставкою 12%. Визначити розмір термінових виплат та залишок боргу через 4 роки.

Розв'язування. Складемо графік погашення позики на перших чотири роки:

період	сума позики на початок періоду	загальна сума платежу	платежі за процентами	сума основного платежу за позикою	сума позики на кінець періоду
0	50000				50500
1	50500	717,35 ₽	500,00 ₽	217,35 ₽	50 280,47 ₽
2	50 280,47 ₽	717,35 ₽	497,83 ₽	219,53 ₽	50 058,75 ₽
3	50 058,75 ₽	717,35 ₽	495,63 ₽	221,72 ₽	49 834,81 ₽
4	49 834,81 ₽	717,35 ₽	493,41 ₽	223,94 ₽	49 608,63 ₽
5	49 608,63 ₽	717,35 ₽	491,17 ₽	226,18 ₽	49 380,19 ₽
6	49 380,19 ₽	717,35 ₽	488,91 ₽	228,44 ₽	49 149,46 ₽
7	49 149,46 ₽	717,35 ₽	486,63 ₽	230,73 ₽	48 916,42 ₽
8	48 916,42 ₽	717,35 ₽	484,32 ₽	233,03 ₽	48 681,06 ₽
9	48 681,06 ₽	717,35 ₽	481,99 ₽	235,36 ₽	48 443,34 ₽
10	48 443,34 ₽	717,35 ₽	479,64 ₽	237,72 ₽	48 203,25 ₽

11	48 203,25 ₽	717,35 ₽	477,26 ₽	240,09 ₽	47 960,75 ₽
12	47 960,75 ₽	717,35 ₽	474,86 ₽	242,50 ₽	47 715,83 ₽
13	47 715,83 ₽	717,35 ₽	472,43 ₽	244,92 ₽	47 468,46 ₽
14	47 468,46 ₽	717,35 ₽	469,98 ₽	247,37 ₽	47 218,62 ₽
15	47 218,62 ₽	717,35 ₽	467,51 ₽	249,84 ₽	46 966,28 ₽
16	46 966,28 ₽	717,35 ₽	465,01 ₽	252,34 ₽	46 711,41 ₽
17	46 711,41 ₽	717,35 ₽	462,49 ₽	254,87 ₽	46 454,00 ₽
18	46 454,00 ₽	717,35 ₽	459,94 ₽	257,41 ₽	46 194,01 ₽
19	46 194,01 ₽	717,35 ₽	457,37 ₽	259,99 ₽	45 931,42 ₽
20	45 931,42 ₽	717,35 ₽	454,77 ₽	262,59 ₽	45 666,21 ₽
21	45 666,21 ₽	717,35 ₽	452,14 ₽	265,21 ₽	45 398,34 ₽
22	45 398,34 ₽	717,35 ₽	449,49 ₽	267,87 ₽	45 127,79 ₽
23	45 127,79 ₽	717,35 ₽	446,81 ₽	270,54 ₽	44 854,54 ₽
24	44 854,54 ₽	717,35 ₽	444,10 ₽	273,25 ₽	44 578,56 ₽
25	44 578,56 ₽	717,35 ₽	441,37 ₽	275,98 ₽	44 299,82 ₽
26	44 299,82 ₽	717,35 ₽	438,61 ₽	278,74 ₽	44 018,29 ₽
27	44 018,29 ₽	717,35 ₽	435,82 ₽	281,53 ₽	43 733,94 ₽
28	43 733,94 ₽	717,35 ₽	433,01 ₽	284,35 ₽	43 446,75 ₽
29	43 446,75 ₽	717,35 ₽	430,17 ₽	287,19 ₽	43 156,69 ₽
30	43 156,69 ₽	717,35 ₽	427,29 ₽	290,06 ₽	42 863,73 ₽
31	42 863,73 ₽	717,35 ₽	424,39 ₽	292,96 ₽	42 567,84 ₽
32	42 567,84 ₽	717,35 ₽	421,46 ₽	295,89 ₽	42 268,99 ₽
33	42 268,99 ₽	717,35 ₽	418,50 ₽	298,85 ₽	41 967,15 ₽
34	41 967,15 ₽	717,35 ₽	415,52 ₽	301,84 ₽	41 662,30 ₽
35	41 662,30 ₽	717,35 ₽	412,50 ₽	304,86 ₽	41 354,39 ₽
36	41 354,39 ₽	717,35 ₽	409,45 ₽	307,91 ₽	41 043,41 ₽
37	41 043,41 ₽	717,35 ₽	406,37 ₽	310,98 ₽	40 729,31 ₽
38	40 729,31 ₽	717,35 ₽	403,26 ₽	314,09 ₽	40 412,08 ₽
39	40 412,08 ₽	717,35 ₽	400,12 ₽	317,24 ₽	40 091,67 ₽
40	40 091,67 ₽	717,35 ₽	396,95 ₽	320,41 ₽	39 768,06 ₽
41	39 768,06 ₽	717,35 ₽	393,74 ₽	323,61 ₽	39 441,21 ₽
42	39 441,21 ₽	717,35 ₽	390,51 ₽	326,85 ₽	39 111,09 ₽
43	39 111,09 ₽	717,35 ₽	387,24 ₽	330,12 ₽	38 777,68 ₽
44	38 777,68 ₽	717,35 ₽	383,94 ₽	333,42 ₽	38 440,93 ₽
45	38 440,93 ₽	717,35 ₽	380,60 ₽	336,75 ₽	38 100,81 ₽
46	38 100,81 ₽	717,35 ₽	377,24 ₽	340,12 ₽	37 757,29 ₽
47	37 757,29 ₽	717,35 ₽	373,83 ₽	343,52 ₽	37 410,33 ₽
48	37 410,33 ₽	717,35 ₽	370,40 ₽	346,96 ₽	37 059,91 ₽
разом		14 347,09 ₽	9 561,16 ₽	4 785,93 ₽	

Отже, термінові виплати становитимуть 717,35 грн, а залишок боргу після 4 років – 37059,91 грн.

2) Розглянемо стандартну іпотеку з неповним погашенням заборгованості і виплатою залишку боргу в кінці терміну (*balloon mortgage*). Умови такої іпотеки дозволяють зменшити розміри періодичних внесків або скоротити термін позики. Термінові виплати розраховуються так, щоб вони не покривали

всієї заборгованості, а залишок $\boldsymbol{B}$ виплачується в кінці терміну. Рівняння еквівалентності, яке збалансовує умови іпотеки, має вигляд:

$$\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{PVIFA(N;i)} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{(1+i)^{-N}}.$$

Баланс досягається одним із способів:

а) задається розмір термінових виплат $\boldsymbol{R}$ і визначається величина залишку $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{PV} - \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{PVIFA(N;i)}\right) \cdot \boldsymbol{(1+i)^{N}}$;

б) задається залишок $\boldsymbol{B}$ і визначається розмір термінових виплат $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{(1+i)^{-N}}\right) / \boldsymbol{PVIFA(N;i)}.$$

Розділ 6. **Виробничі інвестиції. Вимірювачі фінансової ефективності**

Поняття інвестицій, їх класифікація.

В економічному житті кожної країни інвестиції є домінуючим чинником зростання, адже процеси структурного та якісного оновлення товаровиробництва відбуваються виключно шляхом інвестування. За фінансовим визначенням, **інвестиції –** це всі види активів (коштів), що вкладаються у господарську діяльність з метою отримання доходу. За економічним визначенням, **інвестиції** – це видатки на створення, розширення, реконструкцію та технічне переозброєння основного капіталу, а також на пов'язані з цим зміни оборотного капіталу.

Щодо обліку, аналізу та планування інвестиції класифікуються за різними ознаками:

- **За об'єктами вкладень виділяють реальні та фінансові інвестиції**.

Реальні інвестиції це вкладення коштів у реальні активи: в основний капітал та на приріст матеріально–виробничих запасів, а також у нематеріальні активи. Реальні інвестиції характеризуються галузевою, відтворюваною та технологічною структурами. Зрушення у галузевій структурі в усіх розвинутих країн виявились у значному зростанні частки інвестицій у переробну промисловість. Технологічна структура інвестицій визначається співвідношенням витрат на активні елементи основного капіталу (машини, устаткування) та на його пасивні елементи (будівлі, споруди). Ефективність інвестицій значно підвищується при зростанні частки активних елементів. Відтворювана структура інвестицій характеризується співвідношенням затрат на просте та розширене відтворення основних фондів, тобто затрат на технічне переозброєння, реконструкцію та будівництво нових об'єктів.

Під фінансовими інвестиціями розуміють вкладення коштів в акції, облігації та інші цінні папери, що випускають державні або приватні компанії, господарські товариства, а також в об’єкти приватизації, банківські депозити.

- **За характером участі в інвестуванні виділяють прямі та непрямі інвестиції**.

Під прямими інвестиціями розуміють безпосереднє вкладення коштів інвестором в об’єкти інвестування. Під непрямими інвестиціями розуміється інвестування, опосередковане іншими особами (інвестиційними або фінансовими посередниками).

- **За періодом інвестування розрізняють короткотермінові** (не більше 1 року) **та довготермінові** (на період понад 1 рік) **інвестиції**.
- **За формами власності інвесторів розрізняють приватні** (акціонерні), **державні, іноземні та спільні інвестиції.**
- **За регіональною ознакою виділяють інвестиції усередині країни та за кордоном** (в об’єкти, розміщені за межами даної країни).

Отже, під інвестиціями звичайно розуміють довгострокові вкладення капіталу в підприємства виробничої сфери, в інфраструктуру, в соціальні та природоохоронні програми. Вони можуть здійснюватись у формі:

- рухомого і нерухомого майна (будівель, обладнання);
- коштів, кредитів, цінних паперів;
- майнових прав, похідних від авторського права, нематеріальних активів;
- права на користування землею та іншими природними ресурсами.

Характеристики ефективності виробничих інвестицій.

Фінансовий аналіз виробничих інвестицій полягає в основному у вимірюванні (оцінюванні) кінцевих фінансових результатів інвестицій – їх дохідності для інвестора. Таке завдання виникає як на етапі попереднього аналізу фінансової привабливості проекту, так і при розробці бізнес-плану. Негативний висновок дає підставу відмовитись від подальшого більш поглибленого вивчення проекту. Без розрахунку вимірювачів ефективності інвестицій не можна здійснити і порівняння альтернативних інвестиційних проектів. Зрозуміло, що при виборі об'єкта для інвестування можуть застосовуватись і інші критерії: екологічні наслідки здійснюваного проекту, можливість створення додаткових робочих місць, розвиток виробничої бази в даній місцевості тощо.

Зацікавленість у тонких методах вимірювання ефективності інвестицій зазвичай не виникає при високій прибутковості проектів, що значно перевищує існуючий рівень процентних ставок по кредитам. Так у післявоєнні роки в США при 20% прибутковості інвестованого капіталу і $3-4\%$ рівні позикового банківського процента менеджери нафтових та газових компаній не застосовували складні критерії. І тільки в кінці 50-их років, коли спостерігалось помітне зниження дохідності від буріння нових свердловин, виникла необхідність у розробці і застосуванні більш надійних і зважених критеріїв.

Методики і критерії, що застосовуються у фінансовому аналізі можна розбити на дві великі групи по тому, враховують вони фактор часу чи ні. До першої групи відносять методи та вимірювачі, що враховують фактор часу – дисконтні методи, а до другої – методи без дисконтування розподілених в часі грошових сум, що основуються на облікових оцінках. У сучасній зарубіжній практиці середні та крупні фірми застосовують в основному чотири показники ефективності, що основуються на дисконтуванні:

- чистий приведений дохід (***net present value – NPV***);
- внутрішня норма прибутковості (***internal rate of return – IRR***);
- дисконтний термін окупності (***discounted payback method – DPM***);
- індекс прибутковості, рентабельність проекту (***profitability index – PI***).

При розрахунку цих показників усі видатки і доходи приводяться до одного (базового) моменту часу, яким, як правило, є дата початку реалізації проекту або дата початку виробництва продукції. Перелічені вище показники відображають результат співставлення узагальненої сумарної віддачі від інвестицій з вартістю самих інвестицій.

Чистий приведений дохід (***NPV***) – це різниця дисконтованих на один момент часу показників чистого доходу та інвестиційних витрат. ***NPV*** представляє собою узагальнений кінцевий результат інвестиційної діяльності в абсолютних величинах.

Внутрішня норма прибутковості (***IRR***) характеризує таку процентну ставку, яка при її нарахуванні на суми інвестицій забезпечить надходження очікуваного чистого доходу, тобто „врівноважить” інвестиції і доходи, розподілені в часі.

Дисконтний термін окупності (***DPM***) визначає час, за який отримана поточна вартість доходів дорівнює сумі інвестицій, тобто окупає інвестиції з урахуванням різних термінів отримання прибутків. Термін окупності можна розглядати як характеристику ризику – чим він більший, тим вища імовірність зміни умов для отримання очікуваного доходу.

Індекс прибутковості (**PI**) або відношення „дохід – витрати” дорівнює відношенню поточної вартості надходжень до вартості інвестицій.

Щоб сутність вказаних показників була більш зрозумілою, розглянемо випадок коли інвестиції здійснюються миттєво (наприклад, придбання закінченого виробничого об’єкту), а доходи надходять регулярно у вигляді сталої обмеженої ренти постнумерандо. В цьому випадку чистий приведений дохід ($\boldsymbol{NPV}$) знаходиться за формулою:

$$\boldsymbol{NPV = R \cdot PVIFA(n;r) - K}, \qquad (6.1)$$

де $\boldsymbol{K}$ – миттєві інвестиційні витрати; $\boldsymbol{PVIFA(n;r)}$ – коефіцієнт приведення сталої ренти; $\boldsymbol{R}$ – член потоку доходів; $\boldsymbol{n}$ – тривалість періоду надходжень доходу; $\boldsymbol{r}$ – ставка, прийнята для приведення (дисконтування).

Якщо капіталовкладення не миттєві, а розподілені в часі, то під $\boldsymbol{K}$ розуміється сума інвестицій з нарахованими процентами на кінець терміну інвестицій.

Внутрішня норма прибутковості ($\boldsymbol{IRR = J}$) знаходиться за умовою $\boldsymbol{NPV = 0}$, тобто, розв'язуючи відносно $\boldsymbol{J}$ рівняння

$$\boldsymbol{R \cdot \frac{1-(1+J)^{-n}}{J} - K = 0}. \qquad (6.2)$$

Дисконтний термін окупності ($\boldsymbol{n_d}$) встановлюється із співвідношення

$$\boldsymbol{K = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n_d}}{r}}. \qquad (6.3)$$

Індекс прибутковості ($\boldsymbol{PI}$) визначається як відношення приведених доходів до інвестиційних витрат:

$$\boldsymbol{PI = \frac{R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}}{K}}. \qquad (6.4)$$

Як бачимо, в усіх формулах використовуються одні й ті самі вихідні дані, проте в різних комбінаціях і з різними коефіцієнтами приведення ренти.

Приклад 6.1 Корпорація інвестує **360000** грн. у нове комп'ютерне оснащення, яке, як очікується, протягом наступних 5 років скоротить витрати праці на **100 000** грн. після відрахування податків. Визначити ***NPV*** даного проекту, якщо гроші приносять прибуток **10%** річних. Визначити внутрішню норму прибутковості та дисконтний термін окупності цього проекту.

Розв'язування. Скористуємось відповідними фінансовими функціями:
NPV-K=NPV(10%;100000;100000;100000;100000;100000)-
360000=19078,68 (грн).
IRR=12%. Дисконтний термін окупності Nd=4,682 (роки).

Звичайно, що різні показники зовсім не обов’язково дадуть однакові результати у відношенні переваг того чи іншого проекту. Справа в тому, що вони мають різний сенс і вимірюють ефект з різних точок зору. Для підвищення надійності вибору інвестиційного проекту більшість фірм орієнтуються на два і більше показника.

Основна задача при розробці моделі, за допомогою якої мають намір проаналізувати довготерміновий інвестиційний проект, полягає у формуванні очікуваного потоку платежів. Першим кроком у цьому напрямку є розробка структури потоку в часі – поділ його на етапи, що відрізняються своїм змістом і закономірностями в зміні доходів та витрат.

Інвестиційні витрати включають всі види витрат, які необхідні для реалізації проекту: проектно-дослідницькі роботи, закупка ліцензій, замовлення і оплата обладнання, будівництво, монтаж та налагодження обладнання тощо.

Який би метод оцінки ефективності інвестицій не був вибраний, так чи інакше він пов’язаний із приведенням як інвестиційних витрат, так і доходів до одного моменту часу, тобто розрахунком відповідних поточних вартостей потоку платежів. Важливим моментом тут є вибір рівня процентної ставки приведення. Яку ставку слід прийняти в конкретній ситуації – справа економічного судження. Чим вища ставка, тим в більшій мірі враховується фактор часу, так як більш віддалені платежі мають менший вплив на поточну вартість потоку.

В зарубіжній літературі ставку, яку приймають для дисконтування потоків платежів в інвестиційному проекті, розглядають як мінімально привабливу ставку прибутковості (***minimum attractive rate of return – MARR***). На практиці цю ставку, імовірно, слід розглядати як норматив прибутковості прийнятний для інвестора. Якщо фінансовий аналіз передбачає розрахунок внутрішньої норми прибутковості, то цей норматив розглядається як деяке бар’єрне (мінімально допустиме) значення цього параметра.

При виборі ставки приведення слід брати до уваги фінансове положення інвестора, його здібність врахувати майбутні умови тощо. Важливим моментом є врахування ризику. Ризик в інвестиційній діяльності проявляється в основному у вигляді можливого скорочення віддачі від вкладеного капіталу у порівнянні з очікуваними. Для врахування ризику скорочення віддачі, інфляційного знецінення доходу, зміни кон'юнктури та інших негативних факторів рекомендується вводити ризикову надбавку до рівня ставки приведення.

Чистий приведений дохід і методи його розрахунку.

Основним вимірювачем кінцевого абсолютного результату інвестування є чистий приведений дохід. Він має чітку логічну основу і може бути застосований для розв'язання широкого кола фінансових проблем, в тому числі і при визначенні різних показників ефективності. Окрім того, його легко обчислити.

Нехай капіталовкладення і доходи представлені у вигляді потоку платежів, тоді ***NPV*** знаходиться як теперішня вартість цього потоку, визначена на початок дії проекту:

$$\boldsymbol{NPV} = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{R_k v^k} \quad , \qquad (6.5)$$

де $\boldsymbol{R_k}$ – розмір члена потоку платежів в $\boldsymbol{k}$-му році; $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{r}}$ – дисконтний множник по ставці приведення $\boldsymbol{r}$.

Членами потоку платежів є як додатні (доходи), так і від'ємні (інвестиційні витрати) величини. Відповідно, додатною або від'ємною може бути і величина ***NPV***. Очевидно, якщо:

- $NPV > 0$,то проект слід прийняти;
- $NPV < 0$,то проект слід відкинути, так як доходи не окупають витрати при прийнятій нормі прибутковості і

заданому розподілі капітальних вкладень і надходжень в часі;

• $NPV = 0$,проект не прибутковий і не збитковий.

Якщо потік платежів представлений роздільно, тобто як потік інвестицій і потік чистих доходів, тоді ***NPV*** визначається як різниця

$$NPV = \sum_{i=1}^{n_2}\left(R_i \cdot v^i\right) - \sum_{l=1}^{n_1}\left(K_l \cdot v^l\right), \qquad (6.6)$$

де K_l – інвестиційні витрати в l -му році; R_i – чистий дохід в i -му році; n_1 – тривалість інвестиційного періоду; n_2 – тривалість періоду надходжень доходів.

В більшості випадків річні дані про розміри членів потоку відносять на кінець відповідного року. Проте досить часто члени потоку можна розглядати як рівномірно розподілені витрати (надходження) в межах року. Для отримання більш точного результату відповідні величини слід віднести до середин річних інтервалів, тобто врахувати коефіцієнт нарощення $\sqrt{1+r}$.

Якщо потік доходів можна описати як сталу річну ренту, причому очікується, що доходи рівномірно розподілені протягом року, то

$$NPV = R \cdot PVIFA(n_2; r) \cdot v^{n_2 - 0,5} - \sum_{l=1}^{n_1}\left(K_l \cdot v^l\right), \qquad (6.7)$$

де R – річна сума доходу.

В більш простому випадку, коли капіталовкладення миттєві, а доходи регулярно надходять відразу після інвестування, то можна скористатись формулою (6.1).

В усіх розглянутих випадках припускалось, що ставка приведення не змінюється з часом. Проте не можна виключити ситуацію, коли в очікуванні збільшення ризику неотримання доходу, буде застосовуватись зростаюча в часі процентна ставка. Загальна методика розрахунків при цьому не зміниться.

Приклад 6.2 Початкові інвестиційні витрати – **400** тис. грн. Ставка приведення **- 10%**. Доходи по проекту розподіляються по рокам наступним чином: за перший рік – **170** тис.грн., за другий – **140** тис.грн., за третій – **130** тис.грн. і за четвертий – **120** тис.грн. Визначити ***NPV*** даного проекту.

Розв'язування.

NPV=NPV(10%;170000;140000;130000;120000)=49880,47 (грн).

Властивості чистого приведеного доходу.

Зупинимось на особливостях чистого приведеного доходу, важливих для його розуміння і практичного застосування.

- Перше, на що слід звернути увагу, – ***NPV*** – це абсолютний показник, і тому залежить від розмірів капіталовкладень. Цю обставину слід враховувати при порівнянні кількох інвестиційних проектів.
- Друге – суттєва залежність ***NPV*** від часових параметрів проекту: терміни початку віддачі від інвестицій і тривалості періоду віддачі. Зміщення початку віддачі на більш пізній час зменшує величину поточної вартості потоку доходів пропорційно дисконтному множнику v^t, де t – період відстрочки.

Приклад 6.3. Нехай за деякими обставинами момент початку віддачі в прикладі 6.1 відкладається на 1 рік. Визначити ***NPV*** проекту.

Розв'язування. NPV= -360000+NPV(10%;0;100000;100000;100000;100000;100000)=-15383,02 (грн).

Як бачимо, відтермінування віддачі призвело до NPV<0.

Тривалість періоду віддачі впливає на величину ***NPV***, проте надходження, що очікуються в далекому майбутньому, навряд чи можна вважати цілком надійними. Вони мало впливають на величину ***NPV*** і ними, як правило, можна знехтувати. Нехай надходження від інвестицій складають сталу ренту постнумерандо. В цьому випадку залежність ***NPV*** від терміну ренти зображена на рис. 6.1

Рис. 6.1

У початковий момент $\boldsymbol{NPV = -K}$, в точці $\boldsymbol{n = n_d}$ капіталовкладення точно окупаються доходами, що надійшли. По мірі збільшення терміну надходжень збільшується величина ***NPV***. Проте приріст її уповільнюється, а саме значення ***NPV*** прямує до деякої границі $\boldsymbol{A}$.

Вибір моменту, відносно якого дисконтуються члени потоку платежів, також впливає на величину ***NPV***. Зміщення моменту часу для оцінювання ***NPV*** змінює абсолютні значення обох складових чистого приведеного доходу, проте знак у величини ***NPV*** не змінюється. Відмітимо, що при порівнянні декількох проектів найкращий проект залишається таким при будь-якому виборі моменту, що є спільним для всіх проектів.

Розглянемо вплив процентної ставки приведення на величину ***NPV***. З (6.6) випливає, що з ростом ставки розмір чистого приведеного доходу скорочується. Залежність ***NPV*** від ставки r для випадку, коли вклади здійснюються на початку інвестиційного процесу, а віддачі приблизно рівномірні, ілюструється на рис. 6.2.

Рис. 6.2

Коли ставка приведення досягає величини $\boldsymbol{J}$, фінансовий ефект від інвестицій стає рівним нулю. При будь-якій ставці $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{J}$ маємо позитивну оцінку $\boldsymbol{NPV}$, а при дисконтуванні по ставці $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{J}$ маємо від'ємну величину $\boldsymbol{NPV}$. Таким чином, зміна ставки приведення суттєво впливає на абсолютну величину $\boldsymbol{NPV}$. Наприклад, якщо за умовами прикладу 6.1 знайти значення $\boldsymbol{NPV}$ для процентних ставок: $\mathbf{5\%,\ 10\%,\ 15\%,\ 20\%}$, то отримаємо таку таблицю:

$\boldsymbol{r}$	5%	10%	15%	20%
$\boldsymbol{NPV}$	72947,7	19078,7	-24784,5	-60938,8

Нульове значення $\boldsymbol{NPV}$ досягається при $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{J} = \mathbf{12{,}056\%}$.

Зупинимось також на порівнянні декількох варіантів проекту по величині $\boldsymbol{NPV}$. На перший погляд таке порівняння досить умовне, так як $\boldsymbol{NPV}$ залежить від рівня ставки приведення. Проте підсумок порівняння проектів володіє досить високою стійкістю по відношенню до ставки приведення.

Розглянемо випадок, коли порівнюються три проекти $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3}$. Капіталовкладення у всіх випадках миттєві, а потоки доходів утворюють сталу ренту постнумерандо з однаковими термінами, проте різними розмірами віддачі. Потоки платежів і розрахункові значення $\boldsymbol{NPV}$ та $\boldsymbol{J}$ приведені в наступній таблиці, де в розрахунках використана ставка приведення $\boldsymbol{r} = \mathbf{12\%}$:

t	A_1	A_2	A_3
0	**-40**	**-50**	**-50**
1	**10**	**13**	**12**
2	**10**	**13**	**12**
...	**...**	**...**	**...**
10	**10**	**13**	**12**
NPV	**16,5022**	**23,453**	**17,8**
J **(%)**	**21,43**	**22,19**	**20,19**

Найбільші значення NPV та J у варіанта A_2. Криві залежності NPV від r показані на рис. 6.3.

Рис 6.3

Внутрішня норма прибутковості.

Не менш важливою для фінансового аналізу виробничих інвестицій, як і чистий приведений дохід, є внутрішня норма прибутковості. Під цим критерієм розуміють таку розрахункову ставку приведення, при якій капіталізація отриманого доходу дає суму, рівну інвестиціям, тобто забезпечує їх окупність. Іншими словами, при нарахуванні на суму інвестицій процентів по ставці, рівній внутрішній нормі прибутковості (позначатимемо J) забезпечується отримання розподіленого в часі доходу, еквівалентного інвестиціям. Чим вища ця норма, тим більшою є ефективність інвестицій. Обговорюваний параметр може бути як додатнім, так і від'ємним. Останнє означає, що інвестиції не окупаються.

Нехай r – прийнятний для інвестора рівень ставки процента (мінімально приваблива ставка дохідності або норматив дохідності). Різниця ставок $J - r$ характеризує ефективність інвестиційної діяльності. З чисто фінансових позицій інвестиції мають сенс лише тоді, коли $J \geq r$. При $J < r$ немає підстав для здійснення інвестицій.

Розрахунок внутрішньої норми прибутковості застосовують часто в якості першого кроку аналізу інвестицій. Для подальшого аналізу відбираються лише ті проекти, які забезпечують деякий прийнятний для даної компанії рівень доходності.

В загальному випадку, коли інвестиції і доходи здійснюються у вигляді потоку платежів, шукана ставка J визначається як розв'язок відносно v рівняння:

$$\sum_{i=1}^{n_2}\left(R_i \cdot v^i\right) - \sum_{l=1}^{n_1}\left(K_l \cdot v^l\right) = 0. \qquad (6.8)$$

Потім, знаючи v, знаходимо шукану ставку J. Розрахунок шуканої ставки здійснюється різними за трудомісткістю та точністю методами. Досить часто при знаходженні J обмежуються методом послідовного підбору значення ставки до виконання умови $NPV = 0$.

У найпростішому випадку, коли інвестиції здійснюються миттєво, а доходи надходять регулярно у вигляді сталої ренти постнумерандо, ставку J можна знайти методом лінійної інтерполяції (дивись приклад 6.1). Подібну методику можна використати і в більш загальному випадку.

Приклад 6.4 Визначити внутрішню норму прибутковості (***IRR***) для проекту, розрахованого на три роки, який вимагає миттєвих інвестицій в обсязі **100000** грн. та забезпечуватиме грошові надходження в розмірі **30000** грн., **40000** грн., **70000** грн..

Розв'язування. Використовуємо відповідну фінансову функцію:
IRR=16%.

На величину внутрішньої норми прибутковості впливають ті ж фактори, що і на чистий приведений дохід: розміри інвестиційних витрат і доходів та специфіка їх розподілу в часі. Проте вплив тут протилежний – все, що збільшує ***NPV***, скорочує значення $\boldsymbol{J}$.

При використанні внутрішньої норми прибутковості в якості орієнтиру для вибору і прийняття інвестиційного рішення слід мати на увазі, що:

- Даний параметр ефективності не враховує масштабів проекту;
- Існує можливість в деяких ситуаціях отримати неоднозначні оцінки ефективності;
- При відсутності досвіду розрахунку або необхідних програм отримання відповідних оцінок може бути пов'язане з певними труднощами.

У випадку, коли необхідно прийняти рішення відносно одного проекту, слід порівняти внутрішню ставку прибутковості проекту $\boldsymbol{J}$ з діючою на ринку ставкою приведення $\boldsymbol{r}$. Якщо внутрішня ставка прибутковості проекту менша ставки приведення ($\boldsymbol{J} < \boldsymbol{r}$) проект слід відхилити, а при $\boldsymbol{J} \geq \boldsymbol{r}$ проект можна прийняти. Показник $\boldsymbol{J}$ дає оцінку середньої рентабельності проекту за весь період його реалізації. Якщо розглядається один проект, то оцінки на основі чистого приведеного доходу (***NPV***) та внутрішньої норми прибутковості співпадають.

Приклад 6.5. За умовами прикладу 6.2 знайти внутрішню норму прибутковості.

Розв'язування. IRR=16%.

Графік

Графік ілюструє знаходження J з використанням кривої, що відображає залежність ***NPV*** від r. Така крива ***NPV*** нагадаємо відповідає варіанту – один інвестиційний вклад і серія приблизно рівних надходжень.

Як бачимо при ставці приведення $r = 10\%$ проект можна прийняти, так як $J > r$, а при $r = 20\%$ проект слід відхилити, так як $J < r$. Такі ж висновки відносно даного проекту були отримані і на основі ***NPV***.

Термін окупності.

Термін окупності можна визначити в двох варіантах – на основі дисконтування членів потоку платежів та без дисконтування. Перший позначатимемо $\boldsymbol{n_d}$, другий $\boldsymbol{m}$. Величина $\boldsymbol{n_d}$ визначає число років, яке необхідне для того, щоб сума дисконтованих на момент закінчення інвестування чистих доходів була рівною величині інвестицій (бар'єрна точка для терміну). Тобто, це розрахунковий час, необхідний для повної компенсації інвестицій доходами, що надходять, з дисконтуванням обох потоків по ставці приведення. Другий показник $\boldsymbol{m}$ певним чином аналогічний першому, проте час отримання доходів не враховується і доходи не дисконтуються.

В найпростішому випадку термін окупності $\boldsymbol{m}$ визначається як відношення суми інвестицій до очікуваної середньої величини доходів:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{R}}. \qquad (6.9)$$

Такий розрахунок, очевидно, має сенс при відносно незначних коливаннях річних доходів відносно середньої. У фінансовому відношенні більш обґрунтованим є дисконтний термін окупності n_d.

Нехай розміри капітальних вкладень на початок терміну інвестування складають величину K. Доходи надходять у вигляді нерегулярного потоку річних платежів R_t. Необхідно знайти такий термін, при якому буде виконуватись рівність

$$\sum_{t=1}^{n_d}\left(R_t \cdot v^t\right) = K. \tag{6.10}$$

Приклад 6.6 За умовами прикладу 6.2 знайти терміни окупності (величини m та n_d).

Розв'язування. m=K/R=400000/140000=2,857 (років).
N_d =3,53 (років).

У випадку, коли інвестиції задані однією сумою K, а потік доходів утворює сталу ренту постнумерандо (R – член потоку), дисконтний термін окупності можна знайти з формули (6.3):

$$n_d = -\frac{ln\left(1 - \frac{K}{R} \cdot r\right)}{ln(1 + r)}. \tag{6.11}$$

Зауважимо, що дисконтний термін існує, якщо не порушуються певні співвідношення між доходами та розміром інвестицій. У випадку коли доходу утворюють річну сталу ренту, то потрібно $R > K \cdot r$. Це випливає з формули (6.11). При надходженні доходів у вигляді p–термінової ренти співвідношення має вигляд: $R > p \cdot K \cdot \left((1 + r)^{1/p} - 1\right)$.

Розділ 7. **Інвестиції в цінні папери**

Загальні відомості про цінні папери.

Предметом подальшого вивчення будуть інвестиції в цінні папери, які обертаються на фінансовому ринку. Основною складовою фінансового механізму є фінансові інструменти, тобто будь-які форми короткотермінового та довготермінового інвестування, торгівля якими здійснюється на фінансових ринках. Як складову фінансових інструментів в першу чергу виділяють цінні папери. Цінні папери – це грошові документи, які засвідчують право володіння частиною капіталу або про відносини позики; визначають взаємовідносини між організацією, яка їх випустила, та їх власником; передбачають, як правило, виплату доходу у вигляді дивідендів чи процентів, а також можливість передачі іншим особам грошових та інших прав на ці документи. Згідно з законодавством України на її території мають обіг (обертаються) такі цінні папери: акції акціонерних товариств; облігації; державні боргові зобов'язання; похідні цінні папери – будь-які цінні папери, що засвідчують право їх власника на купівлю та продаж вказаних вище цінних паперів.

Акція – цінний папір без встановленого строку обігу, що засвідчує пайову участь у статутному фонді акціонерного товариства, членство в акціонерному товаристві та право на участь в управлінні ним; дає право його власникові на одержання частини прибутку у вигляді дивіденду, а також на участь у розподілі майна при ліквідації акціонерного товариства.

Облігація – це цінний папір, що засвідчує внесення її власником грошей і підтверджує зобов'язання сплатити йому номінальну вартість цього цінного паперу в зазначений у ньому строк з виплатою фіксованого процента. Розділяють облігації іменні та на пред'явника, процентні та безпроцентні. Випускають облігації внутрішніх державних і місцевих позик, облігації підприємств (корпоративні).

Облігації є найбільш розповсюдженою формою боргових зобов'язань. Звичайно, що облігації державних та місцевих позик, які гарантуються владою і забезпечуються відповідним майном, є найбезпечніші. Акціонерні товариства можуть випускати облігації на суму, що не перевищує 25% від величини їх статутного фонду. Власник облігації не має права брати участь в управлінні товариством.

Облігація забезпечує її власнику деякий доход – у більшості випадків він регулярно отримує проценти по купонам і в кінці терміну викупну ціну. Доход від облігацій, зазвичай, нижчий ніж від інших видів цінних паперів, в той же час він більш надійний. В облігації інвестують вільні резерви пенсійні фонди, страхові компанії, інвестиційні фонди тощо.

Основні параметри облігації: **номінальна вартість** (*face value*), **викупна ціна** (*redemption value*) або правило її визначення, **дата погашення** (*date of maturity*), **норма прибутку** або **купонна процентна ставка** (*coupon rate*), **дати виплат процентів**.

Номінальна вартість облігації – це грошова сума, вказана на облігації, яку емітент бере в борг і зобов’язується виплатити її по закінченню терміну, вказаного на облігації.

Дата або **термін погашення** – це день, коли повинна бути виплачена номінальна вартість облігації.

Облігації, згідно з якими емітент має право викупу облігації ще до терміну їх погашення, називають **відкличними**. При зменшенні процентних ставок на фінансовому ринку емітент може продати новий випуск облігацій з поточним низьким рівнем купонних ставок. При цьому виторг від реалізації нових облігацій він може використати для викупу відкличних облігацій з високими процентними ставками.

Облігації зобов’язують емітента періодично (частіше раз у рік або півроку) виплачувати проценти від номінальної вартості. Відношення суми процентів, які сплачено за один період, до номінальної вартості облігації називають **купонною процентною ставкою**. Наприклад, якщо по облігації номінальною вартістю 1000 грн. виплачуються щороку проценти в розмірі 100 грн., то купонна ставка дорівнює $\mathbf{100\,/\,1000 = 0{,}1\ (10\%)}$.

Облігації від моменту випуску і до моменту їх погашення продаються і купуються на фінансовому ринку за ринковими цінами. Ринкова ціна в момент випуску може бути рівною номіналу (*at par*), нижчою за номінал, або з дисконтом (*discount bond*) і вищою за номінал, або з премією (*premium bond*). Дисконт в таких ситуаціях є скидкою з ціни, пов'язаною з низькою доходністю від облігації, а премія – переплата за майбутні високі доходи.

Розрізняють два види ринкових цін: повна ціна, яка включає не тільки вартість облігації, а й суму процентів за період від останньої їх виплати і до моменту продажу; чиста ціна, що складається із ринкової ціни за виключенням суми нарахованих процентів.

Оскільки номінали у різних облігацій суттєво різняться між собою, то часто виникає необхідність у співставленні ринкових цін. Таким показником є **курс** (*quoted price*). Під курсом розуміють ціну однієї облігації в розрахунку на 100 грошових одиниць номіналу:

$$\boldsymbol{K = \frac{P}{N} \cdot 100}\ , \qquad (7.1)$$

де $\boldsymbol{K}$ – курс облігації, $\boldsymbol{P}$ – ринкова ціна, $\boldsymbol{N}$ – номінал.

Наприклад, якщо облігація номіналом 1000 грн. продається за 960 грн., то її курс складе 96.

Прибуток від облігації складається з двох основних величин: процентів, що періодично отримуються по купонам; різниці між номіналом та ціною купівлі облігації.

Кількісний аналіз облігацій націлений на:

- розрахунок прибутковості (доходності) облігацій та ряду додаткових характеристик;
- визначення розрахункової ціни облігації в будь-який момент часу її дії;
- оцінку динаміки дисконту або премії по облігації.

Інвестиції в цінні папери пов'язані з певним ризиком. Виділимо два основних види ризику – кредитний ризик (*credit risk*) та ринковий (*market risk*). Кредитний ризик визначається , як можливість відмови у виплаті процентів і основної суми боргу (викупної ціни). Він характеризує кредитоспроможність та надійність самого емітента. Ринковий ризик, який іноді називають процентним (*interest rate risk*), в значній мірі визначається змінами процентної ставки на ринку кредитів.

Вимірювання дохідності облігацій.

Дохідність облігацій характеризується декількома показниками. Розрізняють купонну (*coupon rate*), поточну (*current, running yield*) і повну дохідність (*redemption yield*).

Купонна дохідність визначається при випуску. Поточна дохідність характеризує відношення надходжень по купонам до ціни купівлі облігації і вона не враховує друге джерело прибутку – отримання номіналу або викупної ціни в кінці терміну. Тому цей показник непридатний при порівнянні дохідності різних видів облігацій. Так, облігації з нульовим купоном мають поточну дохідність рівну нулю, в той самий час вони можуть бути досить прибутковими, якщо врахувати весь термін їх дії.

Найбільш інформативним є показник повної дохідності, який враховує обидва джерела прибутку. Саме цей показник придатний для порівняння дохідності інвестицій в облігації та інші цінні папери. Повна дохідність (ставка поміщення) визначає реальну ефективність інвестицій в облігації для інвестора у вигляді річної ставки складних процентів. Тобто, нарахування процентів за такою ставкою на ціну купівлі облігації еквівалентно виплаті купонного доходу і сумі погашення облігації в кінці терміну.

Розглянемо методику визначення показників дохідності різних видів облігацій.

А) *Облігації без обов'язкового погашення з періодичною виплатою процентів.*

Введемо позначення: q – заявлена норма річного прибутку (купонна ставка процента); r_t – поточна дохідність; r – повна дохідність.

Поточна дохідність дорівнює

$$r_t = \frac{N \cdot q}{P} = \frac{q}{K} \cdot 100. \qquad (7.2)$$

Якщо по купонам виплати здійснюються p разів на рік, кожний раз по ставці $q\,/\,p$, то і в цьому випадку на практиці застосовують формулу (7.2).

Оскільки прибуток по купонам є єдиним джерелом поточних надходжень, то повна дохідність для розглядуваних облігацій дорівнює поточній у випадку, коли виплати по купонам щорічні, тобто $r = r_t$. Якщо ж проценти виплачуються p разів на рік, кожний раз по нормі $q\,/\,p$, то

$$r = \left(1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{100}{K}\right)^p - 1 = \left(1 + \frac{r_t}{p}\right)^p - 1. \qquad (7.3)$$

Приклад 7.1. Вічна рента, що приносить прибуток на рівні **5%** річних, куплена по курсу **90**. Яка фінансова ефективність інвестиції при умові, що проценти виплачуються: 1) раз на рік; 2) щоквартально ($p = 4$)?

Розв’язування. За формулою (7.3):

1) r=(1+0,05*100/90)-1=0,0555 (5,5%);
2) r=(1+0,5/36)^4-1=0,0567 (5,67%).

Б) *Облігації без виплати процентів.*

Даний вид облігації забезпечує її власнику прибуток у розмірі різниці між номіналом та ціною купівлі. Для визначення повної дохідності прирівняємо теперішню вартість номіналу до ціни купівлі:

$$N(1 + r)^{-n} = P, \quad \text{або} \quad (1 + r)^{-n} = \frac{K}{100},$$

де n – термін до викупу (погашення) облігації. Розв’язавши дану рівність відносно r, отримаємо

$$r = \frac{1}{\sqrt[n]{K\,/\,100}} - 1. \qquad (7.4)$$

Приклад 7.2 Корпорація „Сана” випустила облігації з нульовим купоном з погашенням через 4 роки. Курс реалізації 52. Якою буде дохідність облігації на дату погашення?

Розв’язування. За формулою (7.4):

r=1/(52/100)^(1/4)-1=0,1776 (17,76%).

В) *Облігації з виплатою процентів і номіналу в кінці терміну.*

Проценти в цьому випадку нараховуються за весь термін і виплачуються однією сумою разом з номіналом. Купонного прибутку немає, тому поточну дохідність умовно можна вважати нульовою, оскільки відповідні проценти отримують в кінці терміну. Повну дохідність знайдемо із співвідношення:

$$N(1+q)^{n}\cdot(1+r)^{-n}=P \quad \text{або} \quad \left(\frac{1+q}{1+r}\right)^{n}=\frac{K}{100}.$$

Звідки

$$r=\frac{1+q}{\sqrt[n]{K/100}}-1. \qquad (7.5)$$

Приклад 7.3 Облігація, що приносить **8%** річних відносно номіналу, куплена по курсу **62**, термін до погашення 4 роки. Знайти повну дохідність, якщо номінал та проценти виплачуються в кінці терміну.

Розв’язування. За формулою (7.5):

R=(1+0,08)/(62/100)^(1/4)-1=0,2171 (21,71%).

Г) *Облігація з періодичною виплатою процентів і погашенням номіналу в кінці терміну*.

Цей вид облігацій найбільш поширений в сучасній практиці. Для такої облігації можна визначити всі три показника дохідності: купонну, поточну і повну. Поточна дохідність розраховується за формулою (7.2). Для визначення повної дохідності необхідно поточну вартість всіх надходжень прирівняти до ціни облігації. Оскільки надходження по купонам складають сталу ренту постнумерандо, член якої $R = Nq$, то теперішня вартість її складе величину:

$Nq \cdot PVIFA(n;r) = Nq \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$, якщо купони виплачуються щорічно. Дисконтована величина номіналу дорівнює $N(1+r)^{-n}$. В цьому випадку отримаємо рівність

$$P = N \cdot (1+r)^{-n} + Nq \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}. \qquad (7.6)$$

Звідки

$$\frac{K}{100} = (1+r)^{-n} + q \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}. \qquad (7.7)$$

Якщо купони виплачуються p разів на рік ($p > 1$), то використовується рівність

$$\frac{K}{100} = (1+r)^{-n} + q \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{(1+r)^{1/p} - 1}. \qquad (7.8)$$

В наведених формулах (7.7) та (7.8) $(1+r)^{-n}$ означає дисконтний множник по невідомій річній ставці дохідності. В закордонній практиці для облігацій з піврічними та квартальними виплатами поточного доходу для дисконтування застосовується річна номінальна ставка, причому кількість разів дисконтування на рік зазвичай приймається рівним числу виплат купонного доходу ($p = m$). Таким чином, вихідна рівність для визначення повної дохідності має вигляд:

$$\frac{K}{100} = \left(1 + \frac{j}{p}\right)^{-pn} + \frac{q}{m} \cdot \frac{1-(1+j/p)^{-pn}}{j/p}, \qquad (7.9)$$

де j – номінальна річна ставка, pn – загальне число купонних виплат, q – річна купонна ставка.

При розв’язуванні наведених рівнянь відносно невідомої величини r або j, застосовують якийсь наближений ітераційний метод або лінійну інтерполяцію.

Знайдемо повну дохідність за допомогою лінійної інтерполяції:

$$r = r_H + \frac{K - K_H}{K_B - K_H} \cdot (r_B - r_H), \qquad (7.10)$$

де r_H, r_B – нижнє та верхнє значення ставки повної дохідності, що обмежують інтервал, в межах якого, як очікується, знаходиться невідоме значення ставки, K_H, K_B – розрахункові значення курсу відповідно для ставок r_H, r_B. Інтервал ставок для інтерполяції визначається з урахуванням того, що $r > q$ при $K < 100$.

На практиці іноді застосовують так званий метод середніх, згідно якого дохідність обчислюється як відношення середнього прибутку за один період (частіше рік) до середньої ціни облігації:

$$r \approx \frac{qN + (N - P)/n}{(N + P)/2} = \frac{q + \left(1 - \frac{K}{100}\right)\Big/ n}{\left(1 + \frac{K}{100}\right)\Big/ 2}. \qquad (7.11)$$

У цій формулі середній річний прибуток від облігації співвідноситься з її середньою ціною. Прості розрахунки відплачують значною втратою точності оцінки r. Причому, чим більше курс відрізняється від **100,** тим більша похибка.

Практичне застосування формула (7.11) може мати для знаходження якогось наближеного значення r при подальшому застосуванні лінійної інтерполяції і знаходженні більш точнішого значення ставки повної дохідності.

Приклад 7.4 Облігація з терміном **5** років, проценти по якій виплачуються раз на рік по нормі **8%**, куплена по курсу **70**. Визначити поточну та повну дохідність облігації.

Розв'язування. Поточну дохідність знаходимо за формулою (7.2): r_t=0,08*100/70=0,1143 (11,43%). Для знаходження повної дохідності використаємо опцію «Підбір параметра» і формулу (7.7):
r=0,1748 (17,48%).

Зауваження. Всі розглянуті вище формули для розрахунку повної дохідності передбачають, що оцінка проводиться на початок терміну облігації, або на дату виплати процентів, при умові, що проценти на цю дату вже виплачені. Для випадку, коли оцінка здійснюється на момент між двома датами виплат процентів, наведені формули дадуть зміщені оцінки, оскільки не враховують накопичені проценти. Необхідно взяти до уваги, що термін погашення і виплат процентів до моменту оцінки скорочується. Дохідність у цьому випадку можна визначити на основі рівності:

$$\frac{K}{100} = (1+r)^{-t}\left((1+r)^{-d} + q \cdot \frac{1-(1+r)^{-d}}{r}\right), \qquad (7.12)$$

де t – частка купонного періоду, d – кількість купонів, що залишилась.

Характеристики термінів надходження коштів та вимірювання ризику.

Для обґрунтованого вибору облігації недостатньо мати дані про її дохідність. Необхідно якимось чином оцінити і ризик. Останній, очевидно, пов'язаний з терміном облігації – чим більший термін, тим вищий ризик. Безпосереднє порівняння термінів не дозволяє зробити правильні висновки, оскільки при цьому не враховуються особливості розподілу доходів у часі. Ясно, що облігації з нульовим купоном більш ризикові, ніж облігації з періодичною виплатою процентів при однакових термінах. Для характеристики облігацій з цієї точки зору застосовують два види середніх термінів платежів. Перша середня – середній арифметичний термін (*average life*), друга – середній термін дисконтованих платежів (*duration*).

Середній арифметичний термін узагальнює терміни всіх видів виплат у вигляді зваженої середньої арифметичної величини. Ваговими коефіцієнтами беруть розміри виплат. Для облігацій із щорічною виплатою купонів і погашенням номіналу в кінці терміну маємо:

$$T = \frac{\sum_{l} lS_l}{\sum_{l} S_l} = \frac{qN\sum_{l} l + nN}{qNn + N}, \quad l = 1,2,...,n; \qquad (7.13)$$

де T – середній термін, l – терміни платежів по купонах в роках, S_l – сума платежу, q – купонна ставка, n – загальний термін облігації.

Відомо, що для $l = 1,2,...,n \quad \sum l = \frac{n(n+1)}{2}$, тому замість (7.13) можна застосувати

$$T = \frac{\frac{q(n+1)}{2} + 1}{q + 1/n}. \qquad (7.14)$$

Очевидно, що $T < n$. У облігацій з нульовим купоном $T = n$. Неважко зрозуміти, що чим більший купонний процент, тим менший середній термін.

Приклад 7.5. Знайти середній арифметичний термін для двох облігацій з виплатами по купонам **6** та **12%** від номіналу, термін облігацій 10 років.

Розв'язування. За формулою (7.14):
Для першої облігації (із 6% купоном) Т=8,3125;
Для другої облігації (із 12% купоном) Т=7,5454.

У випадку, коли купони виплачуються p разів на рік, маємо:

$$T = \frac{\frac{q(n+1/p)}{2} + 1}{q + 1/n}. \qquad (7.15)$$

Очевидно, що перехід від річної виплати процентів до виплат по півріччям або щоквартально дещо зменшує середній арифметичний термін облігації. Чим менший середній арифметичний термін, тим швидше отримує віддачу від облігації її власник і, таким чином, менший ризик.

Скориставшись поняттям „кредитна послуга”, під якою зазвичай розуміють добуток суми кредиту на термін, чисельник у формулі (7.13) можна розглядати як повний розмір кредитної послуги по облігації. Середній арифметичний термін вказує на момент в терміні облігації, коли розміри кредитних послуг до середнього терміну і після цього моменту врівноважені. Механічний аналог середнього терміну – точка рівноваги платежів у часі.

Середній термін дисконтованих платежів представляє також середню зважену величину термінів платежів, проте зважування тут більш „тонке”, яке враховує часову цінність грошей. Позначатимемо даний показник як D. Нехай проценти виплачуються щорічно, тоді маємо:

$$D = \frac{\sum_{l} l S_l v^l}{\sum_{l} S_l v^l}, \quad l = 1,2,...,n; \tag{7.16}$$

де v – дисконтний множник.

Знаменник формули за означенням дорівнює ринковій ціні облігації (див. (7.6)). Після перетворень легко отримати наступну формулу:

$$D = \frac{q\sum_{l} l v^l + v^n}{K/100}, \quad l = 1,2,...,n. \tag{7.17}$$

Дисконтування проводиться за ставкою поміщення.

Приклад 7.6. Знайти середній термін дисконтованих платежів для облігації з терміном **5** років, проценти по якій виплачуються раз на рік по нормі **8%**, купленої по курсу **70**.

Розв’язування. У прикладі 7.4 була знайдена повна прибутковість для такої облігації r=0,1748 (17,48%). Знайдемо дюрацію даної облігації за допомогою відповідної фінансової функції D= DURATION(E233;E234;0,08;0,1748;1)=6,263.

Очевидно, що для облігацій з нульовим купоном $D = T = n$. В інших випадках $D < T < n$.

Середній термін дисконтованих платежів не тільки є узагальнюючим вимірювачем терміну платежів, а й мірою чутливості ціни облігації до незначної зміни рівня процентної ставки на ринку. Проте для розв'язання цієї задачі застосовується не сама величина D, а її модифікація, яку називають **модифікованим середнім терміном дисконтованих платежів** і позначають MD (*modified duration*). Цей показник часто називають **середньою Маколея**:

$$MD = \frac{D}{1 + r/p}, \qquad (7.18)$$

де r – повна прибутковість облігації, p – кількість виплат процентів за рік.

Можна довести, що MD – **показник еластичності ціни облігації по ринковій процентній ставці,** тобто $MD = -\frac{1}{K} \cdot \frac{\Delta K}{\Delta r} \cdot 100$, де $\Delta K, \Delta r$ – зміни ціни і ринкової процентної ставки в процентах.

З наведеного виразу випливає, що

$$\Delta K = -0,01 \cdot MD \cdot K \cdot \Delta r. \qquad (7.19)$$

Формула (7.19) застосовується на практиці для оцінювання коливань в ціні облігацій при незначних (до 1%) змінах ринкової процентної ставки.

Приклад 7.7. Для облігації прикладу 7.4 оцінити вплив на її ціну очікуване підвищення ринкової процентної ставки з 17,54% до 18%.

Розв'язування. Середня Маколея MD= MDURATION(E233;E234;0,08;0,1748;1)=5,3311. За формулою (7.19): dK=-0,01*5,3311*70*0,46=-1,72. Отже, очікуване підвищення ринкової процентної ставки на 0,46% викличе зниження ціни облігації приблизно на 1,72%.

Розділ 8. **Концепція ризику та методи його оцінки**

Ризик та дохідність у фінансовому аналізі розглядаються як дві тісно пов'язані категорії і можуть асоціюватись як з окремим видом фінансового активу, так і з їх комбінацією.

У найбільш загальному розумінні *ризик* – це імовірність виникнення збитків або недоотримання доходів у порівнянні з прогнозованим варіантом. Можна сформулювати і більш деталізовані підходи до визначення цього поняття. Зокрема, *ризик* може бути визначений як рівень конкретних фінансових втрат, що виражаються: а) можливістю недосягнення поставленої цілі; б) невизначеністю прогнозованого результату; в) суб'єктивністю оцінки прогнозованого результату.

Ризик є досить складною і багатовекторною категорією. Не випадково в науковій літературі приводяться десятки видів ризику: виробничий, валютний, інвестиційний, екологічний, політичний та інші. При цьому основною класифікаційною ознакою частіше всього слугує об'єкт, ризиковість якого намагаються проаналізувати. Інвестиції в цінні папери також пов'язані з ризиком. При цьому виділяють два основних ризики – кредитний ризик (credit risk) та ринковий ризик (market risk). Кредитний ризик визначається, як можливість відмови виплати процентів і основної суми боргу (викупної ціни). Він характеризує кредитоспроможність та надійність самого емітента. Ринковий ризик (процентний – interest rate), в значній мірі визначається змінами процентної ставки на ринку кредитів.

Ризик фінансового активу характеризується в значній мірі варіацією доходу (або дохідності), який може бути отриманий завдяки володінню даним активом. Так, наприклад, державні цінні папери мають відносно невеликий ризик, оскільки варіація доходу по ним в державі зі стабільною економікою практично рівна нулю. Навпаки, звичайна акція будь-якої компанії має значно більший ризик, оскільки дохід по таким акціям може дуже сильно варіюватись.

Цілком очевидно, що оскільки ризик є імовірнісною оцінкою, його кількісне вимірювання не може бути однозначним і безумовним. Більш того, проблема оцінки ризику фінансових активів має багато аспектів, як із позиції методів оцінки, так і з позиції стратегії і тактики управління цими активами.

Кількісно ризик може бути охарактеризований як деякий показник, що вимірює варіацію доходу або дохідності. Таким чином, для цієї цілі можна використати ряд статистичних показників, зокрема: *розмах варіації, дисперсію, середнє квадратичне відхилення* (або стандартне відхилення) та *коефіцієнт варіації*.

Згадаємо коротку характеристику цих показників. Нехай задано ряд статистичних значень деякої випадкової величини $X:\quad x_1, x_2, ..., x_n$.

Розмах варіації:

$$R = x_{max} - x_{min}. \qquad (8.1)$$

Недоліки: дає грубу оцінку; є абсолютним показником і його застосування в порівняльному аналізі обмежено; його значення дуже залежить від значень на кінцях ранжованого ряду.

Дисперсія (варіація):

$$V = Var(X) = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \overline{x}\right), \qquad (8.2)$$

де $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$ - середнє значення ознаки (випадкової величини X).

Середнє квадратичне відхилення (стандарт) вказує на середнє відхилення значень ознаки відносно середньої арифметичної:

$$\sigma = \sqrt{Var}. \qquad (8.3)$$

Спільний недолік: абсолютні показники, значення яких залежить від абсолютних значень ознаки.

Коефіцієнт варіації:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%. \qquad (8.4)$$

По відношенню до оцінки ризику цінних паперів необхідно зробити три зауваження:

1. Кількісно ризик може бути оцінений як варіація доходу або дохідності. Перевагу віддають дохідності, як відносному показнику, що не залежить від розміру інвестицій і може бути використаний для співставлень у просторово–часовому розрізі.
2. Основними показниками ризику на ринку капіталів є дисперсія та середнє квадратичне відхилення, так як базовим показником при розрахунках є дохідність (відносний показник). Тому застосовувати коефіцієнт варіації нагальної потреби немає.
3. Наведені формули розраховані на дискретні ряди. Стосовно фінансових активів вони можуть застосовуватись у ретроспективному аналізі. Проте більш важливим є перспективний аналіз, в рамках якого більшість величин, які становлять інтерес для інвестора оцінюються в імовірнісних термінах. Тому при оцінці ризику використовують модифікацію формул (8.2) та (8.3), в яких ваговими коефіцієнтами значень очікуваної дохідності є імовірності їх появи.

Необхідно відмітити ще одну дуже важливу особливість аналізу ризику та дохідності. Як і будь-яка імовірнісна категорія, ризик може бути оцінений по-різному. Проте мова повинна йти не тільки і не скільки про відмінності в алгоритмах та критеріях оцінки, скільки про те, чи розглядається даний фінансовий актив окремо, чи як складова частина набору активів. При розгляді активу окремо ніяких проблем теоретичного характеру не виникає і його ризиковість може бути виміряна за допомогою однієї із розглянутих вище статистик. Проте, як і в будь-якому перспективному аналізі, інвестор стикається з проблемою оцінки очікуваних значень вихідних параметрів. Зокрема, якою б оцінкою інвестор не користувався, йому необхідно оцінити очікувану дохідність активу. Частіше всього роблять три оцінки: песимістичну

$\boldsymbol{r_p}$, найімовірнішу $\boldsymbol{r_m}$ та оптимістичну $\boldsymbol{r_o}$. Безумовно, число наслідків може бути збільшене, проте ступінь вірогідності очікуваних значень дохідності та імовірностей їх здійснення при цьому очевидно знизиться.

Якщо обмежитись трьома оцінками, то найбільш загальною мірою ризику може бути розмах варіації очікуваної дохідності, що розраховується за формулою:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r_o} - \boldsymbol{r_p}. \quad (8.5)$$

Приклад 8.1 Підприємцю необхідно вибрати кращий із двох альтернативних фінансових активів, якщо відомі наступні їх характеристики:

Показник	Варіант А	Варіант В
Ціна цінного паперу ($)	2000	3000
Дохідність (експертна оцінка), % песимістична найімовірніша оптимістична	 13 14 15	 12 14,5 16
Розмах варіації	2	4

Вважається, що усі три оцінки рівноймовірні.

Розв'язування. Очевидно, слід обрати перший актив, який має менший варіаційний розмах очікуваної дохідності.

Із представлених розрахунків видно, що обидва фінансових активи мають приблизно однакову найімовірнішу дохідність, проте другий з них може вважатись більш ризикованим. Зауважимо, що якби був вибраний якийсь інший критерій оцінки ризику, то відмінності могли бути не такими суттєвими.

Можна розраховувати і інші показники ризику, основані на побудові імовірнісного розподілу значень дохідності та обчисленні стандартного відхилення від середньої дохідності і коефіцієнта варіації, які і розглядаються як ступінь ризику, що асоціюється з даним активом.

Очевидно, чим вищий коефіцієнт варіації, тим більш ризиковим є даний вид активу. Послідовність аналітичних кроків у цьому випадку наступна:

- визначаються прогнозні оцінки значень дохідності r_j та імовірності їх появи $p_j; \quad j = 1,2,...,n;$
- розраховується найімовірніша дохідність r_m як математичне сподівання (середнє значення) за формулою:

$$r_m = \sum_{j=1}^{n} r_j p_j \, ; \qquad (8.6)$$

- розраховується стандартне відхилення за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(r_j - r_m\right)^2 \cdot p_j} \, ; \qquad (8.7)$$

- розраховується коефіцієнт варіації за формулою:

$$CV = \frac{\sigma}{r_m} \cdot 100\%. \qquad (8.8)$$

Приклад 8.2. За умовами попереднього прикладу оцінити ризик кожного з фінансових інструментів, якщо в обох випадках імовірність найімовірнішої дохідності складає **50%**, а імовірність песимістичної та оптимістичної оцінок рівні і складають **25%**.

Розв'язування. При такому розподілі імовірностей наслідків як і раніше ми можемо стверджувати, що у обох активів приблизно однакова найімовірніша дохідність і другий актив може вважатись вдвічі більш ризиковим. Проте у випадку, коли імовірність найімовірнішої дохідності складатиме **60%**, песимістичної оцінки – **10%,** а оптимістичної оцінки – **30%** для обох варіантів, то коефіцієнти варіації активів А та В відповідно складуть **4,22%** і **7,64%**. В такому випадку вже не можна стверджувати, що другий актив вдвічі більш ризиковий.

Ризик інвестиційного портфеля.

Приймаючи рішення про доцільність інвестування грошових коштів у фінансові активи, інвестор повинен перш за все оцінити ризик, який притаманний цим активам, потім очікувану їх дохідність, а далі визначити чи достатня ця дохідність для компенсації очікуваного ризику. Частіше всього інвестор працює не з окремим активом, а з деяким їх набором, що називають портфелем цінних паперів або інвестиційним портфелем. Звідси випливає, що оцінюючи ризик конкретного активу з інвестиційного портфеля, можна діяти в двох напрямках: або розглядати цей актив окремо від інших, або вважати його невід'ємною частиною портфеля. Виявляється, що оцінка ризику активу і доцільності операцій з ним при цьому змінюються. Більш того, актив, що має високий рівень ризику при розгляді його окремо, може бути практично безризиковим з позиції портфеля і при певному сполученні активів, які входять до нього. Наприклад, теоретично можна підібрати два фінансових активи, кожен з яких має високий рівень ризику, а їх поєднання складає абсолютно безризиковий портфель.

Отже, ризик активу величина зміна і залежить, зокрема, від того, в якому контексті розглядається даний актив: окремо чи як складова частина інвестиційного портфеля. В першому випадку визначальним є загальний ризик активу, який кількісно вимірюється, наприклад, стандартним відхиленням можливих наслідків відносно його очікуваної дохідності. В другому випадку визначальним вже є ринковий ризик активу, який представляє собою частку ризику даного активу в ризику портфеля в цілому.

При оцінці портфеля і доцільності операцій з активами, що є його складовими частинами, необхідно оперувати показниками дохідності і ризику портфеля в цілому. Оцінюючи можливість тієї чи іншої операції, пов'язаної зі зміною структури портфеля і його характеристик, частіше всього розмірковують в термінах очікуваної дохідності портфеля і відповідного їй ризику. Можна показати, що дохідність портфеля $\boldsymbol{d_p}$ лінійно залежить від дохідності d_j активів, які входять до нього, і може бути розрахована за формулою середнього арифметичного:

$$d_p = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot d_j , \qquad (8.9)$$

де d_j – дохідність j-го активу, w_j – частка j-го активу в портфелі, n – число активів у портфелі.

Як і у випадку з окремими активами, мірою ризику портфеля може бути варіація його дохідності. Оскільки всі розглянуті вище показники ризику нелінійно залежать від дохідності, зв'язок між ризиком портфеля і ризиком активів, що входять до нього, носить більш складний характер і не описується формулою середнього арифметичного. Як відомо з курсу статистики, у багатовимірному випадку необхідно враховувати взаємозв'язок значень дохідності активів портфеля за допомогою показника коваріації та коефіцієнта кореляції.

Зокрема, якщо в якості міри ризику вибрано середнє квадратичне відхилення, то його значення для портфеля, що містить n активів, може бути знайдене за формулою:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j^2 \cdot \sigma_j^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_i \cdot w_j \cdot k_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j} , \qquad (8.10)$$

де $V_i = \sigma_i^2$ – варіація дохідності i-го активу, $k_{ij} = \dfrac{V_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ – коефіцієнт кореляції між очікуваними дохідностями i-го і j-го активів, V_{ij} - коваріація між дохідностями активів (або кореляційний момент K_{ij}).

Зауважимо, що часто замість середньоквадратичного відхилення σ_p в якості міри ризику портфеля використовують варіацію (дисперсію):

$$\boldsymbol{V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i \cdot w_j \cdot V_{ij}}. \qquad (8.10^*)$$

Нагадаємо, що $\boldsymbol{V_{ii} = \sigma_i^2}$.

Для портфеля з двох активів формула (8.10) суттєво спрощується і має вигляд:

$$\boldsymbol{\sigma_p = \sqrt{w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot k_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}}, \qquad (8.11)$$

Безумовно, якщо інвестор володіє портфелем цінних паперів, він зацікавлений в першу чергу в середній дохідності портфеля в цілому, проте задача оцінки окремого активу також представляє певний інтерес, зокрема, для граничного випадку, коли інвестиційний портфель складається з одного цінного паперу. Оцінки, які використовуються в цьому випадку і отримуються на основі наведених вище формул, достатньо прості і наочні в плані їх інтерпретації. Ситуація ускладнюється при переході до портфеля з великим числом активів, які його складають. В цьому випадку виникає ряд проблем як теоретичного, так і обчислювального характеру.

По-перше, в ситуації з портфелем ризик, який асоціюється з якимось конкретним активом, не може розглядатись окремо. Будь-яка нова інвестиція повинна аналізуватись з позиції її впливу на зміну дохідності та ризику інвестиційного портфеля в цілому. Таким чином, в цьому випадку визначальним буде не ризик активу, що розглядається окремо, а ризик портфеля в цілому і вплив того чи іншого активу у випадку включення його в портфель чи вилучення звідти.

По-друге, оскільки всі фінансові інвестиції відрізняються по рівню дохідності і ризику, їх можливі сполучення в портфелі осереднює ці кількісні характеристики, а у випадку оптимальної їх комбінації можна добитися значного зниження ризику інвестиційного портфеля.

По-третє, оптимальність портфеля, під якою розуміється таке сполучення активів, що входять до нього, яке забезпечує найбільшу прийнятну дохідність в середньому із всіх доступних варіантів, не може бути досягнута простим відбором найбільш прибуткових активів. Така на перший погляд правильна методика не завжди вірна, оскільки майже завжди призводить до збільшення ризику портфеля.

По-четверте, варіація дохідності має місце не тільки в просторі, а і в динаміці, тобто тенденції дохідності двох випадково вибраних з портфеля активів зовсім не обов'язково співпадають, більш того, вони можуть бути різнонаправленими. Користуючись різнонаправленістю тенденцій дохідності, можна оптимізувати портфелі, наприклад, за рахунок зниження ризику при незмінній дохідності.

По-п'яте, оскільки мова йде про очікувані значення показників, яких в рамках імітаційного аналізу може бути нескінченно багато, то суттєво ускладнюються і обчислювальні процедури.

Ефекти диверсифікації, що понижують ризик.

Щоб продемонструвати ефекти диверсифікації, що понижують ризик, припустимо, що цінний папір **А** має стандартне відхилення 15%, а цінний папір **В** має стандартне відхилення 14%. Припустимо також, що вагові коефіцієнти (частки) активів у портфелі однакові.

Розглянемо спочатку випадок, коли доходи по активам повністю корельовані і зв'язок прямий, тобто коефіцієнт кореляції $\boldsymbol{k_{12} = +1}$.

Середнє квадратичне відхилення (ризик) портфеля складе:

$$\boldsymbol{\sigma_p = \sqrt{0{,}5^2 \cdot 0{,}14^2 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}15^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}15} =}$$
$$\boldsymbol{= 0{,}145 \;\; (14{,}5\%)}$$

Це показує, що у даному конкретному випадку ризик портфеля – це середній зважений ризик окремих активів.

Розглянемо, що трапиться, коли цінні папери мають кореляцію $\boldsymbol{k_{12} = 0{,}2}$. У цьому випадку середнє квадратичне відхилення портфеля складе:

$$\boldsymbol{\sigma_p} = \sqrt{\mathbf{0{,}5^2 \cdot 0{,}14^2 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}15^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}15}} =$$
$$= \mathbf{0{,}1124}\ \ \boldsymbol{(11{,}24\%)}$$

Відмітимо, що число **11,24%** менше, ніж середнє квадратичне відхилення обох окремо взятих цінних паперів.

Наступний крок – дослідження другого особливого випадку, коли два активи мають повністю негативну кореляцію, тобто $\boldsymbol{k_{12} = -1}$.

Середнє квадратичне відхилення портфеля буде становити:

$$\boldsymbol{\sigma_p} = \sqrt{\mathbf{0{,}5^2 \cdot 0{,}14^2 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}15^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot} \boldsymbol{(-1)} \mathbf{\cdot 0{,}14 \cdot 0{,}15}} =$$
$$= \mathbf{0{,}005}\ \ \boldsymbol{(0{,}5\%)}$$

Ризик портфеля практично зведений до нуля, тому що у випадку, коли один актив зростає, другий знижується на таку ж величину, а отже, вартість портфеля не змінюється. Це є базою для операцій хеджування, в яких негативна кореляція досягається продажою позиції по інструменту, який має високий ступінь позитивної кореляції з тим активом, який потребує хеджування. Таким чином, коротка позиція по хеджуючому інструменту утворює негативну кореляцію між довгою та короткою позиціями.

Так як доходи по цінним паперам в цілому не повністю корельовані, середнє квадратичне відхилення портфеля буде менше, ніж середнє значення середніх квадратичних відхилень окремих цінних паперів. Більш того, середнє квадратичне відхилення зменшується, коли знижується ступінь кореляції пар активів.

Таким чином, ефективна диверсифікація – це не просто додавання активів до портфеля, а додавання таких активів, доходи яких мають саму низьку кореляцію з активами, присутніми в портфелі.

Раніше ми бачили ефект ступеня кореляції на диверсифікацію. Розглянемо ситуацію, коли кількість активів в портфелі зростає.

Припустимо, що є велика кількість активів, доступних для інвестицій і всі доходи по активам незалежні. Вираз для середньоквадратичного відхилення (8.10), що характеризує ризик, скоротиться до наступного:

$$\boldsymbol{\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j^2 \cdot \sigma_j^2}}\,. \tag{8.12}$$

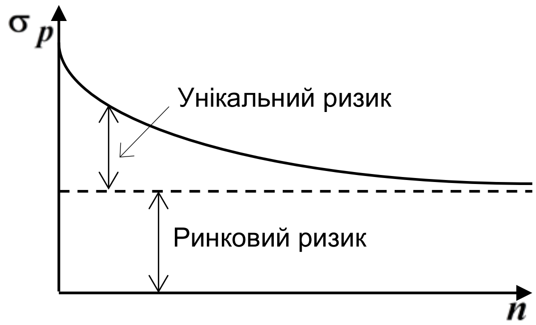
Так як передбачається, що всі доходи по активам незалежні, коваріації рівні нулю. Припустимо також, що інвестовані суми в кожний із $\boldsymbol{n}$ активів рівні між собою, тоді всі вагові коефіцієнти рівні $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$, і стандартне відхилення портфеля матиме вигляд:

$$\boldsymbol{\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sigma_j^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_j^2}{n}\right)}}\,. \tag{8.13}$$

Вираз в дужках - це середня арифметична дисперсій активів у портфелі. При збільшенні числа активів $\boldsymbol{n}$ у портфелі, дисперсія портфеля зменшується, оскільки величина $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$ зменшується.

Шляхом диверсифікації звести ризик до нуля неможливо, тому що ризик портфеля складається з двох частин: унікального ризику та ринкового ризику

Унікальний ризик може бути усунений за рахунок диверсифікації. Ринковий ризик не можна зменшити, змінюючи структуру портфеля цінних паперів. Це пов’язано з тим, що дохідності цінних паперів корелюють між



собою.

Ефективні портфелі. Задача Марковиця.

Кожен інвестор намагається сформувати портфель цінних паперів з можливо більшою очікуваною дохідністю і можливо меншим ризиком. Зрозуміло, що неможливо «гнатися за двома зайцями», тому потрібно зробити певний вибір між ефективністю та ризиком (цей вибір визначається відношенням суб’єкта, що приймає рішення – СПР до ефективності та ризика).

Розглянемо два портфелі, які оцінюються за двома характеристиками: ефективністю та ризиком. Перший з ефективністю r_1 та ризиком σ_1, другий - з ефективністю r_2 та ризиком σ_2. Кажуть, що другий портфель домінований першим (або перший домінує другий), якщо $r_1 \geq r_2$ і $\sigma_1 \leq \sigma_2$, причому хоча б одна із нерівностей строга.

Недоміновані портфелі, тобто такі, які мають найменший ризик при заданій очікуваній дохідності або найбільшу очікувану дохідність при заданому рівні ризику, називають *ефективними портфелями (або оптимальні за Парето)*. Сформувати ефективний портфель означає знайти частки капіталу $w_j^*,\ j = 1,2,...,n;$ які слід вкласти в цінні папери j-го виду, щоб отримати найменший ризик V_p^* при заданій очікуваній дохідності r_p або найбільшу очікувану дохідність r_p^* при заданому рівні ризику V_p, тобто необхідно розв'язати наступні задачі:

$$\begin{cases} V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j V_{ij} \quad (min) \\ \sum_{j=1}^{n} w_j r_j = r_p \\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \end{cases} \qquad (8.14)$$

де r_p – задана очікувана дохідність;

$$\begin{cases} r_p = \sum_{j=1}^{n} w_j r_j \quad (max) \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j V_{ij} = V_p \\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \end{cases} \qquad (8.15)$$

де V_p – заданий рівень ризику.

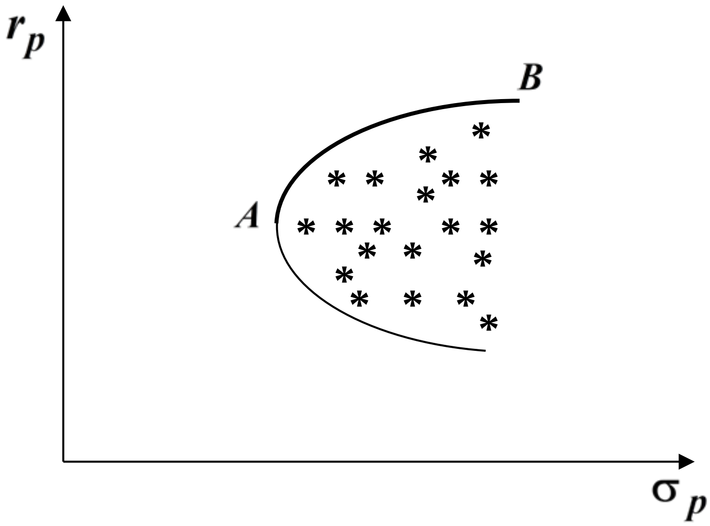
Задача (8.14) відома як задача Марковиця. За постановку та дослідження цієї задачі вчений був удостоєний Нобелівської премії.

Нехай знайдено оптимальний розв'язок задачі (8.14) або (8.15), тобто, знайдені частки капіталу $w_j^*, j = 1,2,...,n;$ ефективного портфеля. Якщо деяка частка $w_k^* > 0$, то це означає, що інвестор повинен вкласти w_k^* частки свого капіталу в k-ий вид цінних паперів. Якщо ж $w_k^* < 0$, то інвестору слід взяти в борг цінні папери k-го виду на суму, рівну w_k^* частки свого капіталу.

Якщо взяти в борг неможливо, то у задачі (8.14) та (8.15) слід ввести додаткові обмеження $w_j^* \geq 0,\ j = 1,2,...,n$.

Для розв'язання задач (8.14) та (8.15) з додатковою умовою невід'ємності змінних і без неї розроблені пакети прикладних програм. Для розв'язування цих задач в учбових цілях можна використати електроні таблиці Excel.

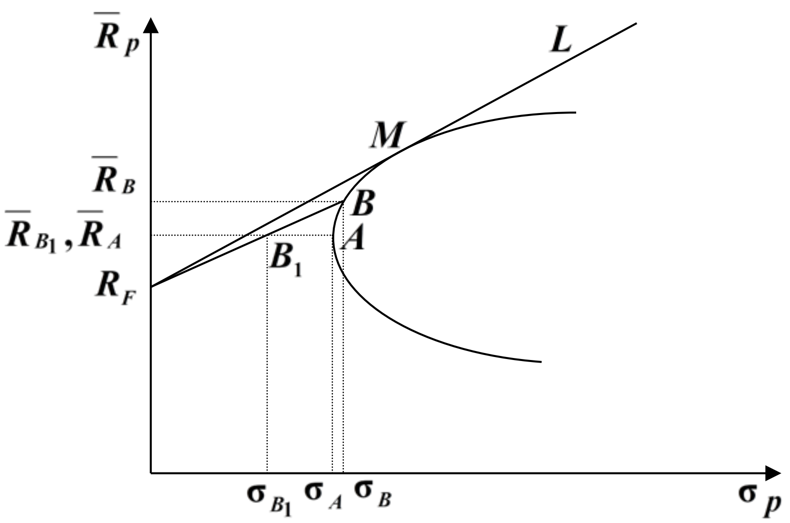
Якщо на графіку з осями r_p і σ_p відмітити зірочками точки, що відповідають усім можливим оптимальним портфелям, то отримаємо область G:



Ефективним (оптимальним за Парето, тобто, недомінованим) портфелям відповідають точки, розташовані на частині AB кривої, що обмежує область. Ця частина кривої називається *ефективною границею*.

Додавання безризикових активів.

Точки ефективної границі, відповідають портфелям, які складаються тільки із ризикових цінних паперів.



Американський вчений Тобін Д. запропонував врахувати і безризикові цінні папери – державні зобов'язання з фіксованим доходом. Позначимо доходність безризикових цінних паперів через $\boldsymbol{R_F}$. Покажемо, що комбінація безризикових цінних паперів з ефективним ризиковим портфелем дозволяє покращити його характеристики.

Точка $\boldsymbol{B_1}$ відповідає комбінації ефективного портфеля $\boldsymbol{B}$ з безризиковим активом. Із рисунка видно, що дохідність цієї комбінації така ж, як і у портфеля $\boldsymbol{A}$, $\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{B_1}} = \overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{A}}$, а ризик – менше: $\boldsymbol{\sigma_{B_1}} < \boldsymbol{\sigma_A}$. Очевидно, що найкраще співвідношення між приростом дохідності і зростанням ризику забезпечує комбінація безризикового активу з ефективним портфелем $\boldsymbol{M}$. Точка $\boldsymbol{M}$ – це точка дотику прямої, проведеної з точки $\boldsymbol{R_F}$ до ефективної границі. Оскільки розглядається "ідеальний конкурентний ринок", то кожний інвестор намагається сформувати оптимальний портфель цінних паперів. В результаті структура ринку ризикових цінних паперів стає оптимальною, такою самою, як і у портфеля M. Тому ефективний портфель M називають ринковим портфелем. Будь-який інвестор може комбінувати безризикові цінні папери з ринковим портфелем M, щоб відрегулювати співвідношення ризик-дохідність свого портфеля. Ці комбіновані портфелі будуть відповідати точкам прямої $R_F M$, яку називають лінією ринку капіталу (*CML – Capital Market Line*).

Нехай α – частка капіталу інвестора, що вкладається в безризикові цінні папери, тоді $1-\alpha$ – частка капіталу, що інвестується в ринковий портфель M. Якщо $\alpha > 0$, то інвестор надає позику державі, вкладаючи частку капіталу α в державні облігації. Точки, що відповідають таким портфелям, лежать на відрізку $R_F M$. Якщо ж $\alpha < 0$, то інвестор бере позику під безризиковий процент R_F на таку ж суму і інвестує його в ринковий портфель M. Точки, що відповідають цим комбінованим портфелям лежать на промені ML.

Частка капіталу α, яку інвестор вкладає в безризикові цінні папери, залежить від його схильності до ризику.

Виведемо рівняння прямої ***CML***. Нехай $\overline{R}_{p,\sigma_p}$ – очікувана дохідність і ризик комбінованого портфеля, що відповідає точці на прямій ***CML***, тоді

$$\overline{R}_p = \alpha R_F + (1-\alpha)\overline{R}_M; \qquad (8.16)$$

$$\sigma_p = (1-\alpha)\sigma_M. \qquad (8.17)$$

Виразимо α із (8.17) і, підставивши в (8.16), отримаємо:

$$\overline{R}_p = \frac{\sigma_M - \sigma_p}{\sigma_M} R_F + \frac{\sigma_p}{\sigma_M}\overline{R}_M, \qquad (8.18)$$

де $\overline{R}_M$ і σ_M – очікувані дохідність та ризик ринкового портфеля. Рівняння (8.18) – рівняння ***CML***. Будь-який інвестор буде вибирати портфель так, щоб очікувана дохідність і ризик лежали на цій прямій.

Зауваження. На практиці під ринковим портфелем розуміють всю сукупність цінних паперів, представлених на ринку.

Коефіцієнти β і модель ціноутворення на ринку капіталів.

Коефіцієнт β_i є мірою чутливості i-го цінного паперу до змін на ринку цінних паперів (ринкового портфеля). Якщо $\beta_i = 1$, то це означає, що при зростанні дохідності ринкового портфеля на 1%, дохідність i-го цінного паперу зросте також на 1%, якщо ж дохідність ринкового портфеля зменшиться на 1%, то і доходність i-го цінного паперу зменшиться на 1%. Якщо $\beta_i > 1$, то зміна дохідності ринкового портфеля на 1% призведе до зміни дохідності i-го цінного паперу на величину $\beta_i > 1$.

Таким чином, цінні папери, які мають $\beta_i > 1$, більш чутливі до змін на ринку, в той час, як цінні папери, що мають $\beta_i < 1$, менш чутливі до змін на ринку. В наступній таблиці представлені коефіцієнти β акцій 10 американських компаній за період 1984-1989 роки:

Акції	β	Акції	β
AT&T	0,76	Ford Motor Co.	1,30
Bristol Myers Squibb	0,81	Genentech	1,40
Capital Holding	1,11	McDonald's	1,02
Digital Equipment	1,30	McGraw-Hill	1,32
Exxon	0,67	Tandem Computer	1,69

Статистично коефіцієнт β_i i-го цінного паперу визначається наступним чином:

$$\beta_i = \frac{V_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{(R_t - \overline{R}_i)(R_{Mt} - \overline{R}_M)}{T}}{\sigma_M^2}, \qquad (8.19)$$

де V_{iM} – коваріація дохідності i-го цінного паперу з дохідністю ринку;

R_{Mt} – дохідність ринкового портфеля в період t;

$\overline{R}_M$ – очікувана дохідність ринкового портфеля;

σ_M – ризик ринкового портфеля.

Тобто, коефіцієнт β_i i-го цінного паперу ще показує внесок цього цінного паперу в ризик ринкового портфеля.

З формули (8.19) випливає, що коефіцієнт β ринкового портфеля дорівнює 1.

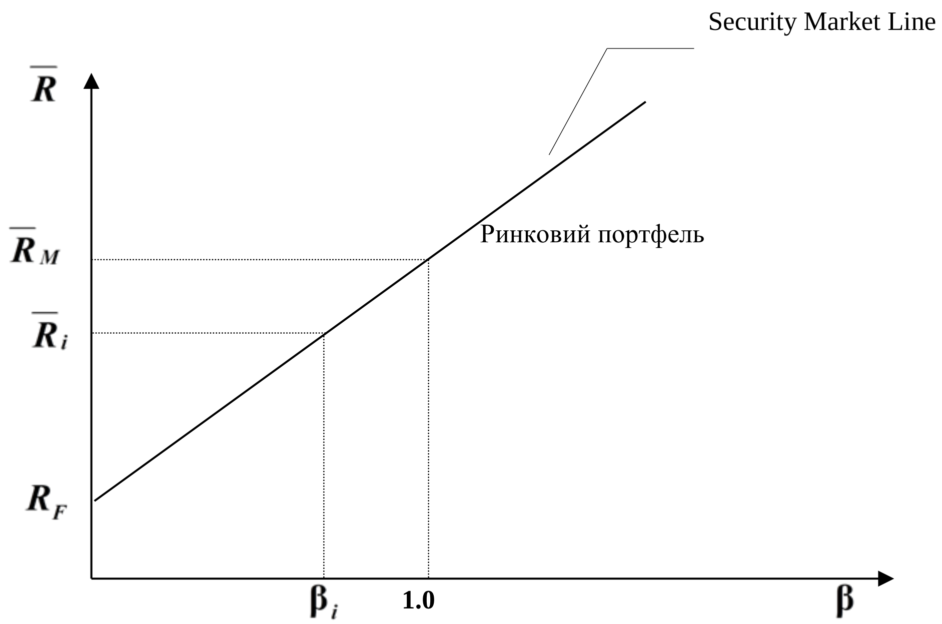
Коефіцієнт β_p будь-якого портфеля розраховується через коефіцієнти β_i цінних паперів, що входять до його складу:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i,$$

де w_i – частка i-го цінного паперу в портфелі.

Приклад 8.3. Нехай портфель складається з 60% акцій компанії **А,** що мають коефіцієнт $\beta = 0{,}8$; і 40% акцій компанії **Б,** що мають коефіцієнт $\beta = 1{,}2$; тоді

$$\beta_p = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 1{,}2 = 0{,}96.$$



Ризик добре диверсифікованого портфеля виражається через ризик ринкового портфеля і β_p за формулою:

$$\sigma_p = \beta_p \cdot \sigma_M . \qquad (8.20)$$

Приклад 8.4. Ризик ринкового портфеля σ_M, який представлений Standart and Poor's Composite Index (SPCI – портфель акцій 500 найкрупніших американських компаній) дорівнює приблизно 20% на рік. Нехай $\sigma_M = 20\%$, тоді ризик розглянутого вище портфеля $\sigma_p = 0{,}96 \cdot 0{,}2 = 0{,}192$ (**19,2%**).

Нагадаємо, що через R_F ми позначили дохідність безризикових цінних паперів, а через $\overline{R}_M$ – очікувану дохідність ринкового портфеля.

Величина $\overline{R}_M - R_F$ називається ринковою премією за ризик. На "ідеальному конкурентному ринку" очікувана премія за ризик будь-якого цінного паперу прямо пропорційна ринковій премії, а коефіцієнтом пропорційності є β_i: $\overline{R}_i - R_F = \beta_i \cdot (\overline{R}_M - R_F)$. (8.21)

Вираз (8.21) називається моделлю ціноутворення на ринку капіталів – *Capital Asset Pricing Model* (***CARM***). На осях $\overline{R}$, β, де $\overline{R}$ – очікувана дохідність цінних паперів, а β – їх коефіцієнти, побудуємо точки, що відповідають безризиковим цінним паперам $(R_F, 0)$ і ринковому портфелю $(\overline{R}_M, 1)$.

Лінія ***CML*** – лінія ринку цінних паперів. Згідно ***CARM*** точки, що відповідають всім цінним паперам повинні лежати на цій лінії. Таким чином, знаючи коефіцієнт β_i i-го цінного паперу, можна знайти його очікувану дохідність $\overline{R}_i$.

Приклад 8.5. Нехай $R_F = 8\%$, а очікувана дохідність ринкового портфеля $\overline{R}_M = 16{,}4\%$. Коефіцієнти β акцій компаній **А** та **Б** дорівнюють 0,76 та 1,3 відповідно. Оцінимо, скориставшись ***CARM,*** очікувану дохідність цих акцій:

$$\overline{R}_A = 8\% + 0{,}76 \cdot (16{,}4\% - 8\%) = 14{,}4\%,$$

$$\overline{R}_B = 8\% + 1{,}3 \cdot (16{,}4\% - 8\%) = 18{,}9\%.$$

Зауваження. Коефіцієнти β, очікувані дохідності цінних паперів, очікувана дохідність і ризик ринкового портфеля та інші характеристики, розраховуються на основі статистичних досліджень розвинутих фінансових ринків.

Практичні заняття.

Заняття 1. Прості проценти.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 1.1. Капітал в 5000 грн. інвестовано на 3 місяці за ставкою 12% річних. Знайти прибуток з капіталу і майбутню вартість позики.

Задача 1.2. Сьогодні Ви отримали кредит на 12000 грн., а через 4 місяці повинні повернути 12800 грн. Яка процентна ставка кредитування?

Задача 1.3. Підприємство взяло позику в банку 200000 грн. на період з 1 липня по 30 вересня при процентній ставці 24% річних. Яку суму воно повинно буде виплатити по закінченню терміну позики? В розрахунках застосувати точні та комерційні проценти. Результати порівняти.

Задача 1.4. Банк нараховує 86 грн. за використання 2500 грн. протягом 60 днів. Яка норма прибутковості такої операції?

Задача 1.5. Корпорація отримала від покупця процентний вексель (на номінал якого нараховуються проценти 12% річних) з номінальною вартістю 50000 грн. терміном на 8 місяців. Через два місяці, маючи кращі пропозиції по інвестуванню, корпорація провела облік векселя в банку по обліковій ставці 14%. Яку кількість грошей отримала корпорація від банку?

Задача 1.6. При обліку дисконтного векселя номінальною вартістю 13000 грн. за два місяці до терміну погашення банк сплатив його власнику 12700 грн. Визначити облікову ставку, яку застосував банк.

Задача 1.7. При купівлі товару покупець може заплатити 850 грн. відразу, або 865 грн. через чотири тижні. Якщо він позичить гроші, щоб розрахуватись відразу, яка процентна ставка може бути допустимою для погашення позики?

Задача 1.8. Процентний вексель (на номінал якого нараховуються проценти 10% річних) терміном на 1 рік і номінальною вартістю 30000 грн. було продано інвестиційній фірмі за 5 місяців до терміну завершення із обліковою ставкою 9%.

а). Яку суму заплатила інвестиційна фірма за вексель?

б). Який прибуток отримає фірма на цьому векселі?

Задача 1.9. Процентний вексель (на номінал якого нараховуються проценти 14% річних) номінальною вартістю 3000 грн виписано 15 серпня із терміном погашення – 20 грудня. Якою буде теперішня вартість векселя1 листопада, викупленого банком за обліковою ставкою 15% ?

Задача 1.10. При постійному рівні інфляції 6% банк надав кредит 100 тис. грн. на 7 місяців під 17% річних. Визначити процентну ставку, яка врахує інфляцію та суму платежу, що погашається.

Задача 1.11. При обліку дисконтного векселя номінальною вартістю 30000 грн. за три місяці до терміну погашення банк сплатив його власнику 28700 грн. Визначити облікову ставку, якщо при обліку було враховано інфляцію на рівні 4% річних.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1.12. Пенсіонер отримав 20 гривень з суми 500 гривень за 3 місяці. Знайти процентну ставку.

Задача 1.13. Яку суму грошей треба інвестувати зараз при 8% річних, щоб через 9 місяців отримати 10000 грн.?

Задача 1.14. Банк надав позику 10000 грн. на два місяці під 30% річних, 5000 грн. на 4 місяці під 24% річних і 10000 грн. на 8 місяців під 20% річних. Якщо б у банку була можливість надати позику на всю суму на 4 місяці, то якою повинна бути процентну ставку кредитування, щоб отримати той самий прибуток?

Задача 1.15. Фермер взяв позику у корпорації терміном на 6 місяців під 9% річних і видав простий вексель (боргове зобов’язання) із завершеною вартістю 9000 грн. За два місяці до терміну завершення векселя корпорація продала його іншій корпорації.

а) Яку суму позики отримав фермер?

б) Скільки друга корпорація сплатила першій за вексель, якщо вона хоче мати 10% річного прибутку?

Задача 1.16. Дисконтний вексель строком на 9 місяців має завершену вартість 10000 грн. Банком було проведено облік векселя за ставкою 8%. Знайти величину дисконту і виручену вартість.

Задача 1.17. Вексель, номінальною вартістю 14000 грн із нарахуванням на номінал 18% річних, терміном 3 місяці, обліковується за 1 місяць до терміну завершення за ставкою дисконту 16% річних. Знайти виручену суму на момент обліку.

Задача 1.18. Корпорація отримала від покупця процентний вексель номінальною вартістю 20000 грн. терміном на 8 місяців із ставкою процента 15%. За якою ставкою корпорація має провести його облік в банку за два місяці до терміну завершення векселя, щоб отримати прибуток не менше 1200 грн.?

Задача 1.19. Підприємство взяло позику в банку на 80 тис. грн. на період з 1 квітня по 31 серпня при процентній ставці 18% річних. Яку суму воно повинно буде виплатити по закінченню терміну позики, при врахуванні річного темпу інфляції – 5%?

Задача 1.20. Вексель із завершеною вартістю 5000 грн. і сплатою 10 жовтня був облікований в банку 3 серпня за обліковою ставкою 12%. Визначити суму, яку отримав векселедавець на момент обліку, якщо річний темп інфляції – 8%.

Відповіді:

1. 150 грн.; 5150 грн. **2.** 20% **3.** 211967 грн.; 212133 грн. **4.** 20,9%. **5.** 50220 грн. **6.** 13,85%. **7.** 23%. **8.** а) 31762,5 грн.; б) 1237,5 грн. **9.** 3083,9 грн. **10.** 23,6%; **11.** 13,5%.**12.** 16%. **13.** 9434 грн. **14.** 18,8% **15.** а) 8612,4 грн.; б) 8852,46 грн. **16.** 600 грн.; 9400 грн. **17.** 14434,93 грн. **18.** $d < 21,82\%$. **19.** 87787,3грн. 113763,8грн. **20.** 4813,9 грн.

Заняття 2. Складні проценти.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 2.1. Знайти нарощену суму і прибуток для кожного з випадків:

а). P = 5000 грн., r = 0,08 , m = 2 , n = 10;

б). P = 3000 грн., r = 0,12 , m = 4 , n = 6;

Задача 2.2. Знайти поточну вартість для випадків:

а). S = 8000 грн., ставка процента 8% при піврічному нарахуванні з терміном 5 років;

в). За 4 роки вартість грошей, вкладених під 12% при щоквартальному нарахуванні досягла 8000 грн.;

Задача 2.3. Фермер отримав позику на суму 10000 грн. Банк призначив ставку прибутку 8% при щомісячному нарахуванні. Яку суму повинен буде сплатити фермер через два роки? Знайти прибуток банку.

Задача 2.4. Яку суму було покладено (депоновано), якщо через 3 роки на рахунку виявилось 20 тис. грн.? Процентна ставка: а) 10%; б) 20%.

Задача 2.5. Облігація коштує 2282 грн. і по ній сплачуватиметься 5000 грн. через 10 років. Яка процентна ставка при нарахуванні кожних півроку забезпечить таке зростання?

Задача 2.6. Якою повинна бути процентна ставка прибутку, щоб капітал подвоївся за 5 років при щорічному компаунді? Як зміниться ця ставка при щомісячному нарахуванні процентів?

Задача 2.7. На який термін треба вкласти 3000 грн., щоб при ставці 8% із щомісячним нарахуванням сума потроїлась?

Задача 2.8. Що ви порадите інвестору, який повинен зробити вибір між трьома варіантами інвестицій на 1 рік:

а). 9% річних з оформленням процентного векселя;

б). 8,4% річних з оформленням дисконтного векселя;

в). 8,8% річних із щомісячним нарахуванням.

Задача 2.9. Підприємець може отримати позику на умовах:

а). отримати кредит на 50000 грн., а повернути через три роки 82000 грн.;

б). взяти кредит в банку під 16% річних при щоквартальному нарахуванні.

Яка пропозиція вигідніша?

Задача 2.10. При постійному рівні інфляції 5% банк надав підприємству кредит 200 тис. грн. на три роки під 18% річних. Визначити процентну ставку, яка врахує інфляцію та суму платежу , що погашатиметься.

Задача 2.11. Сума позики становить 20000 грн., термін – три роки. Проценти нараховуються за номінальною річною ставкою 15%. Визначити процентну ставку, яка врахує інфляцію (очікується незмінним впродовж усього терміну), та суму платежу на погашення, якщо очікуваний індекс інфляції дорівнює 1,2.

Завдання для самостійної роботи

Задача 2.12. У день народження сина батьки поклали в банк 500 гривень на ощадний рахунок під 15% річних. а). Яка сума грошей буде на цьому рахунку в день повноліття сина? б). Яка сума була б на рахунку, якщо проценти нараховувались щоквартально? в). Яку суму слід вкласти, щоб отримати в день повноліття 10000 грн.?

Задача 2.13. Підприємець поклав 5000 грн. у банк на ощадний рахунок зі ставкою 12% при піврічному нарахуванні. Через два роки підприємець додатково поклав 3000 грн. і водночас ставка процента зросла до 15% при тих самих умовах нарощення вкладу. Яка сума грошей буде на ощадному рахунку через 5 років після того як було зроблено перший внесок?

Задача 2.14. Яку суму грошей треба внести зараз, щоб накопичити 2000 грн. за три роки, якщо ставка процента 16% з щоквартальним нарахуванням?

Задача 2.15. На який термін треба вкласти 5000 грн., щоб при ставці 6% із піврічним нарахуванням сума подвоїлась?

Задача 2.16. 5000 грн. інвестується на п’ять років по номінальній річній ставці 14% з щомісячним нарахуванням. Яка процентна ставка з щоквартальним нарахуванням накопичить таку саму суму за цей самий час?

Задача 2.17. Основна сума кредиту становить 250 тис. грн., а сума при погашенні – 480 тис. грн. Кредит надано на три роки. Знайти проценти, що нараховуються за річною ставкою. Знайти проценти, що нараховуються за неперервною процентною ставкою.

Задача 2.18. Процентний вексель (із нарахуванням процентів на номінал) терміном на 3 роки має завершену вартість 10000 грн. Ставка процента 12% при щоквартальному нарахуванні.

а). Яку суму треба сплатити за вексель зараз?

б). Яку суму треба буде сплатити за вексель через 2 роки?

Задача 2.19. При розробці умов контракту сторони домовились, що кредитна операція матиме прибутковість на рівні 24% річних. Яким повинен бути розмір номінальної ставки при нарахуванні процентів кожних: а) півроку; б) щомісячно?

Задача 2.20. Якою буде завершена вартість капіталу 30000 грн. через 3 роки при процентній ставці 12% і щорічному компаунді? За скільки років капітал подвоїться? За скільки років інвестор подвоїть капітал при тій же процентній ставці і щомісячному компаунді? Якою повинна бути процентна ставка, щоб капітал потроївся за 8 років?

Задача 2.21. Підприємець звернувся до банку за позикою в 50000 грн. Визначити номінальну процентну ставку, що врахує інфляцію на рівні 4% річних, та суму на погашення позики через два роки, якщо очікувана дохідність операції повинна скласти 17% річних. Як зміниться ставка-брутто, якщо проценти нараховуватимуться кожних півроку?

Відповіді:

1. а). 10955,6 грн.; б). 6098,4 грн. **2.** а). 5404,5 грн.; в) 4985,34 грн. **3.** 11728,88 грн. **4.** 15026,3; 11574,1. **5.** 8%. **6.** 14,87%; 13,94%. **7.** 13,78 роки. **10.** 23,9%; 380 403 грн. **11.** 22,2%; 36501 грн. **12.** а) 6187,7 грн.; б) 7081,3грн.; в) 808 грн.; **13.** 14371,82 грн. **14.** 1249,2 грн. **15.** 11,72 роки. **16.** 14,16%. **17.** 24,29%; 21,74%. **18.** а). 7013,8 грн.; б).8884,9 грн. **19.**

22,7%; 21,7%. **20.** S_n = 42147,84 грн; n_1 = 6,116 ; n_2 = 5,805 ; 14,72%. **21.** 21,68%; 74030,1 грн.; 21,3%.

Заняття 3. Фінансова еквівалентність. Рівняння вартості. Бар'єрні показники у фінансовому аналізі.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 3.1. Обчислити реальну дохідність позикової операції, проведеної за складною річною ставкою 20%, та облікової операції, проведеною за складною обліковою ставкою 16%, за умови нарахування процентів: а) раз у рік; б) раз у півріччя; в) щоквартально.

Задача 3.2. Знайти номінальну процентну ставку з піврічним нарахуванням, при якій 18000 грн. через 5 років еквівалентні 25000 грн. через 7 років.

Задача 3.3. Борг 20000 грн. необхідно виплатити через 4 роки. Якщо на борг нараховуються проценти за ставкою 17% річних, знайти еквівалентну величину боргу через: а) один рік; б) п'ять років.

Задача 3.4. Борг в 10000 грн. зростає до 25200 грн. через шість років. Якою є величина боргу через чотири роки, якщо проценти нараховуються кожних півроку?

Задача 3.4а. Підприємець може придбати автомобіль за 23000 грн. готівкою або заплатити 30000 грн. через два роки. Підприємець має на рахунку в банку не менше 25000 грн. і при цьому банк нараховує 14% річних. Яка з пропозицій більш вигідна для підприємця? Чи зміняться пріоритети, якщо банк нараховуватиме проценти щоквартально?

Задача 3.5 . Борг потрібно виплатити двома платежами: 700 грн. через рік та 2000 грн. в кінці третього року. Знайти еквівалентну цим виплатам суму одноразового платежу при нарахуванні процентів за ставкою 15% річних: а) сьогодні; б) наприкінці другого року.

Задача 3.6. Борг 30000 грн. погашається через два роки і 50000 грн. через чотири роки. Якщо на борг проценти нараховуються за ставкою 12%

річних, через скільки років обидва платежі замінить виплата а) 70000 грн.; б) 80000 грн.?

Задача 3.7. Порівняти два боргових зобов'язання (знайти бар'єрну ставку):

1) борг становитиме 800$ через 3 місяці;

2) борг становитиме 820$ через 7 місяців.

Задача 3.8. Інвестор має два варіанта інвестицій на три роки:

1. розмістити всю суму на банківських депозитах на весь термін;
2. розмістити дану суму на банківських депозитах спочатку терміном на два роки, а потім повторно розмістити її на депозитах терміном на один рік.

Рівні ставок за трирічними депозитами 18%, за дворічними – 17%. Визначити бар'єрне значення ставки річного депозиту (на третій рік), коли обидва варіанта будуть еквівалентними.

Завдання для самостійної роботи

Задача 3.9. Яка ставка процента при щомісячному нарахуванні еквівалентна ставці 20% з піврічним нарахуванням?

Задача 3.10. Ставка банку по депозитам складає 17% річних. Визначити реальну дохідність позикових операцій, якщо проценти нараховуються а) раз у півріччя; б) щомісячно.

Задача 3.11. Знайти ефективну ставку, при якій $8000 зараз еквівалентні $13480 через 5 років.

Задача 3.12. Підприємець купує обладнання вартістю 36000 грн. Він заплатив 6000 грн. відразу і сплатить на 8000 грн. більше через три місяці. Якщо на суму невиплаченого боргу нараховуються прості проценти за ставкою 15% річних, якою повинна бути завершальна виплата через півроку?

Задача 3.13. Фермер має борг, який через 4 роки після утворення досягає 8000 грн. Фермер планує сплачувати цей борг так: 2000 грн. через рік після його утворення, 3000 грн. через 3 роки після його утворення, а останню сплату зробити через 6 років з моменту його утворення. Якою повинна бути сума останнього внеску, якщо проценти нараховуються за ставкою 10% річних?

Задача 3.14. Банк має два векселі, підписані підприємцем: один – з датою погашення через 3 роки на 50000 грн. і другий – на 80000 грн. з датою погашення через 5 років. Банк нараховує проценти раз у півріччя за ставкою 18% річних. Якщо підприємець сплатить 30000 грн. зараз, скільки він повинен сплатити через 4 роки, погашаючи весь борг?

Задача 3.15. Борг, який через три роки після утворення досягне 18000 грн., потрібно погасити двома рівними виплатами, здійсненими в кінці другого та четвертого років. Визначити величину цих виплат, якщо проценти нараховуються кожні півроку за ставкою 24% річних.

Задача 3.16. Борг треба погасити двома платежами: 8000 грн. – через два роки та 12000 грн. через п’ять років. За процентною ставкою 22% річних знайти час, коли заміна обох виплат однією виплатою розміром 21400 грн. буде еквівалентною (рівнозначною).

Задача 3.17. Два векселі з термінами 10 червня (завершена вартість 20000 грн.) і 1 серпня (40000 грн.) замінюються одним з продовженням терміну до 1 жовтня. При об’єднанні векселів застосовується проста облікова ставка 8%. Знайти завершену вартість нового векселя.

Задача 3.18. Оплата по довгостроковому контракту допускає вибір одного з двох варіантів: 28000 грн. через 4 роки, або 37000 грн. через 6 років. За якої процентної ставки вибір немає значення? Як зміниться значення бар’єрної ставки, якщо за умовами контракту проценти нараховуються щоквартально?

Відповіді:

1. а) $r_{еф}$ = 20%, $r_{екв}$ = 19,05%; б) $r_{еф}$ = 21%, $r_{екв}$ = 18,15%; в) $r_{еф}$ = 21,55%, $r_{екв}$ = 17,74%; **2.** 17,12%. **3.** а). 12487,4 грн.; б). 23400 грн. **4.** 18509,3 грн.
5. а) 1923,7 грн. б) 2544,1 грн. **6.** а). 2,02 роки; б). 3,2 роки. **7.** r_0 = 7,64%.
8. 20%. **9.** 19,21% **10.** а). 17,72%; б). 18,39%. **11.** 11%. **12.** 17767,2 грн.
13. 2466 грн. **14.** 66962,5 грн. **15.** 8773,7 грн. **16.** 3,92 роки.

17. 61064,8 грн. **18.** 14,95%; 14,18%.

Заняття 4. Потоки платежів. Поточна та нарощена вартість простих фінансових рент.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 4.1. Знайти майбутню вартість фінансової ренти, для якої квартальний внесок становить 300 грн., проценти нараховуються щоквартально за ставкою 16% річних. Термін ренти – 3 роки.

Задача 4.2. Знайти поточну вартість фінансової ренти, для якої піврічний внесок становить 400 грн., проценти нараховуються кожних півроку за ставкою 14%. Термін ренти – 5 років.

Задача 4.3. Дехто вносить в кінці кожного місяця по 100 грн. з прибутком, що визначається ставкою процента 12% річних при щомісячному нарахуванні процентів. а) Яка сума грошей буде через 2 роки? б) Якими повинні бути щомісячні внески, щоб накопичити суму в 5000 гривень за такий самий період?

Задача 4.4. Батьки майбутнього студента бажають створити для нього фонд, який сплачуватиме йому по 100 грн. в кінці кожного місяця протягом 4 років. Яку суму вони повинні внести зараз, якщо розраховують на ставку процента 9% при щомісячному компаунді? Яким повинен бути вклад, якщо виплати студенту будуть робити на початку місяця?

Задача 4.5. Закладна на 70000 грн. повинна бути погашена щомісячними виплатами, зробленими в кінці кожного місяця протягом 8 років. Ставка процента 18% із щомісячним нарахуванням і перша виплата відбудеться через рік після підписання закладної. Знайти величину щомісячного внеску.

Задача 4.6. Крамар вважає, що через 3 роки йому знадобиться новий холодильник вартістю 6000 грн. Якою повинна бути величина внеску в кінці кожного кварталу, якщо крамар бажає накопичити цю суму на своєму рахунку, сплачуючи щоквартальні внески і отримуючи на них ставку процента 8% при щоквартальному нарахуванні протягом трьох років?

Задача 4.7. На слуханнях у суді виявилось, що підприємець недоплачував податків 800 грн. щомісячно. Податкова інспекція хоче утримати невиплачені за останні 2 роки податки разом з процентами (2% щомісячно). Яку суму повинен заплатити підприємець?

Задача 4.8. Вам пропонують здати в оренду приміщення на чотири роки і вибрати один з двох варіантів оплати оренди: а) 12000 грн. в кінці кожного року; б) 58000 в кінці чотирирічного періоду. Який варіант кращий, якщо банк пропонує 12% річних по вкладах? Чи зміняться пріоритети, якщо річна ставка становитиме 14%?

Завдання для самостійної роботи

Задача 4.9. Обчислити величину щорічних виплат зведеної ренти терміном 5 років, теперішня вартість якої – 120 тис. грн. Процентна ставка становить 14% річних.

Задача 4.10. Компанія планує вкласти гроші в обладнання, термін роботи якого до його повного фізичного зносу – 5 років. Після 5 років обладнання вже не матиме ліквідаційної вартості. Очікується, що устаткування після щорічної сплати податків приноситиме прибуток 10000 грн. щорічно. Також очікується, що ця сума забезпечить приріст із ставкою 10% при щорічному нарахуванні. Скільки коштує обладнання?

Задача 4.11. Фермер купує автомобіль і сплачуватиме по 500 грн. у кінці кожного кварталу протягом 5 років. Угода про продаж включає нарахування процентів із ставкою 12% з щоквартальним нарахуванням. Яку суму мав сплатити фермер за автомобіль зараз?

Задача 4.12. Підприємець придбав обладнання і заплатив за нього 3000 грн. Залишок вартості сплачуватиме протягом 3 років рівними внесками в кінці місяця по 100 грн. Якщо гроші приносять прибуток 12% річних при щомісячному нарахуванні, то яка вартість обладнання?

Задача 4.13. Компанія отримала кредит і буде погашати його, сплачуючи по 2000 грн. щомісячно. Перший внесок повинен бути здійснений через 2 роки, а останній – через 5 років від дати укладання угоди. Яку суму кредиту отримає компанія в день укладання угоди, якщо проценти нараховуються щомісячно за ставкою 18% річних?

Задача 4.14. Провівши вдосконалення технологічного процесу, підприємство на протязі 5 наступних років планує щорічне збільшення прибутку на 10000 грн. Ці гроші воно збирається вкласти під 13% річних, бажаючи через 5 років накопичити суму на закупівлю нового обладнання. Яку суму грошей підприємство зможе вкласти в нове обладнання через 5 років?

Задача 4.15. Покупець запропонував два варіанта розрахунків при купівлі будинку: 1) 6000$ зараз і потім по 1000$ протягом 5 років; 2) 9000$ зараз і по 300$ протягом 5 років. Який варіант вигідніший продавцю при річній ставці процента а) 10%; б) 5%?

Відповіді:

3. а) 2697,35 грн.; б). 185,3 грн. **4.** 4018,5 грн.; 4048,62 грн. **5.** 1722,84 грн.
6. 447,36 грн. **7.** 24337,5 грн. **8.** Другий. **9.** 30661,26 грн. **10.** 37907,9 грн.
11. 7438,74 грн.
12. 6010,8 грн. **13.** 40098,8 грн. **14.** 64802,7 грн. **15.** а) Другий; б) Перший.

Заняття 5. Загальні ренти. Визначення параметрів фінансових рент.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 5.1. Знайти майбутню вартість фінансової ренти для кожного з випадків:

б). Місячний внесок 80 грн., проценти нараховуються щоквартально за ставкою 20% річних. Термін ренти – 2 роки;

в) Річний внесок 1000 грн., проценти нараховуються кожних півроку за ставкою 18%. Термін ренти – 5 років.

Задача 5.2 . Знайти поточну вартість фінансової ренти для кожного з випадків:

б) Квартальний внесок 3000 грн., проценти нараховуються за ставкою 17% річних. Термін ренти – 4 років.

в) Річний внесок становить 500 грн. протягом 6 років при ставці 18% з нарахуванням кожних півроку.

Задача 5.3. Пані А. сплачує по 800 грн. на початку кожного місяця на свій рахунок у банк протягом трьох років. Внески дають 8% річних з піврічним нарахуванням. Знайти загальну суму і поточну вартість цього ануїтету.

Задача 5.4. При придбанні житла необхідно внести початкову суму в 30000 грн. і сплачувати щомісячно 800 грн. протягом наступних шести років. Яка вартість житла на день покупки, якщо проценти нараховуються за ставкою 20% річних?

Задача 5.5. Підприємець бажає накопичити 10000 грн. протягом 5 років. Для цього він робить внески в кінці кожного місяця у фонд зі ставкою 16% з щоквартальним нарахуванням процентів. Знайти суму щомісячного внеску. Як зміниться величина місячного внеску, якщо сплата здійснюватиметься на початку кожного місяця?

Задача 5.6. Кредит у сумі 50 тис.грн. надано під 18% річних при нарахуванні процентів кожних півроку. Обчислити величину квартальних платежів, за допомогою яких борг буде погашено за два роки.

Задача 5.7. Сім'я бажає накопичити 20000 грн. на покупку автомобіля, вкладаючи щорічно в банк 3000 грн. Річна ставка процента в банку –16%. Як довго триватиме накопичення?

Задача 5.8. Фірма продає комп'ютери вартістю 8000 грн. за такою платіжною схемою: 3000 грн. відразу і десять щомісячних внесків по 580 грн. Перший внесок здійснюється через три місяці. Яку номінальну річну ставку процентів при щомісячному нарахуванні передбачає така схема?

Завдання для самостійної роботи

Задача 5.9. Знайти поточне та нарощене значення звичайної ренти з виплатами 300 грн. в кінці кожного року при квартальному нарахуванні процентів за ставкою 16% річних. Термін ренти – 4 роки.

Задача 5.10. Знайти майбутню та поточну вартість ренти, що складається з шести виплат по 800 грн. кожна, зроблених на початку кожного півріччя і на які нараховуються щомісячно проценти за ставкою 24% річних.

Задача 5.11. Обчислити теперішню та нарощену суму грошей звичайної ренти з виплатами по 90 грн. на початку кожного місяця при щоквартальному нарахуванні процентів за ставкою 18% річних. Термін ренти – 5 років.

Задача 5.12 . Замінити звичайну ренту терміном 4 роки з виплатами по 250 грн. в кінці кожного місяця та нарахуванням процентів по півріччях за ставкою 14% річних простою рентою з піврічними виплатами.

Задача 5.13. Підприємець вносив на банківський рахунок по 200 грн. у кінці кожного місяця протягом трьох років. На даний момент на його рахунку накопичилось 8500 грн. По якій номінальній ставці банк щомісячно нараховував проценти?

Відповіді:

3. 32577,1 грн., 25746,2 грн. **4.** 64755 грн. **5.** 110,48; 109,04 грн. **6.** W = 7550,5 грн. **7.** n = 4,89 роки. **8.** 24,27%. **9.** 823,2 грн.; 1541,84 грн. **10.** FV=7425,87 грн.; PV=3640,33 грн. **11.** 3617 грн.; 8723,15 грн. **12.** FV = 15832 грн.; R = 1543,17 грн. **13.** 11,1%.

Заняття 6. Застосування теорії рент у фінансовому аналізі

Завдання для аудиторної роботи

Задача 6.1. Борг у сумі 20000 грн. повинен бути амортизований протягом 10 років методом періодичних внесків у кінці кожного кварталу. Якщо ставка процента 8% при щоквартальному нарахуванні, то яка величина періодичного внеску на погашення боргу?

Задача 6.2. Підприємець бажає позичити 5000 грн. зараз і 4000 грн. через 2 роки. Сплачувати обидві позики він планує протягом 5 років рівними внесками в кінці кожного року. Ставка процента 10% з щорічним нарахуванням. Знайти суму внеску.

Задача 6.3. Підприємство планує вкласти 160000 грн. у власне виробництво, отримуючи протягом чотирьох наступних років щорічно 50000 грн. У той же час підприємство може купити на цю суму акції однієї солідної корпорації, що приносять 12% річних. Який варіант Ви вважаєте більш вигідним?

Задача 6. 4. Підприємець придбав автомобіль за 18000 грн. Він сплатив 12000 грн. і далі сплачуватиме залишок боргу методом періодичних внесків на погашення в кінці кожного кварталу протягом 2 років. Ставка процента 12% при щоквартальному нарахуванні. а). Знайти величину квартального внеску. б). Яку суму сплатить підприємець за 2 роки погашення позики і яким буде загальний прибуток фірми, що продала автомобіль?

Задача 6.5. Студент отримав кредит у сумі 3600 грн., щоб сплатити за навчання протягом року. Угода передбачає погашення боргу десятьма піврічними внесками, причому перший повинен бути здійснений через три роки після отримання кредиту. Якими повинні бути ці внески, якщо проценти нараховуються за ставкою 18% річних?

Задача 6.6 . Підприємство отримало пільговий кредит на 250 тис.грн. терміном на 6 років під 4% річних. Звичайна ставка банку за довгостроковими кредитами – 18%. Визначити абсолютні та відносні втрати кредитора від видачі кредиту, якщо борг планується погашати рівними річними виплатами.

Задача 6.7. Іпотечна позика в розмірі 80000 грн. надана на 10 років. Погашення здійснюється рівними виплатами по 4000 грн. у кінці кожного кварталу, на борг нараховуються проценти за номінальною річною ставкою 16%. Визначити залишок боргу, який потрібно буде сплатити в кінці терміну.

Задача 6.8. Банк "Аркада" надає споживчий кредит на придбання житла терміном на 10 років і річною процентною ставкою 8%. Погашення здійснюється рівними місячними виплатами, які визначаються шляхом ділення суми кредиту та нарахованих на цю суму простих процентів за весь термін. Якою є річна ефективність такої банківської операції, якщо кредит надано на суму 50000 грн., а виплати на погашення вважати виплатами по амортизації боргу?

Завдання для самостійної роботи

Задача 6.9. Дехто купує машину, вартість якої 22000 грн. і сплачуватиме цю покупку протягом 5 років. У перші три роки борг погашатиметься в кінці кожного кварталу рівними внесками, а потім протягом наступних 2 років у кінці кожного кварталу рівними внесками, що вдвічі менші за попередні. Прибуток складає 12% при щоквартальному нарахуванні. Знайти величини щоквартальних внесків.

Задача 6.10. Обчислити розмір щоквартальних виплат відкладеної на 4 роки ренти, терміном на 3 роки, поточне значення якої – 20 тис.грн. Проценти нараховуються щоквартально за ставкою 20% річних.

Задача 6.11. Фермер взяв позику розміром 20000 грн. Цю позику треба повернути способом щомісячних внесків на погашення, які сплачуватимуться в кінці кожного місяця протягом 4 років. Якщо ставка процента становить 14% при піврічному нарахуванні, то яка повинна бути величина щомісячного внеску?

Задача 6.12. Погашення боргу буде здійснюватись щомісячно рівними виплатами по 180 грн. Перша виплата буде зроблена через рік, а остання через 4 роки з часу утворення боргу. Якою є величина боргу зараз, якщо проценти нараховуються за ставкою 12% річних при щомісячному нарахуванні? Яким би був розмір єдиного платежу на погашення боргу, здійсненого в кінці а) четвертого року; б) п’ятого року?

Задача 6.13. Пральна машина коштує 2800 грн. готівкою. Вона може бути придбана також у розстрочку сплатою початкового внеску в сумі 1000 грн. і рівних щомісячних внесків протягом двох років. Знайти величину щомісячного внеску, якщо проценти нараховуються за ставкою 25% річних?

Задача 6.14. Споживчий кредит у сумі 50000 грн. надано на 6 років під 8% річних. Борг погашатиметься рівними квартальними виплатами за умови рівномірної виплати процентів. Знайти розмір платежів, що погашаються. Якою є реальна річна процентна ставка, якщо даний потік виплат розглядати як амортизацію боргу, де проценти нараховуються на невиплачений залишок боргу?

Задача 6.15. Банк на будівництво будинку надав своєму працівнику позику у сумі 16000 грн. за процентною ставкою 2% річних з умовою погашення позики за 5 років. а) Знайти величину річних платежів на погашення, якщо проценти нараховуються кожних півроку. б) Оцінити субсидію банку, яку отримає працівник за рахунок цієї позики, якщо ринкова процентна ставка на довготермінові кредити – 20%.

Задача 6.16. Під заставу нерухомості надана позика в розмірі 1 млн. грн. на 8 років. Погашення щомісячне постнумерандо, на борг нараховуються проценти за номінальною річною ставкою 12%. Визначити розмір термінових виплат та залишок боргу через 5 років.

Задача 6.17. Під заставу нерухомості надана позика в розмірі 50 тис. грн. на 15 років. Погашення буде здійснюватись рівними виплатами в кінці кожного місяця і разовим платежем у розмірі 10 тис. грн. у кінці терміну. На борг нараховуються проценти за номінальною річною ставкою 12%. Визначити розмір термінових виплат.

Відповіді:

1. R =731.1 грн. **2.** R = 2191,05 грн. **4.** а) R = 854,74 грн; б) S = 6837,9 грн. **5.** 834,6 грн. **6.** W =83197,7 грн. (w=33,28%). **7.** B = 3979,6 грн. **8.** 13,97%

9. Перші три роки внески – 1771,9 грн., наступні два – 886 грн. **10.** 4925,7 грн. **11.** 542,6 грн. **12.** PV = 4969,14 грн.

13. W = 93,85 грн. **14.** 14,35%. **15.** а) R =3395,5 грн. б) W =6064,8 грн. (w=37,9%)

16. R = 16252,84; PV_{60} = 489332,5 грн. **17.** R = 580,1 грн.

Заняття 7. Виробничі інвестиції

Завдання для аудиторної роботи

Задача 7.1. Нехай на початку року встановлено нове обладнання на суму 2000 у.о. Протягом 4 років обладнання дає доходи 1000, 800, 800, та 600 у.о. Ставка процента 8% річних. Побудувати часову схему даного інвестиційного процесу та знайти його показники ефективності.

Задача 7.2. Порівняйте за дисконтованим терміном окупності два проекти, які розраховані на 4 роки і вимагають однакових початкових інвестицій 1000 у.о. Проект А генерує наступні грошові потоки по рокам: 500, 400, 300, 100 у.о., а проект В: 100, 300, 400, 600 у.о. Ставка процента 10% річних.

Задача 7.3. Підприємство планує купити новий станок, який коштує 5000 у.о., має 5-ти річний строк експлуатації та нульову залишкову вартість. Станок дозволить щорічно економити по 1800 у.о., а на четвертому році експлуатації вимагатиме ремонту на 300 у.о. Оцінити економічну ефективність впровадження у виробництво нового станка, якщо підприємство вимагає віддачу не менше 20%. Як зміниться результат, якщо вимагається віддача на рівні 24%?

Задача 7.4. Підприємство планує вкласти 3170 у.о. в нове обладнання. Обладнання має 4-річний строк експлуатації, нульову залишкову вартість і дає економію 1000 у.о. щорічно. Якою повинна бути норма віддачі, щоб варто було купувати це обладнання?

Задача 7.5. Компанія планує придбання обладнання за ціною 36000 у.о., яке забезпечить щорічну економію 20000 у.о. протягом 3 років. За цей час обладнання повністю зноситься. Вартість капіталу компанії становить 16%, а очікуваний темп інфляції – 10%. Оцінити даний інвестиційний проект, враховуючи інфляцію.

Задача 7.6 . Порівняйте два інвестиційних проекти A і B із **задачі 2** за двома показниками ефективності NPV та IRR при різних показниках вартості капіталу: 5%, 10%, 15%.

Задача 7.7. Нехай обладнання вартістю $\boldsymbol{P}$ і нормою амортизації $\boldsymbol{h}$ здається в оренду на $\boldsymbol{n}$ років. У кінці цього строку його залишкова вартість $\boldsymbol{S}$. Визначити величину $\boldsymbol{R}$ щорічного орендного платежу при нормативі дохідності $\boldsymbol{IRR}$, яка компенсує «втрати» власника обладнання. При яких умовах вигідно здавати обладнання в оренду? При яких умовах вигідно орендувати обладнання?

Задача 7.8. З’ясуйте, чи потрібно купувати обладнання вартістю 20000 у.о., чи орендувати його на 8 років із щорічним платежем 3000 у.о., якщо норма амортизації 6% річних, а норматив дохідності (IRR) 15%.

Завдання для самостійної роботи

Задача 7.9. Проаналізуйте інвестиційний проект зі змінною процентною ставкою: початкова інвестиція – 2000 у.о.; потоки доходів: перший рік 1000 у.о. ставка 5%, другий 800 у.о. ставка 8%, третій 800 у.о. ставка 6%, четвертий 600 у.о. ставка 10%.

Задача 7.10. Знайдіть показники ефективності інвестиційного проекту, який вимагає початкових затрат 4000 у.о. і дає протягом 6 років щорічно по 1000 у.о. при 8% річних.

Задача 7.11. Знайдіть величину необхідних інвестицій для проекту тривалістю 6 років із планованими річними доходами 400 у.о. за ставкою 10% річних.

Задача 7.12. Дехто отримав спадщину у вигляді солідного банківського рахунку і тепер «проїдає» його, щорічно витрачаючи певну суму. Фактично, це «перевернутий» інвестиційний процес. Введіть показники «ефективності», аналогічні терміну окупності, IRR тощо. Як повинен реагувати спадкоємець на зростання темпів інфляції?

Задача 7.13. У місті є банк, який дає 8% річних за депозитами. Як пояснити, чому автосалон продає автомобілі в кредит під 6% річних?

Задача 7.14. Розрахуйте величину щорічної орендної плати за обладнання, вартістю 20000 у.о. протягом 10 років, якщо в кінці оренди залишкова вартість обладнання становитиме 10000 у.о. Норматив дохідності 15%.

Задача 7.15. Компанія ММM збирається інвестувати 200000 у.о. і повинна вибрати один із двох альтернативних проектів. Проект А передбачає закупку обладнання на 200000 у.о., яке забезпечить щорічні доходи в 50000 у.о. протягом 7 років, а залишкова вартість обладнання становитиме 20000 у.о. Проект В вимагає вкладання 200000 у.о. в оборотні кошти (напр., торгівельні операції), які будуть приносити щорічно 42000 у.о. протягом 7 років, а потім оборотні кошти звільняються. Компанія вимагає норму дохідності не менше 20%. Який із проектів Ви порекомендуєте компанії ММM?

Заняття 8. Іінвестиції в цінні папери.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 8.1. Знайдіть курс облігації без погашення, для якої річна купонна ставка становить 8%, а ринкова річна номінальна ставка – 5%. Яка дохідність такої облігації, якщо її курс дорівнює 120?

Задача 8.2. Є безкупонна облігація строком на 10 років із виплатою купонних процентів 8% при погашенні. Знайдіть її курс за 4 роки до погашення при ринковій річній номінальній ставці 4%. Яка дохідність такої облігації, якщо її курс дорівнює 100?

Задача 8.3. Знайдіть ціну вічної акції із квартальними дивідендами 200 у.о. при ринковій річній номінальній ставці 8%.

Задача 8.4. Знадіть середній арифметичний термін для двох облігацій із виплатами по купонам 8% та 12% від номіналу. Термін облігацій 8 років.

Задача 8.5. Дохідність при погашенні купонної облігації номіналом 1000 у.о. і терміном до погашення 4 роки становить 13,39%. Купон дорівнює 10%. Визначити стандартну дюрацію даного фінансового інструменту. Як зміниться ціна облігації, якщо дохідність при погашенні складе 14%?

Задача 8.6 . Знайдіть середній термін дисконтованих платежів для облігації з терміном 6 років, купони по якій виплачуються щорічно за нормою 8%, купленої по курсу 60. Як зміниться курс облігації, якщо ринкова норма прибутковості зросте на 0,2%?

Завдання для самостійної роботи

Задача 8.7. Знайдіть курс безкупонної облігації за 5 років до погашення при ринковій номінальній річній ставці 6%. Обчисліть дохідність такої облігації, якщо її курс дорівнює 70.

Задача 8.8. Знайдіть курс облігації без погашення із щорічним купоном 8% при ринковій номінальній річній ставці 5%. Обчисліть дохідність такої облігації, якщо її курс дорівнює 120.

Задача 8.9. Знайдіть середній арифметичний термін для облігації, якщо купонні виплати здійснюються двічі на рік за ставкою 10% річних. Термін облігації 10 років.

Задача 8.10. Облігація терміном 4 роки, купонні виплати по якій виплачуються двічі на рік за нормою 8% річних, куплена по курсу 73. Визначити повну дохідність облігації. Оцінити, як зміниться курс облігації, якщо ринкова норма прибутковості зменшиться на 0,5%.

Заняття 9. Концепція ризику та методи його оцінки.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 9.1. Відомі характеристики двох фінансових активів:

Показник	Варіант А	Варіант В
Ціна цінного паперу ($)	5000	4000
Дохідність (експертна оцінка), % песимістична	 11,5	 10

найімовірніша	12	12,2
оптимістична	13	14,3

Оцінити ризик кожного з фінансових інструментів, якщо в обох випадках імовірність найімовірнішої дохідності складає **60%**, а імовірність песимістичної та оптимістичної оцінок рівні і складають **20%**. Який з двох активів підприємцю вибрати краще.

($\boldsymbol{r_A}$ $=12{,}1\%$; $\boldsymbol{r_B}$ $=12{,}18\%$; $\boldsymbol{\sigma_A}$ $=0{,}0049$; $\boldsymbol{\sigma_B}$ $=0{,}0136$).

Задача 9.2. Очікувана рентабельність активу **А** дорівнює **11**% з стандартним відхиленням, рівним **7%**. Очікувана рентабельність активу **В** дорівнює **13%** з стандартним відхиленням, рівним **10%**. Кореляція між цими активами **0,6**. Знайти очікувану дохідність та оцінити ризиковість портфеля, що складається на **40%** з **А** та **60**% з **В**.

($\boldsymbol{r_p}$ $=12{,}2\%$; $\boldsymbol{\sigma_p}$ $=0{,}08$).

Задача 9.3. Очікувана рентабельність активу **А** дорівнює **8**% з стандартним відхиленням, рівним **6%**. Очікувана рентабельність активу **В** дорівнює **12%** з стандартним відхиленням, рівним **10%**. Кореляція між цими активами **-0,3**. Знайти очікувану дохідність та оцінити ризиковість портфеля, що складається на **35%** з **А** та **65**% з **В**.

($\boldsymbol{r_p}$ $=10{,}6\%$; $\boldsymbol{\sigma_p}$ $=0{,}062$).

Задача 9.4. Інвестиційний портфель наполовину (за вартістю) складається із цінних паперів першого виду з дохідністю 14% річних та другого виду з дохідністю 8% річних. Яка ефективність портфеля?

Задача 9.5. Нехай інвестор має можливість сформувати портфель із чотирьох видів некорельованих цінних паперів, ефективності та ризики яких становлять: 2 та 1; 4 та 2; 8 та 4; 12 та 6. Знайти ефективності та ризики портфелів, складених із рівних часток а) перших двох паперів; б) перших трьох паперів; в) усіх паперів. Проаналізувати результати.

Задача 9.6 . За допомогою Excel сформувати оптимальний портфель Марковиця заданої ефективності 15 для трьох некорельованих цінних паперів із ефективностями та ризиками: 4 та 10; 10 та 40; 40 та 80. Проаналізувати результати.

Задача 9.7. За допомогою Excel сформувати оптимальний портфель максимальної ефективності із приклада 6. Проаналізувати результати.

Завдання для самостійної роботи

Задача 9.8. За допомогою Excel сформувати оптимальні портфелі із заданими ефективностями від 2 до 6 з кроком 0,5 із двох цінних паперів із ефективностями та ризиками: 2 та 10; 6 та 20. Нанесіть отримані портфелі на площину ризик-ефективність і відмітьте доміновані та недоміновані, тобто оптимальні за Парето.

Задача 9.9. Сформувати портфель Тобіна мінімального ризику із двох видів цінних паперів: безризикових з ефективністю 2 і ризикових з ефективністю 10 та ризиком 5. Знайдіть залежність ефективності портфеля від його ризику.

Задача 9.10. Сформувати портфель Тобіна максимальної ефективності і ризика, що не перевищує заданого, із трьох видів цінних паперів: безризикових з ефективністю 2 і некорельованих ризикових з ефективностями та ризиками 4 та 2, 10 та 4. Які співвідношення для часток цінних паперів оптимального портфеля.

Задача 9.11. Сформувати обидва портфелі Тобіна: максимальної ефективності і ризика, що не перевищує 5, та мінімального ризика і заданої ефективності 8,5 ; із трьох видів цінних паперів: безризикових з ефективністю 2 і ризикових, взаємнокорельованих із коефіцієнтом 9, з ефективностями та ризиками 4 та 2, 10 та 4.

ЛІТЕРАТУРА

1. Єлейко Я.І.,Кандибка О.М., Лапіжко М.Л., Смовженко Т.С., “Основи фінансового аналізу”, К., 2000.
2. Єлейко Я.І, Єлейко О.І, Раєвський К.Є., “Інвестиції, ризик, прогноз”, К., 2000.
3. “Экономико-математические методы и модели”, Минск, 1999.
4. Ковалев В.В., “Финансовый анализ”, М., “2000.
5. Малыхин В.И., “Финансовая математика”, М., 1999.
6. Четыркин Е.М., “Финансовая математика”, М., 2000.
7. Уотшем Т.Дж., Паррамоу Л. “Количественные методы в финансах”, М.: ЮНИТИ, 1998.
8. Клименко С.С., Мацкул В.М., Діденко А.В. «Методичні вказівки для самостійної роботи з курсу «Фінансова математика». Випуск І».- Одеса,ОДЕУ,2003.
9. Клименко С.С., Мацкул В.М., Воропай Н.Л. «Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з курсу «Фінансова математика»».- Одеса,ОДЕУ,2005