МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.М.МАЦКУЛ

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ.

ПІДРУЧНИК

Одеса

2018

УДК 51:33(075.8)

ББК 22.1я73

М95

Рекомендовано до друку

Рішенням Вченої ради Одеського національного економічного університету

(протокол № від 2018 р.)

Рецензенти:

Ю.Г.Козак, д-р екон. наук, проф., завідувач кафедри міжнародних економічних відносин Одеського національного економічного університету

О.Г.Янковий, д-р екон. наук, проф., завідувач кафедри економіки підприємства Одеського національного економічного університету

Мацкул В.М. Вища математика для економістів.: Підручник.- Одеса: ОНЕУ, 2018.- 472с.

Підручник містить теоретичний матеріал курсу «Вища математика» для економічних спеціальностей, приклади (багато з яких із розв’язанням) математичних моделей різноманітних економічних задач, а також набір прикладів та вправ для самостійного розв’язування.

Зміст

Вступ

«Жодне дослідження не може називатись істинною наукою,
якщо воно не пройшло через математичне доведення»
Леонардо да Вінчі

В усі часи математика мала велике практичне значення, а також відігравала важливу роль в науковому, технічному, економічному розвитку суспільства. Значним науковим досягненням стало впровадження математикичних методів у економічну науку: дослідження економічних явищ та процесів, прогнозування та управління цими процесами. Все це може бути здійснено тільки на основі застосування точних математичних методів у всіх сферах господарювання: від прогнозування розміщення добування корисних копалин до вивчення пропозиції та попиту на товари, від складання оптимальних планів виробництва до планування транспортних перевезень, розміщення транспортних артерій тощо. Недарма більшість лауреатів Нобелівської премії з економіки відзначені саме за розробку та застосування у своїх дослідженнях математичних методів та моделей, оскільки саме вони є основною складовою методів та моделей економічної теорії.

На сучасному етапі, у зв'язку зі зростанням ролі аналітичних досліджень соціально-економічних явищ та процесів майбутнім економістам необхідна глибока математична підготовка, яка б надавала можливості за допомогою математичних інструментів досліджувати широке коло проблем їхньої діяльності, застосовувати можливості сучасних інформаційних технологій.

Широке впровадження нових інформаційних технологій, комп'ютеризація процесів діяльності людини залишають в минулому просту передачу знань від викладача до студента. Формується концептуально новий підхід до процесу навчання студента, який спрямований на кінцевий результат – формування компетентного фахівця, який не тільки оволодів деякою множиною знань, а й здатен ефективно їх використовувати на практиці, а в результаті – бути конкурентноспроможним на ринку праці.

Фундаментальну основу математичної підготовки економістів складає дисципліна "Вища математика", основними завданнями якої є надання студентам знань з основних розділів вищої математики, підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів із посиленням її прикладної спрямованості, а також отримання необхідної математичної бази для вивчення інших дисциплін як математичного циклу, так і економічного. В результаті опанування навчальної дисципліни "Вища математика" студент отримує аналітично-дослідницькі компетенції, а саме знання, розуміння, вміння використовувати математичні інструменти для дослідження економічних явищ та процесів. Саме тому кожний розділ підручника розпочинається із теми, в якій розглядаються різноманітні економіко-математичні моделі. І це дозволяє давати відповіді на запитання: Навіщо майбутньому економісту вивчати ті чи інші розділи курсу «Вища математика»?

У кожному розділі підручника теоретичний та практичний матеріали подаються в обсязі, достатньому для засвоєння дисципліни «Вища математика» та подальшого її використання для вивчення спеціальних предметів, а також для розв'язання задач економічної спрямованості. При розв'язуванні багатьох прикладів пропонується використовувати компьютерні технології, а саме – найбільш поширені електронні таблиці MS Excel.

Багаторічний досвід викладання курсу «Вища математика» для економістів свідчить про досить низький рівень математичної підготовки студентів. Тому в підручнику наведено додатки, у яких автор дозволив собі нагадати читачеві деякі поняття з елементарної математики та логіки, а також розглянув деякі питання розділу «Ряди» (оскільки цей розділ практично не встигають вивчати студенти за браком учбового часу).

Перелік деяких математичних позначень

$\forall$	квантор загальності («для будь-якого» або «кожний»)
$\exists$	квантор існування («існує» або «знайдеться»)
$\Leftrightarrow$	еквівалентність («тоді і тільки тоді, коли…»)
$\Rightarrow$	імплікація ($A \Rightarrow B$, тобто з того, що вірно А, випливає, що вірним є В)
$\in$	приналежність (елемент $a \in A$, тобто a належить до множини A)
$\notin$	заперечення приналежності («не належить»)
$\cup$	об'єднання множин («або…, або…»)
$\cap$	перетин множин («…і…»)
$\subset$	підмножина ($A \subset B$, тобто A включається до B)
$\setminus$	різниця множин ($A \setminus B$, тобто « A без B»)
$\varnothing$	порожня множина (множина, що не містить жодного елемента)
$\{\ ,\ \}$	перелік елементів множини або їх властивостей
$\{\ \mid\ \}$	множина елементів, що задовольняють умову
$(\ )$	матриця
$[\ ]$	ціла частина числа
$\lvert\ \rvert$	модуль числа, його абсолютна величина
$\sum_{i=1}^{n}$	сума елементів від першого до того, що має номер n
$\prod_{i=1}^{n}$	добуток елементів від першого до того, що має номер n
$!$	факторіал ($n!$ «добуток усіх натуральних чисел до n включно»)

Розділ 1. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Опрацювання матеріалу даного розділу необхідне для того, щоб навчитись:

- використовувати числові матриці для формування й аналізу таблиць вихідних даних в економіці;
- використовувати системи лінійних рівнянь при розробці лінійних економіко-математичних моделей;
- застосовувати поняття лінійних векторних просторів з метою геометричної інтерпретації економічних задач;
- використовувати власні числа і власні вектори при розробці економіко-математичних моделей (зокрема, модель міжнародної торгівлі);
- застосовувати модель міжгалузевого балансу (багатогалузевої економіки) для вирішення реальних завдань економіки;

Тема 1. Застосування методів лінійної алгебри до побудови та розв'язування деяких економічних задач.

Велика кількість інформації, яку отримують в результаті різноманітних досліджень (зокрема, економічних), подається у вигляді таблиць. Саме апарат матричної алгебри дає можливість обробляти, аналізувати та застосовувати для моделювання цю інформацію (оскільки багато математичних моделей економічних об'єктів та процесів мають просту, а головне – компактну матричну форму).

1.1. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)

Практично усі країни, крім внутрішнього товарообміну, здійснюють зовнішній товарообмін, тобто займаються зовнішньою торгівлею. Торгівля вважається ***збалансованою,*** або ***бездефіцитною***, якщо для кожної країни прибуток від торгівлі не менший за обсяг коштів, які вона вкладає у товарообіг (внутрішній і зовнішній).

Економічна постановка задачі. Декілька країн здійснюють взаємний товарообмін. Відома частка бюджетних коштів, яку витрачає кожна країна на закупівлю товарів у іншої країни, ураховуючи й внутрішній товарообіг. Визначити, яким повинне бути співвідношення бюджетів партнерів для того, щоб забезпечити бездефіцитність торгівлі.

Математична модель. Введемо позначення кількісних характеристик – величин, якими описується торгівля, і визначимо зв'язок між ними. Нехай $K_1, K_2, ..., K_n$ – країни, що беруть участь у міжнародній торгівлі. Частки коштів, які витрачає країна K_j на закупівлю товарів у країні K_i, ураховуючи й внутрішній товарообіг ($j = i$), позначимо через a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$. Зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n} \ . \tag{1.1}$$

Матрицю A, елементами якої є числа a_{ij}, називають ***структурною матрицею торгівлі:***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця описує взаємодію країн у процесі міжнародної торгівлі. Співвідношення (1.1) означає, що сума елементів кожного стовпця матриці дорівнює 1. Якщо обсяг коштів, які витрачає кожна країна на торгівлю, позначити через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно, то прибуток p_i кожної країни K_i від внутрішньої та зовнішньої торгівлі складе величину

$$p_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n, \quad i = \overline{1,n} \ . \tag{1.2}$$

Для того, щоб для кожної країни торгівля була збалансованою, за означенням повинна виконуватись умова $p_i \ge x_i$, $i = \overline{1,n}$, тобто прибуток від торгівлі не повинен бути меншим за витрати. Однак дотримання наведеної вимоги неможливе для всіх країн у сукупності. Справді, додамо ліві і праві частини вказаних нерівностей, змінюючи i від одиниці до n:

$$p_i \ge x_i, \quad i = \overline{1,n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i \ge \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge \sum_{i=1}^{n} x_i \ . \tag{1.3}$$

Групуючи в лівій частині доданки, що містять кожне із x_j, отримаємо:

$$x_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + x_2 \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \cdots + x_n \sum_{i=1}^{n} a_{in} \ge x_1 + x_2 + \cdots + x_n \,. \tag{1.4}$$

Зважаючи на співвідношення (1.1), дістанемо «неправильну нерівність»

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \qquad (1.5)$$

Звідки випливає, що збалансована торгівля можлива тільки у разі знаку рівності. Це, гадаємо, зрозуміло не тільки із аналітичних викладок, а й з економічної точки зору (і просто здорового глузду): усі країни в сукупності не можуть отримати прибуток. Більш того, для жодної з країн не може виконуватись знак строгої нерівності $p_i > x_i$.

Отже, умовою збалансованої торгівлі є рівності $p_i = x_i, \quad i = \overline{1,n}$, з яких одержимо:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = x_i, \quad i = \overline{1,n} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = x_n \end{cases} \qquad (1.6)$$

Уведемо до розгляду ***вектор*** (матрицю-стовбець) ***коштів*** $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ і подамо систему (1.6) в матричній формі:

$$A\overline{X} = \overline{X}. \qquad (1.7)$$

Із (1.7) випливає, що за умовою збалансованості торгівлі між країнами, шуканий вектор коштів $\overline{X}$ повинен бути власним вектором структурної матриці торгівлі A, який належить власному числу $\lambda = 1$. Таким чином, розв’язання задачі зводиться до знаходження цього власного вектора $\overline{X}$, компоненти якого встановлюють співвідношення між бюджетами країн, що беруть участь у товарообміні.

1.2. Лінійна балансова модель (модель Леонтьєва)

Одним із відомих прикладів застосування апарата лінійної алгебри в економічних дослідженнях є розроблена у 1936 р. Нобелівським лауреатом Василем Леонтьєвим модель міжгалузевого балансу (МГБ), яка характеризує міжгалузеві виробничі зв’язки економіки країни. Цю модель також називають ***статичною моделлю Леонтьєва багатогалузевої економіки***, або моделлю **«*витрати-випуск*»**. Модель Леонтьєва є основою планування і прогнозування міжгалузевих виробничих зв’язків як у вартісній, так і у натуральній формах.

Економічна постановка задачі. Нехай увесь виробничий комплекс поділено на n «чистих» галузей (вважатимемо, що кожна з галузей виробляє лише один певний вид продукції, тобто, різні галузі випускають різну продукцію). Зауважимо, що це є певним спрощенням реальності. *Основними припущеннями моделі Леонтьєва є:*

1) в економічній системі виробляються, купуються, споживаються та інвестуються n видів продукції, які позначимо $i = 1, 2, ..., n$;

2) кожна галузь виробляє лише один вид продукції (спільне виробництво різних товарів виключається);

3) виробничим процесом у кожній галузі є перетворення деяких (можливо усіх) видів продукції, взятих у певних обсягах, у деякий обсяг продукції того чи іншого виду. Тобто, кожна галузь виступає і як виробник, і як споживач як своєї, так і виробленої іншими галузями продукції. Припускається також, що співвідношення витраченої та випущеної продукції є сталим.

Метою балансового аналізу є відповідь на запитання, яке постає у макроекономіці й пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної із галузей, щоб задовольнити усі потреби в продукції цієї галузі?

Математична модель. Введемо наступні позначення:

x_i – валовий випуск (валовий продукт – ВП) кожної з галузей, тобто загальний обсяг продукції, що випускається i-тою галуззю;

x_{ij} – внутрішнє споживання (проміжний продукт – ПП), тобто кількість продукції i-ї галузі, яка використовується у виробництві продукції j-ї галузі (у тому числі і всередині самої галузі x_{ii});

y_i – кінцевий продукт (КП) i-ї галузі, тобто обсяг продукції i-ї галузі, призначений для невиробничого споживання (це може бути особисте та суспільне споживання, накопичення, експорт тощо);

V_j - додаткова (додана) вартість, тобто, частина валового доходу x_j (ВП у вартісній формі) j-ї галузі, що залишилась після реалізації продукції та відшкодування витрат на виробництво.

Зазвичай дані за звітний період (як правило – рік) подають у вигляді наступної таблиці МГБ:

Виробнича галузь	Споживаюча галузь						КП	ВП
	1	2	…	j	…	n		
1	x_{11}	x_{12}		x_{1j}		x_{1n}	y_1	x_1

2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2n}	y_2	x_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
i	x_{i1}	x_{i2}	$\cdots$	x_{ij}		x_{in}	y_i	x_i
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nj}	$\cdots$	x_{nn}	y_n	x_n
Додана вартість	V_1	V_2	$\cdots$	V_j	$\cdots$	V_n	$\sum_{j=1}^{n} V_j = \sum_{i=1}^{n} y_i$	-
Валовий дохід	x_1	x_2	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	-	

Валовий обсяг продукції i-ї галузі дорівнює сумі обсягів продукції, яку споживають n галузей у процесі виробництва, та кінцевого продукту (ВП=ПП+КП), тобто:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.8}$$

Рівняння (1.8) називаються ***співвідношеннями балансу***. Його можна записати у вигляді:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.9}$$

де a_{ij} – технологічні коефіцієнти внутрішньогалузевого споживання, або прямі (внутрішні) витрати, тобто величини, які вказують кількість одиниць продукції i-ї галузі ($i = \overline{1,n}$), що використовується для виробництва однієї одиниці ВП j-ї галузі ($j = \overline{1,n}$). Відповідно

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}. \tag{1.10}$$

Запишемо співвідношення балансу (1.9) у вигляді матричного рівняння:

$$X = AX + Y, \tag{1.11}$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець валового випуску продукції всіх галузей; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - технологічна матриця коефіцієнтів прямих витрат; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець кінцевого попиту.

Отримане матричне рівняння (1.11) називають ***балансовою моделлю виробництва***, або ***моделлю міжгалузевого балансу виробництва***.

Основна задача МГБ полягає у наступному: при відомій технологічній матриці A та заданій (запланованій на наступний період) матриці Y кінцевих продуктів знайти матрицю X запланованих валових продуктів галузей,.

Рівняння (1.11) можна переписати у вигляді

$$(E - A)X = Y. \tag{1.12}$$

Якщо визначник $\Delta(E - A) \neq 0$, то за методом оберненої матриці отримуємо розв'язок системи:

$$X = (E - A)^{-1} Y = S \cdot Y. \tag{1.13}$$

Матриця $S=\left(E-A\right)^{-1}=\left(s_{ij}\right)$ називається ***матрицею коефіцієнтів повних витрат***, а різниця матриць повних і прямих витрат, тобто матриця $K=S-A$ називається ***матрицею непрямих,*** або ***опосередкованих витрат***.

Економічний смисл коефіцієнтів повних витрат: s_{ij} вказують кількість одиниць ВП продукції i-ї галузі ($i=\overline{1,n}$), що використовується для виробництва однієї одиниці КП j-ї галузі ($j=\overline{1,n}$).

Виходячи з економічного змісту задачі задані та шукані величини повинні бути невід'ємними: $a_{ij}\geq 0$, $y_i\geq 0$, $x_i\geq 0$. У такому випадку модель Леонтьєва називають продуктивною. Є досить прості для перевірки достатні умови продуктивності моделі: 1) усі $a_{ij}\geq 0$; 2) суми елементів всіх стовпців технологічної матриці не перевищують одиницю $\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\leq 1$, $j=\overline{1,n}$; 3) хоча б для одного k-го стовпця $\sum_{i=1}^{n}x_{ik}<1$.

За співвідношенням (1.13) маємо можливість розглядати валовий випуск продукції $x_i\geq 0$ як функцію від запланованих значень кінцевого попиту $y_i\geq 0$:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}s_{ij}y_j .$$

Матриця $S=\left(E-A\right)^{-1}$ дозволяє досліджувати зміни валового продукту залежно від кінцевого попиту, тому її називають ***матричним мультиплікатором***.

На заключення відзначимо, що аналіз таблиці у вертикальному розрізі (лише у вартісній формі) дозволяє аналізувати витрати галузей на виробництво.

1.3. Модель рівноважних цін. У рамках вищенаведеної таблиці МГБ розглянемо ще одну балансову модель, так звану **модель рівноважних цін**.

Економічна постановка задачі. Розглянемо величини $W_i=\dfrac{V_i}{x_i}, i=\overline{1,n}$ - норми додаткової вартості (додаткова вартість на одиницю продукції, що випускається). Необхідно при заданих нормах додаткових вартостей прогнозувати ціни на продукцію галузей, а також зміни цін та інфляцію, яка є наслідком зміни ціни в одній із галузей.

Математична модель. Нехай задано матриці: A - коефіцієнтів прямих витрат (технологічну матрицю), X - обсягів валових продуктів галузей та матрицю-стовбець цін $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, в якій p_i - ціна одиниці продукції i-ої галузі.

Тоді i-а галузь отримує дохід від реалізації своєї продукції обсягом $p_i x_i$. Частину цього доходу необхідно витратити на виробництво, а саме, на виробництво 1 одиниці продукції потрібно витратити $a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \cdots + a_{ni}p_n$, а на виробництво усього обсягу x_i ВП i-ої галузі: $x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \cdots + a_{ni}p_n)$. Інша частина доходу від реалізації продукції галузі, а саме додаткова вартість V_i йде на виплату заробітної плати, податки, підприємницький прибуток та інвестиції.

Отже, справджується система рівностей:

$$p_i x_i = x_i(a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \cdots + a_{ni}p_n) + \mathrm{V}_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Поділивши кожну рівність на x_i, отримаємо систему:

$$p_i = (a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \cdots + a_{ni}p_n) + W_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Отриману систему можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$P = A^T P + W,$$

де A^T - матриця, транспонована до матриці A; $W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}$ - матриця норм додаткової вартості з елементами $W_i = \dfrac{V_i}{x_i}, i = \overline{1,n}$. Отримали аналог балансового рівняння (1.11) із заміною відповідних матриць.

1.4. Задача (оптимального) використання ресурсів.

Економічна постановка задачі. Нехай підприємство випускає продукцію n найменувань, для виробництва якої застосовуються m видів ресурсів. Потреби у ресурсах певного виду для виготовлення одиниці продукції кожного із найменувань та наявні обсяги запасів ресурсів кожного виду подано у вигляді таблиці:

Види ресурсів	Витрати ресурсів на виготовлення одиниці продукції				Обсяг ресурсів
	1	2	…	n	

1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m

Необхідно скласти план виробництва, тобто визначити кількість продукції кожного із найменувань, яку треба виробити підприємству при наявних запасах ресурсів.

Математична модель. Нехай $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1\ x_2 \ldots x_n)^T$ - план виробництва, де

$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ – кількість продукції відповідного найменування, яку планує виробляти підприємство. Тоді за даними таблиці витрати кожного i -го ресурсу на усе виробництво становитимуть: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$; $i = \overline{1,\mathrm{m}}$.

А) У випадку, коли усі ресурси використовуються повністю, має виконуватись ситема рівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Із економічного сенсу задачі випливає, що усі розглядувані величини повинні бути невід'ємними (причому, якщо виявиться, що деяке $x_k = 0$, то це означатиме, що k-те найменування продукції не планується виготовляти). Отриману систему можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$AX = B,$$

у якому $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матриця норм витрат ресурсів , а

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - матриця-стовбець запасів ресурсів. Таким чином, знаходження плану виробництва при повному використанні запасів ресурсів зведено до знаходження невід'ємних розв'язків системи m лінійних рівнянь з n невідомими (СЛАР).

Б) У загальному випадку витрати кожного i -го ресурсу на усе виробництво задовольняють нерівності: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$; $i = \overline{1, \mathrm{m}}$. Тоді математичною моделлю задачі буде наступна система нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

Але введенням m додаткових невід'ємних змінних $x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots,\ x_{n+m}$ (економічний смисл яких – це залишки відповідних ресурсів після виробництва) система нерівностей зводиться до системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$

Отже, у загальному випадку, знаходження планів виробництва $X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots,\ x_{n+m})^T$ зводиться до знаходження невід'ємних розв'язків отриманої СЛАР.

1.5. Задача організації перевезень (транспортна задача -ТЗ).

Економічна постановка задачі. Є постачальники (Sources) деякого однорідного подільного товару $S_i,\quad i = \overline{1, m}$; із пропозиціями (supply) цього товару в обсягах $s_i,\quad i = \overline{1, m}$; відповідно. На даний товар є попит (demand) споживачів $D_j,\quad j = \overline{1, \mathrm{n}}$; у обсягах $d_j,\quad j = \overline{1, \mathrm{n}}$; відповідно. Також відомі транспортні тарифи $c_{ij},\quad i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}$, які показують вартість перевезення 1 одиниці товару від постачальника S_i до споживача D_j. Дані задачі зручно подати у вигляді таблиці:

постачальники	споживачі				пропозиції
	D_1	D_2	…	D_n	
S_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	s_1
S_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	s_2
…	…	…	…	…	…

S_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	s_m
попит	d_1	d_2	$\cdots$	d_n	

Розглянемо випадок так званої закритої ТЗ, коли загальна пропозиція $\sum_{i=1}^{m} s_i$ співпадає із загальним попитом $\sum_{j=1}^{n} d_j$ (зазначимо, що у супротивному випадку ТЗ зводиться до закритої введенням фіктивного (dummy) постачальника або споживача із недостаючими пропозицією або попитом, а відповідні траспортні тарифи вважаються нульовими). Необхідно скласти план перевезень (поставок) при умові, що весь товар буде вивезено від постачальників і попит усіх споживачів повністю забезпечено.

Математична модель. Нехай $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$, де $x_{ij}, \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$; - запланований обсяг перевезення (поставка) товару від постачальника S_i до споживача D_j. Відзначимо, що із економічного змісту задачі випливає невід'ємність усіх розглядуваних величин. Умова вивезення товару від усіх постачальників набуває вигляду системи рівнянь:

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = s_i\ ; \quad i = \overline{1,\mathrm{m}}.$$

А умова забезпечення попиту усіх споживачів запишеться у вигляді наступної системи:

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = d_j\ ; \quad j = \overline{1,\mathrm{n}}.$$

Остаточно, математичною моделлю задачі є наступна СЛАР:

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = s_1 \\ \cdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} x_n = s_m \end{cases} \\ \begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = d_1 \\ \cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = d_n \end{cases} \end{cases}$$

Отже задача знаходження планів перевезень (ТЗ) зводиться до знаходження невід'ємних розв'язків СЛАР, у якої $m+n$ рівнянь та $m \cdot n$ невідомих – елементів $x_{ij}, \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$; матриці поставок X .

Зазначимо, якщо у задачі 1.4 додати ще,наприклад, умову максимізації функції прибутку від реалізації запланованих обсягів виробленої продукції, а в задачі 1.5 – умову мінімізації загальних транспортних витрат, то дістанемо відомі оптимізаційні задачі математичного програмування, які широко застосовуються в економічній практиці. Доречі, за вклад у теорію оптимального розміщення ресурсів (у якій розглядаються, зокрема, і задачі типу 1.4, 1.5) у 1975 році Нобелівської премії з економіки були удостоєні Л.Канторович та Т.С.Купманс.

Тема 2. Матриці. Різновиди матриць. Операції над матрицями.

Означення. Матрицею розміру (або розмірності) $m \times n$ (читається: „ем на ен”) називається таблиця упорядкованих чисел (або будь-яких інших об’єктів), розташованих у m рядках та в n стовпцях.

Матриці, як правило, позначають великими латинськими літерами $A, B, C, \ldots$ та круглими (або квадратними) дужками.

Наприклад, числова матриця розміру $m \times n$ має вигляд:

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n,},$$

де $i = \overline{1,m}$ – ***номер рядка***, а $j = \overline{1,n}$ – ***номер стовпця***, на перетині яких знаходиться число $a_{ij} \in R$ – ***елемент матриці***.

Матриця розміру $m \times 1$ називається **матрицею-стовпцем** (або вектор-стовпцем), а матриця розміру $1 \times n$ називається **матрицею-рядком** (або вектором-рядком).

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається **нуль-матрицею** і позначається 0.

Наприклад,

$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ – матриця розміру 2×3;

$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нуль-матриця розміру 3×2;

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець розміру 4×1 (або вектор стовпець розмірності **4**)

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матриця-рядок розміру 1×3 (або трьохвимірний вектор-рядок).

Матрицю $A_{m\times n}$, у якої $m = n$ (тобто, кількість рядків співпадає із кількістю стовпців) називають **квадратною матрицею порядку n:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Множина елементів $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$ квадратної матриці A порядку n називається **головною діагоналлю**, а множину елементів $\{a_{1n}, a_{2\ n-1}, a_{3\ n-3}, \dots, a_{n1}\}$ називають **побічною діагоналлю** (або неголовною, допоміжною).

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що розташовані під головною діагоналлю (над головною діагоналлю), дорівнюють нулю, називається **верхньою (нижньою) трикутною.**

Квадратна матриця, у якої всі позадіагональні елементи дорівнюють нулю, називається **діагональною** і часто позначається

$$diag\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}.$$

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається **одиничною** і позначається E.

Наприклад, матриці:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – квадратна порядку 2;

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – верхня трикутна;

$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – нижня трикутна;

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ – діагональна 2-го порядку,

$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична 3-го порядку.

Операції над матрицями.

1. Порівняння. Матриці однакових розмірів рівні між собою, якщо співпадають їх відповідні елементи.

Наприклад:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix},\; B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix},\; C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$\mathrm{A}=B$, оскільки $a_{ij}=b_{ij}\quad \forall i,\mathrm{j};$

$\mathrm{A}_{2\times 2}\neq C_{2\times 3}$, оскільки матриці різних розмірів.

2. Транспонування. Транспонованою до матриці A називають матрицю A^T (або $A^/$), рядки якої дорівнюють відповідним стовпцям матриці A.

Наприклад, для $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Очевидно, що $\left(A^T\right)^T=A$.

3. Множення на число. Для того, щоб помножити матрицю на число (або число на матрицю), потрібно кожен елемент матриці помножити на це число.

Наприклад, $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 0\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3 & -2/3 & 1/3\\ -1 & 4/3 & 0\end{pmatrix}$

4. Додавання (віднімання). Сумою (різницею) двох матриць однакових розмірів буде матриця, елементи якої знаходяться додаванням (відніманням) відповідних елементів матриць-доданків.

Приклад. Дві компанії експортують три види продукції, причому, обсяги експорту за попередній та поточний рік задано відповідними матрицями

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}30 & 40 & 100\\ 40 & 90 & 70\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}50 & 60 & 110\\ 40 & 100 & 60\end{pmatrix},$$

де $\mathrm{a_{ij}}$, $\mathrm{b_{ij}}$ – обсяги експорту i-ої компанії j-го виду продукції. Знайти для кожної компанії та кожного виду продукції: а) обсяги середньорічного експорту; б) річні прирости експорту.

Розв'язування. а) обсяги середньорічного експорту:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}30+50 & 40+60 & 100+110\\ 40+40 & 90+100 & 70+60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40 & 50 & 105\\ 40 & 90 & 65\end{pmatrix}.$$

Отже, наприклад, середньорічний обсяг екпорту другої компанії становить: 40 одиниць першого, 90 – другого та 65 – третього виду продукції;

б) річні прирости експорту:

$$\mathrm{B}-\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 50-30 & 60-40 & 110-100 \\ 40-40 & 100-90 & 60-70 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 20 & 10 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, наприклад, друга компанія за рік не змінила обсяги експорту першого виду продукції, наростила на 10 обсяг експорту другого виду і зменшила на 10 експорт третього виду продукції.

Зауважимо, що усі ці операції легко виконувати за допомогою електронних таблиць MS Excel. Для цього достатньо операції виконати для одного елемента матриці-результату (із адресним посиланням), а потім перекопіювати для усіх інших елементів результату.

5. Множення матриць. Добутком двох матриць $A_{m\times p}\cdot B_{p\times n}=C_{m\times n}$ називається матриця $C_{m\times n}$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i–го рядка матриці A на відповідні елементи j–го стовпця матриці B („рядки 1–ої множаться на стовпчики 2–ої”):

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\cdot b_{kj};\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$$

Зауваження. *Із означення випливає, що добуток* $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ *існує, якщо матриці „узгоджені”, тобто кількість стовпців матриці* A *співпадає з кількістю рядків матриці* B.

На практиці, для знаходження i-го рядка добутку двох матриць потрібно i-ий рядок першої матриці послідовно, „накладанням” помножити на всі стовпці другої матриці.

Приклад. Знайти добуток матриць

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ \mathrm{і}\ \ \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування. $\mathrm{A}_{2\times2}$ і $\mathrm{B}_{2\times3}$ - „узгоджені”, значить $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ існує.

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\underset{\mathbf{2\times2}}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\cdot\underset{\mathbf{2\times3}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}=\underset{\mathbf{2\times3}}{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}}.$$

Знаходження елементів 1–го рядка добутку:

C_{11}: 2 -1 $\qquad$ C_{12}: 2 -1 $\qquad$ C_{13}: 2 -1

$$\begin{array}{ccc} \underline{\ 1 \quad -2 \qquad} & \underline{\ 2 \qquad 0 \qquad} & \underline{\ -3 \qquad 1 \qquad} \\ 2\cdot1+(-1)\cdot(-2)=4 & 2\cdot2+(-1)\cdot0=4 & 2\cdot(-3)+(-1)\cdot1=-7 \end{array}$$

Знаходження елементів 2–го рядка добутку:

$$C_{21}:\ \begin{array}{c} 1 \quad 0 \\ \underline{\ 1 \quad -2 \quad} \\ 1\cdot1+0\cdot(-2)=1 \end{array} \qquad C_{22}:\ \begin{array}{c} 1 \quad 0 \\ \underline{\ 2 \quad 0 \quad} \\ 1\cdot2+0\cdot0=2 \end{array} \qquad C_{23}:\ \begin{array}{c} 1 \quad 0 \\ \underline{\ -3 \quad 1 \quad} \\ 1\cdot(-3)+0\cdot1=-3 \end{array}$$

Отже: $\quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

Зазначимо, що добуток $B_{2\times3} \cdot A_{2\times2}$ – не існує (оскільки B і A „неузгоджені”).

Зауваження. *Добуток матриць, взагалі кажучи, не має властивості комутативності, тобто* $A \cdot B \neq B \cdot A$ *(навіть, якщо існують обидва добутки і їх розміри співпадають), але є матриці, для яких* $A \cdot B = B \cdot A$ *(комутативні).*

Наприклад, для квадратних одного порядку матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ і $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A \cdot E = E \cdot A$.

Дійсно:

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+(-1)\cdot0 & 2\cdot0+(-1)\cdot1 \\ 1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot(-1)+0\cdot0 \\ 0\cdot2+1\cdot1 & 0\cdot(-1+1\cdot0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Приклад показує, що одинична матриця E відіграє таку ж саму роль у матричному численні, що і 1 при множенні чисел.

1.6. Розглянемо спрощену модель так званих портфельних інвестицій.

Економічна постановка задачі. Іноземна компанія планує інвестувати в економіку України: $50 млн. - у розвиток інфраструктури; $100 млн. - у сільське господарство; $40 млн. - у інформаційні технології. В залежності від політики уряду можливі два варіанти доходності активів:

Активи	Варіант 1	Варіант 2
Розвиток інфраструктури	1,25	0,95
Сільське господарство	1,05	1,05
Інформаційні технології	0,9	1,15

Необхідно оцінити вартість інвестиційного портфелю в залежності від варіантів урядової політики.

Математична модель. За даними задачі розглянемо матриці:

$P = (p_1\ p_2\ p_3) = (50\ 100\ 40)$ - матриця-рядок розміру 1х3, яка характеризує інвестиційний портфель;

$R = \begin{pmatrix} 1,25 & 0,95 \\ 1,05 & 1,05 \\ 0,9 & 1,15 \end{pmatrix}$ - матриця розміру 3х2, елементи якої r_{ij} визначають доходність i-го актива в залежності від j-го варіанту політики;

$D = (d_1 \quad d_2)$ - матриця розміру 2х1, елементи якої d_j визначають вартість інвестиційного портфеля в залежності від j-го варіанту політики, яку і потрібно за умовою задачі знайти як добуток матриць P і R. Оскільки матриці-співмножники узгоджені, то:

$$D = (d_1 \quad d_2) = PR = \begin{pmatrix} 50 & 100 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,25 & 0,95 \\ 1,05 & 1,05 \\ 0,9 & 1,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 109 & 104 \end{pmatrix}.$$

Отже, при першому варіанті урядової політики вартість інвестиційного портфеля становитиме \$109 млн., а при другому - \$104 млн.

Зауваження. Для знаходження добутку числових матриць зручно користуватись функцією «МУМНОЖ» MS Excel.

6. Піднесення матриць до натурального степеня. Для піднесення квадратної матриці A до степеня $n \in N$ необхідно взяти матрицю множником n разів:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n}.$$

За означенням: $A^0 = E, \quad A^1 = A$. Легко показати, що $A^n \cdot A^m = A^{n+m}, \quad (A^n)^m = A^{nm}$.

Тема 3. Визначники, правила їх обчислення. Властивості визначників. Обернена матриця.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратна матриця n-го порядку.

Означення. **Визначником квадратної матриці** n-го порядку (або просто **визначником n-го порядку**) називається число, яке обчислюється за певним правилом, і позначається:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdots \;\; \cdots \;\; \cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta(A) = \det(A) = \Delta.$$

Так, наприклад, визначник 1–го порядку: $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$,

Тобто, визначник квадратної матриці 1–го порядку дорівнює елементу матриці (визначника).

Наприклад: $|\,3\,| = 3, \;\; |-4\,| = -4$.

Для знаходження правила обчислення визначників вищих порядків уведемо поняття мінора та алгебраїчного доповнення елемента визначника.

Нехай $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – визначник 2–го порядку.

Означення. **Мінором** M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається визначник, який отримується із Δ викреслюванням (вилученням) i-го рядка та j-го стовпця.

Означення. **Алгебраїчним доповненням** A_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається його мінор, взятий зі знаком „+” або „–”:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Для визначника 2–го порядку:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = |\,a_{22}\,| = a_{22}; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -|a_{21}| = -a_{21};$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -|\,a_{12}| = -a_{12}; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = |\,a_{11}\,| = a_{11}.$$

Теорема Лапласа (про розклад визначника). Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого одного рядка (або деякого одного стовпця) визначника на відповідні їм алгебраїчні доповнення.

Так, для визначника 2–го порядку, за теоремою Лапласа:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \text{(розклад за 1–им рядком)} = = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} .$$

Відзначимо, що теорема дозволяє звести обчислення визначника 2–го порядку до знаходження визначників 1–го порядку (в загальному випадку, обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення визначників $(n-1)$-го порядку).

Зауваження. *На практиці визначник 2–го порядку зручніше обчислювати за таким правилом: визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів побічної діагоналі.*

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5-(-3)\cdot 4 = 22.$$

А визначники будь-якого порядку легко обчислюються за допомогою функції «МОПРЕД» MS Excel.

Деякі властивості визначників.

Зазначимо, що всі ці властивості справедливі для визначників будь-якого порядку.

1. При транспонуванні визначник не змінюється.

$$\Delta' = \Delta^{T} = \Delta\left(A^{T}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} = \Delta$$

Наслідок. У визначнику рядки та стовпці мають однакові властивості (рівноправні), тому надалі у формулюваннях будемо говорити „ряд”, розуміючи під цим словом „елементи деякого рядка або деякого стовпця” визначника.

2. Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два паралельних ряди, то визначник змінить знак на протилежний.

3. Якщо визначник має два однакових паралельних ряди, то він дорівнює нулю.

4. Для того щоб помножити визначник на число, потрібно помножити на це число деякий один його ряд.

$$k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Наслідок 1. Спільний множник усіх елементів будь-якого ряду виноситься за знак визначника.

Наслідок 2. Визначник, у якому є нульовий ряд, дорівнює нулю.

Наслідок 3 (із властивостей 3, 4). Визначник, у якого є два паралельних пропорційних ряди, дорівнює нулю.

5. Якщо у визначнику елементи деякого ряду є сумою двох доданків, то він дорівнює сумі двох визначників, наприклад:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

6. Визначник не зміниться, якщо до всіх елементів будь-якого ряду додати відповідні елементи паралельного ряду, помножені на одне й те саме число.

Зауваження. *Властивість 6 дозволяє перетворювати в нуль деякі елементи визначника, не змінюючи його величини. Це часто застосовують для спрощення обчислень.*

7. Сума добутків елементів будь-якого ряду визначника на алгебраїчні доповнення елементів паралельного ряду дорівнює нулю (іноді цю властивість називають другою теоремою розкладу визначника).

Дійсно, якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, то, наприклад,

$$a_{11}\cdot A_{21} + a_{12}\cdot A_{22} = a_{11}\cdot(-1)^{2+1}\cdot M_{21} + a_{12}\cdot(-1)^{2+2}\cdot M_{22} =$$
$$= -a_{11}\cdot a_{12} + a_{12}\cdot a_{11} = 0.$$

8. Визначник добутку двох квадратних матриць одного порядку дорівнює добутку їх визначників.

$$\Delta(A\cdot B) = \Delta(A)\cdot\Delta(B).$$

9. Визначник трикутної (верхньої або нижньої), діагональної матриці дорівнює добутку діагональних елементів, зокрема, визначник одиничної матриці E дорівнює одиниці:

$$\Delta(E) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Обернена матриця.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратна матриця порядку n.

Означення. Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці A, якщо

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$$

Зауваження. *Очевидно, що* A^{-1} *– квадратна матриця того ж порядку, що і* A.

Означення. Квадратна матриця A називається **невиродженою**, якщо її визначник $\Delta(A)=|A|\neq 0$. У супротивному випадку матриця A називається **виродженою**.

Справедлива наступна

Теорема. Для існування оберненої матриці A^{-1} до квадратної матриці A необхідно і достатньо, щоб її визначник $\Delta(A)\neq 0$ (тобто матриця A повинна бути невиродженою).

Доведення. *Необхідність. Дано: існує* A^{-1} (A^{-1} $\exists$). *Довести, що матриця* A ***невироджена**, тобто, її визначник* $\Delta(A)=|A|\neq 0$.

За означенням оберненої матриці маємо $A^{-1}\cdot A=E$. Використовуючи властивості визначників, отримуємо:

$$\Delta(A^{-1}\cdot A)=\Delta(E)\Leftrightarrow \Delta(A^{-1})\cdot\Delta(A)=1\Rightarrow \Delta(A^{-1})=\frac{1}{\Delta(A)}.$$

Оскільки добуток визначників відмінний від нуля (дорівнює 1), то кожен із співмножників відмінний від нуля, тобто, матриця невироджена (що й потрібно було довести). Відзначимо, у процесі доведення також з'ясовано, що визначник оберненої матриці є числом, оберненим до визначника даної матриці.

Достатність. Дано: матриця A невироджена, тобто $\Delta(A)=|A|\neq 0$. *Довести, що існує обернена матриця* A^{-1}.

Доведення буде *конструктивним,* тобто, побудуємо обернену матрицю. Для цього знайдемо A_{ij} – алгебраїчні доповнення усіх елементів a_{ij} визначника $\Delta(A)=|A|\neq 0$ (для спрощення розглянемо квадратну матрицю 2-го порядку) і запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot(A)^{T}=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємся, що це дійсно обернена матриця до даної. Наприклад :

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix}a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21} & a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}\\ a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22} & a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix}\Delta(A) & 0\\ 0 & \Delta(A)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тут елементи головної діагоналі дорівнюють визначнику $\Delta(A)$ за теоремою Лапласа, а усі позадіагональні елементи – нулю за властивістю 7 визначників. За означенням побудована матриця дійсно є оберненою до даної матриці.

Неважко показати, що обернена матриця до даної визначається однозначно.

Схема знаходження оберненої матриці.

1. Знаходимо визначник матриці $\Delta(A)$. Якщо $\Delta(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}\exists$, якщо ж $\Delta(A)=0 \Rightarrow A$ - виpоджена, і A^{-1} не $\exists$.

-0,75	0,25	0,5
-1	1	-1
1,25	-0,75	0,5

2. Знаходимо A_{ij} – алгебраїчні доповнення усіх елементів a_{ij} визначника.

3. Записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \left\{A_{ij}\right\}^{T} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Якщо потрібно, виконуємо перевірку:

$$A^{-1} \cdot A = E \text{ (або } A \cdot A^{-1} = E).$$

Зауважимо, що обернену матрицю легко знайти за допомогою функції «МОБР» MS Excel.

Наприклад, знайдемо обернену для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. За допомогою функції «МОБР» MS Excel отримуємо:

$$A^{-1} =$$

Властивості операцій над матрицями

$A+B=B+A$	$A(B+C)=AB+AC$
$A+O=A$	$(A+B)C=AC+BC$

$(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$	$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
$\lambda A=A\lambda$	$(AB)C=A(BC)$
$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$	$AO=OA=O$
$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$	$AE=EA=A$
$\left(A^T\right)^T=A$	$(A+B)^T=A^T+B^T$
$(AB)^T=B^TA^T$	$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$\left(A^n\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^n$

Тема 4. Ранг матриці. Знаходження рангу матриці.

Розглянемо матрицю розміру $m\times n$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Мінором k***-го порядку*** $(k=1,2,\dots)$ *матриці* A *називається визначник* k*-го порядку, складений з елементів матриці, які розташовані на перетині деяких* k *рядків і* k *стовпців.*

Наприклад:

$$A_{4\times5}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$M_1^2=|2|=2$, $M_4^1=|0|=0$ – мінори 1–го порядку. Очевидно, що мінорами 1–го порядку є елементи матриці.

$$M_{1\,2}^{2\,4}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=4$$

– мінор 2–го порядку. (В мінорах матриці нижні індекси вказують номери рядків, а верхні – номери стовпців матриці, які використовуються для утворення даного мінора).

$$M_{1\,2\,3}^{1\,2\,3}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&5\\3&6&9\end{vmatrix}=0,\qquad M_{1\,3\,2}^{4\,1\,2}=\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&8\\3&6&5\end{vmatrix}=7$$

– мінори 3–го порядку

$$M_{4\,2\,1\,3}^{1\,2\,3\,4}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&5&8\\3&6&9&5\\0&0&0&0\end{vmatrix}=0$$

– мінор 4–го порядку, який містить нульовий рядок.

Приклад дозволяє зробити такий висновок: для ненульової матриці $A_{m\times n}$ можливий порядок k її мінорів – це натуральне число, яке задовольняє нерівність $1\le k\le \min\{m,\,n\}$.

Означення. Рангом матриці *називається максимальний порядок її відмінного від нуля мінора.* ***Ранг нульової матриці дорівнює нулю****.*

Ранг матриці $A_{m\times n}$ позначається $r=r(A)$ і, очевидно, задовольняє нерівність $0\le r(A)\le \min\{m,\,n\}$.

У розглянутому прикладі у матриці $A_{4\times 5}$ є відмінний від нуля мінор 3–го порядку, а всі мінори 4-го порядку дорівнюють нулю (переконайтесь самостійно, оскільки усі вони містять нульовий рядок). За означенням, $r(A)=3$.

Таким чином, якщо $r(A)=k$, то це означає, що у даної матриці A є мінор порядку k, відмінний від нуля, а всі мінори більш високих порядків (якщо вони існують) дорівнюють нулю.

Приклад.

$$E=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}$$

– одинична матриця n-го порядку.

$\Delta(E)=1\ne 0\Rightarrow r(E)=n$, тобто ранг одиничної матриці дорівнює її порядку.

Означення. Елементарними перетвореннями *матриці називаються такі операції над матрицею:*

1. *Транспонування матриці.*
2. *Перестановка місцями паралельних рядів.*
3. *Викреслювання нульового ряду, а також усіх, окрім одного, із паралельних пропорційних рядів.*

4. Множення ряду на число, відмінне від нуля.

5. Додавання до елементів ряду відповідних елементів паралельного ряду, помножених на довільне число.

Неважко переконатись, що справедлива наступна

Теорема. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Означення. *Матриці називають* ***еквівалентними****, якщо вони мають однаковий ранг.*

За допомогою елементарних перетворень довільну ненульову матрицю можна привести до еквівалентної їй одиничної матриці. На цьому базується метод знаходження рангу матриці.

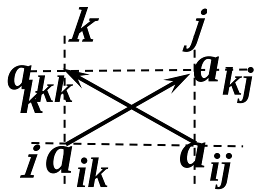
Схема знаходження рангу матриці методом елементарних перетворень.

1. Перестановкою рядків або стовпців (при необхідності) вибираємо перший діагональний елемент матриці $a_{11} \neq 0$, який назвемо **ключовим** (головним, розв'язувальним).

2. У наступній матриці ключовий рядок ділиться на ключовий елемент, а всі елементи ключового стовпця замінюються нулями.

3. Усі інші елементи перераховуються знаходяться за правилом „прямокутника". А саме, якщо a_{kk} – ключовий елемент, то в новій матриці елемент a'_{ij} знаходиться за формулою $\boldsymbol{a'_{ij} = \frac{1}{a_{kk}}(a_{kk} \cdot a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj})}$, яку можна зобразити

у вигляді „прямокутника":



4. Здійснюється перехід до наступного кроку (вибираємо наступний ключовий діагональний елемент $a_{22} \neq 0$).

Таким чином, за фіксовану кількість кроків еквівалентними перетвореннями матриця зводиться до одиничної, ранг якої дорівнює її порядку. Відзначимо, що усі ці елементарні перетворення легко здійснюються за допомогою MS Excel.

Приклад. Знайдемо ранг матриці (використаємо електронні таблиці MS Excel).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$
\sim \begin{matrix} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 7 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1{,}5 & 2 & 2{,}5 \\ 0 & \boxed{1{,}5} & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1{,}5 & 0 & -0{,}5 \end{matrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}
$$

В результаті еквівалентних елементарних перетворень дістали одиничну матрицю 2–го порядку. Значить $r(A) = 2$.

Тема 5. Розв’язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими за допомогою оберненої матриці та за правилом Крамера. Дослідження та розв’язування систем m лінійних рівнянь з n невідомими. Метод Жордана-Гаусса.

Розв’язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими за допомогою оберненої матриці (матричним методом) та за правилом Крамера.

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими:

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*).
$$

Означення . ***Розв’язком*** *СЛАР (*) називається упорядкована множина* n *дійсних чисел* $\left(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0\right)$, *яка при підстановці у систему замість невідомих перетворює її в систему тотожностей (систему правильних числових рівностей).*

Матричний метод

Позначимо:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.
$$

Тут: $A_{n\times n}$ – матриця коефіцієнтів при невідомих (основна матриця системи);

$X_{n\times 1}$ – матриця-стовпець невідомих;

$B_{n\times 1}$ – матриця-стовпець вільних членів (правих частин).

Тоді СЛАР (*) можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$A \cdot X = B .$$

Якщо $\Delta(A) \neq 0$, то існує A^{-1}. Домножимо обидві частини матричного рівняння зліва на A^{-1}. Одержимо:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$
$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$
$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Отже, справедлива наступна

Теорема. Якщо визначник основної матриці A СЛАР (*) відмінний від нуля $\left(\Delta(A) = |A| \neq 0\right)$, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться як добуток оберненої до A матриці A^{-1} на матрицю–стовпець вільних членів B.

Приклад. Розв'язати за допомогою оберненої матриці СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 = -4 \end{cases}.$$

Розв'язування.

1. Позначимо:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів при невідомих;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих;

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів.

2. Запишемо систему у вигляді матричного рівняння $A \cdot X = B$.

3. Обчислимо $|A|$: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow$ система має єдиний розв'язок. Оскільки $|A| \neq 0$, то існує обернена матриця $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Знайдемо її:

$$A_{11}=-3 \qquad A_{21}=-2 \qquad \text{Отже, } A^{-1}=-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$
$$A_{12}=-2 \qquad A_{22}=1$$

Таким чином,

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ -4\end{pmatrix}=-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-7\\ -14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=1,\ x_2=2$.

Метод Крамера.

Означення . Основним визначником *СЛАР (*) називається визначник* $\Delta=\Delta(A)=|A|\neq 0$ *матриці коефіцієнтів при невідомих* A.

Справедлива наступна

Теорема (правило Крамера). *Якщо основний визначник СЛАР (*)* $\Delta\neq 0$*, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:*

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};\quad \ldots;\quad x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де визначники Δ_j отримуємо із Δ заміною j-го стовпця коефіцієнтів при невідомій x_j на стовпець вільних членів.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера.

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=7\\ 5x_1+4x_2=14\end{cases}.$$

Розв'язування.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix}=8-15=-7,\quad \Delta\neq 0.$$

Оскільки $\Delta\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, що знаходиться за правилом Крамера:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 14 & 4\end{vmatrix}=28-42=-14, \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & 14\end{vmatrix}=28-35=-7.$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-14}{-7}=2; \qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1.$$

Перевірка: $\begin{cases} 2\cdot 2+3\cdot 1=7 \\ 5\cdot 2+4\cdot 1=14 \end{cases}.$

Відповідь: $(2;\ 1)$.

Дослідження та розв'язування систем m лінійних рівнянь з n невідомими.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими (СЛАР):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (**)$$

Означення. *Система рівнянь називається* ***сумісною****, якщо вона має хоча б один розв'язок. У супротивному випадку система називається* ***несумісною****.*

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Тут A – основна матриця системи, $\overline{A}$ – розширена матриця системи.

Теорема Кронекера-Капеллі (критерій сумісності системи лінійних рівнянь). СЛАР **(**)** сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці:

$$r(A) = r(\overline{A}).$$

Наслідок. Якщо у **сумісної** системи $r(A) = r(\overline{A}) = r = n$ (n – кількість невідомих), то розв'язок єдиний і таку систему називають **визначеною**, а якщо $r < n$, то система має безліч розв'язків (**невизначена**).

Розв'язування систем m лінійних рівнянь з n невідомими методом Жордана-Гаусса.

Означення. *Дві системи рівнянь називаються* ***рівносильними (еквівалентними)****, якщо множини їхніх розв'язків (можливо, і порожні) співпадають.*

Означення. Елементарними перетвореннями *системи називаються такі операції над системами:*

1. *Перестановка місцями будь-яких двох рівнянь.*

2. *Множення обох частин рівняння на число, відмінне від нуля.*

3. *Додавання до обох частин рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на будь–яке число.*

4. *Викреслювання всіх, окрім одного, із пропорційних рівнянь.*

Теорема. Елементарні перетворення переводять систему рівнянь у рівносильну.

На цій теоремі базується найбільш поширений на практиці метод розв'язування СЛАР – метод Жордана-Гаусса. Суть цього методу полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень (які проводяться із розширеною матрицею системи) система зводиться до діагонального (одиничного) вигляду.

Зауваження. Якщо в результаті перетворень виникає рівняння вигляду $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$ (нульовий рядок розширеної матриці), то його можна відкинути. Якщо ж з'являється рівняння $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b$, де $b \neq 0$, то це означає, що вихідна система несумісна.

Перетворення системи методом Жордана-Гаусса зручно виконувати за допомогою розрахункових (так званих симплексних) таблиць.

Правило розрахунку :

1. Складаємо таблицю з коефіцієнтів при невідомих і вільних членів:

x_1	x_2	...	x_n	b

2. Рухаючись з верхнього лівого кута, вибираємо ключовий елемент $a_{11} \neq 0$ (якщо цей елемент дорівнює нулю, то переставляємо місцями рядки - рівняння, щоб він не дорівнював нулю).

3. Усі елементи ключового рядка ділимо на ключовий елемент.

4. Усі елементи ключового стовпця, крім ключового елемента, замінюємо нулями.

5. Інші елементи таблиці обчислюємо за правилом прямокутників. При цьому, якщо виникають рядки, що повністю складаються з 0, то вони викреслюються. Якщо з'являються рівні чи пропорційні рядки, то всі такі рядки, крім одного, викреслюються.

Якщо виникає рядок, всі елементи якого дорівнюють нулю, крім елемента, що стоїть у стовпці b, то розв'язування на цьому закінчують і робиться висновок, що система розв'язків не має.

Повторюємо цей процес, вибираючи наступний ключовий елемент $a_{22} \neq 0$. Процес розв'язування закінчено, якщо матриця СЛАР приведена до діагонального виду або доведено, що система несумісна.

Після закінчення розв'язування, якщо система відразу має діагональний вигляд, то ми одержимо єдиний розв'язок.

Якщо ж число рівнянь менше числа невідомих, ліворуч залишаємо ті невідомі, коефіцієнти при яких були ключовими елементами ***(базисні невідомі***). Інші невідомі переносимо праворуч (***вільні невідомі***). Виражаємо базисні невідомі через вільні. У цьому випадку система має безліч розв'язків ***(загальний розв'язок)***.

Надаючи вільним невідомим довільних числових значень, одержимо ***частинні розв'язки***.

Серед частинних розв'язків виділяють ***базисний розв'язок***, у якому всі вільні невідомі дорівнюють нулю.

Приклад . Розв'язати систему рівнянь методом Жордана-Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}.$$

Розв'язування. Для розв'язування застосуємо MS Excel і оформимо у вигляді симплекс-таблиць (для зручності переставимо місцями перше та третє рівняння):

X1	X2	X3	X4	в
1	-1	-2	5	3
3	-2	-1	1	1
3	-2	3	-3	1
1	-1	-2	5	3
0	1	5	-14	-8
0	1	9	-18	-8
1	0	3	-9	-5
0	1	5	-14	-8
0	0	4	-4	0
1	0	0	-6	-5
0	1	0	-9	-8
0	0	1	-1	0

Останній таблиці відповідає система:

$$\begin{cases} x_1 - 6x_4 = -5 \\ x_2 - 9x_4 = -8 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Після перенесення вільної невідомої x_4 у праву частину дістаємо загальний розв'язок СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 = -5 + 6x_4 \\ x_2 = -8 + 9x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}.$$

Наведемо приклади частинних розв'язків.

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}, \text{ або } \left(1; 1; 1; 1\right); \qquad \begin{cases} x_4 = -1 \\ x_1 = -11 \\ x_2 = -17 \\ x_3 = -1 \end{cases}, \text{ або } \left(-11; -17; -1; -1\right).$$

Базисний розв'язок:

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1 = -5 \\ x_2 = -8 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \text{або} \quad (-5;\,-8;\,0;\,0).$$

Відзначимо, що метод Жордана-Гаусса є основним методом розв'язування СЛАР на практиці і застосовується більшістю пакетами спеціалізованих прикладних програм.

Тема 6. Лінійний векторний простір. Лінійно залежні та лінійно незалежні векторні системи, їх властивості. Базис. Розклад за базисом.

Лінійний векторний простір.

Означення. n-вимірним **вектором** називається впорядкований набір n дійсних чисел і позначається

$$\overline{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

де $a_i \in R$ - **координати** (компоненти) вектора.

Будь-який вектор можна інтерпретувати як **матрицю-стовпець** (або як матрицю-рядок), а операції множення на дійсні числа та сумування виконувати аналогічно введеним раніше операціям над матрицями, тобто **покоординатно.**

Означення. Множина L елементів довільної природи називається **лінійним простором** над полем дійсних чисел R, якщо разом із будь-якими елементами множини L їх сума і добуток на довільне дійсне число також належать L. При цьому для елементів множини та дійсних чисел повинні виконуватись аксіоми лінійного простору:

1) $x + y = y + x$ (комутативність);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоціативність);

3) $\exists \theta \in L : x + \theta = x$ (існування нейтрального (нульового) елемента);

4) $\exists (-x) \in L : x + (-x) = \theta$ (існує протилежний елемент);

5) $1 \cdot x = x \quad , \quad 1 \in R$;

6) $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x, \quad a, b \in R$ (змішана асоціативність);

7) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x, \quad a, b \in R$ (змішана дистрибутивність);

8) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y, \quad a \in R$ (змішана дистрибутивність).

Одним із прикладів лінійного простору є множина R_n усіх n-вимірних векторів, яка називається **лінійним векторним простором.**

Відмітимо, що з лінійними векторними просторами R_1, R_2, R_3 ми вже зустрічались у шкільному курсі геометрії. Також лінійний простір утворюють квадратні матриці одного порядку.

Скалярний добуток векторів.

Означення. **Скалярним добутком двох векторів** $\overline{a}=(a_1;a_2;...;a_n)$ та $\overline{b}=(\mathrm{b}_1;\mathrm{b}_2;...;\mathrm{b}_n)$ називається число, яке визначається як сума добутків їх відповідних координат $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$ і позначають у круглих дужках або крапкою між векторами: $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\overline{a}\cdot\overline{b}$.

Застосовуючи поняття скалярного добутку, можна дати означення ***довжини,*** або ***модуля*** n-вимірного вектора $\overline{a}$ як числа $|\,\overline{a}\,|$, що визначається рівністю:

$$|\,\overline{a}\,|=\sqrt{\left(\overline{a},\overline{a}\right)},$$

тобто

$$|\,\overline{a}\,|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}.$$

Скалярний добуток можна розглядати як спільну числову характеристику двох векторів. За його допомогою (у просторах $\mathrm{R}_2,\mathrm{R}_3$) можна дати означення кута φ між двома векторами φ, що визначається за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\,\overline{a}\,|\cdot|\,\overline{b}\,|}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\arccos\frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\,\overline{a}\,|\cdot|\,\overline{b}\,|}.$$

Звідси, зокрема, випливає наступна

Теорема (необхідна та достатня умова перпендикулярності двох векторів)

Ненульові вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ взаємно перпендикулярнітоді й лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Наведемо ***властивості скалярного добутку:***

1. $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{b},\overline{a}\right)$.
2. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$.
3. $\left(\overline{a},\overline{a}\right)\geq 0$, причому, $\left(\overline{a},\overline{a}\right)=0$ тільки, коли $\overline{a}=\overline{0}$.
4. $\left(\lambda\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{a},\lambda\overline{b}\right)=\lambda\left(\overline{a},\overline{b}\right)$.
5. $\left(\lambda\overline{a}+\mu\overline{b},\overline{c}\right)=\lambda(\overline{a},\overline{c})+\mu(\overline{b},\overline{c})$, де $\lambda\in R$, $\mu\in R$.

Лінійний простір, для якого визначений скалярний добуток векторів, що має вищенаведені властивості, називається ***евклідовим простором.***

Лінійно залежні та лінійно незалежні векторні системи, їх властивості.

Означення. Будь-яка підмножина лінійного векторного простору R_n: $\{\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_m}\}$ називається **векторною системою**.

Означення. Вектор $\alpha_1 \cdot \overline{A_1} + \alpha_2 \cdot \overline{A_2} + ... + \alpha_m \cdot \overline{A_m}$, $\alpha_i \in R$ називається **лінійною комбінацією (ЛК)** векторів $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_m}$, а числа $\alpha_i \in R$ - **коефіцієнтами** ЛК.

Означення. Вектори $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_m}$ називаються **лінійно залежними (ЛЗ)**, якщо їх ЛК дорівнює нуль-вектору, причому хоча б один із коефіцієнтів $\alpha_i \in R$ ЛК відмінний від нуля, тобто

$$\alpha_1 \cdot \overline{A_1} + \alpha_2 \cdot \overline{A_2} + ... + \alpha_m \cdot \overline{A_m} = \overline{0}, \quad \exists \alpha_k \neq 0.$$

Означення. Вектори $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_m}$ називаються **лінійно незалежними (ЛНЗ)**, якщо їх ЛК дорівнює нуль-вектору тоді і тільки тоді, коли усі коефіцієнти $\boldsymbol{\alpha_i} \in \boldsymbol{R}$ ЛК дорівнюють нулю, тобто

$$\alpha_1 \cdot \overline{A_1} + \alpha_2 \cdot \overline{A_2} + ... + \alpha_m \cdot \overline{A_m} = \overline{0}, \quad \alpha_i = 0 \ \forall i = \overline{1, m}.$$

Властивості ЛЗ векторних систем.

1. Векторна система, яка містить нуль-вектор є ЛЗ.
2. Векторна система, яка містить ЛЗ підсистему є ЛЗ.

Теорема (критерій ЛЗ). Векторна система ЛЗ тоді і тільки тоді, коли деякий її вектор виражається у вигляді ЛК інших векторів системи.

Для практичної перевірки ЛЗ векторів $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_m}$ потрібно скласти матрицю, стовпцями якої є координати цих векторів, і знайти її ранг r. Якщо $r < m$, то вектори ЛЗ; якщо ж $r = m$, то вектори ЛНЗ.

Означення. Максимальна кількість r ЛНЗ векторів векторної системи $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_m}$ називається її **рангом**, а вектори, які складають максимальну ЛНЗ підсистему – **базисом** векторної системи.

Властивості ЛНЗ векторних систем.

1. Будь-яка підсистема ЛНЗ векторної системи є ЛНЗ.

Теорема (розклад за базисом). Будь-який вектор векторної системи $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_m}$ можна розкласти за її базисом, причому однозначно.

Приклад. Дано вектори $\overline{a_1} = (0; -1; -2)$, $\overline{a_2} = (1; -3; 2)$, $\overline{a_3} = (-1; 2; -4)$. Знайти базис і розкласти всі вектори за знайденим базисом.

Розв'язування. Запишемо матрицю, стовпцями якої є координати даних векторів і знайдемо її ранг елементарними перетвореннями:

a1	a2	a3		a2	a1	a3		a2	a1	a3		a2	a1	a3
0	1	-1		$\boxed{1}$	0	-1		1	0	-1		1	0	$\boxed{-1}$
-1	-3	2	~	-3	-1	2	~	0	$\boxed{-1}$	-1	~	0	1	$\boxed{1}$
-2	2	-4		2	-2	-4		0	-2	-2				

Оскільки після елементарних перетворень отримали одиничну матрицю другого порядку, яку утворюють координати векторів $\overline{a_1}$ та $\overline{a_2}$, то ранг векторної системи дорівнює 2, а значить базис даної системи складають 2 ЛНЗ вектори, наприклад, $\overline{a_1}$ та $\overline{a_2}$. Знайдемо розклад усіх векторів за цим базисом:

А) для базисних векторів: $\overline{a_1} = 1 \cdot \overline{a_1} + 0 \cdot \overline{a_2}$, $\overline{a_2} = 0 \cdot \overline{a_1} + 1 \cdot \overline{a_2}$;

Б) для небазисних матимемо векторне рівняння: $\overline{a_3} = \alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2}$ або у вигляді матричної рівності $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Отримали систему покоординатних рівностей (СЛАР):

$$\begin{cases} \alpha_2 = -1 \\ -\alpha_1 - 3\alpha_2 = 2 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = -4 \end{cases}$$

Розв'язуючи СЛАР, дістаємо: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$. Отже, $\overline{a_3} = 1 \cdot \overline{a_1} + (-1) \cdot \overline{a_2}$ (або кажуть, що вектор $\overline{a_3}$ має координати $(1;-1)$ у базисі $\overline{a_1}, \overline{a_2}$).

Розглянемо лінійний векторний простір R_n. Очевидно, що будь-яка векторна система із $n+1, n+2, ...$ векторів буде ЛЗ. Тому базис R_n (максимальну ЛНЗ систему) складатимуть n довільних ЛНЗ векторів. Таких базисів, взагалі кажучи, безліч. Серед усіх базисів лінійного векторного простору R_n виділяють так званий **природний (ортонормований) базис,** який складається із **ортів**:

$$\overline{e_1} = (1;0;...;0), \overline{e_2} = (0;1;0;...;0), ..., \overline{e_n} = (0;...;0;1).$$

Усі ці вектори взаємно перпендикулярні та мають одиничну довжину.

Зауваження. Якщо спеціально не обумовлено, то вважається, що вектор задано його координатами у природньому (ортонормованому) базисі.

У якості прикладу застосувань в економіці розглянемо деякі загальні задачі.

1.7. Простори товарів (цін). Під *товаром* розуміють деяку продукцію або послугу, яка надходить на ринок для продажу в певний час і в певному місці. Якщо маємо n товарів у обсягах $x_i, i = 1, 2, ..., n$, тоді деякий набір цих товарів можна подати у вигляді вектора $\overline{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$. Очевидно, що з економічних міркувань $x_i \geq 0, i=1,2,...,n$. *Множину усіх таких наборів товарів називають* ***простором товарів*** C . Вважатимемо, що кожен із товарів мають певну ціну $p_i \geq 0, i=1,2,...,n$. Тоді кожному набору товарів $\overline{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$ відповідатиме вектор $\overline{p}=(p_1,p_2,...,p_n)$, який називають ***вектором цін.***

Скалярний добуток цих векторів:

$$\left(\overline{p},\overline{X}\right)=p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n$$

є числом, яке визначає ***ціну набору товарів*** і позначається $c(\overline{X})$.

Власні вектори і власні числа квадратних матриць.

Ненульовий вектор ($\overline{X}\neq\overline{0}$) називають ***власним***, або ***характеристичним*** **вектором** матриці A, якщо існує таке дійсне число ($\lambda \in R$), що має місце рівність:

$$A\overline{X}=\lambda\overline{X}.$$

Якщо вказана вище рівність правильна, число λ називається ***власним***, або ***характеристичним***, ***числом*** матриці A або *її* ***власним значенням,*** що відповідає власному вектору $\overline{X}$.

Згідно з означеннями власного числа і власного вектора маємо:

1) якщо $A=E$, то кожний ненульовий вектор із R^n є власним вектором матриці A (при цьому $\lambda=1$, адже за властивістю одиничної матриці маємо $E\overline{X}=\overline{X}$);

2) будь-який ненульовий n-вимірний вектор є власним вектором нульової матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$, при цьому $\lambda=0$, оскільки $A\overline{X}=\overline{0}=0\cdot\overline{X}$.

Розглянемо алгоритм знаходження власних чисел і власних векторів для заданої матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Так, спираючись на означення і властивості операцій над матрицями, отримуємо:

$$A\overline{X}=\lambda\overline{X} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ | за властивістю одиничної матриці | $\Rightarrow$ $A\overline{X}=\lambda(E\overline{X}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ | за асоціативним законом | $\Rightarrow$ $A\overline{X}=(\lambda E)\overline{X} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ | за властивістю дистрибутивності й означенням рівності матриць | $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (A-\lambda E)\overline{X}=\overline{0}.$$

Запишемо матричне рівняння у розгорнутому вигляді:

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ \dots \ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ \dots \ a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots & \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Таким чином, задача звелась до розв’язування однорідної СЛАР. Нас цікавлять (за означенням власного вектора) тільки ненульові вектори, тобто нетривіальні розв’язки системи, тому визначник системи повинен дорівнювати нулю:

$$\Delta(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриття визначника у співвідношенні дає многочлен степеня n відносно λ: $P_n(\lambda) = \Delta(A-\lambda E)$, який називається ***характеристичним многочленом*** матриці A, а співвідношення, яке можна подати у вигляді $P_n(\lambda) = 0$, визначає рівняння для відшукання власних чисел, яке називають ***характеристичним рівнянням*** матриці A

Теорема (***про єдиність власного числа, що відповідає власному вектору***). Якщо $\overline{X}$ – власний вектор матриці A, то існує єдиний скаляр λ, який задовольняє умову $A\overline{X} = \lambda\overline{X}$.

Теорема (***про множину власних векторів, що належать власному числу***). Якщо матриця має власний вектор $\overline{X}$, що належить власному числу λ, то таких векторів нескінченно багато. Множина цих власних векторів визначається рівністю $\overline{Y} = \alpha\overline{X}$, де $\alpha \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$, тобто, усі вони колінеарні вектору $\overline{X}$.

Теорема (*критерій існування власного вектора $\overline{X}$, відповідного власному числу λ*). Вектор $\overline{X}$ тоді і тільки тоді є власним вектором матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$, відповідним власному числу λ, коли його координати x_1, x_2, …, x_n утворюють ненульовий розв'язок однорідної квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $(A-\lambda E)\overline{X}=\overline{0}$:

$$(A\overline{X}=\lambda\overline{X}) \Leftrightarrow ((A-\lambda E)\overline{X}=\overline{0} \text{ або } \Delta(A-\lambda E)=0).$$

Теорема (*про лінійну незалежність власних векторів*). Власні вектори, що належать різним власним числам, є лінійно незалежними.

Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай $\overline{X}^{(1)}$, $\overline{X}^{(2)}$ – два довільні власні вектори, що належать відповідно власним числам λ_1, λ_2 $(\lambda_1\neq\lambda_2)$. Треба показати, що лінійна комбінація цих власних векторів $\alpha_1\overline{X}^{(1)}+\alpha_2\overline{X}^{(2)}$ є нуль-вектором, тобто

$$\alpha_1\overline{X}^{(1)}+\alpha_2\overline{X}^{(2)}=\overline{0},$$

тільки тоді, коли $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Припустимо супротивне. Нехай у попередній рівності одне із чисел α_1, α_2 не є нулем, наприклад, $\alpha_1\neq 0$.

Помножимо ліву і праву частини на власне число λ_2. Тоді

$$\alpha_1\lambda_2\overline{X}^{(1)}+\alpha_2\lambda_2\overline{X}^{(2)}=\overline{0}.$$

Ліву і праву частини рівності помножимо на матрицю A зліва, і, ураховуючи властивості операцій над матрицями, дістанемо:

$$A\cdot(\alpha_1\overline{X}^{(1)}+\alpha_2\overline{X}^{(2)})=A\cdot\overline{0} \;\Rightarrow\; \alpha_1(A\overline{X}^{(1)})+\alpha_2(A\overline{X}^{(2)})=\overline{0} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \; A\overline{X}^{(1)}=\lambda_1\overline{X}^{(1)},\; A\overline{X}^{(2)}=\lambda_2\overline{X}^{(2)} \right| \Rightarrow \alpha_1\lambda_1\overline{X}^{(1)}+\alpha_2\lambda_2\overline{X}^{(2)}=\overline{0}.$$

Порівнюючи векторні рівності, отримуємо:

$$\alpha_1\lambda_1\overline{X}^{(1)}-\alpha_1\lambda_2\overline{X}^{(1)}=\overline{0} \Rightarrow \alpha_1(\lambda_1-\lambda_2)\overline{X}^{(1)}=\overline{0}.$$

За умовою теореми $\lambda_1\neq\lambda_2$. За означенням вектор $\overline{X}^{(1)}$ є ненульовим, тому остання рівність можлива тільки при $\alpha_1=0$, тобто припущення про лінійну залежність векторів $\overline{X}^{(1)}$, $\overline{X}^{(2)}$ є хибним. Якщо маємо більше двох власних векторів, які належать попарно різним власним числам, доведення аналогічне (з використанням методу математичної індукції).

Зауважимо, що власні вектори, які належать різним власним числам, можна використати в якості базисних векторів простору $\mathbf{R}^{n}$.

Теорема (*про суму і добуток власних чисел*). Якщо $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ ,\ \lambda_n$ – власні числа матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$, то:

1) сума власних чисел дорівнює сумі елементів головної діагоналі матриці A:

$$\lambda_1+\ \lambda_2+\ \dots\ +\ \lambda_n = a_{12}+\ a_{22}+\ \dots\ +\ a_{nn};$$

2) добуток власних чисел дорівнює визначнику матриці A:

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n=\Delta A.$$

Розглянемо найпростіший випадок $n=2$. Запишемо характеристичне рівняння у розгорнутому вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (a_{11}-\lambda)\cdot(a_{22}-\lambda)-a_{12}\cdot a_{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0.$$

За теоремою Вієта (для квадратного рівняння) маємо:

1) $\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+\ a_{22}$; 2) $\lambda_1\cdot\lambda_2=\Delta A$.

Суму всіх діагональних елементів матриці називають ***слідом*** цієї матриці.

Знаходження власних чисел і власних векторів

Розглянемо алгоритм знаходження власних чисел матриці A та власних векторів, що їм належать.

1^0. Складаємо за вихідною матрицею $A=(a_{ij})_{n\times n}$ характеристичне рівняння і розв'язуємо його, тобто знаходимо власні числа.

За основною теоремою алгебри рівняння $P_n(\lambda)=0$ має не більше n дійсних коренів, а якщо говорити про комплексні корені, то їхня кількість дорівнює n, якщо кожен із коренів рахувати стільки разів, яка його кратність.

2^0. Підставляємо по черзі кожне власне число у систему, і знаходимо усі її нетривіальні розв'язки, що і дає множину власних векторів, які належать відповідному власному числу.

Знайдемо власні числа і власні вектори матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним рівнянням цієї матриці є квадратне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (1-\lambda)(5-\lambda)+3=0 \;\Rightarrow\; \lambda^2-6\lambda+8=0.$$

Розв'язавши його, отримуємо власні числа $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = 4$.

Тепер описуємо множини $\overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)}$ усіх власних векторів, що належать знайденим власним числам. Для цього записуємо систему однорідних лінійних рівнянь, коефіцієнти якої отримуємо з елементів матриці $A-\lambda E$ після підстановки значення відповідного власного числа. Отже,

$$\lambda_1 = 2: \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases} \Rightarrow \overline{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \;\; \forall t \in \mathrm{R} \setminus \{0\};$$

$$\lambda_1 = 4: \begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 3t \end{cases} \Rightarrow \overline{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix} \;\; \forall t \in \mathrm{R} \setminus \{0\}.$$

Надаючи параметру t довільних значень, для даного власного числа λ отримаємо сукупність колінеарних між собою власних векторів.

Зазначимо, що характеристичне рівняння матриці може мати не тільки дійсні, а й комплексні корені, тобто числа вигляду $\lambda = a + bi$, де a, b – дійсні числа, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Але є цілий клас матриць, у яких лише дійсні власні числа.

Теорема (*про власні числа і власні вектори симетричної матриці*). Симетрична матриця $(a_{ij} = a_{ji} \;\; \forall\, i = \overline{1,\ n}, \;\; j = \overline{1,\ n})$ має тільки дійсні власні числа. Власні вектори, що належать різним власним числам, ортогональні та лінійно незалежні.

Відзначимо, що такі матриці (зокрема, це матриці парних коефіцієнтів кореляції) широко використовуються в економічних дослідженнях.

Задача (лінійна модель міжнародної торгівлі). Розглянемо товарообмін між трьома країнами. Нехай структурна матриця торгівлі (див. **1.1**) країн $K_1,\ K_2,\ K_3$ має вигляд (розглядаються лише частки національних доходів країн, що йдуть на зовнішню торгівлю):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вектор коштів, компонентами якого є частки від загального обсягу торгівлі, які повинна вкладати кожна з країн у зовнішній товарообіг для того, щоб торгівля була збалансованою.

Шуканий вектор коштів є власним вектором структурної матриці, що належить власному значенню $\lambda = 1$. Його компоненти утворюють ненульовий розв'язок однорідної СЛАР:

$$(A-E)\overline{X} = \overline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 1/3 \\ 1/2 & -1 & 2/3 \\ 1/2 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки система є однорідною, то розширена матриця еквівалентна основній матриці системи. Здійснимо елементарні перетворення основної матриці цієї системи рівнянь:

$$(A-E) \sim \begin{pmatrix} -12 & 9 & 4 \\ 3 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -30 & 0 & 40 \\ 15 & 0 & -20 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ми отримали загальний розв'язок, у якому x_2, x_3 – базисні змінні, x_1– вільна змінна. Отже,

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 3/4t \end{cases} \Rightarrow \overline{X} = (t;\ t;\ 0,75t)^T, \quad t \in R \setminus \{0\}.$$

Звідси випливає, що для збалансованості торгівлі необхідно, щоб кошти, які вкладає у зовнішній товарообіг кожна країна, співвідносилися як $x_1 : x_2 : x_3 = 1:1:\frac{3}{4} = 4:4:3$.

Приклади та вправи до розділу 1.

Вправа 1.1. Для заданих матриць:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 10 & -5\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 7 & 10\end{pmatrix}.$$

знайти: $-3\cdot A;\ 2B-C^T;\ A^T\cdot C;\ BC;\ CB;B^2.$

Розв'язування. А) Матрицю D=-3A знаходимо, використовуючи електронні таблиці MS Excel. Для цього обчислюємо один із елементів матриці-результату, наприклад, $d_{11}=-3*a_{11}$, а усі інші – копіюванням:

D=

-6	-9	-15
-21	-24	-27

Б) Спочатку знаходимо матрицю C^Tза допомогою функції «ТРАСП»:

C^T=

2	7
5	10

$D=2B-C^T$ знайдемо аналогічно попередньому пункту:

D=

0	-1
15	-20

В) Спочатку знаходимо матрицю A^Tза допомогою функції «ТРАСП»:

A^T=

2	7
3	8
5	9

$D=A^T\cdot C$ знаходимо за допомогою функції «МУМНОЖ»:

D=

53	80
62	95
73	115

Г) $D=B\cdot C$ знаходимо за допомогою функції «МУМНОЖ»:

D=

23	35
-15	0

Д) Аналогічно попередньому $D'=C\cdot B$:

D'=

52	-19
107	-29

Е) $B^2=B\cdot B$ знаходимо за допомогою функції «МУМНОЖ»:

$B^2 =$

31	-12
-40	55

Вправа 1.2. Обчислити визначники:

$$\Delta_1 = |-3|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Розв'язування. А) $\Delta_1 = |-3| = -3$ за означенням.

Б) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) = 3$ за правилом обчислення визначників другого порядку.

В) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-5) \cdot 7 = 35$ як визначник трикутної матриці.

Г) Δ_4 обчислюємо за допомогою функції «МОПРЕД»:

$\Delta_4 =$ 1.

Вправа 1.3. Розв'язати СЛАР методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -13 \end{cases}$$

Розв'язування. Знаходимо основний визначник СЛАР (усі визначники обчислюємо за допомогою функції «МОПРЕД»):

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 31 \neq 0 \Rightarrow$ система має єдиний розв'язок. Допоміжні визначники:

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -8 & -3 & 4 \\ -13 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$-93, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -13 & -3 \end{vmatrix} =$62, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -8 \\ 4 & 1 & -13 \end{vmatrix} =$31.

За теоремою (правило Крамера) знаходимо розв'язок СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-93}{31} = -3 \\ x_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{62}{31} = 2 \\ x_3 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{31}{31} = 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad X_0 = (-3;\, 2;\, 1).$$

Вправа 1.4. Розв'язати рівняння (знайти матрицю X):

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Позначимо: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ - квадратні матриці 2-го порядку. Очевидно, що й матриця X повинна бути квадратною 2-го порядку. Наше рівняння запишеться у матричному вигляді:

$$X \cdot A + B = C.$$

Розв'язуємо його: $\begin{array}{l} X \cdot A = C - B \left| \cdot A^{-1} \text{зправа} \right. \\ X = (C - B) \cdot A^{-1} \end{array}$. Для розрахунків використовуємо копіювання та функції «МОБР», «МУМНОЖ»: $C - B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

$A^{-1} =$

3/8	1/8
-1/4	1/4

$X =$

3/4	-3/4
0	1

Вправа 1.5. Розв'язати СЛАР (знайти загальний та базисний розв'язки системи):

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

Розв'язування. Для розв'язування застосуємо MS Excel і оформимо у вигляді симплекс-таблиць (для зручності переставимо місцями перше та друге рівняння):

X1	X2	X3	X4	в
2	1	-1	-1	2
0	2	-3	1	1
4	0	1	-3	3
1	1/2	-1/2	-1/2	1
0	2	-3	1	1
0	-2	3	-1	-1
1	0	1/4	-3/2	3/4
0	1	-3/2	1/2	1/2

Останній таблиці відповідає система:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{2}x_4 = \frac{3}{4} \\ x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Після перенесення вільних невідомих x_3, x_4 у праву частину дістаємо загальний розв'язок СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}.$$

Базисний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} \\ x_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{або} \quad \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 0; 0\right). \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Вправа 1.6. Знайти базис векторної системи:
$\overline{a_1} = (0;1;2), \overline{a_2} = (1;3;-1), \overline{a_3} = (1;2;-3), \overline{a_4} = (-1;0;7)$.
Розкласти всі вектори за знайденим базисом.

Розв'язування. Запишемо матрицю, стовпцями якої є координати даних векторів і знайдемо її ранг елементарними перетвореннями:

$$\begin{array}{cccc} a1 & a2 & a3 & a4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} a1 & a2 & a3 & a4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} a1 & a2 & a3 & a4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array}$$

Оскільки після елементарних перетворень отримали одиничну матрицю другого порядку, яку утворюють координати векторів $\overline{a_1}$ та $\overline{a_2}$, то ранг векторної системи дорівнює 2, а значить базис даної системи складають 2 ЛНЗ вектори, наприклад, $\overline{a_1}$ та $\overline{a_2}$. Знайдемо розклад усіх векторів за цим базисом:

А) для базисних векторів: $\overline{a_1} = 1 \cdot \overline{a_1} + 0 \cdot \overline{a_2}$, $\overline{a_2} = 0 \cdot \overline{a_1} + 1 \cdot \overline{a_2}$;

Б) для небазисних матимемо векторні рівняння: $\overline{a_3} = \alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2}$ або у вигляді матричної рівності $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Отримали систему покоординатних рівностей (СЛАР):

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = -3 \end{cases}$$

Розв'язуючи СЛАР, дістаємо: $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1$. Отже, $\overline{a_3} = (-1) \cdot \overline{a_1} + 1 \cdot \overline{a_2}$ (або кажуть, що вектор $\overline{a_3}$ має координати $(-1;1)$ у базисі $\overline{a_1}, \overline{a_2}$). Для вектора $\overline{a_4}$ (звернемо увагу на вищенаведені елементарні перетворення) матимемо:
$\overline{a_4} = 3 \cdot \overline{a_1} + (-1) \cdot \overline{a_2}$ (або кажуть, що вектор $\overline{a_4}$ має координати $(3;-1)$ у базисі $\overline{a_1}, \overline{a_2}$).

Приклад 1. 1. Україна отримала кредити від МВФ, Євросоюзу та ЄБРР у розмірах \$10 млрд., \$2 млрд. та \$1 млрд. під річну процентну ставку 3%, 4% та 5% відповідно. Визначити розмір загального боргу України усім трьом організаціям через рік.

Розв'язування. Розглянемо вектор кредитів $\overline{x} = (10;2;1)$ і вектор процентних ставок $\overline{p} = (1,03;1,04;1,05)$. Розмір загального боргу через рік знаходиться як скалярний добуток векторів: $(\overline{x},\overline{p}) = 10 \cdot 1,03 + 2 \cdot 1,04 + 1 \cdot 1,05 = 13,43$ (млрд. $).

Приклад 1. 2. Підприємство виробляє три види продукції, витрачаючи два типи ресурсів. Норми витрат визначаються матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, елементи якої a_{ij} показують кількість одиниць i-го ресурсу, який витрачається на виробництво однієї одиниці j-го виду продукції. План випуску (одиниць продукції) визначається матрицею $X = (10 \quad 30 \quad 20)$. Знайти: а) планові витрати типів ресурсів; б) повну вартість (в грн.) витрачених ресурсів, якщо ціни на одиницю першого та другого типу ресурсів відповідно становили 7 та 9 грн.

Розв'язування. Позначимо y_1 (од.) – витрати першого, а y_2 (од.) – другого ресурсів. Дістанемо матрицю $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ - матрицю планових витрат ресурсів. Витрати ресурсів на все виробництво знаходяться як сума добутків об'ємів випуску на норми витрат, тобто:

$$Y = A \cdot X^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Отже, для виконання плану випуску потрібно буде витратити $y_1 = 220$ (од.) першого та $y_2 = 200$ (од.) другого ресурсу.

За умовою ціна одиниці першого ресурсу $p_1 = 7$ (грн), другого - $p_2 = 9$ (грн). Введемо вектор-матрицю цін ресурсів $P = (p_1 \quad p_2)$. Тоді повна вартість C (грн) витрачених ресурсів дорівнюватиме добутку матриць (скалярному добутку векторів-матриць):

$$C = P \cdot Y = (7 \quad 9) \cdot \begin{pmatrix} 220 \\ 200 \end{pmatrix} = (3340).$$

Приклад 1. 3. Підприємство виробляє два види продукції, витрачаючи два типи ресурсів. Норми витрат визначаються матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, елементи якої a_{ij} дорівнюють кількості одиниць i-го типу ресурсу, який витрачається на виробництво однієї одиниці j-го виду продукції. Наявні запаси ресурсів (в одиницях) визначаються матрицею $B=\begin{pmatrix}110\\100\end{pmatrix}$. Знайти план випуску (одиниць продукції) при умові повного використання ресурсів.

Розв'язування. Нехай x_1 (од.) – план випуску першого виду продукції, а x_2 (од.) – другого виду. Тоді $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ - матриця планових випусків. Витрати ресурсів на все виробництво знаходяться як сума добутків об'ємів випуску на норми витрат, тобто:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}5&3\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x_1+3x_2\\2x_1+4x_2\end{pmatrix}.$$

За умови повного використання ресурсів повинна виконуватись рівність:

$$A\cdot X=B,$$

яка є матричною формою запису системи

$$\begin{cases}5x_1+3x_2=110\\2x_1+4x_2=100\end{cases}.$$

Розв'язуючи систему, дістаємо план випуску: $x_1=10$(од.), $x_2=20$(од.).

Приклад 1. 4. Одна із філій компанії "MacDonald's" виробляє напої «Coca Cola» і «Sprite». Для виробництва 1 л напою «Coca Cola» потрібно 0,02 год. роботи обладнання, а для 1 л напою «Sprite» – 0,04 год. Витрати основних речовин напоїв дорівнюють 0,01 кг і 0,04 кг на 1 л напоїв «Coca Cola» і «Sprite» відповідно. На день філія має в розпорядженні 16 кг основних складових речовин та 24 год. роботи обладнання. Прибуток філії від продажу 1 л напоїв «Coca Cola» і «Sprite» складає 0,1 і 0,4 $ відповідно. Прибуток за один робочий день складає 160 $.

Визначити, скільки напоїв кожного типу виробляє філія щоденно, якщо відомо, що всі ресурси використовуються повністю.

Розв'язування. Запишемо умову задачі у вигляді таблиці:

Ресурси	Напої		Запаси ресурсів
	«Coca Cola»	«Sprite»	
Основні складові речовини (кг)	0,01	0,04	16 кг
Фонд часу обладнання (год.)	0,02	0,04	24 год.

Прибуток ($)	0,1	0,4	160 $

Позначимо через $x_1 \geq 0$ кількість літрів напою «Coca Cola», через $x_2 \geq 0$ – напою «Sprite», що виробляється щоденно, а через x_3 – залишок робочого часу обладнання, який філія використовує для його ремонту.

Складемо **математичну модель** задачі. Це система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 0,04x_2 = 16, \\ 0,02x_1 + 0,04x_2 + x_3 = 24, \\ 0,1x_1 + 0,4x_2 = 160. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Жордана – Гаусса. Проведемо еквівалентні перетворення розширеної матриці системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,01 & 0,04 & 0 & 16 \\ 0,02 & 0,04 & 1 & 24 \\ 0,10 & 0,40 & 0 & 160 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0,01 & 0,04 & 0 & 16 \\ 0,01 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0,25 & 1 & 0 & 400 \\ 0,01 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Ранги матриці системи і розширеної матриці дорівнюють 2, а кількість змінних – 3. Це означає, що система має безліч розв'язків.

За перетвореною матрицею запишемо систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} 0,25x_1 + x_2 \quad = 400, \\ 0,01x_1 \quad + x_3 = 8, \end{cases}$$

де x_2 і x_3 – базисні невідомі, а x_1 – вільна невідома.

Визначимо базисні невідомі через вільні

$$\begin{cases} x_2 = 400 - 0,25x_1, \\ x_3 = 8 - 0,01x_1 \end{cases}$$

і запишемо розв'язок системи у матричній формі

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -0,25x_1 + 400 \\ -0,01x_1 + \quad 8 \end{pmatrix}.$$

Система має безліч розв'язків залежно від того, які значення приймає вільна невідома x_1. Оскільки $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, знайдемо, в яких межах може змінюватися x_1: $\begin{cases} -0,25x_1 + 400 \geq 0, \\ -0,01x_1 + \quad 8 \quad \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 1600, \\ x_1 \leq \quad 800, \end{cases}$

тобто $0 \leq x_1 \leq 800$. Таким чином, для будь-якого x_1 із проміжку $[0;800]$ будемо отримувати невід'ємні частинні розв'язки системи рівнянь.

Проаналізуємо одержаний результат. Нехай філія буде виробляти 800 л напою «Coca Cola» ($x_1 = 800$), тоді вона має виробляти 200 л напою «Sprite» ($x_2 = 200$), і робочий час обладнання використовується повністю, оскільки $x_3 = 0$. Отже, маємо частинний розв'язок системи: $X = (800;\ 200;\ 0)^{\mathrm{T}}$. За цих умов прибуток філії складатиме $800 \cdot 0,1 + 200 \cdot 0,4 = 160$ \$. Однак, якщо філії необхідно мати резерв часу для технічного огляду обладнання, то вона може перепланувати випуск продукції. Наприклад, якщо $x_3 = 2$ год., то з рівняння $x_3 = -0,01x_1 + 8$ одержимо, що філія може випускати 600 л напою «Coca Cola» ($x_1 = 600$), а з рівняння $x_2 = -0,25x_1 + 400$ маємо, що напою «Sprite» слід випускати 250 л ($x_2 = 250$). При цьому прибуток залишається тим самим, тобто 160 \$: $600 \cdot 0,1 + 250 \cdot 0,4 = 160$ (\$). Отже, за таким припущенням одержано ще один із частинних розв'язків системи: $X = (600; 250; 2)^{\mathrm{T}}$.

Приклад 1. 5. Нехай Казахстан половину свого торговельного доходу витрачає на закупівлю товарів із України, а іншу половину – товарів із Білорусі. Україна половину свого торговельного доходу витрачає на закупівлю товарів на своїй території, чверть – на закупівлю товарів із Казахстану та ще чверть – товарів із Білорусі. Білорусь порівну витрачає торговельний доход на закупівлю товарів із Казахстану, України та на своїй території. Визначити співвідношення доходів Казахстану, України та Білорусі для збалансованої бездефіцитної торгівлі.

Розв'язування. Позначимо через $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матрицю-стовпець, що визначає національні торговельні доходи Казахстану, України та Білорусі відповідно. За умовою прикладу структурна матриця торгівлі має вигляд:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{К} & \text{У} & \text{Б} \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},
\end{array}
$$

де a_{ij} - частина доходу, яку j-та країна витрачає на закупівлю товарів i -ої країни. Зазначимо, що сума елементів матриці A у кожному стовпці дорівнює 1. А після підбиття підсумків торгівлі за деякий період i -та країна отримає доход $x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3,\quad \mathrm{i} = 1,2,3.$

Для знаходження матриці X складаємо матричне рівняння: $(A-E)X = 0$. Маємо:

$$
\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ або}
$$

$$
\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0; \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0; \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0. \end{cases}
$$

Після еквівалентних перетворень система набуває вигляду:

$$
\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0, \\ \qquad \frac{3}{8}x_2 \; - \; \frac{1}{2}x_3 = 0, \end{cases}
$$

звідси маємо загальний розв'язок: $x_1 = \frac{2}{3}x_3,\ x_2 = \frac{4}{3}x_3.$

Нехай $x_3 = 3$, тоді $x_1 = 2,\ x_2 = 4.$

Отже, збалансованість бездефіцитної торгівлі трьох країн: Казахстану, України та Білорусі – досягається, якщо їх торговельні доходи співвідносяться як $2:4:3$ відповідно.

Приклад 1. 6. У таблиці наведено міжгалузевий баланс (МГБ) за звітний період в умовних грошових одиницях:

	Промисловість	Будівництво	Сільське господарство	Кінцева продукція	Валова продукція
Промисловість	5	20	12	130	167
Будівництво	7	10	15	100	132
Сільське господарство	20	15	11	120	166
Додана вартість	135	87	128		
Валові витрати	167	132	166		

Для звітного МГБ обчислити: коефіцієнти прямих та повних матеріальних витрат; при незмінних коефіцієнтах прямих матеріальних витрат і заданій матриці кінцевої продукції (збільшеній на 10% для кожної галузі у порівнянні зі звітним періодом) скласти МГБ на плановий період. Проаналізувати отримані результати.

Розв'язування. Обчислимо коефіцієнти прямих матеріальних витрат (елементи технологічної матриці А):

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i, j = 1,2,3;$$

де x_{ij}- міжгалузеві потоки, а X_j- валові продукти галузей. При розрахунках використовуємо MS Excel:

$$A = \begin{matrix} 0{,}030 & 0{,}152 & 0{,}072 \\ 0{,}042 & 0{,}076 & 0{,}090 \\ 0{,}120 & 0{,}114 & 0{,}066 \end{matrix}$$

Отримали технологічну матрицю А коефіцієнтів прямих матеріальних витрат. Нагадаємо економічний смисл знайдених коефіцієнтів. Наприклад, коефіцієнт 0,152 показує, що 0,152 одиниці продукції промисловості йде на виробництво 1 одиниці валової продукції будівництва. Перевіримо продуктивність матриці А. Оскільки усі коефіцієнти невід'ємні, а максимальна сума елементів стовпців технологічної матриці 0,342<1, то матриця А продуктивна.

Позначимо: $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець валових продуктів, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець кінцевих продуктів відповідних галузей. Тоді рівняння лінійного МГБ (модель Леонтьєва «витрати-випуск») запишеться у вигляді матричного рівняння:

$X = AX + Y$ або $(E - A)X = Y$.

Складаємо матрицю Е-А:

	0,970	-0,152	-0,072
E-A=	-0,042	0,924	-0,090
	-0,120	-0,114	0,934

і за допомогою функції «МОБР» знаходимо матрицю В= $(\text{Е-А})^{-1}$ - матрицю коефіцієнтів повних витрат:

	1,05109	0,18451	0,09923
B=	0,06158	1,10581	0,11178
	0,14231	0,15824	1,0973

Нагадаємо економічний смисл знайдених коефіцієнтів. Наприклад, коефіцієнт 0,18451 показує, що 0,18451 одиниці продукції промисловості йде на виробництво 1 одиниці кінцевої продукції будівництва.

Розрахуємо МГБ на плановий період. За умовою заплановані обсяги кінцевих продуктів галузей становитимуть:

$$Y^p = \begin{pmatrix} 143 \\ 110 \\ 132 \end{pmatrix}$$

Знайдемо планові валові випуски галузей за формулою $X^p = (E - A)^{-1} Y^p$ (при цьому використовуємо функцію «МУМНОЖ»):

$X^p =$

183,7
145,2
182,6

Планові міжгалузеві потоки розраховуємо за формулами $x_{ij}^p = a_{ij} X_j^p, \quad i, j = 1, 2, 3;$:

$x_{ij}^p =$

5,5	22	13,2
7,7	11	16,5
22	16,5	12,1

Заповнюємо таблицю МГБ на плановий період

	Промисловість	Будівництво	Сільське господарство	Кінцева продукція	Валова продукція
Промисловість	5,5	22	13,2	143	183,7
Будівництво	7,7	11	16,5	110	145,2
Сільське господарство	22	16,5	12,1	132	182,6
Додана вартість	148,5	95,7	60,8		
Валові витрати	183,7	145,2	182,6		

Проаналізуємо отриманий результат у розрізі моделі Леонтьєва «витрати-випуск». Так наприклад, для того, щоб отримати 143 одиниці кінцевої продукції промисловості необхідно витратити 183,7 одиниць валових витрат, із яких 5,5 одиниць витрачатиметься на закупівлю власної продукції; 7,7 одиниць – на закупівлю продукції будівництва; 22 одиниці – сільського господарства; а 148,5 одиниць становитимуть оплата праці та чистий дохід. Із 183,7 одиниць валової продукції промисловості 5,5 одиниць споживається самою галуззю; 22 одиниці – споживається будівництвом; 13,2 одиниць – сільським господарством.

Приклади та вправи для самостійного розв'язування

Вправа 1. 7. Задані матриці:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 3 & 5 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 7 & -2\end{pmatrix}.$$

Знайти: $A\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; $B^{T}+2C$; $A\cdot C$; BC; CB.

Вправа 1. 8. Обчислити визначники

$$\Delta_1=\left|-4\right|,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -5 & -3\end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ -3 & 3 & 2\end{vmatrix},\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ -3 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

Вправа 1. 9. Розв'язати СЛАР методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1\\ x_1-2x_3=-1\\ 2x_1+x_2-x_3=2\end{cases}$$

Вправа 1. 10. Розв'язати матричне рівняння (знайти матрицю X):

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Вправа 1. 11. Розв'язати СЛАР (знайти загальний та базисний розв'язки системи):

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Вправа 1. 12. Знайти базис векторної системи:
$\overline{a_1} = (-1;1;0), \overline{a_2} = (0;-1;-1), \overline{a_3} = (1;-2;-1), \overline{a_4} = (2;-3;-1)$.
Розкласти всі вектори за знайденим базисом.

Приклад 1. 7. Підприємство виробляє два види продукції, витрачаючи два типи ресурсів. Норми витрат визначаються матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, елементи якої a_{ij} дорівнюють кількості одиниць i-го типу ресурсу, який витрачається на виробництво однієї одиниці j-го виду продукції. Наявні запаси b_i ресурсів (в одиницях) визначаються матрицею $B = \begin{pmatrix} 280 \\ 210 \end{pmatrix}$. Знайти план випуску (одиниць продукції) при умові повного використання ресурсів.

Приклад 1. 8. Нехай Кувейт половину свого торговельного доходу витрачає на закупівлю товарів із США, а іншу половину – товарів із Німеччини. США половину свого торговельного доходу витрачає на закупівлю товарів на своїй території, чверть – на закупівлю товарів із Кувейту та ще чверть – товарів із Німеччини. Німеччина порівну витрачає торговельний доход на закупівлю товарів із Кувейту, США та на своїй території. Визначити співвідношення доходів Кувейту, США та Німеччини для збалансованої бездефіцитної торгівлі.

Приклад 1. 9. У таблиці наведено міжгалузевий баланс (МГБ) за звітний період в умовних грошових одиницях:

	Промисловість	Будівництво	Сільське господарство	Кінцева продукція	Валова продукція
Промисловість	5	20	12	130	167
Будівництво	7	10	15	100	132
Сільське господарство	20	15	11	120	166
Додана вартість	135	87	128		
Валові витрати	167	132	166		

Для звітного МГБ обчислити: коефіцієнти прямих та повних матеріальних витрат; при незмінних коефіцієнтах прямих матеріальних витрат і заданій матриці кінцевої продукції (збільшеній на 5% для промисловості та будівництва і на 10% для сільського господарства у порівнянні зі звітним періодом) скласти МГБ на плановий період. Проаналізувати отримані результати.

Розділ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Аналітичною геометрією називається розділ математики, в якому геометричні задачі розв'язуються алгебраїчними методами.

Для графічного представлення розв'язку економічних задач на площині та у просторі застосовується математичний апарат ***аналітичної геометрії,*** об'єктом вивчення якої є геометричні фігури, а предметом – установлення їх властивостей засобами алгебри за допомогою координатного методу.

Засновником методу координат і, разом з тим, аналітичної геометрії є Рене Декарт (1596 – 1650) – французький філософ, математик, фізик і фізіолог. Його ім'ям і названа відома «декартова прямокутна система координат», яка дозволяє визначити положення фігури на площині та тіла у просторі.

Поняття «вектор» (від лат. vector – носій), як відрізка, що має певну довжину та певний напрям, вперше з'явилося у ірландського математика Уільяма Гамільтона (1805 – 1865) в роботах з побудови числових систем. Це поняття пов'язане з об'єктами, які характеризуються величиною та напрямом, наприклад, швидкість, сила, прискорення. При цьому швидкість можна розуміти в широкому сенсі, наприклад, швидкість зміни витрат виробництва, доходів, попиту, споживання і пропозиції та ін. Вектор може вказувати напрям найбільшого зростання або спадання функції, що описує різноманітні економічні процеси. Вектори, що будуть розглянуті в даному розділі, є окремим випадком n-вимірних векторів: вони припускають геометричну інтерпретацію, бо належать до векторних лінійних просторів вимірності 1,2: $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$. Поняття лінійного векторного простору має широке застосування, наприклад, в теорії корисності, теорії споживання при вивченні поведінки споживачів і виробників на ринках товарів та послуг, виробничих ресурсів тощо. Методи аналітичної геометрії дозволяють надавати геометричну інтепретацію економіко-математичних моделей.

Вивчивши даний розділ, Ви зможете:

- здійснювати геометричну інтерпретацію розв'язків економічних задач;
- використовувати інструмент векторної алгебри для геометричного зображення та аналізу об'єктів економічних процесів;
- будувати графіки наступних функціональних залежностей: лінійної ($Ax+By+C=0$, $A^2+B^2\neq 0$ або $y=kx+b$) – графіком є пряма на площині, а залежність $Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$ визначає площину в тривимірному просторі; графіком квадратичної залежності $y=ax^2+bx+c,$ $a\neq 0$ або $x=ay^2+by+c,\quad a\neq 0$ є парабола; графіком оберненої пропорційної залежності $y=\frac{k}{x}, k\neq 0$ або дробово-лінійної функції $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ є рівнобічна гіпербола.

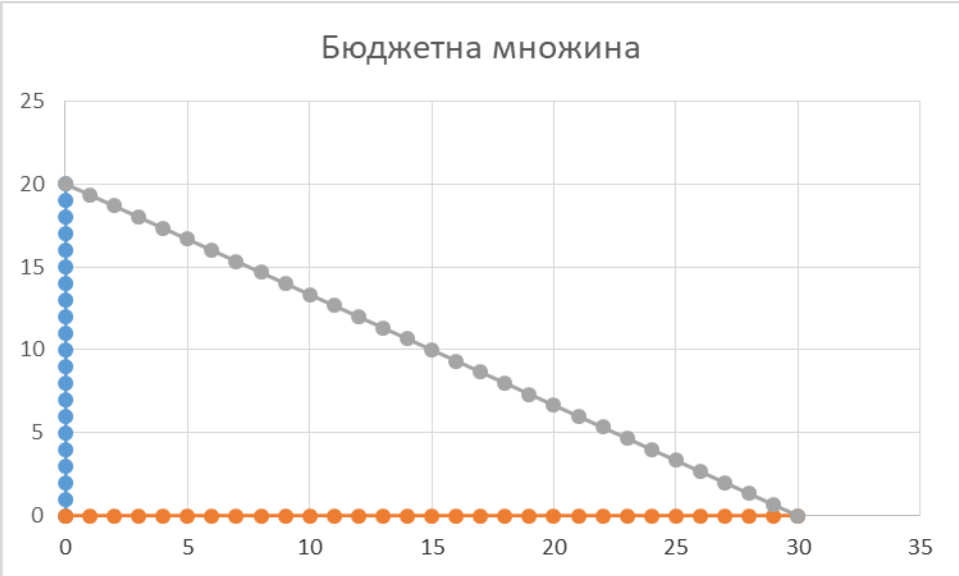
Тема 7. Застосування методів аналітичної геометрії до розв'язування деяких економічних задач

Приклад. Споживач має прибуток у розмірі 600 грн і хоче витратити його на придбання двох товарів. Ціна одиниці першого товару становить 20 грн, а другого – 30 грн. Записати аналітично та зобразити графічно бюджетне обмеження та бюджетну множину споживача. Вказати декілька допустимих наборів товарів.

Розв'язування. Нехай споживач бажає придбати x_1 (од.) першого товару і x_2 (од.) – другого, які, очевидно, можуть набувати лише невід'ємних значень. Тоді $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ - вектор (матриця-рядок) із невід'ємними координатами можливих наборів товарів. Ці вектори можна інтерпретувати як точки першого октанта площини x_1Ox_2. Враховуючи ціни одиниці першого товару $p_1 = 20$(грн) та другого $p_2 = 30$(грн), можна записати витрати на придбання набору товарів: $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = 20x_1 + 30x_2$(грн). Зрозуміло, що витрати не повинні перевищувати доходу споживача: $20x_1 + 30x_2 \le 600$. Таким чином, бюджетна множина визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \le 600 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

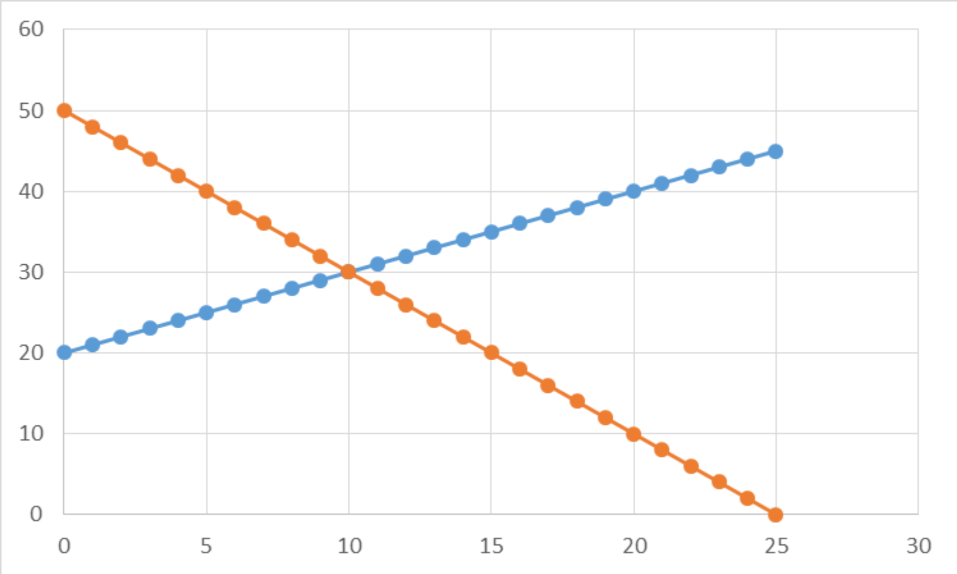
Графічний образ лінійної нерівності $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \le C$ - це множина точок однієї із півплощин, на які поділяє всю координатну площину гранична пряма $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = C$ - бюджетне обмеження. Тому графічним образом бюджетної множини у нашому прикладі є трикутник AOB:



Зауваження. При зростанні доходу або зниженні цін бюджетне обмеження зсовується від початку координат і бюджетна множина збільшується (справедливою є і обернена ситуація).

Приклад. На ринку деякого товару залежності обсягів попиту $D(demand)$ та пропозиції $S(supply)$ від ціни $p(price)$ за одиницю товару визначаються формулами: $D(p) = 50 - 2p$, $S(p) = 20 + p$. Зобразити на координатній площині ринковий простір, знайти рівноважну ціну p_0 та охарактеризувати сектори ринку.

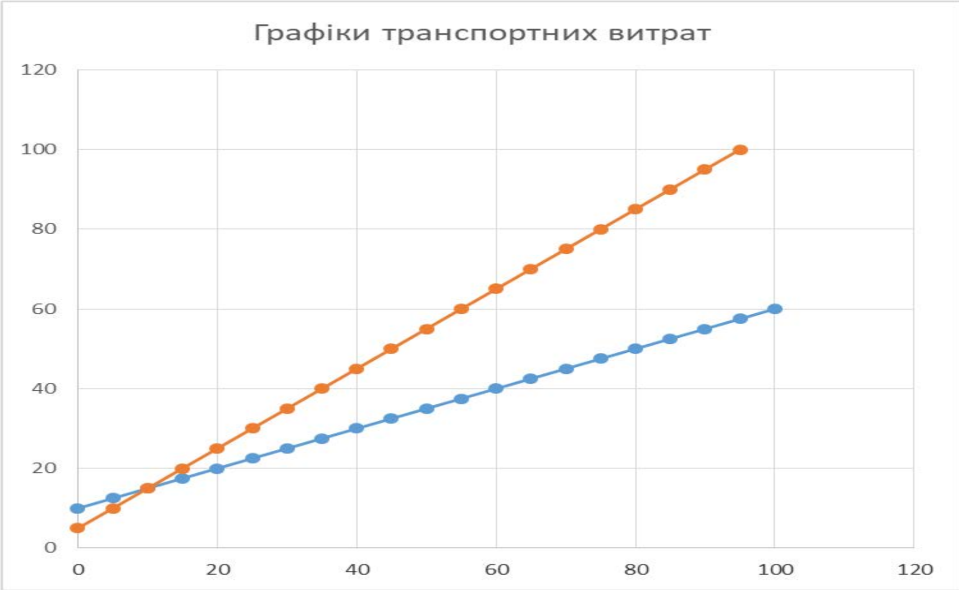
Розв'язування. На координатній площині pOy побудуємо графіки лінійних залежностей попиту та пропозиції від ціни, які, очевидно, можуть набувати лише невід'ємних значень:



Ординати точок ринкового простору (із першого октанта) характеризують або можливість виробників випустити, або бажання споживачів купити певну кількість товару за дану ціну p. Рівноважна ціна p_o повинна задовольняти рівняння рівноваги попиту та пропозиції: $D(p) = S(p)$, тобто $50 - 2p = 20 + p$, звідки $p_o = 10$. Характеристика секторів ринку:

Приклад. Транспортні витрати (в грн) перевезення одиниці вантажу залізничним (y_1) та автомобільним (y_2) транспортом на відстань x(в десятках км) визначаються формулами: $y_1 = 0{,}5x + 10$, $y_2 = x + 5$. Який економічний сенс коефіцієнтів у цих формулах? Побудувати графіки транспортних витрат та з'ясувати економічну доцільність перевезень тим чи іншим видом транспорту.

Розв'язування. Залежність транспортних витрат від відстані має вигляд лінійної функції $y = kx + b$, в якій коефіцієнт k характеризує витрати перевезення однієї одиниці вантажу на один десяток км, а b - сталі витрати, які не залежать від відстані (витрати на зберігання, перевантаження тощо). Із економічного сенсу випливає невід'ємність змінних x та y, тому графіками залежностей будуть частини прямих, розташовані у першому октанті системи координат xOy:



Із графічної ілюстрації видно, що на відстані до 100км дешевше перевозити автомобільним транспортом, а на відстані більше 100км – залізничним.

Тема 8. Метод координат. Елементи векторної алгебри. Найпростіші задачі аналітичної геометрії.

Метод координат.

Декартовою системою координат на прямій є числова вісь.

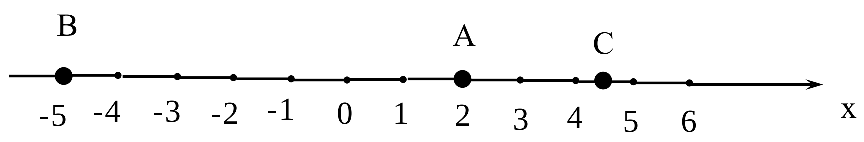
Числовою віссю називається пряма, на якій:

а) обрана початкова точка $\boldsymbol{O}$, по відношенню до якої визначається положення всіх інших точок прямої;

б) вказано (стрілкою) додатній напрямок відліку;

в) обрана одиниця довжини (масштаб) для обчислення відстані від початку координат до розглядуваної точки.

У побудованій системі координат кожній точці відповідає єдине дійсне число (координата точки), і навпаки, кожному дійсному числу відповідає єдина точка на числовій прямій.



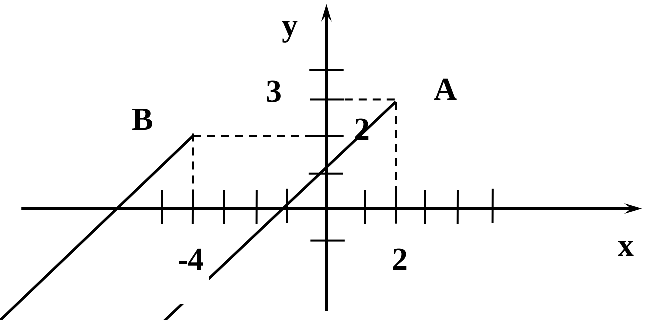
Наприклад, точці $\boldsymbol{A}$ відповідає число $\mathbf{2}$, точці $\boldsymbol{B}$ відповідає число $-\mathbf{5}$, а числу $\mathbf{4{,}5}$ відповідає точка $\boldsymbol{C}$.

Це записують так: $\boldsymbol{A}(2)$; $\boldsymbol{B}(-5)$; $\boldsymbol{C}(4{,}5)$.

Таким чином, метод координат на прямій встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною точок на числовій прямій і множиною дійсних чисел.

Декартовою системою координат на площині є дві взаємно перпендикулярні числові вісі зі спільним початком. Перша вісь (звичайно горизонтальна) позначається $\boldsymbol{OX}$ і називається **віссю абсцис**, а друга (звичайно вертикальна) позначається $\boldsymbol{OY}$ і називається **віссю ординат.**

У побудованій системі координат кожній точці площини відповідає упорядкована пара чисел (координати точки), і навпаки, кожній парі дійсних чисел відповідає єдина точка на площині.



Наприклад, точці A відповідає пара чисел $(2;\ 3)$, а парі чисел $(-4;\ 2)$ – точка B.

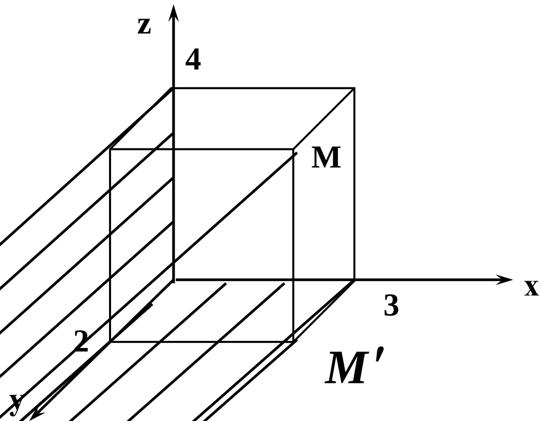
Це записують так:

$A(2;\ 3)$, $B(-4;\ 2)$.

Таким чином, метод координат на площині встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною точок на координатній площині і множиною упорядкованих пар дійсних чисел.

Декартовою системою координат у просторі є три взаємно перпендикулярні числові вісі зі спільним початком і встановлює взаємнооднозначну відповідність між множиною точок координатного простору і множиною упорядкованих ***трійок*** дійсних чисел.

Третя вісь позначається OZ і називається **віссю аплікат**.



Наприклад, точка $M(3;\ 2;\ 4)$ зображена на рисунку.

Побудувати точку по координатам можна так: спочатку позначити на площині XOY точку $M'(3;\ 2)$, потім "прикласти" відрізок $M'M = 4$, перпендикулярно до площини XOY.

Елементи векторної алгебри.

Величини бувають скалярні та векторні.

Величина називається **скалярною**, якщо вона повністю визначається своїм числовим значенням в обраній системі одиниць вимірювання.

Наприклад, довжина відрізка, температура, площа, час, об'єм, робота тощо.

Величина називається **векторною**, якщо вона визначається не тільки числовим значенням, але і напрямком.

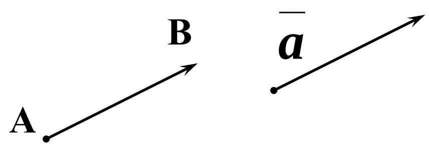
Наприклад, швидкість, сила, прискорення.

Для характеристики таких величин уводять поняття **вектора**. Розділ математики, в якому вивчаються дії над векторами, називається **векторною алгеброю.** Векторна алгебра широко використовується у сучасній аналітичній геометрії.

Основні означення.

Вектором називається напрямлений відрізок прямої.

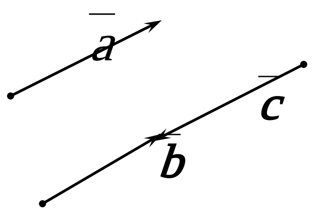
Якщо точка A – початок, а точка B – кінець вектора, то це позначається $\overline{AB}$ або $\overline{a}$.



Довжина цього відрізка називається довжиною або модулем вектора і позначається $\left|\overline{AB}\right|$ або $\left|\overline{a}\right|$.

Вектор, початок якого співпадає з кінцем, тобто модуль якого дорівнює нулю, називається **нульовим** і позначається $\overline{O}$. Очевидно, напрямок нульового вектора довільний.

Вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній і тій самій прямій, називаються **колінеарними**.



$\overline{a}\|\overline{b}$ $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні, співнапрямлені.

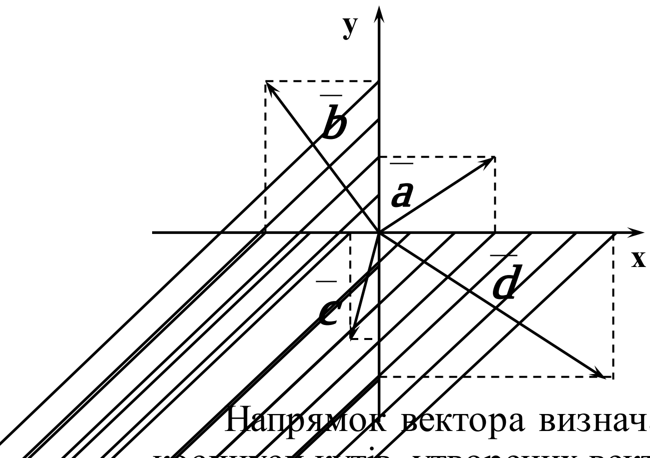
$\overline{a}\|\overline{c}$ $\overline{a}$ і $\overline{c}$ колінеарні, протилежно напрямлені.

Два вектори називаються рівними $\overline{a}=\overline{b}$, якщо вони колінеарні, мають однаковий напрямок і однакову довжину.

З останнього означення випливає, що при паралельному перенесенні ми отримуємо вектор, рівний даному.

В алгебраїчній формі вектор можна задати його проекціями на вісі координат, тобто $\overline{a}=\left(a_x;\ a_y\right)$.

Якщо помістити початок вектора в точку $O(0;\ 0)$ (це завжди можна зробити паралельним перенесенням), то координати його кінця будуть дорівнювати проекціям вектора на вісі координат.



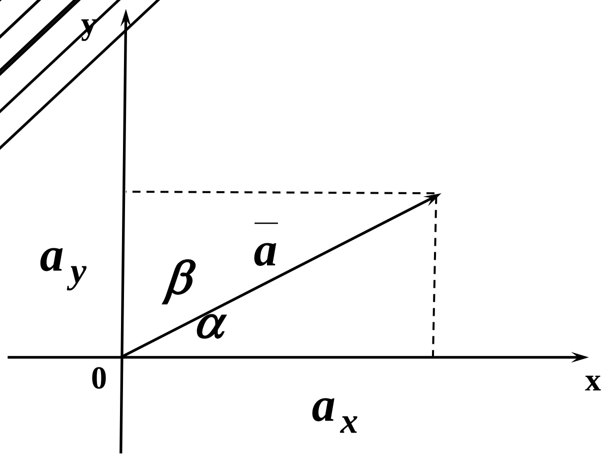
Приклад.

$\overline{a}=(3;\ 2)$; $\overline{b}=(-3;\ 4)$;

$\overline{c}=(-1;\ -3)$; $\overline{d}=(6;\ -4)$.

Таким чином, між векторами на площині та упорядкованими парами дійсних чисел встановлено взаємооднозначну відповідність.

Напрямок вектора визначається за допомогою напрямних косинусів, якими є косинуси кутів, утворених вектором з осями координат.



Напрямні косинуси обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|a|};\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|a|}.$$

З попереднього прикладу для вектора $\overline{a}=(3;\ 2)$:

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}};$$

$$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

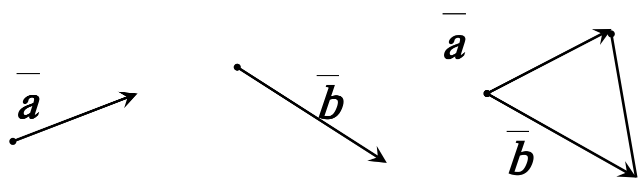
Операції над векторами.

Додавання. Щоб додати вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, треба від кінця вектора $\overline{a}$ побудувати (паралельним перенесенням) вектор $\overline{b}$, тоді вектор $\overline{c}$, початок якого співпадає з початком першого вектора, а кінець з кінцем другого, є сумою векторів-доданків.

$$\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$$

Правило розповсюджується на будь-яку скінченну кількість доданків.

Віднімання. Щоб відняти від вектора $\overline{a}$ вектор $\overline{b}$, треба паралельним перенесенням привести їх до спільного початку, тоді вектор, який сполучає їх кінці і має напрямок від $\overline{a}$ до $\overline{b}$ (до від'ємника), є їхньою різницею.



$$\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$$

Якщо вектори задані в алгебраїчній формі $\overline{a} = (a_x;\ a_y)$, $\overline{b} = (b_x;\ b_y)$ то, щоб додати (відняти) вектори, треба додати (відняти) їхні координати, тобто

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y) \qquad \overline{d} = \overline{a} - \overline{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y).$$

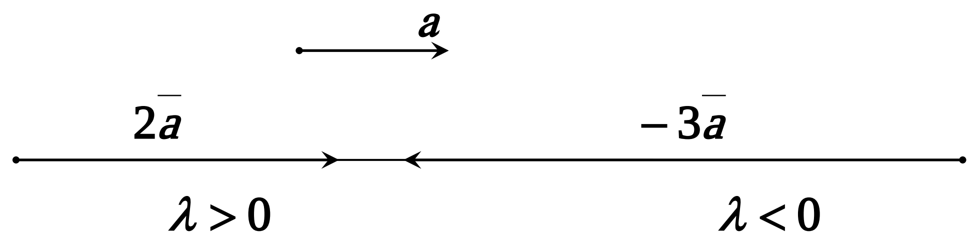
Приклад.

Якщо $\overline{a} = (2;-3)$, $\overline{b} = (4;5)$, то

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (2+4;-3+5) \qquad \overline{d} = \overline{a} - \overline{b} = (2-4;-3-5)$$

$$\overline{c} = (6;\ 2) \quad ; \quad \overline{d} = (-2;-8)$$

Множення на число. Щоб помножити вектор $\overline{a}$ на число λ, треба помножити довжину вектора на число λ, тоді отримуємо колінеарний вектор $\lambda\,\overline{a}$, напрямок якого співпадає з напрямком вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$ і протилежно напрямлений, якщо $\lambda < 0$.



В алгебраїчній формі, щоб помножити вектор $\overline{a}$ на число λ, треба помножити на це число координати вектора $\overline{a}$, тобто, якщо $\overline{a} = (a_x;\ a_y)$, то $\overline{b} = \lambda\overline{a} = (\lambda\overline{a_x}; \lambda\overline{a_y})$.

Приклад.

Якщо $\overline{a}=(-8;5)$; $\lambda=2$, то $\overline{b}=2\overline{a}=(-16;10)$.

Умова колінеарності.

З означення дії множення вектора на число випливає **умова колінеарності векторів:**

Для того щоб вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб їх координати були пропорційними, тобто $\overline{a}\parallel\overline{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}$.

Приклад: **а)** Чи колінеарні вектори $\overline{a}=(5;-4)$ і $\overline{b}=(20;-16)$?

б) Знайти k, якщо $\overline{a}=(-3;\ 15)$ і $\overline{b}=(8;\ k)$ - колінеарні.

Розв'язування:

а) Оскільки $\dfrac{5}{20}=\dfrac{-4}{-16}=\dfrac{1}{4}$, то $\overline{a}\parallel\overline{b}$.

б) $\overline{a}\parallel\overline{b}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{-3}{8}=\dfrac{15}{k}\ \Rightarrow\ k=\dfrac{8\cdot15}{-3}=-40$; $k=-40$.

Скалярний добуток.

Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ – це число, яке дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними, тобто

$$(\overline{a},\overline{b})=\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\alpha$$

Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{в}$ дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, тобто

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y$$

Із означення скалярного добутку векторів випливає, що:

1. Довжина вектора $\overline{a}$ дорівнює кореню квадратному із скалярного квадрата вектора, тобто

$$|\overline{a}|=\sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}}$$

В алгебраїчній формі довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат, тобто

$$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}}$$

2. Косинус кута між векторами обчислюється за формулою:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}, \quad \text{або} \quad \cos\alpha = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y}{\sqrt{a_x^2+b_x^2}\cdot\sqrt{a_y^2+b_y^2}}.$$

3. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\overline{a}\perp\overline{b} \Leftrightarrow |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\alpha = 0 \quad \textbf{або} \quad \overline{a}\perp\overline{b} \Leftrightarrow a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y = 0.$$

Приклад:

а) Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\overline{a}=(5;-3)$, $\overline{b}=(2;1)$.

б) Знайти довжину вектора $\overline{a}=(9;-12)$.

в) Знайти кут між векторами $\overline{a}=(2;\ 1)$ і $\overline{b}=(1;\ -1)$

г) Чи перпендикулярні вектори $\overline{a}=(-2;\ 4)$ і $\overline{b}=(6;\ 3)$.

д) Знайти k , якщо $\overline{a}=(4;\ 3)$ і $\overline{b}=(-3;\ k)$ – перпендикулярні.

Розв'язування:

а) $\overline{a}\cdot\overline{b} = 5\cdot 2 + (-3)\cdot 1 = 7$.

б) $|\overline{a}| = \sqrt{9^2+(-12)^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$.

в) $\cos\alpha = \dfrac{2\cdot 1 - 1\cdot 1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

г) Знайдемо $\overline{a}\cdot\overline{b} = (-2)\cdot 6 + 4\cdot 3 = 0.$ Оскільки $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$, то $\overline{a}\perp\overline{b}$.

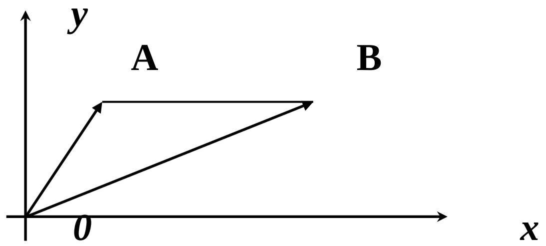
д) $\overline{a}\perp\overline{b} \Leftrightarrow 4\cdot(-3) + 3\cdot k = 0$. Звідси $k = 4$.

Найпростіші задачі аналітичної геометрії.

Задача 1. Обчислення координат вектора.

Знайти координати вектора $\overline{AB}$, якщо відомі координати його початку $A(x_1;\ y_1)$ і кінця $B(x_2;\ y_2)$.

Розв'язування.



Оскільки $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$,

$\overline{OB} = (x_2;\ y_2)$,

$\overline{OA} = (x_1;\ y_1)$,

то:

$\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

Таким чином, ***щоб знайти координати вектора, треба від координат кінця відняти відповідні координати початку.***

Приклад:

$A(2;\ 3)$, $B(5;\ -7)$. Тоді: $\overline{AB} = (3;\ -10)$.

Задача 2. Відстань між двома точками.

Знайти відстань між двома точками площини, якщо відомі координати точок $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$.

Розв'язування.

Оскільки відстань між двома точками A і B є довжиною вектора $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, то

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Приклад:

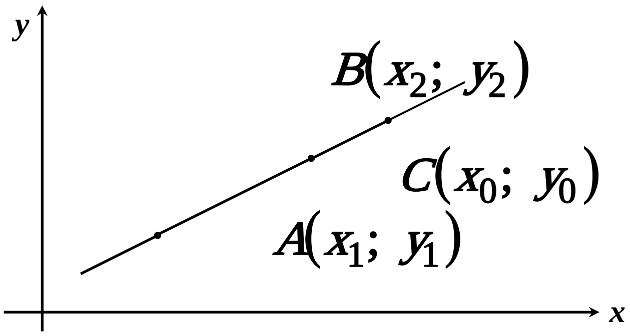
$A(3;\ -5)$, $B(8;\ 7)$. Тоді:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(8-3)^2 + (7+5)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$$

Задача 3. Поділ відрізка у заданому відношенні.

Знайти координати точки C, яка ділить відрізок $[AB]$ у відношенні λ, тобто: $\dfrac{\left|\overline{AC}\right|}{\left|\overline{CB}\right|} = \lambda$.

Розв'язування.



Нехай задані координати точок $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$. Знайдемо координати точки $C(x_0;\ y_0)$.

Розглянемо вектори:

$$\overline{AC} = (x_0 - x_1;\ y_0 - y_1)$$

$$\overline{CB} = (x_2 - x_0;\ y_2 - y_0).$$

Зауваження:

1. У формулах треба розрізняти координати початку та кінця відрізка.

2. Координати середини відрізка дорівнюють півсумі відповідних координат його кінців. Дійсно, $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{CB}\right| \Rightarrow \lambda = 1$, і

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Зауваження: точку перетину медіан можна знайти за формулою:

Тема 9. Рівняння лінії. Основне означення аналітичної геометрії. Пряма на площині.

Рівняння лінії.

Найважливішим поняттям аналітичної геометрії є рівняння лінії.

Лінія – *це геометрична множина точок, які мають певну властивість.*

Наприклад, геометрична множина точок, рівновіддалених від двох заданих точок – це пряма (серединний перпендикуляр), а геометрична множина точок, рівновіддалених від однієї точки – це коло.

Рівняння лінії на площині *– це рівняння* $F(x; y) = 0$*, яке за допомогою певного закону або правила* F *пов'язує змінні* x *та* y*.*

Основне означення аналітичної геометрії. *Рівняння вигляду* $F(x,\ y) = 0$ *є рівнянням лінії* L *на площині* XOY*, якщо координати кожної точки, що належить лінії* L*, задовольняють це рівняння, а координати кожної точки, яка не належить лінії* L*, не задовольняють рівняння* $F(x,\ y) = 0$.

Виходячи з цього означення, виникають такі основні задачі аналітичної геометрії:

1. Дано рівняння деякої лінії. Треба за даним рівнянням знайти відповідний геометричний образ.

2. Дана лінія, як множина точок, які мають певну геометричну властивість. Треба скласти рівняння цієї лінії.

3. Задані рівняння двох ліній. Треба знайти точки перетину цих ліній або встановити, що задані лінії не перетинаються.

Приклад 1. Дано рівняння лінії L: $x-y-1=0$.

Очевидно, геометричним образом даного рівняння є множина точок прямої (рис. 1). Наприклад, $A(2;\ 1)\in L$; $B(1;\ 0)\in L$; $C(2;\ 3)\notin L$;

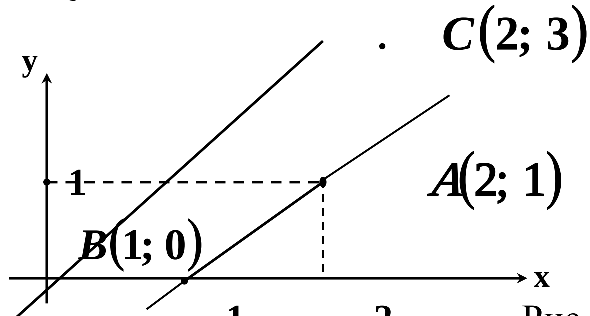


Рис. 1

Приклад 2. Скласти рівняння кола радіуса R з центром у точці $O_1(x_0;\ y_0)$. Візьмемо довільну точку $M(x;\ y)$ на колі. Як відомо, точки кола рівновіддалені від центра O_1 на відстань R, тобто $|O_1M|=R$ (рис. 2). За формулою відстані між двома точками:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R,$$

або

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$ – рівняння шуканого кола.

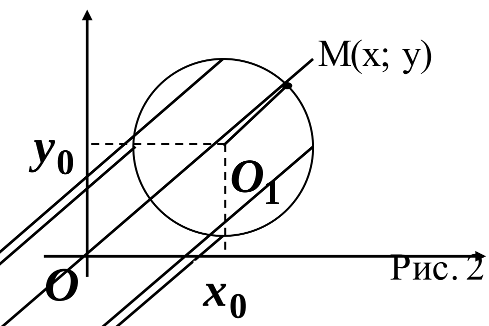


Рис. 2

Приклад 3. Знайти точки перетину двох ліній:

а) $y=x^2-1$ та $y=x-1$; б) $x^2+y^2=1$ та $y=2$.

Розв'язування. а) з основного означення аналітичної геометрії випливає, що координати точок перетину ліній повинні задовольняти систему рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=x-1 \end{cases} \begin{cases} x^2-1=x-1 \\ y=x-1 \end{cases} \begin{cases} x^2-x=0 \\ y=x-1 \end{cases} \begin{cases} x_1=0,\ x_2=1 \\ y=x-1 \end{cases} \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-1 \end{cases} \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=0 \end{cases}.$$

Отже, маємо дві точки перетину $M_1(0;\ -1)$ та $M_2(1;\ 0)$ (рис. 3).

б) Пряма лінія $y = 2$ і коло $x^2 + y^2 = 1$ не мають спільних точок, оскільки система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in \varnothing \\ y = 2 \end{cases}$ не має розв'язків (рис. 4).

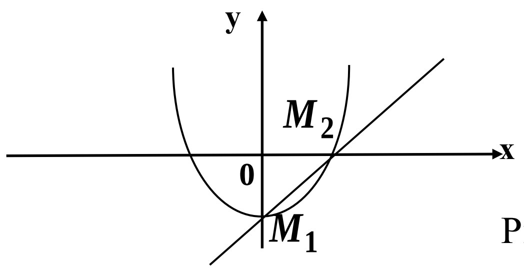


Рис. 3

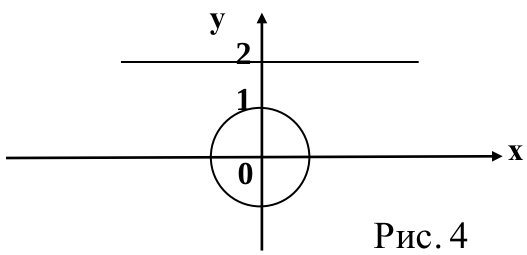


Рис. 4

Пряма лінія.

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.

Теорема. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n} = (A;\ B)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Приклад. Скласти рівняння прямої L, що проходить через точку $M(2; -1)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n} = (-5;\ 4)$.

Розв'язування.

Приклад 2. Скласти рівняння висоти трикутника, яка проходить через точку A, якщо відомі вершини трикутника: $A(4;\ -1)$, $B(-5;\ 7)$, $C(3;\ 1)$.

Розв'язування.

Якщо зробити перетворення рівняння (1) $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$ і позначити $-Ax_0 - By_0 = C$, то отримуємо:

$$Ax + By + C = 0, \text{ де } A^2 + B^2 \neq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

– **загальне рівняння прямої на площині.**

Дослідження загального рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0.$$

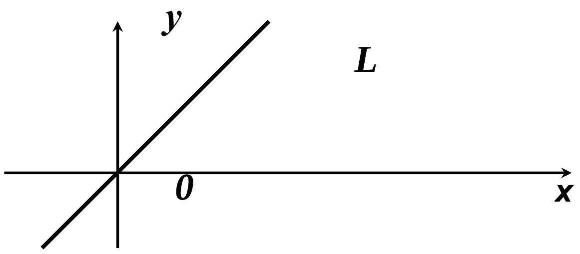
Розглянемо положення прямої на площині залежно від коефіцієнтів рівняння.

I. $C = 0$.

а) $A \neq 0$; $B \neq 0$.

Отримуємо: $Ax + By = 0$,

звідки $y = -\dfrac{A}{B}x$ – пряма L проходить через початок координат.

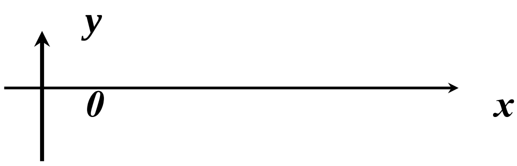


б) $A = 0$; $B \neq 0$.

Отримуємо: $By = 0$, звідки $y = 0$ – вісь Ox.

в) $A \neq 0$; $B = 0$.

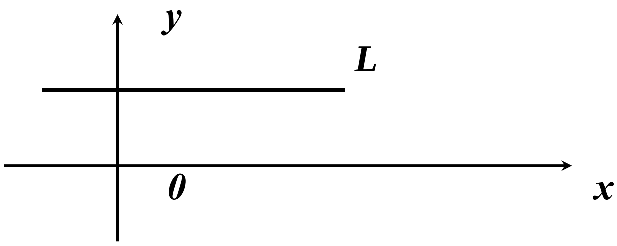
Отримуємо: $Ax = 0$, звідки $x = 0$ – вісь Oy.



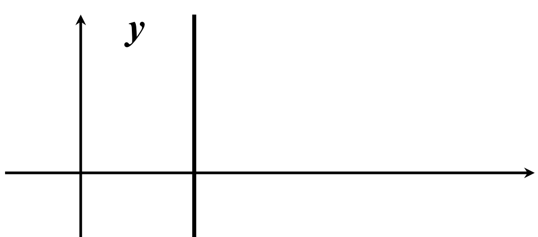
II. $C \neq 0$.

а) $A = 0$; $B \neq 0$.

Отримуємо: $By + C = 0$, звідки $y = -\dfrac{C}{B}$ – пряма L паралельна осі Ox.



б) $A \neq 0$; $B = 0$.



Отримуємо: $Ax + C = 0$,

звідки $x = -\dfrac{C}{A}$ – пряма L паралельна осі Oy.

L *0* *x*

Із дослідження загального рівняння прямої випливає

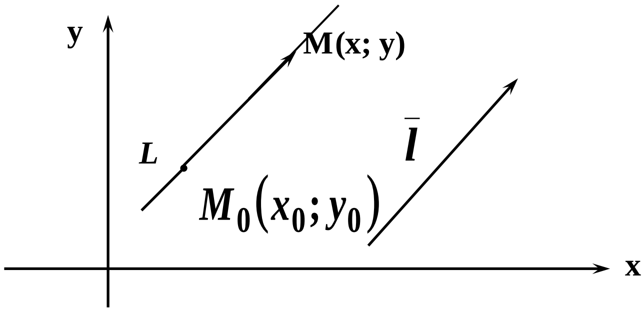
Теорема (про загальне рівняння прямої на площині). Будь-яке рівняння першого степеня з двома змінними (2) визначає деяку пряму на площині і навпаки, будь-яка пряма на площині визначається деяким рівнянням (2).

Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно даному вектору (канонічне рівняння прямої).

Теорема. Рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ паралельно даному вектору $\bar{l} = (m,\ n)$ (канонічне рівняння прямої) має вигляд:

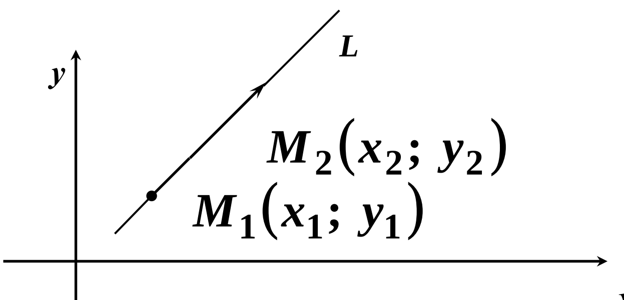
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (3)$$

Доведення. Нехай задана точка $M_0(x_0;\ y_0)$ і напрямний вектор $\bar{l} = (m,\ n)$, який паралельний прямій L.



Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Нехай дано дві неспівпадаючі точки $M_1(x_1;\ y_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2)$, через які проходить пряма L. Очевидно, вектор



$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$$

є напрямним до прямої L. Із канонічного рівняння прямої дістаємо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \textbf{(4)}$$

– рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

Приклад. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2;\ 5)$ і $M_2(7;\ -1)$.

Розв'язування. За формулою **(4)** маємо:

$$\frac{x-2}{7-2} = \frac{y-5}{-1-5}; \quad \frac{x-2}{5} = \frac{y-5}{-6}, \quad \text{або} \quad -6x + 12 = 5y - 25,$$

$$6x + 5y - 37 = 0.$$

Зауваження. Якщо один із знаменників дробів у формулі **(4)** дорівнює нулю, наприклад $x_2 - x_1 = 0$, то це означає, що пряма паралельна осі OY і має рівняння $x = x_1$. Аналогічно, якщо $y_2 - y_1 = 0$, то пряма паралельна осі OX і має рівняння $y = y_1$.

Приклад. Задано вершини трикутника $A(1;\ 2)$, $B(9;\ 3)$, $C(1;\ 3)$. Скласти рівняння його сторін.

Розв'язування. За формулою **(4)** маємо:

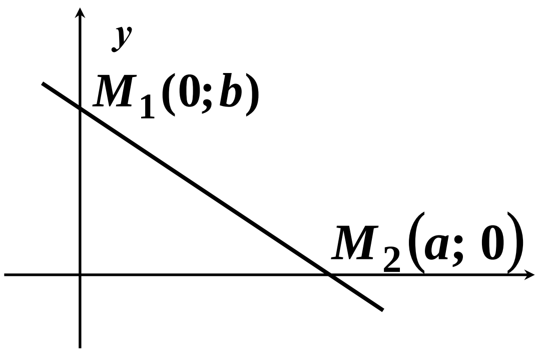
рівняння сторони AB:

$$\frac{x-1}{9-1} = \frac{y-2}{3-2}; \quad \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{1}, \quad x - 1 = 8y - 16, \quad x - 8y + 15 = 0.$$

$$BC: \quad \frac{x-9}{1-9} = \frac{y-3}{3-3}; \quad \frac{x-9}{-8} = \frac{y-3}{0}, \quad y = 3.$$

$$AC: \quad \frac{x-1}{1-1} = \frac{y-2}{3-2}; \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1}, \quad x = 1.$$

Рівняння прямої у відрізках на осях.



Розглянемо пряму, яка проходить через точки $M_1(0;\,b)$ і $M_2(a;\,0)$, тобто відтинає відповідно на осях Ox і Oy відрізки a і b.

Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки, отримуємо:

$$\frac{x-0}{a-0}=\frac{y-b}{0-b};\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{-b}+1;$$ звідси:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$ – **рівняння прямої у відрізках на осях.**

Зауваження. Цим рівнянням не можна користуватися, якщо пряма паралельна одній з координатних вісей або проходить через початок координат.

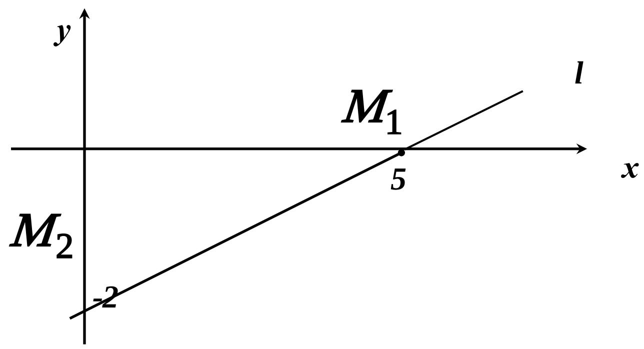
Приклад. Записати рівняння $2x-5y-10=0$ у вигляді рівняння прямої у відрізках. Побудувати графік.

Розв'язування. $2x-5y-10=0$; $\quad 2x-5y=10 \;\Big|:10$

$$\frac{2x}{10}-\frac{5y}{10}=1 \quad \text{або} \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1;\quad a=5;\qquad b=-2.$$

Пряма проходить через точки

$M_1(5;\,0)$ і $M_2(0;\,-2)$.



Відстань від точки до прямої.

Відстань від точки $M_0(x_0;\,y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ обчислюється за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

Приклад. Знайти відстань від точки $M_0(2;\ 8)$ до прямої $3x-4y-9=0$.

Розв'язування. За формулою **(5)** отримуємо:

$$d=\frac{|3\cdot 2-4\cdot 8-9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-35|}{5}=7.$$

Приклад. Задані вершини трикутника $A(4;\ -1)$, $B(6;\ 9)$, $C(1;\ -3)$. Знайти довжину висоти, яка проведена з вершини A.

Розв'язування. Знайдемо довжину висоти як відстань від точки A до прямої BC. Рівняння BC знайдемо за формулою **(4)**:

$$\frac{x-6}{1-6}=\frac{y-9}{-3-9};\qquad \frac{x-6}{-5}=\frac{y-9}{-12};\qquad 12x-5y-27=0.$$

Отже, довжина висоти дорівнює:

$$AH=d=\frac{|12\cdot 4-5\cdot(-1)-27|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{|26|}{\sqrt{169}}=2.$$

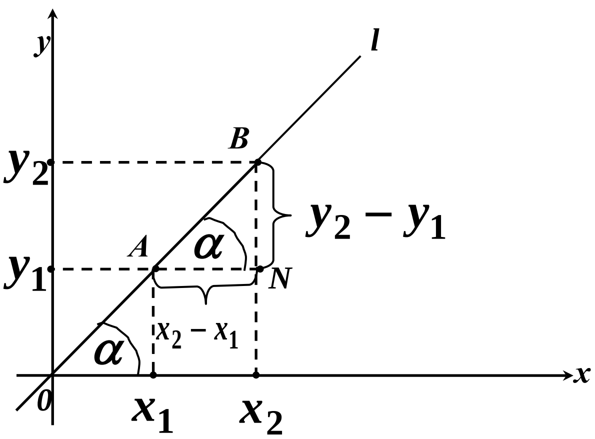
Кутовий коефіцієнт прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Кутом нахилу *прямої до осі Ох називається кут* α*, на який потрібно повернути в додатному напрямку (проти годинникової стрілки) вісь Ох до тих пір, доки вона не співпаде або не стане паралельною до даної прямої.*

Тангенс кута нахилу називається ***кутовим коефіцієнтом прямої*** і позначається k, тобто

$$tg\,\alpha=k.$$

Якщо пряма не паралельна осі Оу і на цій прямій задані будь-які дві



точки $A(x_1;\, y_1)$ і $B(x_2;\, y_2)$, то кутовий коефіцієнт прямої обчислюється за формулою: $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Дійсно, у прямокутному трикутнику ABN

$$tg\,\alpha = \frac{BN}{AN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

.

Зауваження 1. *Якщо пряма l буде паралельна до осі ординат (тобто $x_2 - x_1 = 0$), то $tg\alpha = \infty$, отже, кутовий коефіцієнт неможливо визначити.*

Приклад. Нехай $A(2;\, 5)$, $B(1;\, 3)$ – точки прямої l. Тоді її кутовий коефіцієнт: $k = \dfrac{5-3}{2-1} = 2$.

Розглянемо загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$. Якщо $B \neq 0$, то пряма не паралельна осі ординат. Розв'яжемо це рівняння відносно y: $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$. Позначимо $-\dfrac{A}{B} = k$, $-\dfrac{C}{B} = b$.

Отримуємо: $y = kx + b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, де k – кутовий коефіцієнт прямої, b – відрізок, який відтинає пряма на осі ординат.

Наслідок. Графіком лінійної функції $y = kx + b$ є пряма.

Приклад. Звести загальне рівняння прямої $x - 2y + 6 = 0$ до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Розв'язування. Розв'язуємо дане рівняння відносно y:

$-2y = -x - 6 \;\big|:(-2)$. Отримаємо $y = \dfrac{1}{2}x + 3$. Отже, $k = \dfrac{1}{2};\; b = 3$.

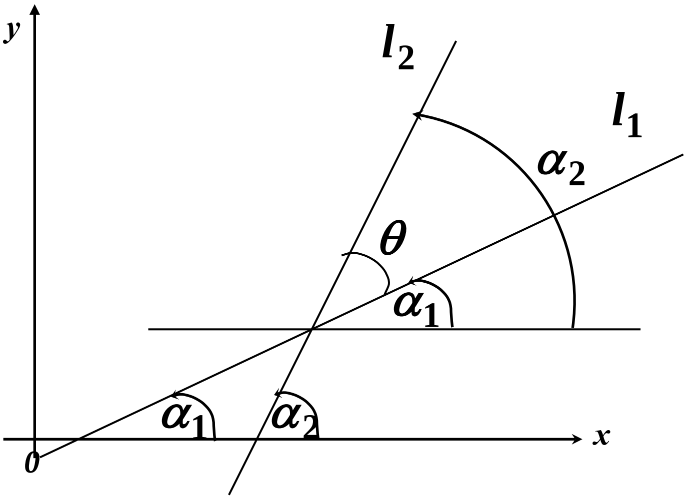
Приклад. Скласти рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = \dfrac{1}{3}$, якщо вона проходить через точку $M(-3;\, 1)$.

Розв'язування. Підставляючи в рівняння $y = kx + b$ координати точки M і значення кутового коефіцієнта k, знаходимо b:

$$1=\frac{1}{3}(-3)+b.\ \text{Звідси}\ b=2.\ \text{Отже,}\ y=\frac{1}{3}x+2.$$

Взаємне розташування двох прямих. Умова паралельності та перпендикулярності прямих.

Кутом між двома прямими *називається найменший кут, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки одну пряму так, щоб вона співпала або стала паралельною іншій прямій.*



Як видно,

$$\theta=\alpha_2-\alpha_1,\ \text{тоді}$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Якщо прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$L_1:\ y=k_1x+b_1,$$

$$L_1:\ y=k_2x+b_2,$$

$$tg\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|,$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_2=k_1$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Кут між двома прямими $\mathbf{L_1},\ \mathbf{L_2}$ можна також знаходити як кут між векторами нормалі $\overline{\mathbf{n_1}}=(\mathbf{A_1};\ \mathbf{B_1})$ і $\overline{\mathbf{n_2}}=(\mathbf{A_2};\ \mathbf{B_2})$ (або напрямними векторами $\overline{\mathbf{l_1}}(\mathbf{m_1};\ \mathbf{n_1})$ і $\overline{\mathbf{l_2}}(\mathbf{m_2};\ \mathbf{n_2})$) цих прямих. Отже:

Якщо прямі задані загальними рівняннями

$$L_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$L_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0,$$

то $$\cos\theta=\left|\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right|,$$

і $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$; $\qquad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Якщо прямі задані у канонічному вигляді,

$L_1 : \dfrac{x - x_0}{m_1} = \dfrac{y - y_0}{n_1}$, $\qquad$ то $\cos\theta = \left| \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \right|$,

$L_2 : \dfrac{x - x_0}{m_2} = \dfrac{y - y_0}{n_2}$,

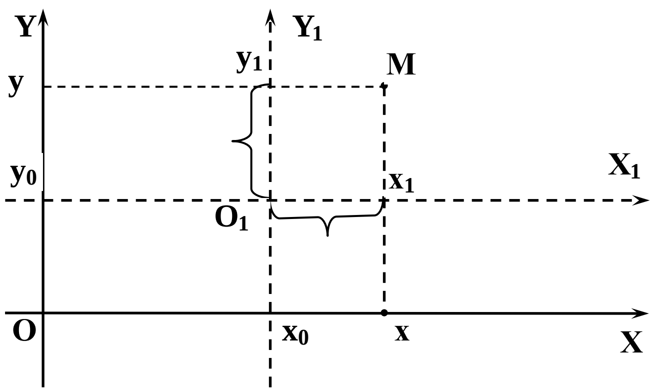
і $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$; $\qquad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

Тема 10. Перетворення системи координат.

До перетворень системи координат відносяться паралельне перенесення та поворот.

1. Паралельне перенесення

Нехай на площині задана система координат XOY. Зробимо перенесення координатних осей: $O_1X_1 \parallel OX$, $O_1Y_1 \parallel OY$. При цьому початок нової системи координат: $O_1(x_0;\ y_0)$.



Розглянемо довільну точку M, яка в системі XOY має координати $M(x;\ y)$, а в $X_1O_1Y_1$ – $M(x_1;\ y_1)$.

Перехід від “старої” XOY до “нової” $X_1O_1Y_1$ системи координат:

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0 \\ y_1 = y - y_0 \end{cases}.$$

Перехід від “нової” $X_1O_1Y_1$ до “старої” XOY системи координат:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0 \\ y = y_1 + y_0 \end{cases}.$$

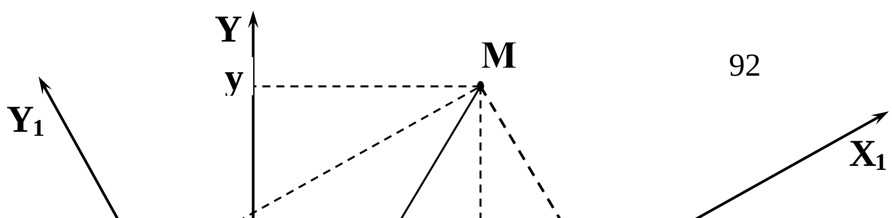
Приклад.

Рівняння деякої лінії має вигляд $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$. Яким буде рівняння цієї ж лінії після переносу початку координат у точку $O_1(1;\ -2)$.

2. Поворот координатних осей

Початок координат залишимо на своєму місці, а вісі повернемо на деякий кут α.

Перехід від „нових” до



„старих” координат точки M:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{cases}$$

Перехід від „старих” до „нових” координат точки M:

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Тема 11. Криві II порядку.

Розглянемо загальне рівняння II степеня з двома змінними x і y:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + + Dx + Ey + F = 0, \text{ де } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad \textbf{(9.1*)}$$

Завжди можна підібрати кут α, на який потрібно зробити поворот системи координат xOy так, щоб у новій системі рівняння **(9.1*)** не містило добутку xy (тобто $C = 0$). Тому далі розглядаємо рівняння

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ де } A^2 + B^2 \neq 0 \ . \quad \textbf{(9.1)}$$

Дослідимо три можливі випадки:

I. Еліптичний: $A \cdot B > 0$ (тобто коефіцієнти при x^2 і y^2 одного знака).

II. Гіперболічний: $A \cdot B < 0$ (коефіцієнти при x^2 і y^2 різного знака).

III. Параболічний: $A \cdot B = 0$ (тільки одна із змінних входить до рівняння у другому степені).

<u>I. Еліптичний випадок</u> ($A \cdot B > 0$). Виділяючи повні квадрати по обох змінних, рівняння **(9.1)** зводимо до вигляду:

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = \Delta \quad \textbf{(9.2)}$$

Продемонструємо цей процес на конкретному прикладі:

$$-x^2 - 8y^2 + 10x - 24y - 35 = 0$$

а) згрупуємо змінні:

$$\left[-x^2 + 10x\right] + \left[-8y^2 - 24y\right] - 35 = 0$$

б) винесемо за квадратні дужки коефіцієнти при x^2, y^2:

$$-\left[x^2-10x\right]-8\left[y^2+3y\right]-35=0$$

в) доповнюємо до повних квадратів:

$$-\left[x^2-2\cdot\frac{10}{2}\cdot x+\left(\frac{10}{2}\right)^2-\left(\frac{10}{2}\right)^2\right]-8\left[y^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot y+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-35=0$$

$$-\left[(x-5)^2-25\right]-8\left[\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]-35=0$$

г) розкриємо (лише квадратні) дужки і приведемо до вигляду **(9.2)**:

$$-(x-5)^2+25-8\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+18-35=0$$

$$-(x-5)^2-8(y+1{,}5)^2=-8.$$

Повернемося до рівняння **(9.2).** Це рівняння може визначати на площині різні множини точок, тому розглянемо всі можливі випадки:

1. Якщо A, B і $\Delta\neq 0$ – одного знака, то діленням обох частин рівняння **(9.2)** на Δ дістанемо:

$$\frac{A(x-x_0)^2}{\Delta}+\frac{B(y-y_0)^2}{\Delta}=1 \text{ або } \frac{(x-x_0)^2}{\frac{\Delta}{A}}+\frac{(y-y_0)^2}{\frac{\Delta}{B}}=1.$$

Позначимо $\frac{\Delta}{A}=a^2$, $\frac{\Delta}{B}=b^2$. Тоді рівняння **(9.2)** набуває вигляду:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$ – **нормальне рівняння еліпса.**

Можна показати, що дане рівняння визначає на площині:

а) у випадку $a>b$ – еліпс, витягнутий вздовж осі Ox (див. рис.1):

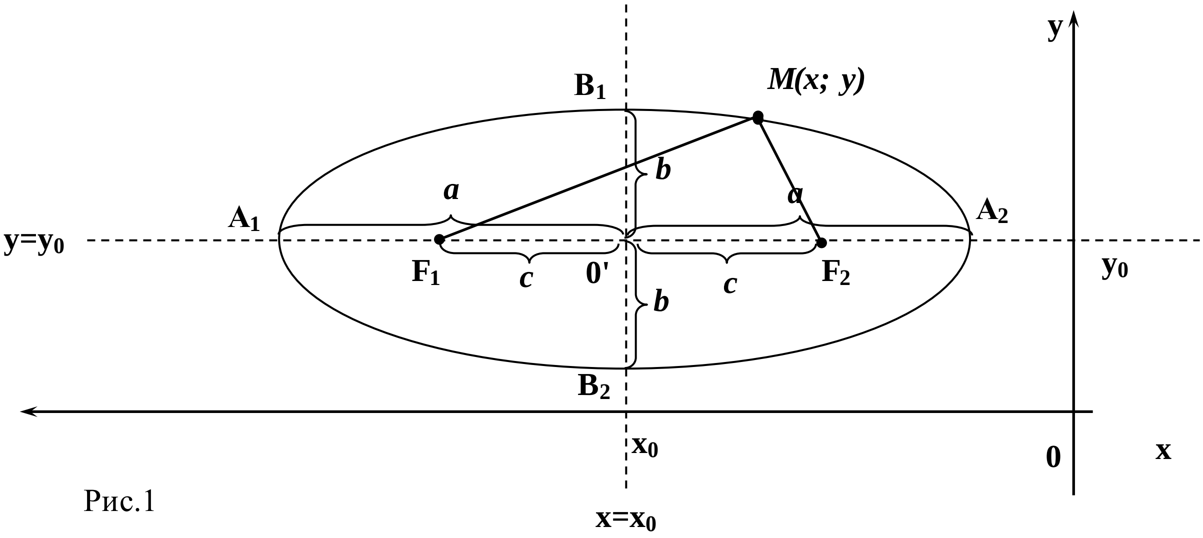


Рис.1

Параметри еліпса: центр – $O'(x_0;y_0)$; $2a$ – велика вісь (або a – велика піввісь); $2b$ – мала вісь (або b – мала піввісь); F_1, F_2 – фокуси, які лежать на великій осі і розташовані на відстані $c=\sqrt{a^2-b^2}$ від центра O'; ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{2c}{2a}$, який визначається як відношення міжфокусної відстані $|F_1F_2|$ до великої осі $|A_1A_2|$ і для еліпса $0\le\varepsilon<1$; A_1,A_2,B_1,B_2 – вершини еліпса.

Характеристична властивість точок еліпса

Сума відстаней від будь–якої точки еліпса $M(x;y)$ до двох даних точок – фокусів (або сума фокальних радіусів $r_1=|MF_1|$, $r_2=|MF_2|$) є величина стала, яка дорівнює великій осі еліпса, тобто $r_1+r_2=2a$.

Зауваження. *Характеристичну властивість точок еліпса можна прийняти за його геометричне означення.*

Зазначимо, що у попередньому конкретному прикладі маємо саме такий випадок ($A=-1$; $B=-8$; $\Delta=-8$ – одного знака), тому рівняння зводиться до такого нормального рівняння еліпса:

$$\frac{-(x-5)^2}{-8}+\frac{-8(y+1{,}5)^2}{-8}=1 \text{ або } \frac{(x-5)^2}{8}+\frac{(y+1{,}5)^2}{1}=1.$$

Отже, вихідне рівняння II степеня визначає на площині xOy еліпс з параметрами: центр $O'(5;-1{,}5)$; $a=\sqrt{8}\approx 2{,}8$ – велика, а $b=\sqrt{1}=1$ – мала півосі); відстань від центра до фокусів $c = \sqrt{8-1} = \sqrt{7} \approx 2{,}6$; ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{7}{8}} \approx 0{,}93$. Цей еліпс можна схематично побудувати (див. рис.2):

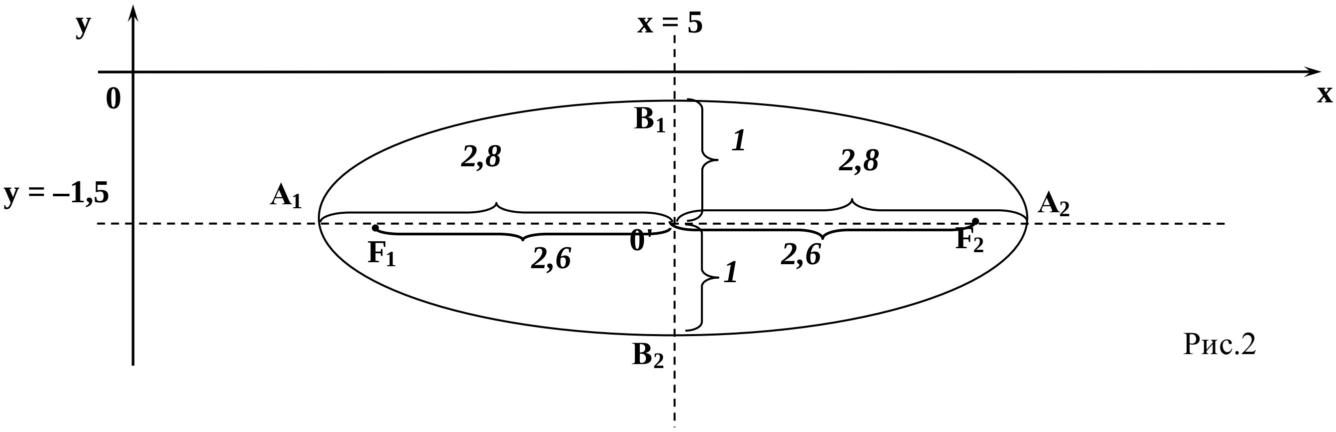


Рис.2

б) у випадку $a < b$ – еліпс, витягнутий вздовж осі Oy.

Наприклад: $3x^2 + y^2 + 6x = 0$; $\qquad A \cdot B = 3 \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ еліпс;

$$\left[3x^2 + 6x\right] + y^2 = 0; \qquad 3\left[x^2 + 2x\right] + y^2 = 0;$$

$$3\left[x^2 + 2 \cdot \frac{2}{2} \cdot x + 1^2 - 1^2\right] + y^2 = 0; \qquad 3\left[(x+1)^2 - 1\right] + y^2 = 0;$$

$$3(x+1)^2 - 3 + y^2 = 0; \qquad 3(x+1)^2 + y^2 = 3 \quad \Big| : 3;$$

$\dfrac{(x+1)^2}{1} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ – **нормальне рівняння еліпса** (рис.3)

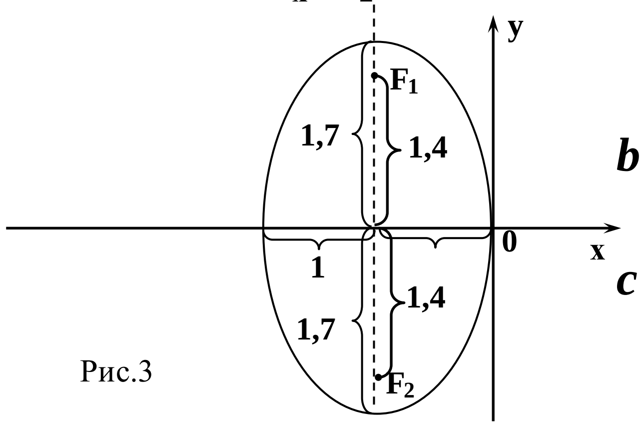


Рис.3

Параметри: центр $O'(-1;0)$;

$a = \sqrt{1} = 1$ – мала, а $b = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ – велика півосі;

відстань від центра до фокусів $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$;

ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

в) у випадку $a = b$ еліпс перетворюється в коло з центром $O'(x_0;\ y_0)$ радіуса $R = a = b$.

Наприклад: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$

$$\lfloor x^2 - 8x \rfloor + \lfloor y^2 - 4y \rfloor + 11 = 0$$

$$\lfloor x^2 - 2\cdot 4\cdot x + 4^2 - 4^2 \rfloor + \lfloor y^2 - 2\cdot 2\cdot y + 2^2 - 2^2 \rfloor + 11 = 0$$

$$\lfloor (x-4)^2 - 16 \rfloor + \lfloor (y-2)^2 - 4 \rfloor + 11 = 0$$

$$(x-4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 + 11 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$$

нормальне рівняння кола. (рис.4)

Параметри: центр $O'(4;2)$; радіус $R = 3$.

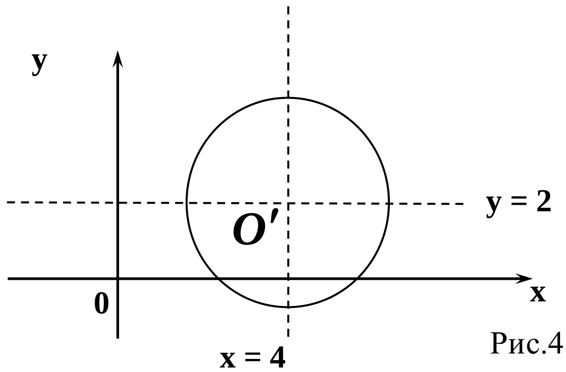


Рис.4

2. Якщо в рівнянні **(9.2)** $A,\ B$ і $\Delta \neq 0$ – різних знаків, то немає точок площини, координати яких задовольняли б рівняння. У цьому випадку кажуть, що рівняння визначає **уявний еліпс.**

Наприклад: $2x^2 + y^2 - 4y + 10 = 0$; $A\cdot B = 2\cdot 1 > 0 \Rightarrow$ еліпс.

$$2x^2 + \lfloor y^2 - 4y \rfloor + 10 = 0; \quad 2x^2 + \left[y^2 - 2\cdot\frac{4}{2}\cdot y + 2^2 - 2^2 \right] + 10 = 0;$$

$$2x^2 + \lfloor (y-2)^2 - 4 \rfloor + 10 = 0; \qquad 2x^2 + (y-2)^2 - 4 + 10 = 0;$$

$$2x^2 + (y-2)^2 = -6; \qquad \frac{x^3}{3} + \frac{(y-2)^2}{6} = -1.$$

Дістали рівняння, ліва частина якого набуває при будь–яких x, y тільки невід'ємних значень. Отже, рівняння визначає порожню множину точок – **уявний еліпс.**

3. Якщо $\Delta = 0$, то рівняння **(9.2)** набуває вигляду:

$$A(x-x_0)^2+B(y-y_0)^2=0,$$

і визначає єдину точку $O'(x_0;\ y_0)$ – **вироджений еліпс**.

II. Гіперболічний випадок $(A\cdot B<0)$.

Аналогічно еліптичному випадку загальне рівняння **(9.1)** приводиться до вигляду **(9.2)**:

$$A(x-x_0)^2+B(y-y_0)^2=\Delta.$$

1. Якщо $\Delta\neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння **(9.2)** на Δ або ($-\Delta$), дістанемо одне із двох рівнянь:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$$ **– нормальні рівняння гіперболи.**

Можна показати, що ці рівняння визначають на площині:

а) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – гіперболу з дійсною віссю, вершинами і фокусами – на прямій $y=y_0$ (див. рис.5)

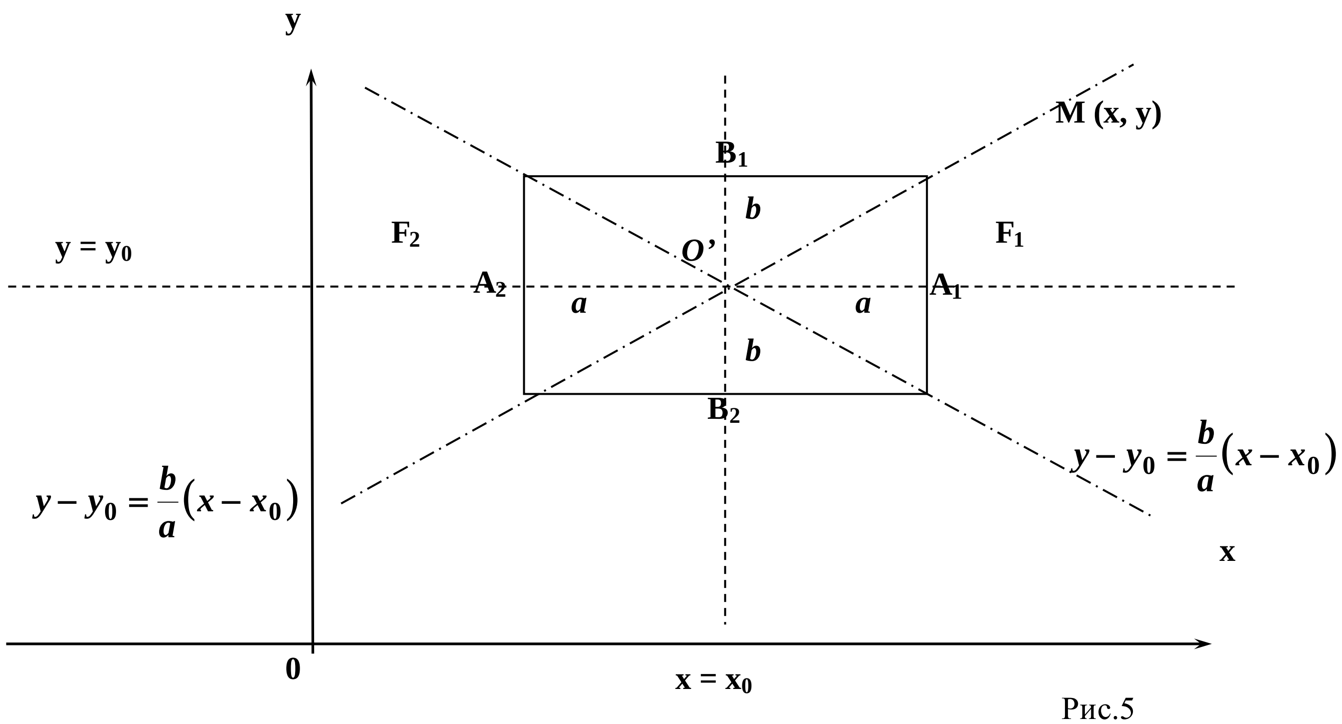


Рис.5

Параметри: центр $O'(x_0;\,y_0)$; a – дійсна, b – уявна півосі; вершини A_1, A_2; фокуси F_1, F_2 знаходяться на прямій $y=y_0$ на відстані $c=\sqrt{a^2+b^2}$ від центра O'; ексцентриситет – відношення міжфокусної відстані $|F_1F_2|$ до дійсної осі – $\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$, який для гіперболи $\varepsilon>1$; асимптоти – прямі (діагоналі так званого „основного прямокутника”), що визначаються рівняннями $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$.

Нагадаємо, що пряма l є **асимптотою** лінії L, якщо при прямуванні точки по лінії L у нескінченність відстань від цієї точки до асимптоти l прямує до нуля.

Характеристична властивість точок M(x; y) гіперболи.

Модуль різниці фокальних радіусів $r_1=|MF_1|, r_2=|MF_2|$ є величина стала, що дорівнює дійсній осі:

$$|r_1-r_2|=2a.$$

Зауважимо, що цю властивість можна прийняти як геометричне означення гіперболи.

б) рівняння $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$ визначає так звану „спряжену” до випадку а) гіперболу з дійсною віссю $2b$ – на прямій $x=x_0$ (див. рис.6):

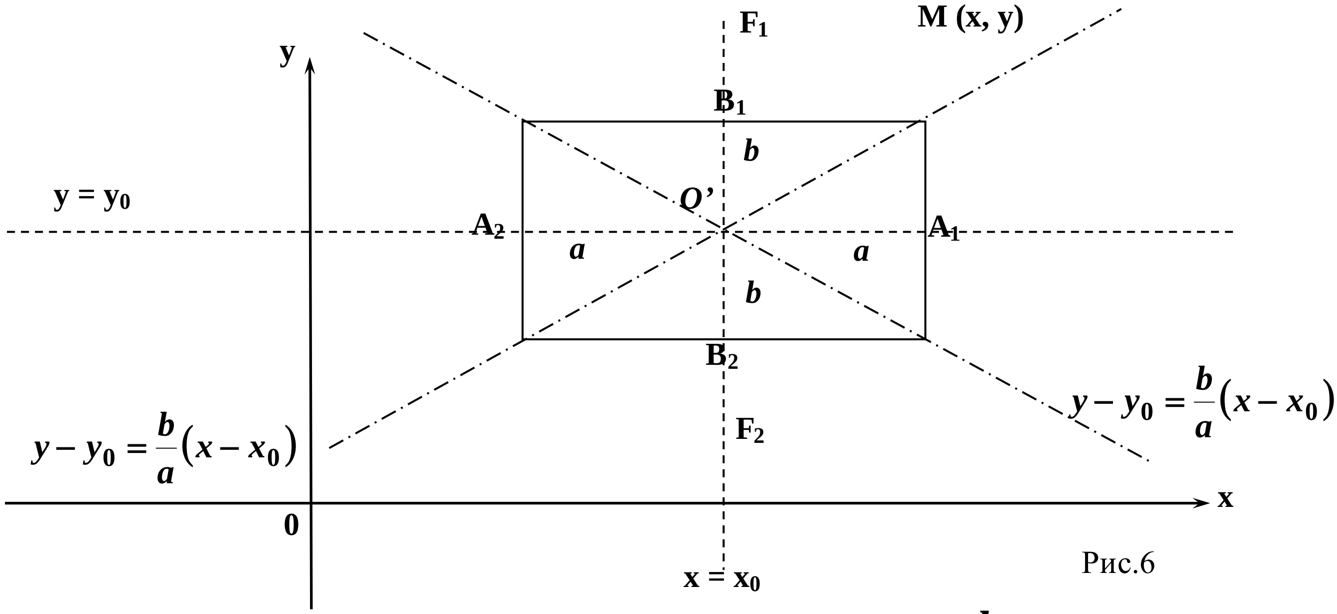


Рис.6

Параметри аналогічні гіперболі **а)** , тільки: a – уявна, b – дійсна півосі; фокуси і вершини знаходяться на прямій $x=x_0$; ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{2c}{2b}$.

Наприклад: $5x^2-9y^2-40x+125=0$; $A\cdot B=5\cdot(-9)<0\Rightarrow$ гіперболічний випадок

$$[5x^2-40x]-9y^2+125=0; \qquad 5[x^2-8x]-9y^2+125=0;$$

$$5\left[x^2-2\cdot\frac{8}{2}x+4^2-4^2\right]-9y^2+125=0;$$

$$5[(x-4)^2-16]-9y^2+125=0;$$

$$5(x-4)^2-80-9y^2+125=0;$$

$$5(x-4)^2-9y^2=-45\,|:45; \qquad \frac{5(x-4)^2}{45}-\frac{9y^2}{45}=-1;$$

$$\frac{(x-4)^2}{9}-\frac{y^2}{5}=-1$$ – **гіпербола.** (рис.7)

Схематична побудова:

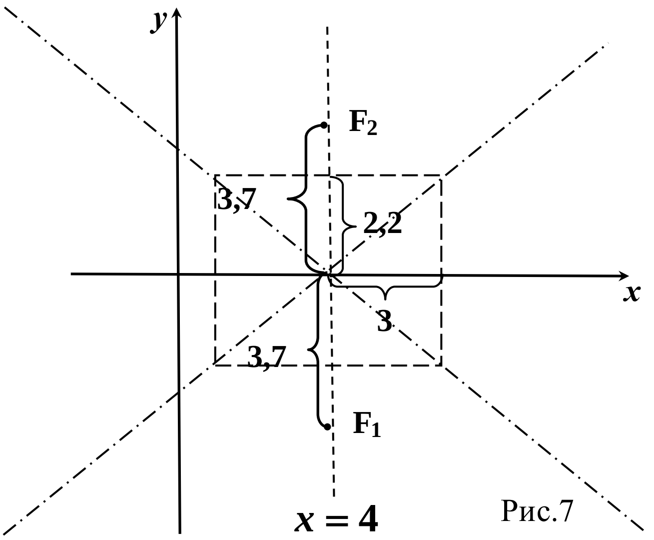


Рис.7

Параметри: центр $\boldsymbol{O'(4;0)}$;

$\boldsymbol{a=\sqrt{9}=3}$ – уявна,

$\boldsymbol{b=\sqrt{5}\approx 2{,}2}$ – дійсна півосі;

фокуси $\boldsymbol{F_1, F_2}$ – на прямій $\boldsymbol{x=4}$;

відстань від центра до фокусів $\boldsymbol{c=\sqrt{9+5}=\sqrt{14}\approx 3{,}7}$.

2. Якщо $\boldsymbol{\Delta=0}$, то ліву частину рівняння **(9.2)** можна розкласти на множники як різницю квадратів:

$$\boldsymbol{(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0},$$

тому рівняння визначатиме на площині дві прямі (**вироджена гіпербола**).

Наприклад: $\boldsymbol{4x^2-y^2+8x+6y-5=0}$; $\boldsymbol{A\cdot B=4\cdot(-1)<0}\Rightarrow$ гіпербола;

$$\boldsymbol{4[x^2+2x]-[y^2-6y]-5=0};$$

$$\boldsymbol{4[x^2+2x+1^2-1^2]-[y^2-2\cdot 3y+3^2-3^2]-5=0};$$

$$\boldsymbol{4[(x+1)^2-1]-[(y-3)^2-9]-5=0};$$

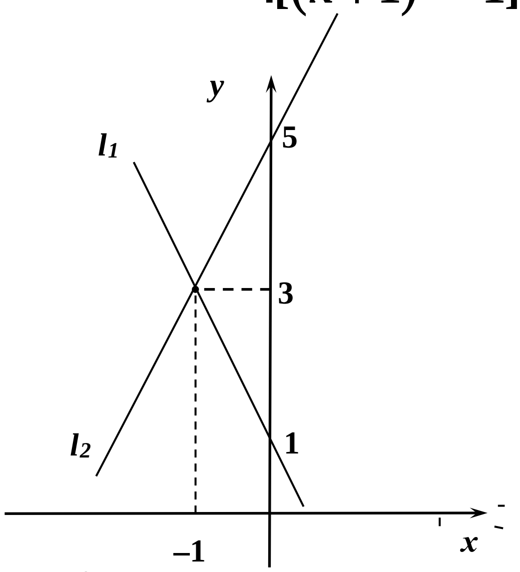


Рис.8

$$\boldsymbol{4(x+1)^2-4-(y-3)^2+9-5=0};$$

$$\boldsymbol{4(x+1)^2-(y-3)^2=0};$$

$$\boldsymbol{[2(x+1)+(y-3)][\,2(x+1)-(y-3)]=};$$

$\boldsymbol{(2x+y-1)(2x-y+5)=0}$ – дві прямі

$$\boldsymbol{l_1: 2x+y-1=0}$$

$\boldsymbol{l_2: 2x-y+5=0}$ (рис.8)

Рівнобічна гіпербола.

Розглянемо рівнобічну гіперболу $(a = b)$ з центром у точці $O(0;0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ або } x^2 - y^2 = a^2. \text{ (рис.9)}$$

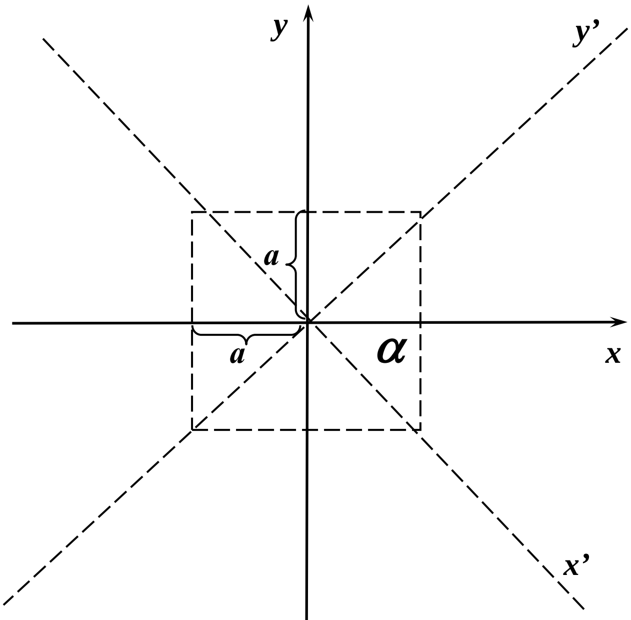


Рис.9

Очевидно, асимптотами рівнобічної гіперболи є бісектриси I, III і II, IV координатних кутів, які визначаються рівняннями $y = x$ і $y = -x$. Розглянемо рівняння гіперболи в новій системі координат $x'Oy'$, зробивши поворот старої системи на кут $\alpha = -45°$. При цьому

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}};$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}:$$

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

;

$$2x'y' = a^2; \; x'y' = \frac{a^2}{2}; \text{ або } y' = \frac{k}{x'}, \text{ де } k = \frac{a^2}{2}.$$

Висновок: Графіком функції $y = \frac{k}{x}, k \neq 0$ (оберненої пропорційної залежності) є рівнобічна гіпербола. Неважко показати, що графіком дробово–лінійної функції $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ теж є рівнобічна гіпербола.

Наприклад: побудувати графік функції $y = \frac{2x}{x-1}$.

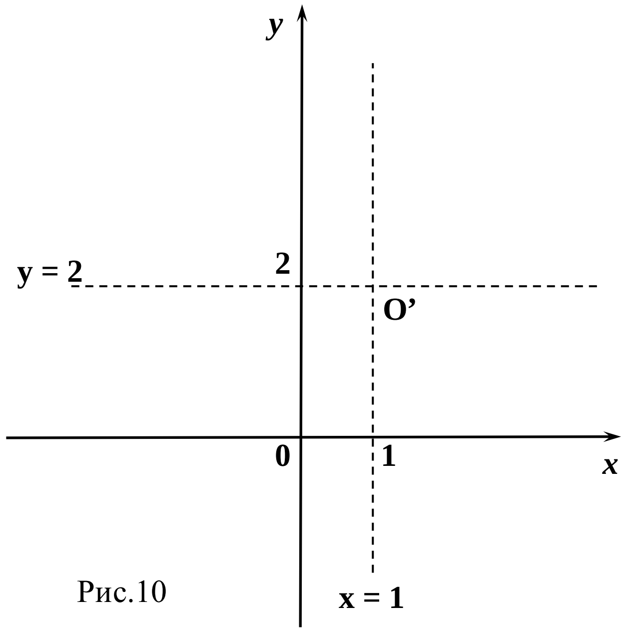


Рис.10

Виконаємо перетворення:

$$y=\frac{2(x-1+1)}{x-1};$$

$$y=2\left(1+\frac{1}{x-1}\right);\quad y=2+\frac{2}{x-1};$$

$$y-2=\frac{2}{x-1}$$ – **рівнобічна гіпербола** з центром $O'(1;\ 2)$;

асимптоти – прямі $x=1$ і $y=2$ (див. рис.10)

<u>III. Параболічний випадок ($A\cdot B=0$)</u>

1. Нехай $A=0,\ B\neq 0$. Якщо коефіцієнт при x у загальному рівнянні (8.1) відмінний від нуля ($D\neq 0$), то, виділяючи повний квадрат по змінній y, рівняння зводиться до одного із видів:

а) $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ (рис.11) або

б) $(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$ (рис.12) – **нормальні рівняння параболи,** які визначають на площині xOy такі криві:

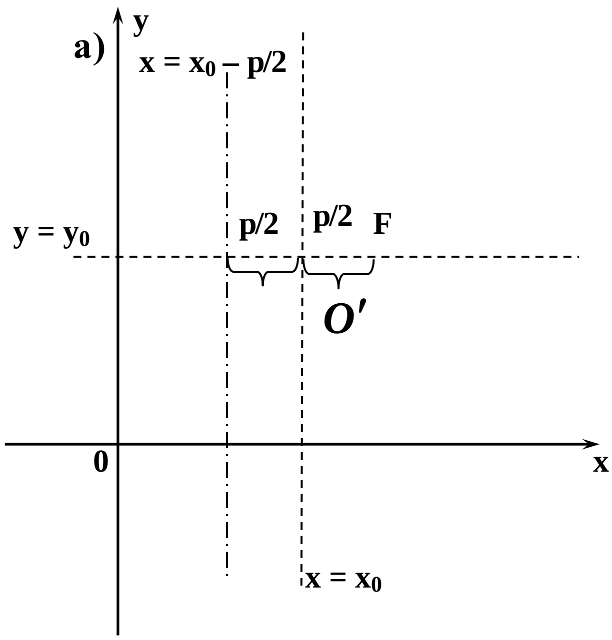


Рис.11

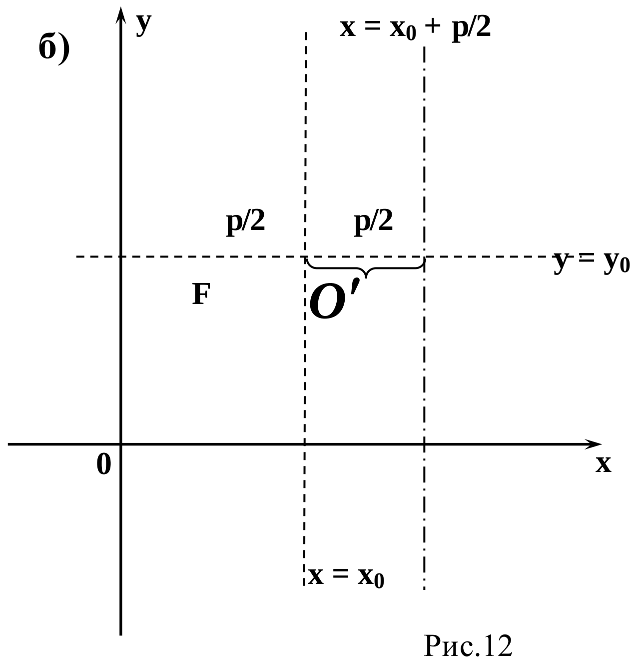


Рис.12

Параметри парабол: $O'(x_0;\ y_0)$ – вершина; F – фокус, p – параметр, який дорівнює відстані від фокуса до директриси: для **а)** – пряма $x = x_0 - p/2$, для **б)** – пряма $x = x_0 + p/2$; вітки параболи симетричні відносно осі параболи – прямої $y = y_0$ і направлені у випадку **а)** вправо, а у випадку **б)** вліво.

<u>Характеристична властивість точок параболи (геометричне означення параболи).</u>

Будь–яка точка $M(x, y)$ параболи рівновіддалена від фокуса і директриси.

2. Якщо в загальному рівнянні **(9.1):** $A \neq 0,\ B = 0$ і коефіцієнт при y $E \neq 0$, то, аналогічно попередньому, рівняння зводиться до одного із двох нормальних рівнянь парабол, схематично зображених на рис.13:

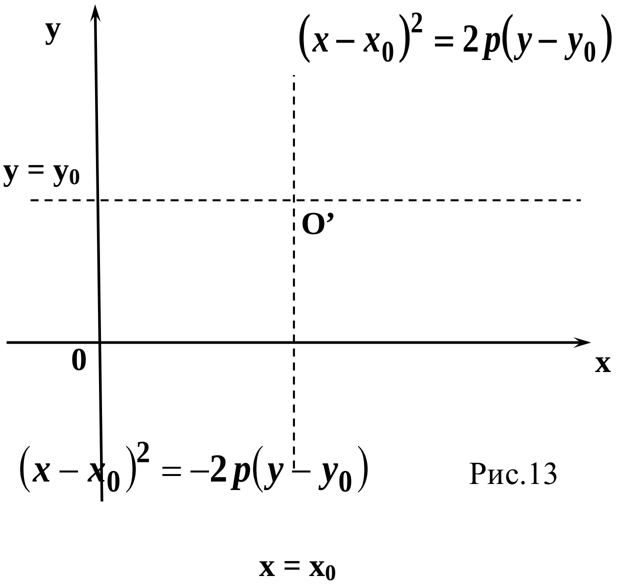


Рис.13

Параметри аналогічні попередньому зі змінами: вітки симетричні відносно осі – прямої $x = x_0$ і направлені вгору або вниз;

директриси – прямі $y = y_0 - p/2$ та $y = y_0 + p/2$.

Висновок: Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c,\quad a \neq 0$, є парабола (випадок 2).

Наприклад. Побудувати графік функції $y = -3x^2 + 6x - 7$.

Маємо загальне рівняння **(9.1)**:

$-3x^2 + 6x - y - 7 = 0$; $A \cdot B = -3 \cdot 0$ (параболічний випадок)

і коефіцієнт при y $E = -1 \neq 0$. Приведемо до нормального рівняння:

$$-3x^2 + 6x = y + 7 \,\Big|:(-3); \qquad x^2 - 2x = -\frac{1}{3}y - \frac{7}{3};$$

$$x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 = -\frac{1}{3}y - \frac{7}{3} + 1^2; \quad (x-1)^2 = -\frac{1}{3}y - \frac{4}{3};$$

$$(x-1)^2 = -\frac{1}{3}(y+4);$$

$$\left(x-1\right)^2=-2\cdot\frac{1}{6}\left(y+4\right)$$ **– парабола.**

Параметри: вершина $O'(1;-4)$; вісь – пряма $x=1$; вітки вниз; директриса– пряма $y=-4+\frac{1}{12}=-\frac{47}{12}$; параметр $p=\frac{1}{6}$. Схематично графік зображено на рис.14.

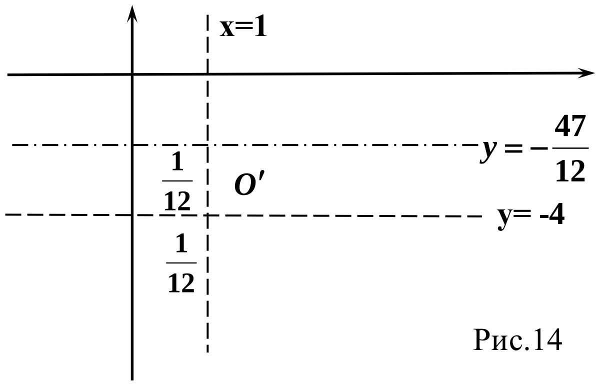


Рис.14

3. Якщо в загальному рівнянні **(9.1)** в явному вигляді є тільки одна змінна, тобто $Ax^2+Dx+F=0$ або $By^2+Ey+F=0$, то рівняння визначатиме, залежно від дискримінанта квадратних тричленів:

а) якщо дискримінант більший від нуля, то дві прямі; а якщо дискримінант дорівнює нулю, то одну пряму (**вироджену параболу**);

б) уявну параболу, якщо дискримінант від'ємний (порожню множину точок площини).

Наприклад:

а) $2x^2-5x-3=0$

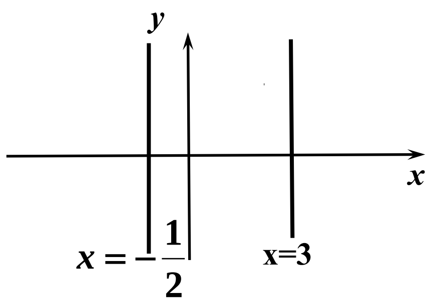
$$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot2\cdot(-3)=49>0$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+7}{4}=3;\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2}$$

Дане рівняння визначає на площині дві паралельні прямі

$l_1: x=3$

$l_2: x=-\frac{1}{2}$



б) $5y^2-y+1=0$

$D=1-4\cdot5\cdot1=-19<0$. Дане рівняння визначає на площині порожню множину точок.

Приклади та вправи до розділу 2.

2.1. За плановий період підприємство виготовило 200 одиниць продукції першого виду, 150 одиниць другого і 100 одиниць третього виду. Прибуток від реалізації одиниці кожного виду складає відповідно 3, 5 і 10 грн. Обчислити прибуток від реалізації всієї продукції.

Розв'язання. Прибутки від реалізації кожної одиниці продукції можна вважати координатами вектора $\overline{a} = (3; 5; 10)$, а обсяг виготовленої продукції трьох видів опишемо вектором $\overline{b} = (200; 150; 100)$. Тоді прибуток від реалізації всієї продукції можна визначити як скалярний добуток $\overline{a} \cdot \overline{b}$. Отже,

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (3; 5; 10) \cdot (200; 150; 100) = 600 + 750 + 1000 = 2350 \text{ (грн).}$$

2.2. Витрати підприємства на виготовлення 10 одиниць продукції складають 1 000 грн, а на 50 одиниць цієї ж продукції – 2 000 грн. Визначити витрати підприємства на виготовлення 30 одиниць продукції за умови, що загальні витрати на виробництво продукції є лінійною функцією від обсягу продукції.

Розв'язання. За умовою задачі витрати на виробництво є лінійною функцією від обсягу продукції. Рівняння відповідної лінії будемо шукати як рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Використовуючи умову задачі, маємо: $\dfrac{y - 1000}{2000 - 1000} = \dfrac{x - 10}{50 - 10}$.

Звідси: $y - 1000 = 25(x - 10) \Rightarrow y = 25x + 750$.

Отже, ми одержали функцію, що характеризує залежність витрат виробництва від обсягу продукції. Тепер знайдемо значення цієї функції при $x = 30$: $y = 25 \cdot 30 + 750 = 1500$ (грн).

Відповідь: на виробництво 30 одиниць товару витрачається 1500 грн.

2.3. Через пункти A і B проходить шосейна дорога. На плані місцевості ці пункти мають координати $(2;4)$ та $(16;0)$. Завод C, який на тому ж плані має координати $(11;9)$, необхідно з'єднати найкоротшою дорогою з цим шосе. Знайти на шосе точку D входження в нього дороги.

Розв'язання. Спочатку знайдемо рівняння прямої, яка на плані місцевості відповідає шосе. Для цього запишемо рівняння прямої AB, що проходить через точки $A(2;4)$ та $B(16;0)$: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Отже: $\frac{y-4}{0-4}=\frac{x-2}{16-2}$, $\quad \frac{y-4}{-2}=\frac{x-2}{7} \quad \Rightarrow \quad 2x+7y-32=0$.

Найкоротша пряма, що пройде через точку C, є перпендикуляром до прямої AB. Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої AB: $k_{AB}=-\frac{2}{7}$. Умову перпендикулярності прямих можна записати таким чином: $k_1 \cdot k_2=-1$. Звідси обчислимо кутовий коефіцієнт прямої CD: $k_{CD}=\frac{7}{2}$. Для того щоб записати рівняння прямої CD, треба використати рівняння прямої, що проходить через точку в заданому напрямі: $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$. Отже, маємо:

$$y-9=\frac{7}{2}(x-11), \quad \text{або} \quad 7x-2y-59=0.$$

Тепер знайдемо точку перетину прямих AB і CD:

$$\begin{cases} 2x+7y-32=0 \\ 7x-2y-59=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9; \\ y=2. \end{cases}.$$

Таким чином, точка D має координати: $x=9$, $y=2$.

Відповідь: $D(9;2)$.

2.4. У попередньому році ціна одиниці деякого товару становила 50 грн, а у поточному – збільшилась до 60 грн. Знайти залежність ціни товару від номеру року, якщо припустити, що ціна щороку буде збільшуватися на ту саму величину. Скласти прогноз ціни на 3 та на 5 років уперед.

Розв'язання. Позначимо номер попереднього року через 1, тоді поточному року відповідає номер 2.

Складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки, а саме через точки $A(1;50)$ і $B(2;60)$: $\frac{y-50}{60-50}=\frac{x-1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad y=10x+40$.

Через три роки, тобто для року, номер якого дорівнює $x=2+3=5$, ціна товару буде складати $y=10\cdot 5+40=90$ (грн), а через 5 років (при $x=7$) ціна товару досягне $y=10\cdot 7+40=110$ (грн).

2.5. Пропозиція та попит на цукор у деякий період на ринку описувалися функціями: $P=0{,}6q+5$, $\quad S=-0{,}4q+13$,

де q – ціна одного кг цукру в грн, а P і S – вага у кг.

Знайти ринкову ціну на цукор у цей період.

Розв'язання. Ринкова ціна визначається умовою $P = S$, а саме:

$$0,6q + 5 = -0,4q + 13,$$

звідси $q = 8$ (грн).

2.6. Підприємство витрачає на виробництво одиниці продукції 20 грн (постійні витрати). Витрати, які не залежать від обсягу продукції, наприклад, зарплатня, амортизаційні відрахування тощо (змінні витрати), дорівнюють 200 грн за тиждень. Знайти собівартість одиниці продукції.

Розв'язання. Нехай x – кількість одиниць продукції, що виготовлена протягом тижня. Витрати на виробництво цієї продукції складають $20x + 200$. Витрати (y) на виробництво одиниці продукції:

$$y = \frac{20x + 200}{x}, \quad \text{або} \quad y = 20 + \frac{200}{x} \quad (x > 0).$$

Таким чином, витрати на виробництво одиниці продукції обернено пропорційно залежать від обсягу виробництва, а саме: при зростанні x собівартість продукції спадає і прямує до $y = 20$.

2.7. Залежність обсягу виробництва від витрат ресурсів двох видів x і y задається виробничою функцією: $Z = 9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y$.

Визначити витрати ресурсів на виготовлення 23 одиниць продукції.

Розв'язання. За умовою задачі $Z = 23$, отже, співвідношення між x та y описується рівнянням: $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y = 23$.

Зведемо це рівняння лінії 2-го порядку до канонічного вигляду:

$$\left(9x^2 - 18x\right) + \left(4y^2 - 8y\right) = 23 \;\Rightarrow\; 9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(x^2 - 2x + 1) - 4 = 23;$$

$$9(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = 36;$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Отже, ми отримали рівняння, яке визначає еліпс з центром у точці $(1;1)$, а його півосі дорівнюють $a = 2$, $b = 3$:

Для кожного значення обсягу витрат ресурсу першого виду, що описуються значенням x з проміжку $(0;3)$, обсяг витрат другого ресурсу y набуває значення з проміжку $(0;4)$. Наприклад, якщо витрати першого ресурсу

x дорівнюють 2 (од.), то витрати y другого ресурсу, які визначаються за рівнянням еліпса, дорівнюють $y = \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1 \approx 3{,}6$ (од.).

2.8. Відстань між двома торгівельними організаціями дорівнює 8 км. Знайти множину можливих місць розташування бази таким чином, щоб сума відстаней від бази до цих організацій була сталою величиною і дорівнювала 10 км.

Розв'язання. Виберемо осі координат таким чином: торгівельні організації – точки A і B, які лежать на осі OX, а вісь OY проходить через середину відрізка AB. У цій системі координат точки, відповідно, мають координати $A(-4;0)$ та $B\ (4;0)$. Якщо база розташована у точці $C\ (x;\ y)$, то за умовою задачі: $AC + CB = 10$.

Визначимо AC та CB як відстань між двома точками:

$$AC = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}\,, \quad CB = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}\,.$$

Тоді:

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10\,,$$

або

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}\,.$$

Підносимо обидві частини даного співвідношення до квадрата і отримуємо:

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + x^2 - 8x + 16 + y^2 \Rightarrow$$

$$16x = 100 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2}\,, \quad \text{або} \quad 5\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 25 - 4x\,.$$

Піднесемо ще раз обидві частини співвідношення до квадрата:

$$25\left(x^2 - 8x + 16 + y^2\right) = 625 - 200x + 16x^2 \Rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225\,.$$

Поділивши обидві частини даного співвідношення на 225, отримаємо рівняння еліпса в канонічній формі:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

Відповідь: якщо база розташована на лінії, яка є еліпсом: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, то сума відстаней від неї до торгівельних організацій буде 10 км.

2.9. Перевезення вантажу до першого пункту, що знаходиться на відстані 150 км, коштує 250 грн. од., а до другого, відстань до якого 350 км, – 400 грн од. Знайти залежність вартості перевезення (y) від відстані (x), якщо вартість є лінійною функцією від відстані.

2.10. Витрати на перевезення двома видами транспорту виражаються так:

$$y_1 = 20x + 150,$$

$$y_2 = 10x + 200,$$

де x – відстань, на яку здійснюється перевезення, км;

y_1 і y_2 – транспортні витрати на перевезення, грн.

Знайти відстань, при якій витрати на перевезення обома видами транспорту будуть однакові. Визначити, при яких відстанях краще користуватися іншим видом транспорту.

2.11. Ринкова ціна одиниці деякого товару складає 4 грн. За цією ціною виготовляється 8 000 одиниць даного товару. За ціною 2 грн недоцільно виробляти даний товар, тобто пропозиція відсутня. За ціною 12 грн не буде продано жодної одиниці товару, тобто попит відсутній. Знайти функцію попиту і функцію пропозиції, вважаючи їх лінійними.

2.12. Відстань між двома заводами, що виготовляють однакову продукцію, складає 200 км. Транспортні витрати на перевезення продукції від заводу A в три рази дорожче, ніж від B. Визначити лінію – межу районів, на якій однаково вигідно отримувати продукцію заводів A і B (початок координат взяти посередині між цими заводами; завод B розташований праворуч від заводу A).

2.13. Два підприємства, які віддалені на 100 км одне від одного, виготовляють однакові вироби. Транспортні витрати на 1 км шляху при перевезенні одного виробу від підприємства A і B до споживача однакові і складають 1 грн /км, а ціна реалізації кожного виробу на підприємствах A і B дорівнюють 200 і 250 грн відповідно. Для яких споживачів витрати на придбання одиниці виробу у підприємств A і B будуть однакові? (Підприємство A знаходиться в початку координат).

Розділ 3. Вступ до математичного аналізу

Під математичним аналізом розуміють сукупність розділів математики, що займаються дослідженням функцій методами диференціального та інтегрального числення. Завдяки математичному аналізу математика набула значення як інструмент для побудови і дослідження моделей різноманітних процесів та явищ довкілля у їх розвитку. Основою математичного аналізу разом з такими поняттями, як змінна та функція, є поняття границі. Саме визначення цих понять і розглядається у вступі до математичного аналізу.

Після вивчення даної теми ви зможете:

- використовувати теоретико-множинний підхід у дослідженнях економічних об'єктів;
- визначати функціональні залежності між ознаками об'єктів в економічних дослідженнях;
- застосовувати функції однієї змінної для аналітичного опису виробничих функцій в економіці;
- інтерпретувати за допомогою графіків функцій зв'язок між числовими характеристиками процесу при моделюванні економічних ситуацій;
- аналізувати співвідношення між сумарними, середніми і граничними величинами в економіці з функціональної точки зору;
- впроваджувати метод границь у проведення маргінального (граничного) аналізу економічних процесів.

Тема 12. Застосування методів теорії границь до розробки та розв'язування математичних моделей економічних задач

1. Клієнт поклав 10 000 грн. у банк за ставкою 7 %. Знайти накопичення через 5 років у разі: а) простих відсотків; б) складних відсотків. Результати порівняти.

Розв'язання. У випадку простих відсотків накопичена сума обчислюється за формулою $A_n = A(1+np)$, де $A = 10\,000$, $n = 5$, $p = 0{,}07$.

Отже, $A_5 = 10\,000(1+5\cdot 0{,}07) = 13\,500$ (грн)

Якщо вклад покласти під складені відсотки, то накопичена сума обчислюється за формулою $A_n = A(1+p)^n$.

Тоді $A_5 = 10\,000(1+0{,}07)^5 = 14\,025{,}52$ (грн).

Порівнюючи результати, бачимо, що вигідніше вкладати гроші під складні відсотки.

2. 150 000 грн покладено у банк за ставкою 18 % на 5 років. Побудувати числову послідовність для характеристики грошових накопичень із урахуванням складених відсотків.

Розв'язання. Для побудови числової послідовності використовуємо формулу $A_n = A(1+p)^n$,

де $A = 150\,000$, $p = 0{,}18$, $n = \overline{1{,}5}$.

Результати обчислень наведено в таблиці

n, роки	1	2	3	4	5
A_n, грн	177 000	208 860	246 454,8	290 816,7	323 163,7

3. Попит на папір у канцелярії університету на місяць складає 20 пачок і щомісяця зростає на 5 %. Через який час попит збільшиться вдвічі, якщо ця тенденція буде зберігатися?

Розв'язання. Враховуючи формулу $A_n = A(1+p)^n$, маємо:

$$2A = A(1+0{,}05)^n, \text{ або } 2 = 1{,}05^n.$$

Прологарифмуємо обидві частини: $\lg 2 = n \lg 1{,}05$,

звідси $$n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05} = 14.$$

Отже, через 14 місяців попит на папір у канцелярії збільшиться вдвічі.

4. Підприємець вирішив інвестувати в проект з будівництва нового готелю 10 млн грн, розраховуючи отримати через 3 роки 20 млн грн. Яка повинна бути при цьому відсоткова ставка?

Розв'язання. Застосовуємо формулу складних відсотків

$$A_n = A(1+p)^n.$$

Необхідно знайти p. Підставимо дані задачі:

$$20 = 10(1+p)^3, \text{ або } 2 = (1+p)^3.$$

Далі маємо: $\lg 2 = 3\lg(1+p)$, $1+p = 1{,}26$, звідки $p = 0{,}26$.

Отже, щоб через три роки отримати 20 млн грн, відсоткова ставка повинна бути 26 %.

5. Підприємець продає за день 150 пар взуття. Після відкриття ще одного відділу було вирішено довести продаж до 750 пар. Скільки для цього буде потрібно часу, якщо щодня збільшення продажу складає 25 %?

Розв'язання. За формулою $A_n = A(1+p)^n$

маємо: $750 = 150 \cdot 1,25^n \Rightarrow (1,25)^n = 5$.

Звідси $n = \dfrac{\lg 5}{\lg 1,25} = 7$.

Отже, треба буде 7 днів, щоб збільшити щодня продаж взуття до 750 пар.

6. Клієнт поклав гроші у банк під складні відсотки за ставкою 8 %. Через п'ять років він одержав 29 386,6 грн. Яку суму було покладено в банк?

Розв'язання. За формулою складних відсотків маємо:

$$29386,6 = A(1+0,08)^5,$$

звідки $A = \dfrac{29386,6}{1,08^5} = 20\,000$.

Таким чином, було покладено в банк 20 000 грн.

7. Чисельність населення України у 2010 році складала 47 млн. Знайти чисельність населення України через 5 років, якщо вона буде зростати щорічно: а) на 0,5 %; б) на 1,5 %.

Розв'язання. Якщо A – чисельність населення на початок розрахунку, тоді через n років чисельність складатиме $A_n = Ae^{pn}$, а саме:

а) $A_5 = 47e^{0,005 \cdot 5} = 48,19$ (млн);

б) $A_5 = 47e^{0,015 \cdot 5} = 50,66$ (млн).

Отже, при зростанні чисельності на 0,5 %, через 5 років вона складатиме 48,19 млн, а при зростанні на 1,5 % – 50,66 млн.

8. Студент, що одержав на конкурсі премію 10 000 грн, поклав її на 3 роки до банку за схемою неперервного нарахування відсотків за ставкою 10%. Побудувати числову послідовність накопичень при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

Розв'язання. Для побудови числової послідовності використовуємо формулу

$$A_n = Ae^{pn}, \text{ а саме: } A_n = 10\,000e^{0,1n}.$$

Результати обчислень подамо у вигляді таблиці.

n, роки	1	2	3
A_n, грн	11051,71	12214,03	13498,59

Тема 13. Функціональна залежність. Класифікація функцій. Застосування функцій в економіці

13.1. Множини. Абсолютна величина дійсного числа

Теорія множин як математична дисципліна створена німецьким математиком Георгом Кантором (1845 – 1918 рр.). Поняття «множина» є одним із первинних (до того ж фундаментальних) понять математики, яким неможливо дати означення, використовуючи інші математичні поняття. Тому вдаються до описового пояснення поняття множини.

Під ***множиною*** розуміють сукупність об'єктів, що об'єднані за певною ознакою. Об'єкти, що складають множину, називають її ***елементами***. Стосовно поняття множини Г. Кантор висловився так: «Множина є багато що, яке ми сприймаємо як єдине». Наприклад, можна говорити про множину студентів у групі, клієнтів банку, множину країн, які пов'язані певними угодами, тощо.

Множини позначають, як правило, великими літерами латинського або грецького алфавітів, а їх елементи – малими літерами, бажано тими ж самими. Так, якщо A – це певна множина, a_i є її елементом, то пишуть: $a_i \in A$, тобто «a_i належить A». У протилежному випадку, коли a_i не є елементом множини A, пишуть: $a_i \notin A$, тобто «a_i не належить A».

Існує два способи задання множин:

1) перелік, згідно з яким указують всі елементи, що складають множину, яка розглядається;

2) опис, що ґрунтується на заданні так званої ***характеристичної властивості*** елементів x, де $x \in A$, за якою елементи й об'єднані у множину.

Для символьного запису множини використовують фігурні дужки, між якими через кому або крапку з комою записують її елементи $A = \{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ або через вертикальну риску записують характеристичну властивість елементів цієї множини. У даному випадку символ «$|$» означає: «за властивістю», «що мають властивість».

Так, множина A задана як перелік своїх елементів: $A = \{1; 2; 3;\ 4; 5\}$. Множина C задана за допомогою опису характеристичної властивості, тобто $C = \left\{x \middle| x^2 - 1 = 0\right\}$. Також можна задати перелік елементів цієї множини: $C = \{\pm 1\}$.

Відзначимо, що спосіб переліку зручно застосовувати, якщо треба задати множину, що має відносно невелику кількість елементів. У випадку, коли множина має велику кількість елементів або взагалі перелічити їх усі неможливо, застосовують опис як спосіб задання елементів множини.

Розглянемо основні поняття теорії множин.

Одними з вихідних понять теорії множин є поняття «порожня множина».

Порожньою множиною називається множина, яка не містить жодного елемента. Вона позначається символом $\varnothing$. Існує тільки єдина пуста множина.

Так, множина дійсних коренів рівняння $x^2+10=0$ є порожньою, оскільки не існує такого числа із множини дійсних чисел, щоб його квадрат у сумі з числом 10 дорівнював би нулю, тобто $\left\{x \in R \,\middle|\, x^2+10=0\right\}=\varnothing$.

Множини A і B називаються ***рівними***, якщо вони складаються з тих же самих елементів, і пишуть: $A=B$.

Розглянемо дві непорожні множини A і B. Множина A називається ***підмножиною*** множини B, якщо кожний елемент із A належить множині B, і позначається це так:

$$A \subset B, \text{ або } \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B. \tag{13.1}$$

У тому випадку, коли A не є підмножиною B, то пишуть: $A \not\subset B$ і кажуть: «A не включається до B».

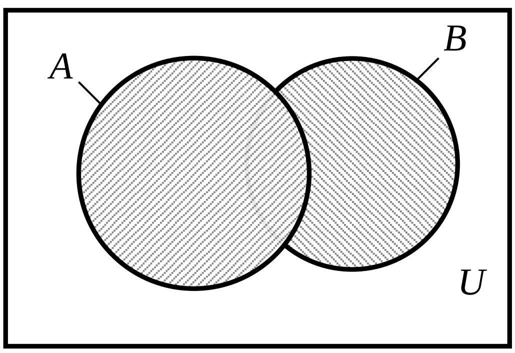
Співвідношення між множинами, а також операції над множинами зручно ілюструвати за допомогою ***діаграм Венна – Ейлера***. Для побудови такої діаграми в межах прямокутника наносять замкнені фігури, які відповідають множинам. Найчастіше для зображення множини застосовується коло. Точки, що належать колу (або будь-якій іншій замкненій фігурі, що відображує множину), вважаються елементами цієї множини.

Розглянемо **основні операції** над множинами.

1. ***Об'єднанням*** множин A і B називається множина C, яка містить усі елементи множини A та всі елементи множини B. Відповідно, елементи множини C належать або множині A, або множині B, або є спільними елементами обох множин (якщо такі елементи існують). Об'єднання множин позначається так:

$$C=A\cup B \;\Leftrightarrow\; C=\left\{x \,\middle|\, x\in A \vee x \in B\right\}. \tag{13.2}$$

На рис. 13.1 наведено приклад об'єднання множин A і B для випадку, коли вони мають спільні елементи. Елементи множини C, що належать одночасно і множині A, і множині B, відповідають точкам фігури, яка утворюється перетином вихідних множин. На рис. 11.1 об'єднанням множин є вся заштрихована фігура. Ті елементи, які є спільними для A і B, відзначені подвійною штриховкою, вони включаються до множини C лише раз.



Слід зазначити, що для об'єднання множин правильними є твердження:

$\forall A:\; U \cup A = U$;
$\forall A:\; \varnothing \cup A = A$;
$\forall A:\; A \cup A = A$.

2. ***Перетином*** множин A і B називається множина C, яка містить усі спі-

Рис. 11.1

льні елементи множин A та B. Перетин множин позначають так:

$$C = A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad C = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \ i \ \ x \in B \right\}. \qquad (13.3)$$

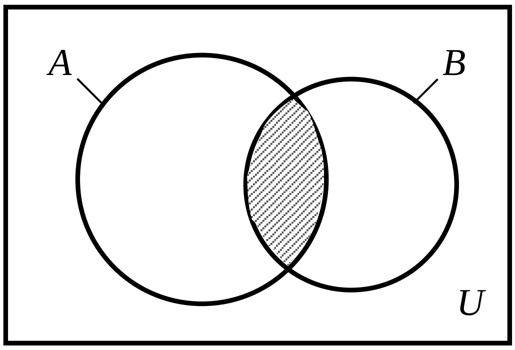


Рис. 13.1

На рис. 13.2 наведено приклад перетину множин A і B для випадку, коли вони мають спільні елементи. Об’єднання множин позначено штриховкою. Якщо множини A і B не мають спільних елементів (на діаграмі Венна – Ейлера відповідні цим множинам фігури зображуються окремо, без перетинання), то їх перетин є пустою множиною.

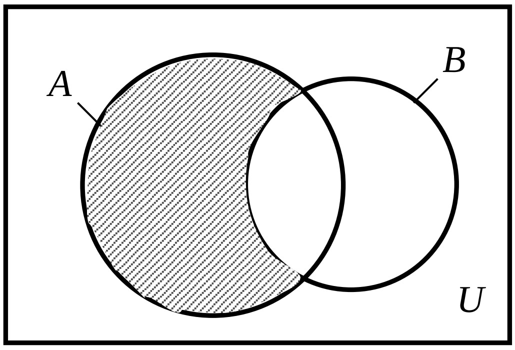
Слід зазначити, що для перетину множин правильними є твердження:

$$\forall A: \ \ U \cap A = A;$$
$$\forall A: \ \ \varnothing \cap A = \varnothing;$$
$$\forall A: \ \ A \cap A = A.$$

3. ***Різницею*** множин A і B називається множина C, яка містить усі елементи множини A, що не належать множині B (див., наступний рис.).

Цю різницю позначають так:

$$C = A \setminus B \Leftrightarrow C = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \ i \ x \notin B \right\}. \qquad (13.4)$$



У математиці переважно розглядаються ***числові множини***, тобто множини, елементами яких є числа. Прикладами відомих зі шкільного курсу математики числових множин є такі множини:

N – множина натуральних чисел, тобто $N = \left\{ 1; 2; 3; 4; ..., n, ... \right\}$;

Z – множина цілих чисел, тобто $Z = \left\{ 0; \ \pm 1; \ \pm 2; \ \pm 3; \ ...; \ \pm n; \ ... \right\}$;

Q – множина раціональних чисел (звичайних дробів);

I – множина ірраціональних чисел (нескінченних неперіодичних десяткових дробів);

R – множина дійних чисел, яка є об’єднанням множин раціональних та ірраціональних чисел. Якщо вважати множину раціональних чисел універсумом, то множина ірраціональних чисел є доповненням множини Q до множини дійсних чисел, тобто $I = R \setminus Q$, або $I = \overline{Q}$.

Між указаними множинами має місце співвідношення:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Для наочності множину дійсних чисел можна представляти ***числовою прямою*** або ***числовою віссю***, що встановлює взаємно однозначну відповідність між дійсним числом і точкою на цій осі. Числова вісь містить початок координат, який відповідає нулю, а числове значення довільної точки відповідає її відстані до початку координат. Управо від нуля відкладаються додатні числа, уліво – від'ємні.

Із числових множин у математичному аналізі достатньо часто використовується поняття «проміжок». ***Проміжок***, або ***проміжок числової прямої***, є множиною дійсних чисел, що має таку властивість: якщо два будь-які числа належать проміжку, то і число, що розташовано між ними, теж належить цьому проміжку. З використанням символів математичної логіки це означення можна записати таким чином. Множина X є проміжком, якщо

$$\forall x \,\forall y \,\forall z : \left(\left(x \in X\right) i \left(z \in X\right) i \left(x < y < z\right)\right) \Rightarrow y \in X .$$

Скінченний проміжок складається з множини чисел, які розташовані між двома числами a і b, де a – початок, b – кінець проміжку. Якщо кінці проміжку теж належать йому, то такий проміжок називається ***відрізком*** і позначається $[a;b]$. За означенням:

$$[a;b] \Leftrightarrow \left\{ x \in R \,\middle|\, a \le x \le b \right\}.$$

У випадку, коли $a = b$, відрізок складається з однієї точки.

Якщо числа a і b не належать проміжку, то такий проміжок називається ***інтервалом*** і позначається $(a;b)$. Відповідно

$$(a;b) \Leftrightarrow \left\{ x \in R \,\middle|\, a < x < b \right\}.$$

Проміжки $[a;b)$ та $(a\ ;b]$ називаються ***півінтервалами***, або ***піввідкритими інтервалами***. Їм відповідають співвідношення: $a \le x < b$ та $a < x \le b$.

Довжиною проміжку називається різниця між його кінцем і початком: $b - a$. Отже, на числовій осі довжина проміжку визначається як відстань між його кінцями.

Якщо множину дійсних чисел доповнити елементами $+\infty$ та $-\infty$ (так звані ***невласні числа***), то отримаємо ***розширену числову пряму***, яка дозволяє розглядати ***нескінченні проміжки***: $(-\infty;b]$, $(-\infty;b)$, $[a;+\infty)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;\ +\infty)$. Це означає відповідно: $x \le b$, $x < b$, $x \ge a$, $x > a$, $-\infty < x < +\infty$. Отже, множина всіх дійсних чисел $R = (-\infty;+\infty)$ є нескінченним проміжком.

Розглянемо ще одне важливе поняття, що є характеристикою елементів числових множин, це поняття абсолютної величини числа.

Модулем, або **абсолютною величиною числа** x, називається саме число x, якщо воно є невід'ємним, і $-x$, якщо x є від'ємним, тобто:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

За геометричною інтерпретацією модуль числа визначається як відстань на числовій осі від точки, що відповідає даному числу, до початку координат.

З означення модуля випливає:

$$|x| \geq 0; \ |x| \geq x \ \text{ та } \ |x| \geq -x. \tag{13.5}$$

Укажемо на важливі **властивості абсолютних величин числа**.

1^0. Нерівність

$$|x| < \alpha \tag{13.6}$$

еквівалентна подвійній нерівності:

$$-\alpha < x < \alpha. \tag{13.7}$$

Доведення. Дійсно, виходячи з (13.5), маємо такі нерівності: $x \leq |x| < \alpha$ та $-x \leq |x| < \alpha$. Звідси $x < \alpha$ та $-x < \alpha$, або $x > -\alpha$. Таким чином, отримали подвійну нерівність (13.7). Має місце і обернене твердження, тобто із нерівності (13.7) випливає нерівність (13.6).

2^0. Абсолютна величина суми не перевищує суму абсолютних величин доданків, тобто

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Доведення. Нехай x та y – будь-які дійсні числа.

Для них маємо

$$-|x| \leq x \leq |x|; \ \ -|y| \leq y \leq |y|. \tag{13.8}$$

Додамо почленно ці нерівності:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Звідси за першою властивістю отримуємо:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

3^0. Абсолютна величина різниці не менше за різницю абсолютних величин:

$$|x - y| \geq |x| - |y|. \tag{13.9}$$

Доведення. Дійсно, з тотожності $x = (x - y) + y$ за другою властивістю будемо мати нерівність:

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \quad \Rightarrow \quad |x - y| \geq |x| - |y|.$$

4^0. Абсолютна величина добутку дорівнює добутку абсолютних величин множників, тобто

$$|xy| = |x||y|. \qquad (13.10)$$

Указана властивість випливає із таких понять, як добуток та абсолютна величина.

5^0. Абсолютна величина частки дорівнює частці абсолютних величин:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{якщо } y \neq 0. \qquad (13.11)$$

Остання властивість також є очевидною.

Множина A називається ***скінченною (нескінченною)***, якщо існує (не існує) невід'ємне ціле число n $\left(n \in N \cup \{0\}\right)$, якому дорівнює число елементів.

Розглянемо дві непорожні множини A, B. Якщо кожному елементу x множини A можна поставити у відповідність тільки один елемент y множини B так, що кожний елемент $y \in B$ є відповідним тільки одному елементу $x \in A$, то говорять, що між множинами A і B установлено ***взаємно однозначну відповідність.***

Будь-яка нескінченна множина, між елементами якої і множиною натуральних чисел N існує (не існує) ***взаємно однозначна відповідність,*** тобто елементи якої можна (не можна) занумерувати за допомогою натуральних чисел, називається ***зліченною (незліченною)***.

Нехай a – довільне дійсне число, ε – будь-яке додатне число із множини дійсних чисел. Тоді ***ε-околом*** точки a називається інтервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ і позначається $A(a,\varepsilon)$, де a – ***центр околу,*** ε – ***радіус околу*** (рис. 13.4):

$$A(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon) \quad \text{або} \quad |x-a| < \varepsilon, \quad A = \{\, x \mid |x-a| < \varepsilon, a \in R\}.$$

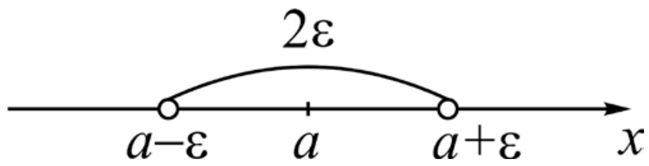


Рис. 13.4

Числові множини за структурою поділяють на дискретні та неперервні. Точка a деякої множини A називається ***ізольованою точкою*** цієї множини, якщо у неї є окіл, який не містить інших точок множини A.

Множина A, елементами якої є лише ізольовані точки, називається ***дискретною*** множиною.

Непорожня множина, яка не містить ізольованих точок, називається ***неперервною*** множиною.

13.2. Функції: основні означення, способи задання

Дослідження будь-якого процесу або явища зводять, здебільшого, до вивчення тих чи інших числових характеристик цього процесу і у подальшому до обчислення кількісних співвідношень поміж ними. Для створення загальних теорій, що застосовуються до вивчення числових характеристик різної природи, у математиці абстрагуються від конкретного змісту цієї числової характеристики і всі величини поділяють на змінні і сталі.

Змінною величиною, або просто ***змінною***, називається величина, яка відповідно до умов може набувати різних числових значень. Та ж величина, яка набуває лише одного значення при дослідженні певного процесу, називається ***сталою.*** Здебільшого величини позначаються літерами латинського алфавіту (з індексами або без них). Як правило, значення сталих величин вважаються відомими у даному дослідженні, і вони позначаються початковими літерами латинського алфавіту (a,b,c тощо), а змінні – невідомими, тому позначаються кінцевими літерами ($x, y, z,..., \ w$).

При дослідженні різних процесів залежно від задачі, що розглядається, одна і та ж сама величина може відігравати роль як змінної, так і сталої.

Так, питомий прибуток підприємства від реалізації одиниці виробленої продукції можна вважати сталою величиною при дослідженні впливу обсягу виробництва на загальний прибуток від реалізації. Та ж сама величина може розглядатися як змінна при дослідженні впливу продуктивності праці або технологічних показників на загальний прибуток.

Абсолютними, або **універсальними**, сталими називаються такі величини, які не змінюються за будь-яких умов. Наприклад, відношення довжини кола до його діаметра є абсолютною константою і становить $\pi = 3{,}1415...$

Параметром у даному дослідженні називають величину, яка характеризує однотипні об'єкти (процеси, стани) у тому сенсі, що кожне її значення характеризує деякий конкретний об'єкт. Наприклад, рівняння прямої $y = k \cdot x$ містить поточні координати точок прямої (змінні $x, \ \ y$) і параметр k, залежно від значення якого рівняння визначає певну пряму серед безліч інших прямих, які проходять через початок координат.

Областю змінювання змінної величини називається множина всіх числових значень, які вона може набувати. Змінна вважається заданою, якщо вказано область її змінювання.

Досвід установлення кількісних співвідношень при дослідженні реальних процесів та явищ показує, що числові характеристики того чи іншого процесу здебільшого змінюються не незалежно одна від одної, а так, що зміна значень одних із них є причиною зміни значень інших. Вивчення кількісних співвідношень між величинами, що змінюються у взаємозв'язку, абстрагуючись від їх конкретного змісту, якраз і є предметом математичного аналізу. Функція та функціональна залежність є основними поняттями математичного аналізу.

Якщо кожному елементу x із множини $X \left(x \in X \right)$ за певним правилом або законом можна поставити у відповідність один і лише один елемент y із множини Y $(y \in Y)$, то закон за яким здійснюється відображення елементів множини X на множину Y, називається ***функцією***. Стисло це записують так:

$$f: X \to Y \quad \text{або} \quad y = f(x).$$

У цьому випадку говорять, що між змінними x та y існує ***функціональна залежність***. Змінна x називається ***аргументом,*** або ***незалежною змінною***, а y – ***залежною змінною,*** тобто ***функцією*** від змінної x.

Запис $y = f(x)$ означає, що залежна змінна y є ***функцією від однієї змінної*** x.

Якщо множину X розглядати як переріз множин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то відображення елементів множини X на множину Y називають ***функцією кількох змінних*** і записують $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де $x_i \in X_i$, $i \in \overline{1,n}$.

Множину значень аргументу називають ***областю існування функції***, або ***областю визначення функції***, і позначають через $D(f)$. Відповідно, множину змінювання функції $y = f(x)$ називають ***областю значень функції*** і позначають через $E(f)$.

Слід відзначити, що при означенні поняття функції можна виходити із більш загальної точки зору, коли кожному значенню незалежної змінної x відповідає не одне, а декілька значень y. Таку функцію називають ***багатозначною***.

Значення функції $y = f(x)$ при окремому значенні аргументу, тобто при $x = x_0$, позначають символами: $y_0 = f(x_0)$, $f(x)\big|_{x=x_0}$, $y = y(x_0)$, або $y\big|_{x=x_0}$. Відзначимо, що значення $f(x)$, які відповідають різним значенням x, не обов'язково повинні бути різними, функція може набувати єдиного значення в усій області визначення. Таку функцію називають ***сталою:*** $y = c$, де $c - const$.

Закон відповідності між значеннями аргументу і функції можна подавати різними способами.

Існує три основні ***способи задання функцій***.

1^0. **Аналітичний спосіб**. Функція задана ***аналітично,*** якщо функціональна залежність виражається у вигляді аналітичного виразу (формули). При цьому вказується, для яких значень аргументу ця функція розглядається. Якщо множина X не задається, то маються на увазі всі значення аргументу x, за яких функція скінченна та дійсна. У цьому випадку область існування функції називається ***областю припустимих значень***.

Спроби аналітичного способу задання функції можна знайти у книзі «Початки», де Евклід при побудові конічних перерізів описує «симптоми», тобто словесно формулює рівняння кривих, визначаючи їх класи відповідності. Однак перші застосування алгебраїчних рівнянь до визначення функції ми знаходимо лише у XVII сторіччі у працях Ферма і Декарта.

Наведемо декілька функцій, що задані аналітично, вказавши область припустимих значень цих функцій:

1. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

3. $y=\arcsin x$; $D(f)=[-1;1]$.

Аналітичний спосіб задання передбачає, що існує аналітичний вираз, який пов'язує значення функції й аргументу, тобто маємо рівняння:

$$F(x,\ y)=0. \tag{13.12}$$

Якщо рівняння (13.12) не розв'язане відносно функції, то ***функція задана неявно***. Якщо рівняння (13.12) розв'язати відносно y, то отримаємо ***функцію у явному вигляді***: $y=f(x)$.

2⁰. **Графічний спосіб**. Множину всіх точок координатної площини (x,y), координати яких задовольняють рівність $y=f(x)$, називають ***графіком функції***. Якщо $f: X\to Y$, то множина: $\Gamma=\{(x,\ f(x))\,|\,x\in X\}$ є графіком функції. Функція $y=f(x)$ називається ***заданою графічно***, якщо побудовано її графік. Така ситуація може виникати при дослідженнях, пов'язаних з використанням самописних приладів, які фіксують зміну певних характеристик у часі. Тоді відповідність між незалежною змінною x та функцією y визначається за допомогою деякої лінії. Такий спосіб задання функції дає можливість визначати значення функції тільки наближено, що є недоліком такого задання функції, водночас, досягається наочність її властивостей.

3⁰. **Табличний спосіб**. Функція називається ***заданою таблично***, якщо побудована таблиця, що містить значення її аргументу і відповідні їм значення функції. Такий підхід до задання функції практикується у багатьох галузях знань, а саме: в економіці, соціології, техніці тощо, де залежність між величинами встановлюється експериментально або шляхом спостережень. Наприклад, обсяг випуску продукції y_i (млн грн) для певного підприємства залежно від терміну роботи підприємства x_i (роки) можна надати у вигляді таблиці:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,5	1,0	2,0	3,4	6,1

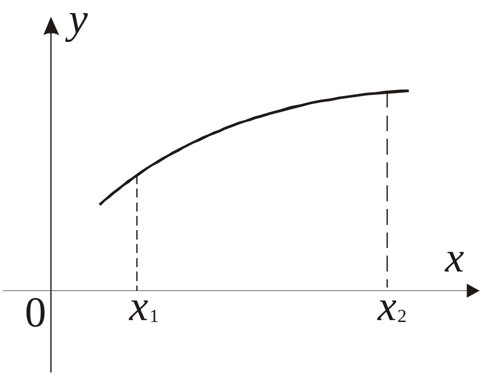
Табличний спосіб задання функції був історично першим. Так, ще у IV сторіччі до н. е., вивчаючи циклічність руху планет, вавілонські астрономи побудували таблиці, завдяки яким можна було визначати дати місячних та сонячних затемнень.

Серед розглянутих способів задання функції основним є аналітичний спосіб. Від аналітичного способу задання функції легко перейти до табличного і графічного, але не навпаки. Взагалі, маючи таблицю чи графік функції, складно знайти відповідну формулу (аналітичний вираз), хіба що наближено.

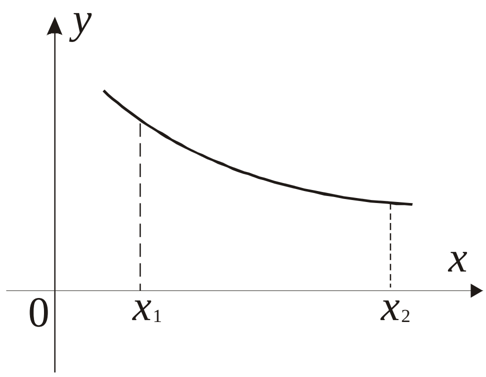
Розроблені у математичному аналізі методи дослідження функцій найкраще пристосовані до аналітичного способу задання функції, інші ж використовуються як допоміжні: графічний – для наочності, табличний – для зручності надання інформації.

13.3. Класифікація функцій за їх властивостями

13.3.1. Монотонність функції. Функція $f\left(x\right)$ називається ***зростаючою***, якщо на деякій множині X, яка є областю існування цієї функції, з нерівності $x_1 < x_2$, де $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, випливає нерівність $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$. Функція називається ***спадною***, якщо на деякій множині X, яка є областю існування цієї функції, з нерівності $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$, $x_2 \in X$) випливає нерівність $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$. Зростаючі та спадні функції називаються ***монотонними*** (рис. 11.5).



а)



б)

Рис. 13.5

Якщо з нерівності $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X$, $x_2 \in X$) випливає $f(x_1) \le f(x_2)$, то така функція називається ***неспадною***, а якщо випливає нерівність $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функція називається ***незростаючою***.

Функція називається ***кусково-монотонною*** на множині X, якщо цю множину можна розбити на такі множини, на яких ця функція буде монотонною. Інтервали, на яких функція зростає (або спадає) називаються ***інтервалами монотонності*** функції.

Наприклад, функція $y = 2x^2 - 6x + 4$ є кусково-монотонна, тому що на інтервалі $\left(-\infty; 1{,}5\right)$ вона спадає, а на $\left(1{,}5; +\infty\right)$ – зростає (рис. 13.6).

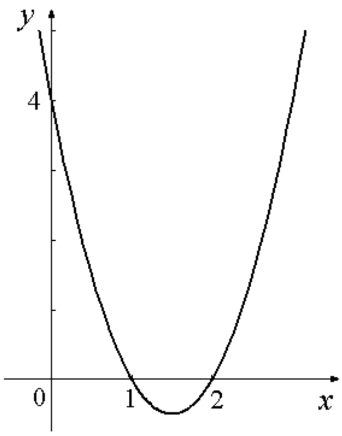


Рис. 13.6

Інтервали монотонності функції легко визначити, якщо в рівнянні параболи виділити повний квадрат:

$$y = 2x^2 - 6x + 4 = 2(x^2 + 3x + 2) =$$
$$= 2(x^2 + 2 \cdot 1,5x + 2,25) - 4,5 + 4 =$$
$$= 2(x + 1,5)^2 - 0,5.$$

13.3.2. Обмеженість функції. Функція $y = f(x)$ називається ***обмеженою*** на множині X, якщо існують такі числа m і M, що $m \le f(x) \le M$ для всіх $x \in X$; якщо таких чисел не існує, то функція називається ***необмеженою***. Нехай число C − найбільше з чисел m і M, тоді для функції має виконуватися умова $\left|f(x)\right| \le C$ (рис. 13.7).

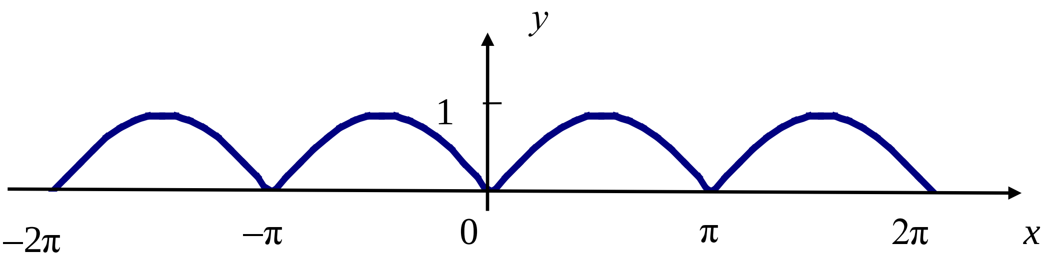


Рис. 13.7

13.3.3. Парність та непарність функції. Множина X називається ***симетричною відносно початку координат***, якщо з кожним значенням $x \in X$ вона містить і значення $-x$. Функція $f(x)$, область визначення якої є симетричною, називається ***парною***, якщо виконується рівність:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X. \tag{13.13}$$

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат (див. рис. 13.7).

Якщо область визначення функції є симетричною і виконується рівність:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X, \tag{13.14}$$

то функція називається ***непарною***. Її графік симетричний відносно початку координат (рис. 13.8).

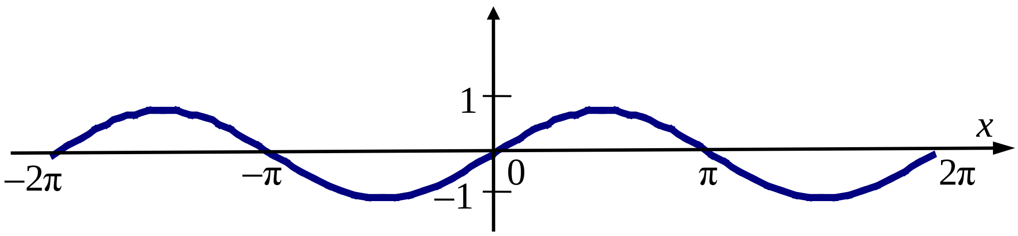


Рис. 13.8

Наприклад, розглянемо функцію $y = x^2 + 1$. Виконаємо перетворення:

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x).$$

Оскільки $\forall x \in X \;\; f(-x) = f(x)$, то ця функція є парною.

Функція $y = x^3$ є непарною, оскільки $f(-x) = -f(x)$.

Функція $y = 2x^2 - 6x + 4$ не є ані парною, ані непарною (див. рис. 13.6), це функція ***загального вигляду***.

13.3.4. Періодичність функції. Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною*** на множині X, якщо існує таке число $T > 0$, що для будь-якої точки x, яка належить області визначення, точки $x + T$ і $x - T$ також належать цій області і виконується умова:

$$f(x \pm T) = f(x) \qquad \forall x \in X. \tag{13.15}$$

У цьому випадку число T називається ***періодом*** функції $f(x)$.

Із співвідношення (13.15) випливає, що

$$f(x + kT) = f(x), \text{ де } k \in Z,$$

тобто добуток kT $(k \in Z)$ теж можна вважати періодом функції. Але коли говорять про період функції, то мають на увазі її найменший додатний період.

Наприклад, для функції $y = \sin x$ співвідношення (13.15) виконується і для величини $kT = 4\pi$, але періодом функції є $T = 2\pi$ (див. рис. 13.8). Для функції $y = |\sin x|$ періодом є $T = \pi$ (див. рис. 13.7).

Зауважимо, що при побудові графіка періодичної функції достатньо побудувати його фрагмент на будь-якому проміжку $[x_0; x_0 + T]$, а далі повторюється цей фрагмент на всій числовій осі.

13.3.5. Обернена функція. Розглянемо поняття оберненої функції. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині X: $D(f) = X$, а областю її значень є множина Y: $E(f) = Y$. Якщо кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає лише одне значення змінної $x \in X$, то на множині Y можливо визначити функцію

$$x = \varphi(y), \tag{13.16}$$

причому таку, що $f(\varphi(y)) = y$ для всіх $y \in Y$. Функцію $\varphi(y)$ називають ***оберненою*** до функції $f(x)$. Отже, якщо відображення $f: X \to Y$ визначає вихідну функцію, то відображення $\varphi: Y \to X$ визначає обернену функцію.

На тих же підставах можна вважати, що функція $y = f(x)$ є оберненою до $x = \varphi(y)$ за умов, що $\varphi\big(f(x)\big) = x$. Отже, функції $y = f(x)$ та $x = \varphi(y)$ є ***взаємно оберненими***. Взаємно обернені функції можна отримати, якщо розв'язати рівняння $F(x, y) = 0$, що визначає функцію у неявному вигляді, як відносно y, так і відносно x.

Теорема 13.1. Якщо функція $y = f(x)$ монотонна на множині $D(f)$, то на відповідній множині $E(f)$ існує також монотонна функція $x = \varphi(y)$, яка є оберненою до вихідної.

Оскільки більш звичним вважається позначення аргументу через x, а функції – через y, то обернену функцію записують як $y = \varphi(x)$. Тоді графіки прямої та оберненої функцій, що побудовані в одній системі координат xOy, будуть симетричні відносно бісектриси першого та третього координатних кутів, тобто відносно прямої $y = x$ (рис. 13.9).

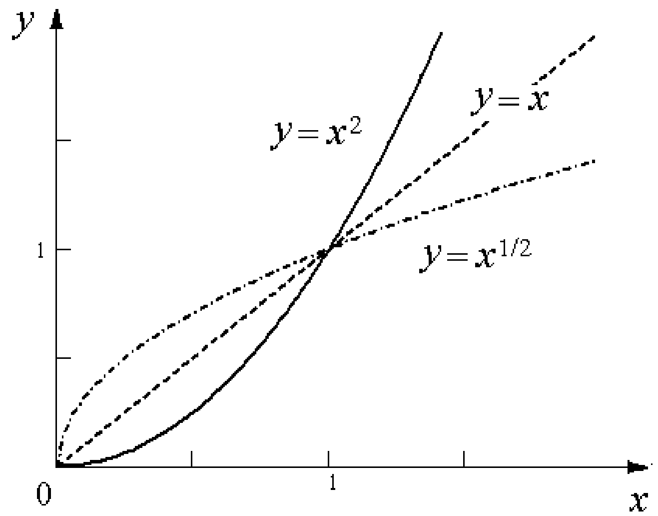


Рис. 13.9

13.4. Класифікація функцій за діями над аргументом

Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині X, називається ***елементарною***, якщо вона задається однією формулою так, що її значення при будь-якому $x \in X$ може бути знайдене за допомогою скінченого числа таких операцій як додавання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування, обчислення тригонометричних та обернених тригонометричних функцій. Залежно від операцій, які виконуються над аргументом, елементарні функції поділяються на алгебраїчні та неалгебраїчні. До ***алгебраїчних*** належать функції, над аргументом яких здійснюється скінчене число алгебраїчних дій: додавання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня. Усі інші елементарні функції, що не належать до алгебраїчних, називаються ***трансцендентними***.

Елементарні функції широко застосовуються для опису економічних процесів, тому згадаємо ***основні елементарні функції***, які вивчались ще у шкільному курсі математики.

1. **Степенева функція** $y = x^{\alpha}$, де $\alpha \in R$, а області визначення та значень залежать від α.

2. **Показникова функція**

$y = a^{x}\left(a > 0; a \neq 1\right)$, функція визначена на множині $\left(-\infty;+\infty\right)$, а областю значень є інтервал $\left(0;+\infty\right)$.

3. **Логарифмічна функція**

$y = \log_a x\left(a > 0, a \neq 1\right)$, область визначення $\left(0;+\infty\right)$, а область значень $(-\infty;+\infty)$. Функція є оберненою до $y = a^{x}$.

4. **Тригонометричні функції**

$$y = \sin x;\ \ y = \cos x;\ \ x \in R;\ \ |y| \le 1;$$

$$y = \mathrm{tg}\, x;\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\left(k \in Z\right);\ \ y \in R;$$

$$y = \mathrm{ctg}\, x;\ \ x \neq \pi k\ \ (k \in Z);\ \ y \in R.$$

5. **Обернені тригонометричні функції**

$$y = \arcsin x;\ \ x \in \left[-1;1\right];\ \ y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x;\ \ x \in \left[-1;1\right];\ \ y \in \left[0;\pi\right];$$

$$y = \mathrm{arctg}\, x;\ \ x \in R;\ \ y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \mathrm{arcctg}\, x;\ \ x \in R;\ \ y \in \left(0;\pi\right).$$

Якщо аргумент функції $y = f(u)$ сам є функцією від іншої змінної, тобто $u = \varphi(x)$, то функцію $y = f(\varphi(x))$ називають ***складеною функцією,*** або ***функцією від функції***, де u та x – змінні, які відповідно є ***проміжним*** та ***основним*** аргументами; $u = \varphi\left(x\right)$ та $y = f\left(u\right)$ – ***внутрішня*** та ***зовнішня*** функції. . Складені функції відносять до елементарних.

Так, функція $y=\sqrt[3]{\sin x^2}$ є складеною, вона утворюється за допомогою двох вкладень. Зовнішньою є функція $y=\sqrt[3]{u}$, а внутрішніми – функції $u=\sin v$ та $v=x^2$.

Функцію також можна задати і у вигляді кількох формул; при цьому указують, на якій саме множині значень аргументу розглядається кожна з формул. Функції, що задані кількома формулами, ***не є елементарними.***

Наприклад, функція:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{при } x<0,\\ \sin x, & \text{при } 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при } x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Областю визначення цієї неелементарної функції є нескінченний інтервал: $D(f)=(-\infty,+\infty)$, графік функції має вигляд (рис. 13.10).

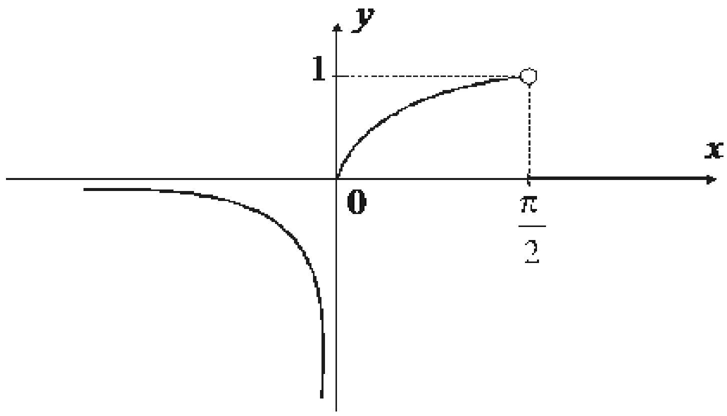


Рис. 13.10

Ще одним прикладом неелементарної функції є ***факторіал***:

$$n!=\left[\begin{array}{l} n!=1, \quad n=0;\\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n, \;\; n\in N.\end{array}\right.$$

До класу неелементарних функцій відносять також функції, у яких кількість операцій над аргументом є нескінченною.

13.5. Застосування елементарних функцій в економіці

Розглянемо лінійну функцію:

$$y=kx+b.$$

Якщо x – обсяг продукції, а k – витрати на одиницю продукції (питомі витрати),

b – постійні витрати, то функція $y = f(x)$ описує загальні витрати виробництва.

Нехай маємо загальні витрати $y = kx + b,$ тоді собівартість одиниці продукції записуємо у вигляді дробово-лінійної функції:

$$y = \frac{kx + b}{x}.$$

Останню функцію можна визначити, як питомі витрати, тобто середні витрати виробництва на одиницю продукції.

Наведемо функції, що найчастіше використовуються в економіці. Серед них відзначимо такі:

1. ***Виробнича функція*** – функція, що описує залежність певного результату виробничої діяльності від факторів, які його зумовлюють.

2. ***Функція корисності*** описує залежність корисності, тобто результату, або ефекту деякої дії, від рівня (інтенсивності) цієї дії.

3. ***Функція випуску*** (один із видів виробничої функції) описує залежність обсягу виробництва від наявності або споживання ресурсів.

4. ***Функція витрат*** (один із видів виробничої функції) описує залежність витрат виробництва від обсягу продукції.

5. ***Функції попиту, споживання*** чи ***пропозиції*** описують залежність обсягу попиту, споживання або пропозиції щодо окремих товарів та послуг від різних факторів (наприклад, ціни, прибутку тощо).

Як ще один приклад розглянемо ***формулу простих відсотків***.

Нехай у банку, що нараховує на внесок $p\,\%$ щомісячно, відкрито депозит, і початковий внесок дорівнює A_0. Визначимо, яку суму буде накопичено за цих умов протягом n місяців, де $n \le 12$.

Якщо початковий внесок дорівнював A_0, то отримуємо наприкінці

першого місяця: $A_1 = A_0 + \dfrac{p}{100} A_0 = A_0\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$;

другого місяця: $A_2 = A_1 + \dfrac{p}{100} A_0 = A_0\left(1 + \dfrac{2 \cdot p}{100}\right)$.

Отже, загальна сума, що накопичена на депозиті за n місяців ($n \le 12$) становитиме:

$$A_n = A_0\left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right).$$

При збереженні коштів на депозиті протягом кількох років за умов, що вкладник не знімає нараховані відсотки, відбувається капіталізація відсотків. Отже, поряд з первинним внеском базою для нарахування відсотків стають відсотки попередніх років, тобто здійснюється схема «відсотки на відсотки». Розглянемо ***формулу складних відсотків.***

Нехай сума A_0 внесена у банк під p % річних і зберігається протягом n років. Визначимо суму, яка буде накопичена на рахунку через n років.

На кінець першого року сума складає

$$A_1 = A_0 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

на кінець другого року завдяки капіталізації відсотків попереднього року загальна сума на рахунку становитиме:

$$A_2 = A_1 + \frac{p}{100} A_1 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Звідси отримуємо формулу складних відсотків:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \qquad (13.17)$$

Формулу (13.17) можна довести методом математичної індукції.

У банк зроблено внесок під 10 % річних складних відсотків. Через скільки років цей внесок збільшиться в два рази?

Застосовуючи формулу складних відсотків, маємо:

$$A_n = 2A_0 = A_0 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^n = A_0 \cdot (1{,}1)^n \Rightarrow (1{,}1)^n = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \lg 1{,}1 = \lg 2 \Rightarrow n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}1} = 7{,}2725 \sim 7.$$

Отже, вклад збільшиться в два рази через 7 років.

Тема 14. Границя функції натурального аргументу

14.1. Числові послідовності: основні означення та арифметичні операції

Числовою послідовністю називають функцію $y = f(x)$, де $x \in N$. У цьому випадку функцію позначають $x_n = f(n)$. Отже, послідовність є функцією, що визначена на множині натуральних чисел, x_n називають ***загальним членом*** числової послідовності. Числова послідовність позначається символом $\{x_n\}$.

Числова послідовність вважається заданою, якщо для кожного номера n ($n \in N$) можна однозначно визначити відповідний член послідовності. З означення послідовності як функції натурального аргументу випливає, що всі способи задання функції можна застосувати і для послідовності, але найчастіше задання послідовності здійснюється аналітичним способом, тобто у вигляді формули загального члена $x_n = f(n)$. Іноді застосовують ***рекурентну форму*** задання послідовності, коли кожний наступний її член, починаючи з деякого номера n, подається через попередній або через декілька попередніх її членів.

Так, арифметичну прогресію, яка є прикладом числової послідовності, можна задати за допомогою формули загального члена:

$$x_n = a_1 + d(n-1).$$

Отже,

$$\{ x_n \}:\ a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ \ldots,\ a_1 + d(n-1),\ \ldots,$$

де a_1 − перший член прогресії;

d − різниця.

Якщо цю ж послідовність задати за допомогою рекурентного співвідношення, то отримуємо: $x_{n+1} = x_n + d$, де $x_1 = a_1$.

Арифметичні операції над числовими послідовностями зводяться до відповідних дій над їхніми членами з однаковими номерами:

$$\{ z_n \} = \{ x_n \} \pm \{ y_n \} = \{ x_n \pm y_n \} \quad ;$$

$$\{ z_n \} = \{ x_n \} \cdot \{ y_n \} = \{ x_n \cdot y_n \};$$

$$\{ z_n \} = c \cdot \{ x_n \} = \{ c \cdot x_n \} \qquad (c - const);$$

$$\{ z_n \} = \frac{\{ x_n \}}{\{ y_n \}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \quad (y_n \neq 0 \quad \forall n \in N).$$

Серед числових послідовностей розрізняють обмежені і необмежені, монотонні і немонотонні.

Обмеженою послідовністю $\{x_n\}$ називається така послідовність, для якої існує таке число $M > 0$, що всі члени послідовності за модулем не перевищують M. Отже,

$$\exists M > 0\ \forall x_n (n \in N): |\, x_n | \leq M\,. \tag{14.1}$$

Необмеженою послідовністю є така послідовність, що для будь-якого числа $M > 0$ можна знайти відповідне йому значення x_n, яке за модулем перевищує число M, тобто

$$\forall M > 0\ \exists x_n (n \in N): |\, x_n | > M\,. \tag{14.2}$$

Так, послідовність $\{x_n\} = \dfrac{n}{n+1}$ − обмежена, оскільки умова (14.1) задовольняється, наприклад, для $M = 1$, а послідовність $\{x_n\} = 2^n$ − необмежена.

Монотонно зростаючою* (*спадною*) *послідовністю називається така послідовність $\{x_n\}$, для всіх членів якої виконується нерівність:

$$x_{n+1} > x_n \ \forall n \in N \ \ (x_{n+1} < x_n \ \forall n \in N)\ . \tag{14.3}$$

Наприклад, відома зі шкільного курсу послідовність $\{x_n\}$, члени якої утворюють геометричну прогресію $x_n = q^n$, є послідовністю зростаючою, якщо її знаменник $q>1$, і спадною при $0 < q < 1$.

14.2. Границя числової послідовності

Перш ніж ввести поняття границі, наведемо приклади числових послідовностей і проаналізуємо, як змінюється величина їх членів зі збільшенням номера:

1) $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots;$

2) $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$: $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots;$

3) $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots;$

4) $\{x_n\} = \left\{2^n\right\}$: $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$.

При зростанні n змінна x_n для першої з наведених послідовностей наближається до нуля, для другої − теж за абсолютною величиною наближається до нуля, але значення x_n коливаються навколо нуля; для третьої − змінна, поступово зростаючи ($x_n < 1$), наближається до 1. Спільним для цих послідовностей є те, що при зростанні номера n різниця між x_n і певною сталою величиною a зменшується і залишається малою. Але поведінка послідовності $\{x_n\}$, де $x_n = 2^n$ якісно відмінна від поведінки трьох попередніх послідовностей, а саме зі збільшенням n вона необмежено зростає.

Число a називають ***границею послідовності*** $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε, яке б мале воно не було, знайдеться такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх значень змінної x_n, у яких $n > N$, виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Стисло означення границі можна подати так:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon\ . \tag{14.4}$$

Якщо a − границя послідовності $\{x_n\}$, то це позначають так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,, \tag{14.5}$$

де $n \to \infty$ читається як «n необмежено збільшується», або «n прямує до нескінченності»;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ читається як «границя числової послідовності x_n при $n \to \infty$».

Послідовність, яка має скінченну границю a (14.5), називається ***збіжною***, і кажуть, що вона ***збігається до числа*** a. У противному разі послідовність називається ***розбіжною***. У противному разі послідовності називаються ***розбіжними***.

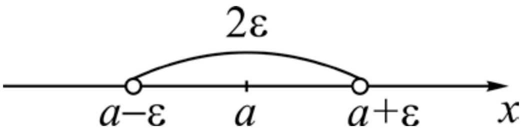


Рис. 14.1

У ***геометричній інтерпретації*** умова $|x_n - a| < \varepsilon$ означає, що при змінюванні n усі члени числової послідовності (окрім, можливо, скінченного числа точок) потрапляють у ε-окіл точки a, тобто $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ (рис. 14.1).

Звідси маємо ***геометричний зміст границі*** числової послідовності: якщо число a є границею послідовності $\{x_n\}$, то який би ε-окіл точки a не взяти, всі члени послідовності $\{x_n\}$, починаючи з $n > N$, повинні потрапити до цього околу. Отже, поза цим околом залишається скінченна кількість членів x_n.

Розглянемо числову послідовність:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$$

Згідно з означенням доведемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне, знайдемо таке $N(\varepsilon)$, що при $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Звідси

$$\left|-\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Тому достатньо за $N(\varepsilon)$ узяти $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$, де запис $\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$ означає, що розглядається ціла частина того числа, що стоїть у квадратних дужках.

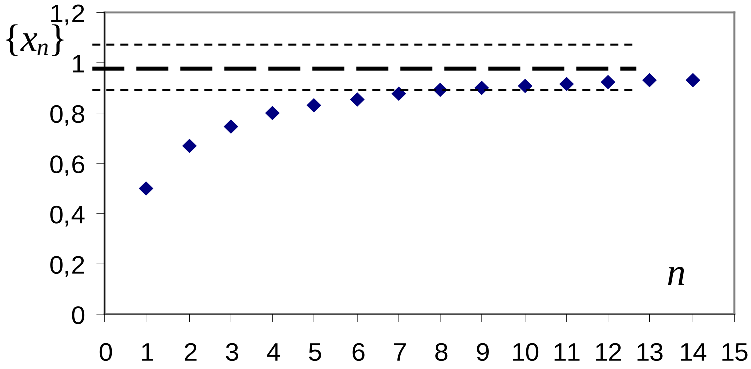


Рис. 14.2

На рис. 14.2 наведено графік числової функції $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}$. Видно, що із збільшенням n значення x_n зростає, наближаючись до 1, однак не перевищуючи її. На графіку визначено ε-окіл для $\varepsilon = 0{,}1$, $N(0{,}1) = 10$.

Аналогічно можна довести співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{та} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.$$

14.3. Нескінченно малі послідовності: означення, властивості

Числова послідовність $\{x_n\}$ називається ***нескінченно малою***, якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \tag{14.6}$$

тобто для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке $N(\varepsilon)$, що $|x_n| < \varepsilon$, коли $n > N(\varepsilon)$. Отже, стисло:

$$\forall\varepsilon > 0 : |x_n| < \varepsilon \ \ \forall n > N(\varepsilon). \tag{14.7}$$

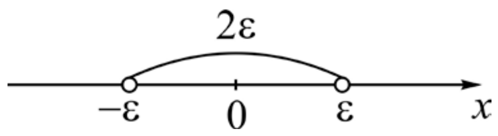


Рис. 14.3

У ***геометричній інтерпретації*** умова $|x_n| < \varepsilon$ означає, що при необмеженому зростанні n $(n \to \infty)$ усі члени x_n (крім, можливо, скінченного числа) потрапляють у інтервал $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$, який є ε-околом нуля (рис. 14.3).

Наприклад, розглянемо геометричну прогресію з першим членом $x_1 = 0{,}1$ і знаменником $q = 0{,}1$. Загальний член такої послідовності має вигляд:

$$x_n = 10^{-n}.$$

Ця послідовність є нескінченно малою. Дійсно, з умови $10^{-n} < \varepsilon$ отримуємо $n > [-\lg\varepsilon] = N(\varepsilon)$, тобто нескінченне число значень змінної потрапляє до інтервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$, яким би малим він не був.

Щоб відрізняти нескінченно малі послідовності, їх члени позначають буквами грецького алфавіту: $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ тощо.

Арифметичні властивості нескінченно малих послідовностей. Із означення нескінченно малих послідовностей випливають такі ***арифметичні властивості***:

1) сума (різниця) двох нескінченно малих послідовностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ теж є нескінченно малою:

$$\alpha_n \pm \beta_n = \gamma_n; \tag{14.8}$$

2) сума обмеженої послідовності $\{x_n\}$ і нескінченно малої є обмеженою послідовністю: $\{x_n + \alpha_n\}$;

3) добуток двох нескінченно малих $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ теж є нескінченно малою:

$$\alpha_n\beta_n = \gamma_n; \tag{14.9}$$

4) добуток обмеженої послідовності $\{x_n\}$ і нескінченно малої $\{\alpha_n\}$ є нескінченно малою:

$$x_n \cdot \alpha_n = \beta_n \text{ (зокрема, якщо } x_n = c - const\text{, то } c \cdot \alpha_n = \beta_n\text{).}$$

Доведення.

1. Покажемо, що $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\}$ є нескінченно малою.

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне. Оскільки $\alpha_n \to 0$ і $\beta_n \to 0$, то існують такі N_1 і N_2, що $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N_1$ і $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N_2$.

Для суми $\alpha_n + \beta_n$ маємо:

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ \ \forall n > \max\{N_1, N_2\}.$$

Для різниці $\{\alpha_n\} - \{\beta_n\}$ окремого доведення не знадобиться, оскільки її можна подати як суму нескінченно малих $\{\alpha_n\}$, $\{-\beta_n\}$.

2. Виберемо таке $M > 0$, що $|x_n| \le M$ для всіх $n \in N$, і таке $\varepsilon > 0$, що всі члени послідовності $\{\alpha_n\}$, починаючи з першого включно, за модулем не перевищують ε, тоді для суми $\alpha_n + x_n$ маємо:

$$|\alpha_n + x_n| \le |\alpha_n| + |x_n| \le \varepsilon + M = M_1.$$

Отже, усі члени послідовності, де $x_n + \alpha_n = y_n$, за модулем не перевищують числа M_1: $|y_n| \le M_1$, а значить $\{y_n\}$ – обмежена числова послідовність.

3. Якщо $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ є нескінченно малими послідовностями, то для довільних $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$, якими б малими вони не були, виконуються нерівності:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 : |\alpha_n| < \varepsilon_1 \ \ \forall n > N_1 \ \text{ і } \ \forall \varepsilon_2 > 0 : |\beta_n| < \varepsilon_2 \ \ \forall n > N_2.$$

Виберемо $\forall \varepsilon > 0$: $|\alpha_n| < \sqrt{\varepsilon}$, $|\beta_n| < \sqrt{\varepsilon}$. Для добутку маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 : |\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon},$$

тобто $\forall \varepsilon > 0 : |\alpha_n \cdot \beta_n| < \varepsilon \ \ \forall n > \max\{N_1, N_2\}$.

4. За означеннями обмеженої послідовності та нескінченно малої:

$$|x_n| \le M \ \text{ і } \ \forall \varepsilon_1 > 0 : |\alpha_n| < \varepsilon_1 \ \ \forall n > N.$$

Покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ має місце нерівність: $|x_n \alpha_n| < \varepsilon$. За властивостями нерівностей отримуємо:

$$|x_n \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \varepsilon_1.$$

Оскільки ε довільне, виберемо його рівним ε/M; тоді приходимо до нерівності $|x_n| \cdot |\alpha_n| < \varepsilon$. Таким чином, $|x_n \alpha_n| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$, а це й означає, що змінна $x_n \alpha_n = \beta_n$ – нескінченно мала.

Зокрема, якщо $x_n = c = const$, то $c\alpha_n = \beta_n$.

Слід зазначити, що властивості алгебраїчної суми і добутку двох нескінченно малих поширюються на будь-яке ***скінченне*** число доданків і співмножників.

Теорема 14.1 (***зв'язок між нескінченно малою та границею***). Число a є скінченою границею числової послідовності $\{x_n\}$ тоді і лише тоді, коли загальний член x_n цієї послідовності є сумою числа a і деякої нескінченно малої α_n.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad x_n = a + \alpha_n. \tag{14.10}$$

Доведення.

Необхідність. Якщо a – границя числової послідовності, то за означенням границі (14.4) різниця між x_n і a є нескінченно малою: $x_n - a = \alpha_n$, отже, $x_n = a + \alpha_n$.

Достатність. Нехай виконується рівність $x_n = a + \alpha_n$. Тоді $x_n - a = \alpha_n$, а за означенням нескінченно малої $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon, \forall\varepsilon > 0\ \forall n > N$, що означає:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n. \blacksquare$$

14.4. Нескінченно великі послідовності: означення, властивості, зв'язок з нескінченно малими

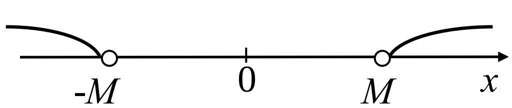
Нескінченно великою числовою послідовністю $\{x_n\}$, або просто ***нескінченно великою,*** називається така послідовність, яка при своїй зміні стає і залишається за модулем більше будь-якого наперед заданого, скільки завгодно великого числа $M > 0$, тобто

$$\forall M > 0 : |x_n| > M \quad \forall n > N. \tag{14.11}$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ – нескінченно велика числова послідовність, то можливі такі випадки.

1. Послідовність $\{x_n\}$ прямує до $+\infty$ (позначають це так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$), якщо для довільного $M > 0$ існує таке N, що $x_n > M \quad \forall n > N$.

2. Послідовність $\{x_n\}$ прямує до $-\infty$ (позначають це так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$), якщо для довільного $M > 0$ існує таке N, що $x_n < -M \quad \forall n > N$.



У ***геометричній інтерпретації*** умова $|x_n| > M$, означає, що при $n \to \infty$ усі значення x_n (крім, можливо, скінченого числа точок) потрапляють і залиша-

Рис. 14.4

ються зовні M-околу нуля, тобто $x < -M \cup x > M$ (рис. 14.4).

Наприклад, розглянемо послідовність $\{x_n\}$ з загальним членом $x_n = 10^n$. При довільному виборі M за умовою $10^n > M$ визначаємо, що для всіх $n > \lg M$ нескінченне число значень змінної опиняться поза інтервалом $(-M, M)$, яким би великим він не був.

Найпростішою нескінченно великою є змінна, значеннями якої є натуральні числа, що взяті у природному порядку.

Розглянемо арифметичні властивості нескінченно великих послідовностей.

Нехай $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – дві нескінченно великі послідовності (будемо позначати їх граничними значеннями: $\infty, \pm\infty$), а z_n – обмежена змінна. За означенням нескінченно великої та обмеженої змінних випливають такі ***арифметичні властивості***:

1) сума двох нескінченно великих, однакових за знаком, теж є нескінченно великою того ж знака:

$$\left[\begin{aligned}&(+\infty)+(+\infty)=+\infty\ ,\\&(-\infty)+(-\infty)=-\infty\ ;\end{aligned}\right. \tag{14.12}$$

2) сума обмеженої змінної z_n (або $const$) та нескінченно великої є нескінченно великою:

$$z_n + (\pm\infty) = \pm\infty; \tag{14.13}$$

3) добуток двох нескінченно великих є нескінченно великою:

$$\left[\begin{aligned}&+\infty\cdot(+\infty)=+\infty,\\&-\infty\cdot(\mp\infty)=\pm\infty;\end{aligned}\right. \tag{14.14}$$

4) добуток обмеженої змінної z_n (або $const \neq 0$) з нескінченно великою теж є нескінченно великою:

$$z_n \cdot \infty = \infty. \tag{14.15}$$

Теорема 14.2 (***про зв'язок між нескінченно великою і нескінченно малою***).

Справедливі такі твердження:

1) якщо послідовність із загальним членом x_n – нескінченно велика, то обернена до неї послідовність із загальним членом $\dfrac{1}{x_n}$ є нескінченно малою:

$\{x_n\}$ – нескінченно велика, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\} = \{\alpha_n\}$ – нескінченно мала; (14.16)

2) якщо послідовність із загальним членом α_n – нескінченно мала, то обернена до неї послідовність із загальним членом $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ є нескінченно великою:

$\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала, то $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\} = \{x_n\}$ – нескінченно велика. (14.17)

Доведення базується на означеннях нескінченно великої і нескінченно малої послідовностей:

1) оскільки за умовою $\{x_n\}$ – нескінченно велика, то згідно з означенням

$$\forall M > 0 : |x_n| > M \ \forall n > N .$$

Треба показати, що послідовність $\{1/x_n\}$ є нескінченно малою, тобто $\forall \varepsilon > 0$: $|1/x_n| = |\alpha_n| < \varepsilon \ \forall n > N$.

За властивостями нерівностей і модуля відношення двох чисел маємо:

$$\frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{M} \ \forall n > N \quad \text{і} \quad \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{M} \ \forall n > N .$$

Оскільки M – довільна стала, виберемо її рівною $1/\varepsilon$. Тоді приходимо до нерівності $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| < \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall n > N$, а це означає, що $\{1/x_n\} = \{\alpha_n\}$, тобто $\{1/x_n\}$ є нескінченно малою;

2) аналогічно доводиться справедливість співвідношення (14.17). ■

14.5. Властивості границь числових послідовностей

Властивості збіжних послідовностей формулюються у вигляді теорем, які далі застосовуються в теоретичних та практичних дослідженнях.

Теорема 14.3. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю $a > 0$ ($a < 0$), то, починаючи з деякого номера, всі члени послідовності $x_n > 0 \left(x_n < 0\right)$.

Доведення. За означенням границі послідовності для будь-якого $\varepsilon > 0$, наприклад, $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$, знайдеться такий номер N, що при $n > N$ буде виконуватися нерівність:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \ \text{або} \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon .$$

Звідси, якщо $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$, одержимо

$$\frac{a}{2} < x_n < a + \frac{a}{2}, \quad \text{або} \qquad x_n > \frac{a}{2} > 0.$$

Для випадку $a < 0$ доведення аналогічне. ■

Теорема 14.4. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю, то ця послідовність є обмеженою.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що для всіх $n > N$ буде виконуватись подвійна нерівність: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Отже, кількість членів послідовності, що не потрапляють в інтервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, є скінченною. Тоді серед чисел

$$x_1, x_2, ..., x_N, \qquad x_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \ \ \forall n < N$$

виберемо найбільше M та найменше m. Очевидно, що всі значення x_n задовольняють нерівність $m \le x_n \le M$, що означає обмеженість $\{x_n\}$. ■

Теорема 14.5. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю, то ця границя тільки єдина.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Припустимо, що існує інша границя, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ та $a \ne b$. За теоремою (14.1) маємо:

$$x_n = a + \alpha_n, \ x_n = b + \beta_n,$$

де α_n, β_n є нескінченно малими величинами. Віднявши почленно ці співвідношення, отримаємо

$$\beta_n - \alpha_n = a - b \ \text{або} \ \left|\beta_n - \alpha_n\right| = \left|a - b\right|.$$

Ця рівність неможлива. Дійсно, різниця $\beta_n - \alpha_n$ є нескінченно малою, тому

$$\left|\beta_n - \alpha_n\right| = \left|a - b\right| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Якщо вибрати $\varepsilon = \left|a - b\right|$, то здобудемо хибну нерівність $|a - b| < |a - b|$. Тобто припущення щодо існування іншої границі є невірним. ■

Теорема 14.6. Якщо члени послідовностей $\{x_n\};\{y_n\};\{z_n\}$, починаючи з деякого $n(n > N_0)$, задовольняють нерівність $x_n \le y_n \le z_n$ та $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то послідовність $\{y_n\}$ збіжна і має ту ж саму границю: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

Доведення. За означенням границі послідовності $\{x_n\}$ маємо нерівність:

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon\ ,\ \forall\varepsilon > 0\ \ \forall n > N_1.$$

Для послідовності $\{z_n\}$ виконується аналогічна нерівність

$$a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon\ ,\ \forall\varepsilon > 0\ \ \forall n > N_2.$$

Якщо вибрати із номерів N_0, N_1, N_2 найбільший $N = \max(N_0, N_1, N_2)$, то для $n > N$ маємо нерівність:

$$a-\varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a+\varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0\ \forall n > N,$$

звідки $a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon \ \Rightarrow\ \ \forall\varepsilon > 0\ \forall n > N : |y_n - a| < \varepsilon.$

Отже, послідовність $\{y_n\}$ збіжна і має ту ж саму границю:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.\ \blacksquare$$

Теорема 14.7. Якщо члени двох послідовностей задовольняють нерівність $x_n \le y_n$, то їх границі задовольняють нерівність $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Наводимо теорему без доведення.

Теорема 14.8 (*ознаки збіжності монотонних послідовностей*).

1. Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає і обмежена зверху деяким числом C, то така послідовність має скінчену границю, а саме існує

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \le C. \qquad (14.18)$$

2. Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонно спадає і обмежена знизу деяким числом C, то така послідовність має скінчену границю, а саме існує

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ge C. \qquad (14.19)$$

Наводимо теорему без доведення.

Теорема 14.9. Нехай $\{x_n\},\{y_n\}$ – збіжні послідовності, границі яких відомі: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a;\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$ тоді їх сума (різниця), добуток, частка (якщо границя знаменника $\ne 0$) також мають границю, при цьому виконуються співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab; \qquad (14.20)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{a}{b}\left(b\neq 0\right).$$

Наведені співвідношення поширюються і на випадок кількох, але скінченого числа, доданків чи множників.

Доведемо одне з тверджень теореми, наприклад:

$$\lim_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=a\cdot b.$$

Доведення. За визначенням границі

$$x_n=a+\alpha_n,\, y_n=b+\beta_n,$$

де α_n і β_n – нескінченно малі.

Знайдемо добуток

$$x_n\cdot y_n=\left(a+\alpha_n\right)\left(b+\beta_n\right)=ab+\underbrace{b\cdot\alpha_n+a\cdot\beta_n+\alpha_n\cdot\beta_n}_{\gamma_n}.$$

Спираючись на властивості нескінченно малих (до доданку ab додається нескінченно мала), маємо:

$$\lim_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=a\cdot b.$$

Наслідок з теореми про границю добутків числових послідовностей: сталий множник k можна виносити за знак границі:

$$\lim_{n\to\infty}k\cdot x_n=k\cdot\lim_{n\to\infty}x_n,\quad k=const. \tag{14.21}$$

Інші властивості доводяться аналогічно.

Зауважимо, що при розв'язуванні прикладів на обчислення границь послідовностей застосовуються арифметичні властивості нескінченно малих і нескінченно великих (у поєднанні з обмеженими змінними) та границі суми, добутку, частки тільки у тих випадках, коли послідовності задовольняють умовам теорем. Окремі випадки знаходження границь, в яких указані теореми застосувати неможливо, розглядатимуться пізніше.

Розглянемо приклади обчислення границь числових послідовностей:

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{0,5^n+3\operatorname{arctg}2n}{5\pi+arc\operatorname{ctg}(1/n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(0,5^n+3\operatorname{arctg}2n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5\pi+arc\operatorname{ctg}(1/n)\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}0,5^n+3\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}2n}{5\pi+\lim\limits_{n\to\infty}arc\operatorname{ctg}(1/n)}=$$

$$=\frac{0+3\cdot\pi/2}{5\pi+\pi/2}=\frac{3}{11}.$$

Після граничного переходу враховано властивості основних елементарних функцій, взаємозв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими, арифметичні властивості границь числової послідовності.

Границі чисельника $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ і знаменника $\left(\frac{11\pi}{2}\right)$ скінченні, тому границя числової послідовності дорівнює їх відношенню;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n^2+5n-1\right)=\left|3\cdot\infty^2+5\cdot\infty-1=\infty+\infty\right|=\infty$.

Отже, враховуючи властивості нескінченно великих, отримуємо, що числова послідовність розбігається;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\ln(n+1)}+3\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\ln(n+1)}+\lim\limits_{n\to\infty}3\left(1+\frac{1}{n}\right)=3.$

Враховано взаємозв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими, арифметичні властивості границь числової послідовності;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9+\sqrt{\frac{8}{n^3}+1}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}+4}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(9+\sqrt{\frac{8}{n^3}+1}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n^2}+4}}=5.$

При розв'язуванні прикладу застосовані арифметичні властивості нескінченно малих і нескінченно великих та границі суми і частки.

Тема 15. Границя функції неперервного аргументу

15.1. Означення границі функції. Критерій збіжності

Розглянуті елементи теорії границь функцій натурального аргументу – числової послідовності – є основою для побудови теорії границь функції неперервного аргументу.

Поняття границі числової послідовності, яке розглядалося у попередній главі, можна поширити і на функцію $y = f(x)$, аргументом якої є неперервна змінна $x \in X$. Отже, число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо при необмеженому зростанні послідовності значень аргументу відповідна послідовність значень функції збігається до A:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A. \tag{15.1}$$

Тобто, якщо x_0 є невластивим числом: ∞ або $\pm\infty$, тобто $\{x_n\} \to \infty$ при $n \to \infty$, а послідовність $\{y_n\}$ збігається до A.

Розглянемо поняття границі функції у точці.

Нехай x_0 – певне фіксоване число, тобто точка числової осі, у деякому околі якої функція $y = f(x)$ визначена; у самій точці функція може і не існувати. Точка $x = x_0$ називається ***граничною точкою*** множини $X = \{x_i\}$, якщо в будь-якому околі точки існують значення $x \in X$, які відмінні від x_0.

Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$, коли x прямує до x_0 (або у точці x_0), якщо для будь-якої послідовності значень аргументу, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції збігається до A:

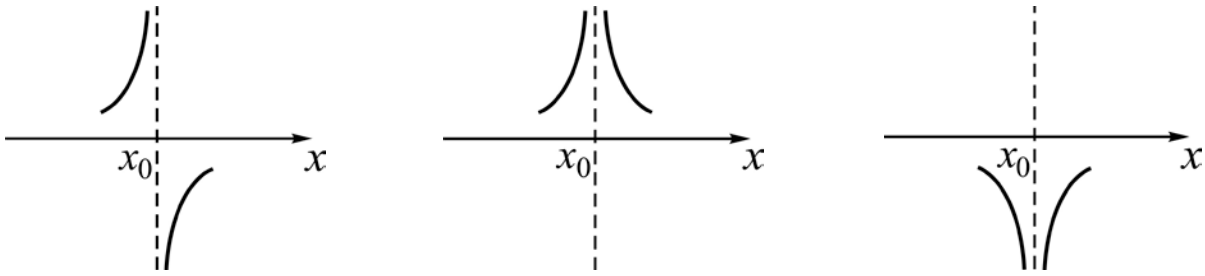
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A\ . \tag{15.2}$$

Оскільки для означення границі функції застосовується поняття послідовності, то говорять, що наведене означення границі функції сформульовано ***мовою послідовностей***. Воно називається ***означенням границі функції за Гейне***.

Якщо A – нескінченність, то говорять, що функція має ***нескінченну границю***, або $f(x)$ ***збігається до нескінченності***:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Можливі випадки збіжності функції до нескінченності при $x \to x_0$ наведені на рис. 15.1: а) $f(x) \to \pm\infty$; б) $f(x) \to +\infty$; в) $f(x) \to -\infty$;



а) б) в)

Рис. 15.1

Означення границі функції залишається й у тому випадку, коли x_0 – один із символів: ∞, $+\infty$, $-\infty$, тобто коли x прямує до нескінченності (15.1). *Пропонуємо* підтвердити розуміння всіх випадків прямування x до нескінченності $(\infty, +\infty, -\infty)$, схематично зображаючи поведінку функції, яка має скінченну границю чи нескінченну границю, або не має границі при $x \to \infty$.

Наведемо ще одне означення границі функції.

Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$, коли x прямує до x_0 (або у точці x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Застосовуючи символи математичної логіки, означення границі функції можна подати так: число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$, коли x прямує до x_0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x: \; 0 < |x - x_0| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (15.3)$$

Наведене означення границі сформульовано ***мовою нескінченно малих*** (або мовою «$\varepsilon - \delta$»). Воно називається означенням ***границі функції*** **за** ***Коші***.

Можна довести, що означення границі функції (15.2) і (15.3) еквівалентні.

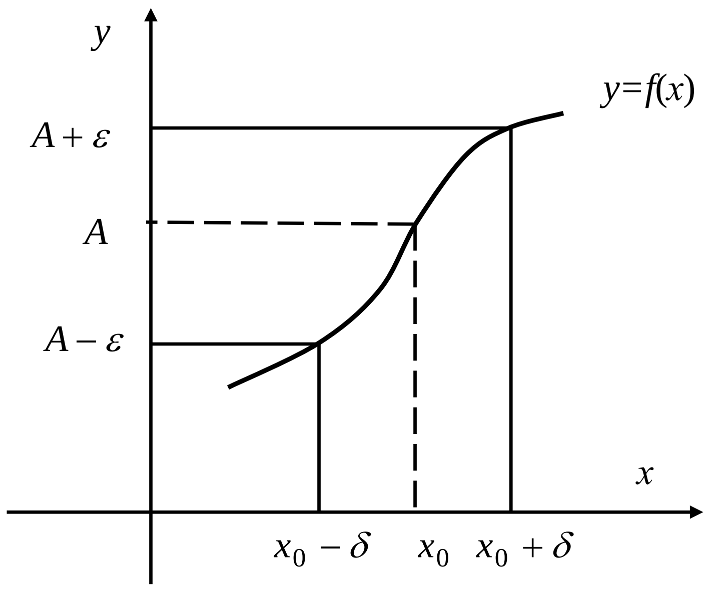


Рис. 15.2

Розглянемо геометричну інтерпретацію границі функції у точці (рис. 13.2). За означенням границі функції мовою нескінченно малих (за Коші) якщо число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, то який би малий ε-окіл точки A ми не взяли, знайдеться такий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x \neq x_0$ відповідні їм значення функції $y = f(x)$ містяться у смузі $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$.

Використовуючи означення границі (15.2), доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ не існує.

Застосуємо для цього означення границі за Гейне. Візьмемо послідовність значень аргументу, що прямує до нуля:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{(2n-1)\pi}\right\} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

тоді маємо таку послідовність відповідних значень функції:

$$\{y_n\} = \{\cos(2n-1)\pi\} \to -1 \text{ при } n \to \infty$$

Візьмемо іншу послідовність аргументу, яка теж прямує до нуля:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{(2n-1)\pi}\right\} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

Тоді маємо таку послідовність значень функції $\{y_n\} = \{\cos(2n-1)\pi\} \to -1$ при $n \to \infty$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ не існує, тому що для двох різних послідовностей значень x, обидві з яких збігаються до нуля, одержано різні границі відповідних послідовностей значень функцій.

Згідно з означенням границі (15.3) доведемо, що

$$\lim_{x\to 2}(3x-1)=5.$$

Застосуємо для цього означення границі за Коші. Виберемо будь-яке довільне $\varepsilon>0$ і знайдемо відповідне йому $\delta(\varepsilon)>0$, для якого

$$|3x-1-5|=|3(x-2)|<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x-2|<\varepsilon/3.$$

Отже, якщо вибрати $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{3}$, то для будь-яких x, що задовольняють нерівність $|x-2|<\varepsilon/3$, буде виконуватися нерівність $|f(x)-5|<\varepsilon$. Отже, твердження доведене.

Звернемо увагу на поняття ***односторонніх границь*** функції. Згідно з означенням границі функції співвідношення $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ передбачає, щоб відповідні умови означення виконувались для всіх точок, близьких до x_0, як справа, так і зліва від неї. Але на практиці існують функції, що поводять себе порізному справа та зліва поблизу точки x_0. Наприклад, $f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ x^2, & x\ge 1\end{cases}.$

У зв'язку з цим вводяться поняття правосторонньої та лівосторонньої границь.

Число A називають ***границею*** функції $f(x)$ ***зліва*** (***справа***), якщо для будь-якої послідовності значень аргументу, що є збіжною до x_0, при цьому $x_n<x_0$ $(x_n>x_0)$, відповідна послідовність значень функції збігається до A.

Позначаються:

ліва границя –

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0),$$

права границя –

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0).$$

Між односторонніми границями та границею функцій у точці x_0 існує певний зв'язок. Якщо односторонні границі функції існують і рівні між собою, то існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, яка дорівнює тому ж числу, тобто

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A \quad \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=A. \tag{15.4}$$

Як і для послідовностей, поняття нескінченно малої (великої) існують і для функцій. Однак суттєва відмінність полягає в тому, що одна і та сама функція може бути як нескінченно малою, так і нескінченно великою залежно від того, до якого значення x_0 прямує її аргумент.

Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою функцією*** при $x \to x_0$ або при $x \to \infty$, якщо її відповідна границя дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0. \tag{15.5}$$

Для позначення нескінченно малої функції, як і для нескінченно малої послідовності, використовують перші літери грецького алфавіту, отже, пишуть: $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ тощо, підкреслюючи функціональну залежність від аргументу x.

Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно великою функцією*** при $x \to x_0$ або при $x \to \infty$, якщо її границею є нескінченність:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty; \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty(+\infty, -\infty). \tag{15.6}$$

Наприклад, одна і та сама функція $y = \dfrac{1}{x}$ є нескінченно малою при $x \to +\infty$ або при $x \to -\infty$ і нескінченно великою при $x \to 0$.

Властивості нескінченно малої, нескінченно великої і зв'язок між ними, що розглянуті для числової послідовності справедливі і для функцій неперервного аргументу.

Як **наслідок** із означення границі функції у точці випливає необхідна і достатня умови існування границі.

Теорема 15.1 (***критерій існування скінченної границі***). Функція $f(x)$ у точці x_0 має границею число A тоді і лише тоді, коли її можна подати у вигляді суми числа A і нескінченно малої функції $\alpha(x)$ при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x). \tag{15.7}$$

Доведення цієї теореми здійснюється аналогічно доведенню теореми щодо критерію збіжності числових послідовностей (пропонуємо зробити це самостійно).

15.2. Поширення теорії границь послідовностей на функції

Границі функції неперервного аргументу мають властивості, які аналогічні тим, що були доведені для послідовностей. Цей факт легко доводиться, якщо границі функції визначати мовою послідовностей.

Для розв'язування прикладів наведемо теорему про знаходження границі суми, добутку та частки.

Теорема 15.2. Нехай на множині X з граничною точкою x_0 задаються функції $f(x)$ та $g(x)$, які у точці x_0 мають скінченні границі:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B.$$

Тоді границя суми, добутку, частки цих функцій дорівнює відповідно сумі, добутку, частці границь цих функцій (якщо границя знаменника не дорівнює нулю).

Сформульована теорема у стислому вигляді запишеться так:

$$\begin{aligned}
&1)\ \lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B;\\
&2)\ \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=A-B;\\
&3)\ \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B;\\
&4)\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}, B\neq 0.
\end{aligned} \tag{15.8}$$

Як приклад, доведемо теорему для першого співвідношення (15.8).

Доведення. За означенням границі функції для будь-якої послідовності значень змінної $x \in X$, які відмінні від x_0, тобто $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ... \to x_0$, існують відповідні послідовності значень функцій:

$$\begin{aligned}
&f(x_1),\ f(x_2), ...,\ f(x_n), ... \to A;\\
&g(x_1),\ g(x_2), ...,\ g(x_n), ... \to B.
\end{aligned}$$

Оскільки для функцій натурального аргументу

$$f(x_1)+g(x_1),\ f(x_2)+g(x_2),\ f(x_3)+g(x_3),\dots,\ f(x_n)+g(x_n),\dots \to A+B,$$

то теорему доведено.

Інші співвідношення доводяться аналогічно.

Якщо наведені умови теореми не виконуються, то маємо справу з так званими невизначеностями, границі яких можна знайти за допомогою відповідних перетворень. Якщо функція визначена у точці x_0, то обчислення границі зведеться до підстановки замість x його граничного значення, тобто використовується рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$.

Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-1}{x^2+x+1}$.

Для розв'язання цього прикладу застосуємо теореми про границю суми та частки двох функцій. Отже, отримуємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}.$$

Знайдемо границю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^3-x-2}=\left[\frac{8}{0}\right]=\infty.$$

У точці $x=2$ функція невизначена, знаменник дробу дорівнює нулю і теорема про границю частки не працює. Але із властивостей нескінченно малих ця функція нескінченно велика при $x\to 2$.

Отже, при $x\to 2$ функція наближається до нескінченності.

15.3. Різні типи невизначеностей та їх розкриття. Перша та друга чудові границі

При знаходженні границі функцій необхідно мати на увазі теореми, яким задовольняють функції, що мають границю. Однак на практиці досить часто маємо справу з такими функціями, для яких неможливе використання зазначених теорем без перетворювання виразу, границю якого треба обчислити. Такі вирази називають ***невизначеностями***.

Загальний підхід до обчислення границі в умовах невизначеності передбачає:

1) ***тотожні перетворення*** функції, границя якої обчислюється, з метою звести ситуацію до можливості застосування арифметичних властивостей границь, а також властивостей нескінченно малих і нескінченно великих;

2) ***застосування еталонних границь*** – границь, які часто зустрічаються на практиці і використовуються, як готові формули;

3) ***введення нової*** (допоміжної) ***змінної*** з метою спрощення початкового аналітичного виразу.

Перелічені кроки здійснюються незалежно один від одного у довільному порядку і не обов'язково разом: те чи інше їх поєднання залежить від типу невизначеності й обумовлюється кожним конкретним прикладом.

Пояснення кожного кроку наведене нижче:

1) ***здійснюємо*** граничний перехід, що формально зводиться до підстановки у досліджувану функцію замість змінної x її значення x_0;

2) ***аналізуємо*** отриманий вираз з метою встановлення, чи є він визначеним або невизначеним;

3) ***записуємо*** відповідний результат у разі визначеного виразу;

4) ***розкриваємо*** невизначеність за допомогою допоміжних перетворень, а потім даємо відповідь.

Розглянемо ряд найбільш важливих невизначеностей різного типу. Під «важливими» розуміємо такі границі, які достатньо широко використовуються (можливо, і як готові формули) при обчисленні границь.

15.3.1. Невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ виникає при знаходженні границі відношення двох многочленів від змінної x, коли аргумент прямує до нескінченності. Для розкриття невизначеності такого типу потрібно із чисельника та знаменника дробу винести за дужки найвищий ступінь x, тобто x^n, де $n = \max\{k,\ m\}$, а після скорочення виразу на x^n обчислити границю, підставивши у функцію значення, до якого прямує аргумент:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_k(x)}{P_m(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \ldots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1x + b_0} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \infty, & k > m; \\ a_k/b_k, & k = m; \\ 0, & k < m. \end{array}\right. \tag{15.9}$$

Застосування формули (15.9) дає змогу зразу записати результат, порівнявши степені чисельника k і знаменника m.

Наприклад, обчислимо границю:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3 + 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(5 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)} = \frac{5}{2}.$$

Зауваження. Висновки співвідношення (15.9) можуть бути застосованими і до дробів, у яких чисельник або знаменник містять степені з дробовими показниками.

Обчислимо границю за правилом (15.9):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+1} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Оскільки у цьому прикладі найвищі степені чисельника і знаменника однакові (це перший степінь змінної x), то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при цьому степені змінної чисельника до знаменника.

15.3.2. Невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Розглянемо границю частки двох функцій: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, коли при $x \to x_0$ обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ прямують до 0. Це означає, що $x = x_0$ є коренем функції, що стоїть у чисельнику, а також коренем функції, що стоїть у знаменнику. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ є многочленами, то для розкриття невизначеності їх можна розкласти на множники, одним з яких є $(x-x_0)$:

$$f(x)=P_k(x)=(x-x_0)P_{k-1}(x);$$

$$g(x)=P_m(x)=(x-x_0)P_{m-1}(x).$$

Потім скоротимо дріб на вираз $(x-x_0)$. Це можна здійснити, оскільки $x-x_0\neq 0$, бо змінна x не дорівнює x_0, а лише прямує до неї. Після скорочення дробу здійснюємо повторно граничний перехід. Якщо x_0 є простим коренем багаточленів, то невизначеність розкрито. У тому ж випадку, коли x_0 є кратним коренем обох многочленів, то знову прийдемо до невизначеності «нуль на нуль». Операцію спрощування повторюють стільки разів, яка найменша кратність кореня $x=x_0$ чисельника і знаменника. Для того щоб виділити у чисельнику і знаменнику множник $x=x_0$, можна поділити їх «сходинками» на вираз $(x-x_0)$.

Наприклад,

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3}{x^4-2x^2+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3}{(x^2-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2(x+1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x+1)^2}=0.$$

Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+5x-7}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(2x^2+2x+7\right)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+2x+7}{x-2}=-11.$$

Якщо треба розкрити невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, коли чисельник та (або) знаменник містять квадратні корені, то найбільш поширеною при цьому операцією, що дозволяє позбутися ірраціональності, є множення чисельника і знаменника дробу на спряжений вираз. Як наслідок, отримуємо раціональні функції, для яких і виділяємо множник $(x-x_0)$.

Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{14+x}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{6-x}-2\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}{\left(\sqrt{14+x}-4\right)\left(\sqrt{14+x}+4\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{14+x}+4\right)}{\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(2-x)\left(\sqrt{14+x}+4\right)}{(x-2)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=-\frac{8}{4}=-2.$$

15.3.3. Невизначеність типу $[\infty - \infty]$. Невизначеності цього виду за допомогою перетворень потрібно привести до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Обчислимо границі:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{6}$;

б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)}=$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0.$$

Для цієї ж функції невизначеності немає, якщо $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=[\infty+\infty]=\infty,$$

оскільки сума двох нескінченно великих є нескінченно великою.

15.3.4. Перша чудова границя. Область застосування ***першої чудової границі*** – розкриття невизначеності «нуль на нуль», яка пов'язана з функціями, що містять тригонометричні або обернені тригонометричні функції.

Теорема 15.3. Границя відношення синуса нескінченно малого аргументу до цього ж аргументу дорівнює одиниці:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1. \qquad (15.10)$$

Доведення. Для того щоб довести теорему, розглянемо коло одиничного радіуса з центром у початку координат − точці O (рис. 15.4).

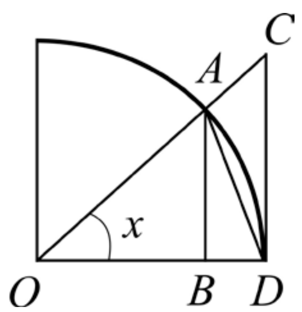


Рис. 15.4

У першій чверті одиничного круга візьмемо кут x, тобто $0<x<\pi/2$, де $OD=1$, $\overset{\frown}{AD}=x$, $AB=\sin x$, $CD=tgx$. Порівнюючи площі трикутника OAD, кругового сектора OAD і трикутника OCD, отримуємо співвідношення між площами цих фігур:

$$S_{\Delta OAD}<S_{\text{сек}.OAD}<S_{\Delta OCD},$$

$$\frac{1}{2}OD\cdot AB<\frac{1}{2}OD\cdot\overset{\frown}{AD}<\frac{1}{2}OD\cdot CD$$

або

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Замінюємо члени нерівності оберненими величинами і, з урахуванням умови $0 < x < \frac{\pi}{2}$, одержуємо нерівність: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Зауважимо, що дані нерівності виконуються і для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, тому що функції $\cos x$ і $\frac{\sin x}{x}$ – парні, тобто $\cos(-x) = \cos x$ та $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$.

Переходячи до границі при $x \to 0$, будемо мати:

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} 1 \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1 \end{array} \right| \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Таким чином, для границі справа співвідношення (15.10) доведено.

Для лівосторонньої границі, коли $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, в силу парності функцій $\cos x$ та $\frac{\sin x}{x}$ приходимо до того ж результату.

Формулу (15.10) не слід розуміти буквально у тому сенсі, що змінна x обов'язково повинна прямувати до нуля. Сама змінна x може прямувати до будь-якого x_0, але необхідно, щоб аргумент під знаком синуса був довільною нескінченно малою $\alpha(x)$ при $x \to x_0$. Отже, в узагальненому вигляді першу чудову границю можна записати так:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1. \blacksquare \qquad (15.11)$$

Для ілюстрації співвідношення (13.11) розглянемо приклади:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\ \left(2x\ \ (x-1)\right)}{x^2 - x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{array}{l} 2x\ \ (x-1) = \alpha \\ x \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0 \end{array} \right| = \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha/2} = 2$;

б) $\lim\limits_{x\to 0{,}5\pi} \frac{\cos x}{(x - 0{,}5\pi)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{array}{l} x - 0{,}5\pi = \alpha \\ x \to 0{,}5\pi \Rightarrow \alpha \to 0 \end{array} \right| = \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{-\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = -\infty$.

Наслідки. За першою чудовою границею (15.10) отримуємо співвідношення, які зручно застосовувати при розкритті невизначеності:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}.$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

15.3.5. Друга чудова границя. Область застосування ***другої чудової границі*** – розкриття невизначеності «одиниця у степені нескінченність», яка породжується степенево-показниковими функціями $y=f(x)=u(x)^{v(x)}$.

Теорема 15.4. Границя степенево-показникової функції:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=e. \tag{15.12}$$

Доведення. Розглянемо спочатку твердження (15.12) для натурального значення аргументу, а саме доведемо, що границя послідовності з загальним членом $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ при $n\to\infty$ дорівнює:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e. \tag{15.13}$$

Проведемо аналіз поведінки послідовності з загальним членом $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ при $n\to\infty$. Доведемо, що послідовність $\{u_n\}$ монотонно зростає. Дійсно, скористаємося формулою бінома Ньютона:

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n},$$

або

$$u_n=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Якщо n зростає, то зростає кількість додатних доданків (їх у формулі $n+1$), а також величина кожного доданка, тобто, дійсно, $\{u_n\}$ зростає.

Зробимо оцінку загального члена послідовності u_n:

$$u_n<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<2+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отже, починаючи з другого доданка у правій частині нерівності маємо суму перших $n-1$ членів геометричної прогресії. Для цієї прогресії перший член $a=\dfrac{1}{2}$ та знаменник $q=\dfrac{1}{2}$. Тому:

$$S_{n-1}=\frac{a\left(q^{n-1}-1\right)}{q-1}=\frac{\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{\dfrac{1}{2}-1}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1,$$

або

$$2<u_n<2+1 \quad\Rightarrow\quad 2<u_n<3.$$

Таким чином, послідовність $\{u_n\}$ монотонно зростає й обмежена, тобто, за ознакою збіжності числової послідовності $\{u_n\}$ має границю. Границя числової послідовності з загальним членом

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

позначається через e. Це ірраціональне число, яке дорівнює $e=2{,}71828...$ ***Число e (константа Непера) є математичною константою.***

На базі твердження (15.13) можна довести, що функція $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to+\infty$ також має границю, яка дорівнює e.

Спочатку нагадаємо, що цілою частиною $[x]$ дійсного числа x називається найбільше ціле число, яке не перевищує x. Отже,

$$[x]\le x<[x]+1.$$

Якщо $x\to+\infty$, то

$$[x]=n \ \ \forall x\in[n,\,n+1),\ \text{де } n\in N.$$

При $x\to+\infty$ маємо $n\to+\infty$, де x – неперервна, n – дискретна змінні. З урахуванням наведеного отримуємо:

$$n\le x<n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le1+\frac{1}{n}.$$

Отримуємо подвійну нерівність:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Здійснимо граничний перехід у нерівності при $x \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

Границі першого і третього членів останньої нерівності дорівнюють числу e, отже, є рівними. Дійсно

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{n+1}{n}} = e.$$

За властивістю функції, що має границю, отримуємо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left[1^{+\infty}\right] = e. \tag{15.14}$$

Останню рівність можна записати і в такому вигляді:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e, \tag{15.15}$$

де $\alpha = \dfrac{1}{x}$, тобто при $x \to +\infty$ маємо, що $\alpha \to 0$.■

Стосовно формул (15.14) та (15.15), обидві з яких відповідають другій чудовій границі, можна навести такі самі міркування, як і при аналізі першої чудової границі: у ролі x та α можуть виступати будь-які нескінченно великі чи, відповідно, нескінченно малі, але структура виразу повинна бути такою, як у наведених формулах.

Наслідки. За другою чудовою границею (15.10) отримуємо співвідношення, які зручно застосовувати при розкритті невизначеності:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{bx}\right)^{x} = e^{a/b}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{1/bx} = e^{a/b}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{b/x} = e^{ab}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Нагадаємо, що логарифм числа за основою e називається натуральним логарифмом і позначається $\ln x$. Наслідки можна доповнити ще однією формулою:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Дійсно, спираючись на властивості логарифмів, перетворимо цю рівність таким чином:

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Обчислимо границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3}{x}\cdot 5x}=e^{15};$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{3/x}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1-2x)^{-1/2x}\right)^{-\frac{2x\cdot 3}{x}}=e^{-6};$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{2(2x-1)}{x+1}}=e^{4};$

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-1+\cos x)^{1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+(\cos x-1))^{1/(\cos x-1)}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{-\lim\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}};$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)(\ln(2x-1)-\ln(2x+3))=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{(x-2)}=$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{x-2}=\ln\left(e^{-2}\right)=-2.$$

Розглянемо задачу про неперервне нарахування відсотків. Нехай протягом року банк кілька разів (позначимо це число через m) нараховує відсотки, виходячи із $p\,\%$ річних. Початковий внесок у банк складає A_0. Необхідно знайти величину вкладу, яка буде накопичена за n років.

Для розв’язання застосуємо формулу складних відсотків:

$$A_n=A_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}.$$

Якщо відсотки за внеском нараховуються неперервно, то за n років на рахунку вкладника буде накопичена сума:

$$A_n=\lim_{m\to\infty}A_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}=A_0\lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}}\right)^{\frac{p}{100m}mn}=A_0e^{\frac{pn}{100}}.$$

Формула відображає показниковий (експоненціальний) закон зростання (при $p>0$) або спадання (при $p<0$). Її можна використовувати при неперервному нарахуванні відсотків. Ця формула є достатньо ефективною при аналізі складних фінансових проблем, при обґрунтуванні інвестиційних рішень тощо.

15.4. Порівняння нескінченно малих. Застосування еквівалентних нескінченно малих до обчислення границь

Нехай $\alpha = \alpha(x), \beta = \beta(x), \gamma = \gamma(x)$ є нескінченно малими при $x \to x_0$, де x_0 – скінченне число або нескінченність. Хоча всі нескінченно малі мають границею 0, «швидкість» прямування до нього буває різною, тому й виникає потреба в їх порівнянні. ***Порівняти нескінченно малі*** означає обчислити границю їх відношення

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c. \tag{15.16}$$

Якщо така границя існує, то:

а) при $c \neq 0$ $\alpha = \alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають ***нескінченно малими одного порядку***. Зокрема при $c = 1$ нескінченно малі $\alpha = \alpha(x)$ і $\beta = \beta(x)$ називають ***еквівалентними*** і записують $\alpha \sim \beta$;

б) при $c = 0$ нескінченно мала $\alpha = \alpha(x)$ називається ***нескінченно малою більш високого порядку***, ніж $\beta(x)$;

в) при $c = \infty$ нескінченно мала $\alpha = \alpha(x)$ є ***більш низького порядку*** порівняно з $\beta(x)$ (або $\beta(x)$– нескінченно мала більш високого порядку, ніж $\alpha(x)$).

Коли виникає потреба у більш точному порівнянні величин $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, то обчислюють ***порядок малості*** $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$. Нескінченно мала $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою порядку*** k відносно нескінченно малої $\beta(x)$, якщо

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \neq 0.$$

Порівняємо, наприклад, функції $\alpha = x$ і $\beta = x^{10}$, які є нескінченно малими при $x \to 0$. Оскільки

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{10}}{x} = \lim_{x \to 0} x^9 = 0,$$

то нескінченно мала $\beta(x)$ є більш високого порядку малості, ніж $\alpha(x)$.

При цьому порядок малості нескінченно малої $\beta(x)$ дорівнює $k = 10$, оскільки β і α^{10} –еквівалентні нескінченно малі.

Особливий інтерес викликають еквівалентні нескінченно малі, оскільки під знаком границі їх можна замінювати одна на іншу, завдяки чому значно спрощується визначення границі.

Ряд еквівалентних нескінченно малих отримуємо безпосередньо за означенням першої та другої чудових границь, а також завдяки тотожнім перетворенням виразів, що описують ці границі. Так, якщо $\alpha = \alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to x_0$, то отримуємо таблицю еквівалентних нескінченно малих.

Таблиця 15.1

$\sin\alpha \sim \alpha$	$\arcsin\alpha \sim \alpha$	$tg\alpha \sim \alpha$
$arctg\alpha \sim \alpha$	$1-\cos\alpha \sim 0{,}5\alpha^2$	$tg\alpha - \sin\alpha \sim 0{,}5\alpha^3$
$e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$	$\ln(1\pm\alpha) \sim \pm\alpha$	$(1\pm\alpha)^{1/n} - 1 \sim \pm\frac{1}{n}\alpha$

Зауваження. Обчислення границі відношення $\frac{\beta}{\alpha}$ (невизначеність вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$) часто можна значно спростити. Якщо $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, тобто границя відношення нескінченно малих величин не змінюється при заміні їх еквівалентними їм нескінченно малими величинами.

Наприклад, скористаємося таблицею еквівалентних нескінченно малих для визначення границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{arctg 6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{l}\sin 5x \sim 5x\\ arctg 6x \sim 6x\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{6x} = \frac{5}{6},$$

де при $x \to 0$ у чисельнику отримаємо $\alpha(x) = 5x$ – нескінченно мала при $x \to 0$, а у знаменнику маємо $\beta(x) = 6x$.

Неперервність і розриви функцій

Означення неперервності функції в точці. Неперервність основних елементарних функцій

Поняття неперервності функції тісно пов'язане з її границею. Воно є характеристикою багатьох процесів, що відбуваються неперервно: неперервність часу, неперервність зміни температури, неперервність зростання доходу та ін.

Нехай функція $y=f(x)$, з областю визначення $D(f)$, визначена в точці x_0, якій відповідає значення функції $y_0=f(x_0)$, і x – довільна точка з деякого околу точки x_0 (рис. 1).

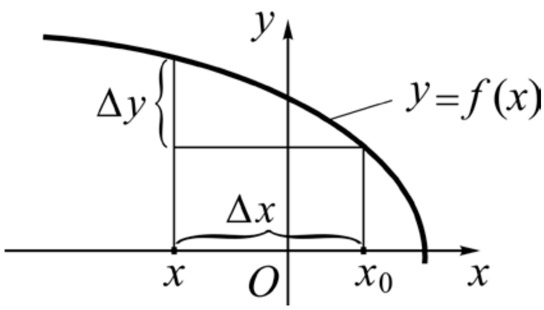


Рис. 1

Величина, на яку змінилося значення аргументу при переході від точки x_0 до x, називається ***приростом аргументу*** в точці x_0:

$$\Delta x = x - x_0, \tag{1}$$

а відповідну зміну значення функції називають ***приростом функції*** в точці x_0:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0),$$

або

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0). \tag{2}$$

Прирости можуть бути як додатними, так і від'ємними; наприклад, на рис. 1 $\Delta x<0$, при цьому $\Delta y>0$.

Функція $y=f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $\boldsymbol{x_0}$, якщо в цій точці вона визначена і нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескіченно малий приріст функції, а саме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що при означенні неперервності, на відміну від границі, функція в точці x_0 обов'язково повинна бути визначена.

Покажемо, що функція $y=e^x$ неперервна в кожній точці x_0 області визначення $D(f)=(-\infty,\ +\infty)$. Дійсно, надамо значенню аргументу x_0 приріст Δx, тоді $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0}$. Знайдемо границю приросту функції Δy при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left(e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}\right) = \lim_{\Delta x\to 0} e^{x_0}\left(e^{\Delta x}-1\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} e^{x_0}\cdot\Delta x = e^{x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0\cdot$$

Оскільки x_0 – довільна точка із $D(f)$, то функція $y=e^x$ неперервна $\forall x_0 \in D(f)$.

Аналогічно можна довести неперервність будь-якої з основних елементарних функцій (x^{α}, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $arc\,\mathrm{ctg}\, x$).

Теорема 1 (***про неперервність основних елементарних функцій***). Основні елементарні функції неперервні у кожній точці своєї області визначення.

Доведення здійснюється для кожної функції окремо.

Теорема 2 (***критерій неперервності «мовою границі»***). Функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді і лише тоді, коли границя функції в цій точці дорівнює значенню функції у ній:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{4}$$

Доведення. Справедливість (4) випливає з означення неперервності і властивостей границі функції.

Необхідність. Виходячи з (3), маємо:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} (f(x_0+\Delta x) - f(x_0)).$$

Якщо позначити $x_0+\Delta x = x$, то при $\Delta x \to 0, x \to x_0$.

Звідси $\lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) = 0$.

Отже, $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{5}$$

Достатність. Нехай функція визначена в точці x_0 і неперервна в ній. Тоді відповідно з означенням (4)

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x\to 0} (f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Таким чином, маємо два означення неперервності функції в точці відповідно формулам (3) та (4):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{або} \quad \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0. \ \blacksquare$$

Функція називається ***неперервною на множині*** X, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Зауваження. Якщо функція неперервна в точці x_0, то для обчислення границі функції в цій точці достатньо у вираз функції підставити замість аргументу x його граничне значення, тобто здійснити граничний перехід, у результаті отримаємо певне число (а не невизначеність!). Формально це означає, що символ границі і символ функції можна переставляти, а саме:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right). \qquad (6)$$

Наприклад, обчислимо границю $f(x)=\sqrt[3]{\cos\pi x}$ в точці $x_0=1$:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\cos\pi x} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 1}\cos\pi x} = \sqrt[3]{\cos\left(\pi\lim_{x\to 1} x\right)} = \sqrt[3]{\cos(\pi\cdot 1)} = -1.$$

Теорема 3 (***критерій неперервності «мовою односторонніх границь»***). Функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді і лише тоді, коли односторонні границі функції в цій точці рівні між собою і дорівнюють значенню функції в ній:

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0). \qquad (7)$$

Доведення. Дійсно, співвідношення (7) базується безпосередньо на теоремі існування скінченної границі функції «***мовою односторонніх границь***» і означенні неперервності функції в точці (4):

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0),$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0),$$

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \blacksquare$$

Перевірити в точці $x_0=1$ неперервність функції:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\le 1, \\ x+1, & x>1. \end{cases}$$

Обчислимо односторонні границі цієї функції:

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1;$$

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0}(x+1) = 2,$$

тобто границя зліва не дорівнює границі справа, отже, у даній точці границя не існує, і функція в точці $x_0=1$ є розривною.

Розглянемо далі дві функції: $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$, неперервні в точці x_0,

Теорема 4 (***про арифметичні властивості неперервних функцій***). Якщо функції $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ неперервні у точці x_0, то їх сума (різниця), добуток, частка (якщо знаменник у даній точці не дорівнює нулю) є неперер-вною функцією у точці x_0.

Доведення теореми здійснюється на основі арифметичних властивостей границі функції. Покажемо її справедливість для частки функцій. Згідно з (4)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),\ \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Позначимо частку функцій через $u(x)$, тоді за властивістю границі частки

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = u(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0). \ \blacksquare$$

Пропонуємо інші висновки теореми довести самостійно.

Стосовно функцій, утворених з основних елементарних функцій за допомогою суперпозиції, постає питання, якою з точки зору „неперервності” буде складена функція, якщо її складові є неперервними функціями.

Теорема 5 (*про неперервність складеної функції*). Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна при $x = x_0$, а $y = f(u)$ є неперервною в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.

Доведення. Позначимо закон зв’язку змінної y з аргументом x через F, тобто $y = f(\varphi(x)) = F(x)$. Враховуючи неперервність $\varphi(x)$, а саме: $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, знайдемо границю $F(x)$, коли $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \left| x \to x_0 \ \Rightarrow \ u \to u_0 \right| =$$
$$= \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)) = F(x_0) \ . \ \blacksquare$$

На підставі арифметичних властивостей неперервних функцій, неперервності складеної функції і теореми 1 (про неперервність основних елементарних функцій) робимо висновок: усі елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області існування.

Теорема 6 (*про неперервність оберненої функції*). Якщо функція $y = f(x)$ є визначеною, зростаючою (або спадною) і неперервною на сегменті $[a, b]$, то і обернена до неї функція $x = \varphi(y)$, або $y = f^{-1}(x)$, є визначеною, зростаючою (або спадною) і неперервною на відрізку $\left[f(a),\ f(b)\right]$ (або на відрізку $\left[f(b), f(a)\right]$, якщо функція спадна) (рис. 2):

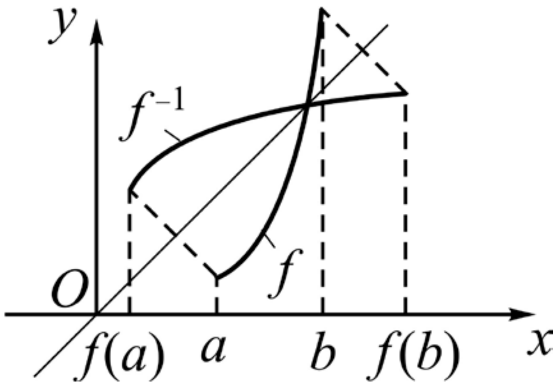


Рис. 2

2. Розриви функцій та їх класифікація

Якщо функція $y = f(x)$ не є неперервною в точці x_0, то говорять, що в цій точці вона має ***розрив***, а точка x_0 називається ***точкою розриву***.

Точки розриву і самі розриви класифікуються залежно від того, як порушується критерій неперервності (7):

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Розрізняють такі випадки:

1. Існують односторонні границі (скінченні), які є рівними між собою $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$, але $f(x_0) \neq A$ або не існує, тоді говорять, що x_0 є ***точкою усувного розриву***.

Назва розриву «усувний» пов'язана з тим, що достатньо в тій точці, де досліджується неперервність функції, задати значення функції, яке б дорівнювало значенню односторонніх границь, або змінити значення функції на значення границі в цій точці, тобто покласти $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Наприклад, класичний усувний розрив дає функція $y = \dfrac{\sin x}{x}$ в точці $x_0 = 0$ (рис. 3). Оскільки $x_0 \notin D(f)$, а

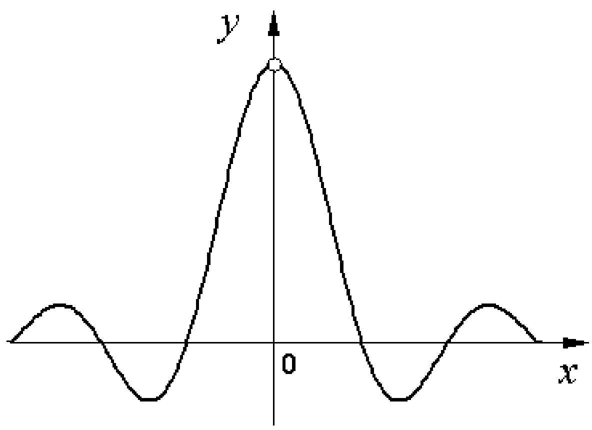


Рис. 3

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

тобто

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

то для того щоб функція була неперервною, достатньо довизначити функцію у точці $x_0=0$ таким чином: $y(x_0=0)=1$.

2. Існують скінченні односторонні границі, але $f\left(x_0-0\right)\neq f\left(x_0+0\right)$, тоді x_0 називають ***точкою розриву I-го роду***.

3. Не існує хоча б однієї з односторонніх границь, або принаймні одна з них нескінченна, тоді точка x_0 є ***точкою розриву II-го роду***.

Прикладом функції, що має розрив II-го роду, є функція $y=\sin\left(1/x\right)$, $x\neq 0$, оскільки вона не має границі в нулі ні зліва, ні справа.

Під ***дослідженням на неперервність*** функції $y=f\left(x\right)$ в деякій точці x_0 розуміють установлення факту неперервності (якщо такий, звичайно, має місце), або типу розриву у протилежному випадку.

Якщо функція елементарна, то дослідженню підлягають тільки точки, в яких функція невизначена. При заданні функції різними аналітичними виразами на різних ділянках області існування досліджуються точки, які є межами відповідних ділянок.

Дослідити на неперервність функцію

$$y=\frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

Областю визначення функції є вся числова вісь, крім $x=1$, $x=2$ (знаменник дорівнює нулю). Отже, на неперервність функцію досліджуємо в точках:

1) $x=1$. Знайдемо односторонні границі

$$f\left(1-0\right)=\lim_{x\to 1-0}\frac{\left(x-2\right)}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}=-\infty.$$

Отже, точка $x=1$ – є точкою розриву 2-го роду;

2) при $x=2$, односторонні границі

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-1}=1,\; f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}=1,$$

у точці $x=2$ функція не існує, тобто

$$f(2-0)=f(2+0)\neq f(2).$$

Таким чином точка $x=2$ є точкою усувного розриву (рис. 4а).

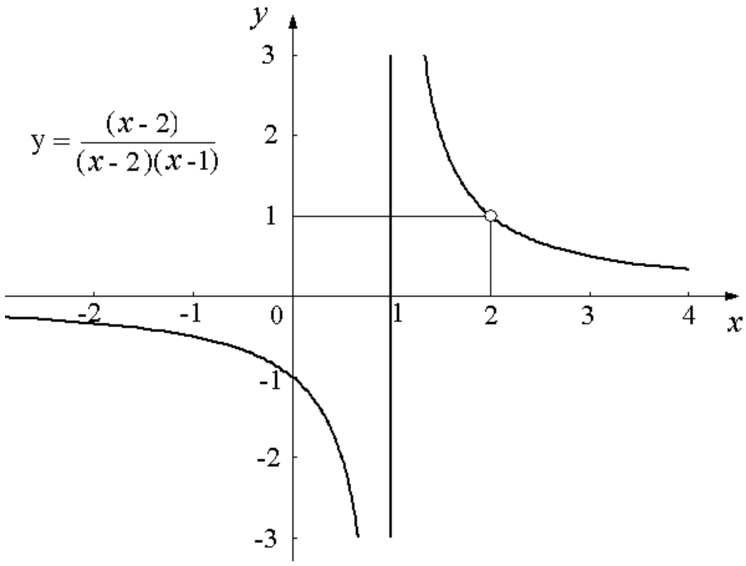


Рис.4а

Дослідимо на неперервність функцію:

$$y=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x\le 1. \\ x+\dfrac{3}{2}, & x>1 \end{cases}$$

Маємо неелементарну функцію, яку задано трьома формулами. На кожному із вказаних проміжків функція неперервна, як елементарна на області свого існування. Необхідно розглянути точки стиковки функцій різного вигляду, тобто точки $x=0$ і $x=1$.

1. При $x=0$, односторонні границі

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}(x+1)=1;\; f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\left(x^2+1\right)=1;\; f(0)=1.$$

Таким чином, функція в точці $x_0=0$ неперервна.

2. При $x=1$ $f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right)=2$; $f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(x+2)=3$ $f(1)=2$,

отже, $f(1-0)\neq f(1+0)$ і функція в цій точці має розрив першого роду (рис. 4б).

Дослідити на неперервність функцію

$$y=e^{\frac{1}{x-2}}.$$

У точці $x=2$ односторонні границі:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}}=0; \quad f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}}=\infty.$$

Отже, точка $x=2$ є точкою розриву ІІ-го роду (рис. 14.4в).

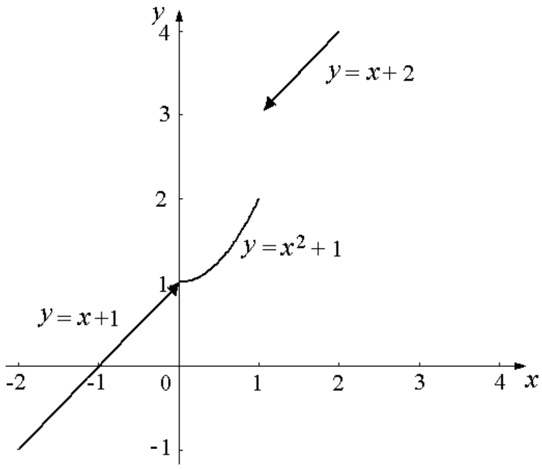


Рис. 4б

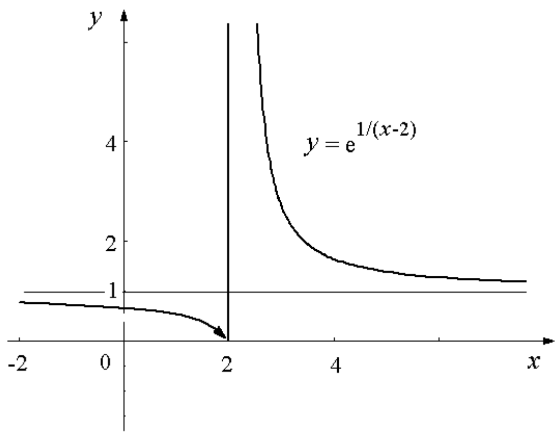


Рис. 4в

3. Неперервність функції на проміжку. Означення, основні теореми про неперервні функції

У теоретичних дослідженнях і на практиці використовуються теореми, які відображають властивості неперервних функцій не в окремо взятій точці, а на множині точок – проміжку.

Функцію $f(x)$ називають ***неперервною на інтервалі*** (a, b), якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу. Функцію $f(x)$ називають ***неперервною на відрізку*** $[a, b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a, b) і, крім цього, неперервна справа в точці a і – зліва в точці b.

Сформульовані нижче теореми приймемо без доведення. Для кращого розуміння їхнього змісту подамо до кожної теореми відповідну геометричну ілюстрацію, що допоможе, сподіваємось, усвідомити справедливість теорем на інтуїтивному рівні.

Якщо функція $f(x)$ визначена на множині X і існує таке значення $x_0 \in X$, що для усіх $x \in X$ виконується умова $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$, то число $f(x_0)$ називається ***найбільшим*** $-M$, (***найменшим*** $-m$) значенням функції $f(x)$ на множині X.

Теорема 7 (***про найменше і найбільше значення неперервної функції***). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,\ b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше (рис. 5). Тобто для будь-яких $x \in [a,b]$ виконується умова: $m \le f(x) \le M$.

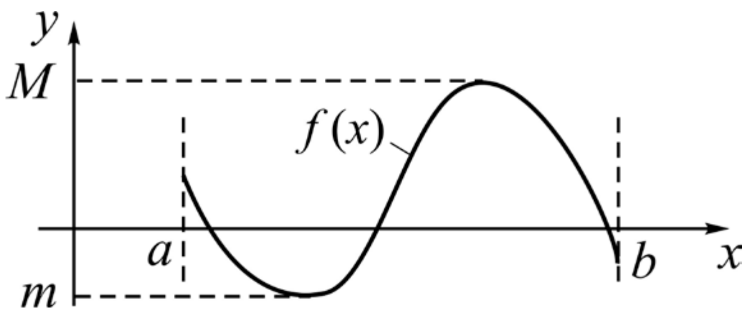


Рис.5

Якщо функцію $y = f(x)$ задано на інтервалі $(a;b)$ або $[a;b)$, то вона таким властивостям може і не задовольняти.

Наприклад, функція $y = x,\ x \in (0;1)$ ні найменшого, а ні найбільшого значення не має.

Функція $y = x$ на відрізку $[0;2]$ має найменше значення $m = f(0) = 0$; найбільше $M = f(2) = 2$, тобто на кінцях відрізку.

Функція $y = \dfrac{1}{x}$ на відрізку $[0,2]$ не має найбільшого значення, тому що в точці $x = 0$ вона не визначена.

Функція $y = \sin x$ на відрізку $[0;2\pi]$ досягає найменшого значення $m = 0$ в точці $x = \dfrac{3}{2}\pi$, $m = -1$ і найбільшого значення $M = 1$ в точці $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Теорема 8 (***про обмеженість неперервної функції***). Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,\ b]$, то вона обмежена на ньому (рис. 14.5), тобто існують числа m і M такі, що $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,\ b]$.

Теорема 9 (***про нулі неперервної функції***). Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,\ b]$ і її значення на кінцях даного відрізку мають різні знаки, то між a і b існує хоча б одна точка x_0, яка є нулем функції (рис. 6):

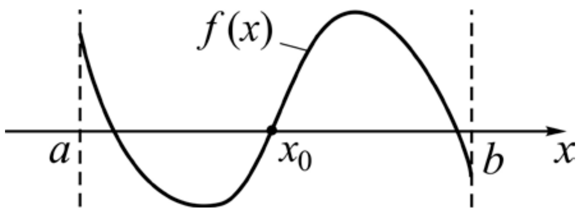


Рис. 6

Теорема 10 (*про проміжні значення функції*). Якщо функція неперервна на відрізку $[a;b]$ і її найменше і найбільше значення відповідно m і M, а число $C \in (m;M)$, тоді на відрізку $[a;b]$ знайдеться хоча б одна точка c така, що $f(c)=C$.

Відзначимо, що всі розглянуті питання щодо неперервності функції є по суті застосуванням поняття границь до дослідження функцій і побудови їх графіків.

Приклади та вправи до розділу 3

3.1. Клієнт поклав 10 000 грн. у банк за ставкою 7 %. Знайти накопичення через 5 років у разі: а) простих відсотків; б) складних відсотків. Результати порівняти.

Розв'язання. У випадку простих відсотків накопичена сума обчислюється за формулою $A_n = A(1+np)$, де $A = 10\,000$, $n = 5$, $p = 0{,}07$.

Отже, $A_5 = 10\,000(1+5\cdot 0{,}07) = 13\,500$ (грн)

Якщо вклад покласти під складні відсотки, то накопичена сума обчислюється за формулою $A_n = A(1+p)^n$.

Тоді $A_5 = 10\,000(1+0{,}07)^5 = 14\,025{,}52$ (грн).

Порівнюючи результати, бачимо, що вигідніше вкладати гроші під складні відсотки.

3.2. 150 000 грн покладено у банк за ставкою 18 % на 5 років. Побудувати числову послідовність для характеристики грошових накопичень із урахуванням складних відсотків.

3.3. Суму у 100 000 грн. вкладено в комерційний банк під прості відсотки за ставкою 15 % річних. Знайти накопичену суму через 4 роки.

3.4. Нехай вклад складає 50 000 грн. Побудувати числову послідовність накопиченої суми за роками, якщо 50 000 грн було вкладено на 5 років під прості відсотки за ставкою 10 %.

3.5. Підприємець кожен рік виготовляв 15 000 світильників. Після реконструкції він планує кожний рік збільшувати випуск на 4 %. Який буде випуск світильників через 3 роки?

3.6. На реконструкцію доріг міста інвестор вклав 15 млн грн за ставкою 20 % на 2 роки. Яку суму він отримає?

3.7. Сільська пекарня за день випікала 500 буханок хліба. Із прибуттям сезонних робітників через 5 днів випуск хліба було доведено до 650 буханок. На який відсоток щодня відбувалось збільшення випуску хліба?

3.8. В яку суму обернеться вклад в 1 гривню, якщо його покласти в банк на 100 років під складні відсотки за ставкою 8 %?

3.9. До банку покладено 5 000 грн. під складні відсотки. Через 7 років ця сума обернулася в 7 035,5 грн. Під які відсотки був зроблений вклад?

3.10. Який вклад треба зробити в банк під складні відсотки за ставкою 4 %, щоб через 15 років утворилася сума в 10000 грн?

3.11. Собівартість виробу зменшилася за перше півріччя на 10 %, а за друге – на 20 %. Визначити початкову собівартість виробу, якщо нова собівартість становить 576 грн.

3.12. Задано функцію $y=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2-1}, & x\le 3\\ 2x+a, & x>3\end{cases}.$

а) Знайти значення параметра a, при якому функція неперервна в точці $x_0=3$.

б) Дослідити функцію на неперервність (вказати проміжки неперервності, вказати точки розриву та класифікувати їх).

3.13. Задано функцію $y=\begin{cases}a-x, & x\le -4\\ \dfrac{x+3}{x^2-9}, & x>-4\end{cases}.$

а) Знайти значення параметра a, при якому функція неперервна в точці $x_0=-4$.

б) Дослідити функцію на неперервність (вказати проміжки неперервності, вказати точки розриву та класифікувати їх).

3.14. Задано функцію $y=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x^2-4}, & x\le 5\\ 3x+a, & x>5\end{cases}.$

а) Знайти значення параметра a, при якому функція неперервна в точці $x_0=5$.

б) Дослідити функцію на неперервність (вказати проміжки неперервності, вказати точки розриву та класифікувати їх).

3.15. Задано функцію $y=\begin{cases}a-2x, & x\le -1\\ \dfrac{x+4}{x^2-16}, & x>-1\end{cases}.$

а) Знайти значення параметра a, при якому функція неперервна в точці $x_0=-1$.

б) Дослідити функцію на неперервність (вказати проміжки неперервності, вказати точки розриву та класифікувати їх).

Розділ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Оскільки похідна характеризує швидкість (миттєву, тобто, в певний момент) зміни значень функції, то цілком природньо, що диференціальне числення застосовується при моделюванні динамічних процесів. Окрім того, методи диференціального числення використовуються у дослідженнях характеру поведінки функцій – моделей явищ, особливо, їх екстремальних (або оптимальних) значень. При моделюванні економічних явищ функції – моделі часто називають **кривими зростання,** першу похідну (що характеризує швидкість) називають **темпом росту**, а другу похідну (що характеризує прискорення) – **темпом приросту**.

Після вивчення даного розділу ви зможете:

- розуміти зміст похідної в економіці та її застосування при проведенні граничного аналізу;
- знати методи диференціювання функцій;
- застосовувати інструменти диференціального числення до розв'язання реальних економічних задач;
- вміти знаходити еластичність функцій в економіці та давати інтерпретацію отриманих результатів;
- набути навички застосування похідних при дослідженні функцій та побудові їх графіків;
- виконувати найпростіші розрахунки для оптимізації виробництва та максимізації прибутку підприємства.

Тема 16. Застосування методів диференціального числення до моделювання та розв'язування економічних задач

Задачі, що використовують поняття похідної.

Задача про продуктивність праці. Нехай функція $f = f(t)$ виражає кількість виробленої продукції f за час t, і необхідно знати продуктивність праці в момент t_0. Очевидно, за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $f_0 = f(t_0)$ до значення $f_0 + \Delta f = f(t_0 + \Delta t)$. Тоді середня продуктивність праці за цей термін $z_{сер} = \dfrac{\Delta f}{\Delta t}$. Продуктивність праці в момент t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто $z = \lim\limits_{\Delta t \to 0} z_{сер} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta t} = f'(t_0)$.

Отже, похідна обсягу виробленої продукції за часом $f'(t_0)$ є продуктивністю праці в момент t_0. У цьому ***економічний зміст похідної.***

Максимізація прибутку. Максимізація прибутку є одним з основних критеріїв діяльності виробничої або комерційної структури. Прибуток R (revenue) є деякою функцією від обсягу реалізованої продукції *x*: $R = R(x)$.

Дослідження, що проведені фірмою, показали, що тижневий продаж x залежно від щотижневого прибутку R описується співвідношенням, яке представлене у вигляді функції: $R(x) = -0{,}005x^2 + 20x - 5000$. Визначимо, за яких умов фірма матиме максимальний щотижневий прибуток.

Знайдемо всі стаціонарні точки з умови рівності нулю похідної функції прибутку:

$$\frac{dR}{dx} = -0{,}01x + 20 = 0, \quad x^* = 2000.$$

З метою ідентифікації цієї точки знаходимо

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -0{,}01 < 0.$$

Значить, точка $x^* = 2000$ є точкою локального максимуму. При цьому

$$R = -0{,}005 \cdot 2000^2 + 20 \cdot 2000 - 5000 = 1500.$$

Таким чином, для максимізації свого прибутку фірма повинна щотижня реалізовувати 2000 одиниць своєї продукції. При цьому її прибуток буде максимальним і складатиме 1500 гривень.

Граничний (маржинальний) аналіз.

У практиці економічних досліджень широке застосування отримали виробничі функції, які використовують для встановлення різноманітних економічних залежностей (наприклад, випуску продукції від витрат ресурсів, витрат виробництва від обсягу продукції, доходу від продажу товару тощо). У припущенні диференційованості виробничих функцій важливе значення набувають їхні диференціальні характеристики, пов'язані з поняттям похідної. Аналіз, що базується на використанні граничних величин (відносних приростів) для дослідження економічних процесів, називається ***граничним***, або ***маржинальним аналізом***.

Розглянемо похідні для різних типів виробничих функцій.

1. Нехай виробнича функція $TC = TC(x)$ - функція сукупних витрат виробництва (total cost), що залежить від кількості продукції *x*.

Припустимо, що кількість продукції збільшується на Δx. Кількості продукції $x + \Delta x$ відповідають витрати виробництва $TC(x + \Delta x)$. Отже, приросту кількості продукції Δx відповідає приріст сукупних витрат виробництво продукції на величину $\Delta TC = TC(x + \Delta x) - TC(x)$. Середній приріст сукупних витрат виробництва визначається як $\frac{\Delta TC}{\Delta x}$. Це приріст сукупних витрат виробництва на одиницю приросту кількості продукції.

Граничними витратами виробництва (marginal cost) називається границя

$$MC = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta TC}{\Delta x} = TC'(x).$$

Граничні витрати виробництва збігаються зі швидкістю зміни витрат виробництва. Величина $TC'(x)$ характеризує наближено додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

2. Позначимо $TR(x)$ сукупний доход (total revenue) від продажу *x* одиниць товару.

Граничним доходом (marginal revenue) називається границя

$$MR = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta TR}{\Delta x} = TR'(x).$$

3. Нехай виробнича функція $y = f(x)$ встановлює залежність об'єму випуску продукції *y* від кількості витрат ресурсу *x*.

Еластичність функції.

Поняття еластичності було введене Альфредом Маршаллом, лідером кембріджської школи маржиналізму, наприкінці XIX сторіччя у зв'язку з аналізом функції попиту. Зараз це поняття широко використовується для характеристики й інших економічних функцій.

Спочатку введемо деякі поняття. В економіці часто використовується поняття відносної зміни певної величини. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і точка $x \in (a, b)$, причому $f(x) \neq 0$. Візьмемо приріст аргументу Δx такий, що $x + \Delta x \in (a, b)$. Відношення $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}$ називається ***відносним зміненням функції*** $y = f(x)$ у точці x, що обумовлено зміненням аргументу Δx. Відносну зміну величини часто виражають у відсотках

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)} \cdot 100\%.$$

Розглянемо відношення

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x) \cdot \Delta x},$$

яке показує відносне змінення функції $y = f(x)$ в точці x, що припадає на одну одиницю змінення аргументу. Припустимо, що існує скінченна похідна $f'(x)$, тоді існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x) \cdot \Delta x} = \frac{1}{f(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Відношення $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ називається ***швидкістю відносної зміни функції*** $y = f(x)$ в точці x. У випадку, коли аргумент функції інтерпретується як час, то швидкість відносної зміни функції називають темпом приросту функції. Якщо Δx достатньо мале, то дане відношення наближено дорівнює швидкості відносної зміни функції у точці x:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x) \cdot \Delta x} \approx \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

У тому випадку, коли одиниці вимірювання аргументу x такі, що Δx (яке дорівнює одиниці) можна вважати достатньо малим зміненням x, то швидкість відносного змінення функції наближено дорівнює відносному зміненню функції при зміненні аргументу на одиницю.

Нехай точка $x \in (a, b)$ така, що $x \neq 0$. Візьмемо таке Δx, що $x + \Delta x \in (a, b)$, і розглянемо відносне змінення аргументу у точці x: $\frac{\Delta x}{x}$. Тоді величина

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x}$$

визначає відносну зміну функції, що припадає на одиницю відносної зміни аргументу.

Нехай задана функція $y = f(x)$, для якої існує похідна $y' = f'(x)$. **Еластичністю функції** $y = f(x)$ відносно змінної x називають границю відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} f'(x).$$

Її позначають $E_x(y)$.

Отже,

$$E_x(y) = \frac{x}{y} f'(x) = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}.$$

Величину $E_x(y)$ при заданому значенні x називають також показником, або коефіцієнтом, еластичності. Еластичність за аргументом x визначає наближений відносний приріст функції (у відсотках), що відповідає відносному приросту незалежної змінної на 1%.

Еластичність функції застосовується для аналізу попиту і споживання. Наприклад, еластичність попиту y відносно ціни x (або прибутку x) – коефіцієнт, що показує наближено, на скільки відсотків зміниться попит (обсяг споживання) за умови зміни ціни (або прибутку) на 1%. Якщо еластичність попиту (за абсолютною величиною) $|E_x(y)| > 1$, то попит вважають еластичним, якщо $|E_x(y)| = 1$ - нейтральним, якщо $|E_x(y)| < 1$ - нееластичним відносно ціни (або прибутку). Взагалі, високий коефіцієнт еластичності означає слабкий ступінь задоволення потреби; низький – вказує на більшу потребу в даному товарі.

Приклад. Ціна за одиницю товару представлена функцією $P(Q)$:

$$P(Q) = 2400 - 0{,}2Q,$$

де P вимірюється в гривнях, Q – кількість одиниць товару, що користується попитом у споживачів. Фірма хоче визначити еластичність попиту для кількості випуску товару 2000 одиниць.

Маємо

$$P(200)=2400\text{-}0{,}2\cdot 2000=2000.$$

Далі,

$$\frac{dP}{dQ} = -0{,}2; \quad E_P = \frac{dP}{dQ} : \frac{P}{Q} = -0{,}2 : \frac{2000}{2000} = -0{,}2.$$

Значить, якщо ціну однієї одиниці товару зменшити на 0,2%, то попит на товар збільшиться приблизно на 1% (з 2000 одиниць збільшиться до 2020 одиниць).

На цьому прикладі бачимо, що можна розглядати і обернену залежність:

$$E_Q = \frac{dQ}{dP} : \frac{Q}{P} = \frac{1}{E_P}.$$

Тоді для нашого прикладу маємо:

$$E_P = \frac{1}{-0{,}2} = -5.$$

Це означає, що збільшення ціни на 1 одиницю товару на 1% призведе до зменшення попиту на товар приблизно на 5% (з 2000 одиниць зменшиться до 1900 одиниць).

Приклад. Нехай сукупні витрати виробництва залежно від кількості x одиниць продукції, що випускається, визначаються функцією $TC(x) = 20x - \frac{x^2}{20}$. Знайдемо граничні витрати виробництва MC і коефіцієнт еластичності, якщо обсяг продукції складає 100 одиниць та 20 одиниць.

1. Граничні витрати виробництва є похідна від функції витрат

$$MC(x) = TC'(x) = 20 - \frac{x}{10}.$$

При відповідних обсягах продукції:

$$MC(100) = TC'(100) = 20 - \frac{100}{10} = 10;$$

$$MC(20) = TC'(20) = 20 - \frac{20}{10} = 18.$$

Отже, чим більше виробляється продукції, тим повільніше зростають витрати на її випуск.

2. Еластичність функції

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}.$$

У нашому випадку $y(x) = TC(x) = 20x - \frac{x^2}{20}$;

$$E_x(TC) = \frac{x}{20x - \frac{x^2}{20}} \left(20 - \frac{10}{x} \right) = \frac{2(200 - x)}{400 - x};$$

$$E_{100}(TC) = \frac{2 \cdot 100}{300} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67; \quad E_{20}(TC) = \frac{2 \cdot 180}{380} = \frac{18}{19} \approx 0{,}95.$$

Отже, якщо при обсягу випуску 100 одиниць кількість продукції, що випускається, збільшиться на 1%, тобто на 1, то відносні витрати виробництва зростуть приблизно на 0,67%; при обсягу 20 одиниць збільшення випуску продукції на 1% призведе до збільшення відносних витрат приблизно на 0,95%.

Застосування похідної в економічній теорії.

Розглянемо економічну інтерпретацію теореми Ферма. Один із базових законів теорії виробництва звучить так: ***оптимальний для виробника рівень випуску товару визначається рівністю граничних витрат і граничного доходу.***

Тобто рівень випуску x_0 є оптимальним для виробника, якщо $MC\left(x_0\right)=MR\left(x_0\right)$, де MC – граничні витрати, а MR – граничний дохід.

Позначимо функцію прибутку $Z(x)$. Тоді $Z(x) = TR(x) - TC(x)$, де $TR(x)$ – сукупний дохід від виробництва x одиниць продукції, а $TC(x)$ – сукупні витрати. Очевидно, що оптимальним рівнем виробництва є такий, при якому прибуток максимальний, тобто такий обсяг випуску x_0, при якому функція $Z(x)$ має екстремум (максимум). За теоремою Ферма в цій точці $Z'(x)=0$. Але $Z'(x)=TR'(x)-TC'(x)$, тому $TR'(x_0)=TC'(x_0)$, тобто $MC\left(x_0\right)=MR\left(x_0\right)$.

Друге важливе поняття теорії виробництва – це рівень найбільш економічного виробництва, якому відповідають середні витрати (average cost) на виробництво товару мінімальні. Відповідний економічний закон говорить: ***рівень найбільш економічного виробництва визначається рівністю середніх та граничних витрат.***

Отримаємо цю умову як наслідок теореми Ферма. Середні витрати $AC(x)$ визначаються як $\dfrac{TC(x)}{x}$, тобто витрати на виробництво товару, поділені на вироблену кількість цього товару. Мінімум цієї величини досягається в критичній точці функції $y = AC(x)$, координати якої визначаються з достатньої умови екстремуму: $AC'(x)=\dfrac{TC'\cdot x-TC}{x^2}=0$. Звідки $TC'\cdot x-TC=0$, або $TC'=\dfrac{TC}{x}$, тобто $MC(x) = AC(x)$.

Поняття опуклості функції також знаходить свою інтерпретацію в економічній теорії.

Один з найбільш відомих економічних законів – ***закон спадної дохідності*** – звучить таким чином: зі збільшенням виробництва обсяг додаткової продукції, що отримана на кожну нову одиницю ресурсу (трудового, технологічного і т. д.), з деякого моменту зростає більш повільно, ніж зростає фактор виробництва.

Іншими словами, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, де Δx - приріст ресурсу, а Δy – приріст випуску продукції, зменшується при збільшенні x. Таким чином, закон спадної дохідності формулюється так: функція $y = f(x)$, що виражає залежність випуску продукції від вкладеного ресурсу, є функцією опуклою.

Іншим базовим поняттям економічної теорії є функція корисності $U = U(x)$, де x – товар, а U – корисність. Ця величина дуже суб'єктивна для кожного окремого споживача, але досить об'єктивна для суспільства у цілому.

Закон спадної корисності звучить так: зі зростанням кількості товару додаткова корисність від кожної нової його одиниці з деякого моменту спадає. Очевидно, що цей закон можна подати так: ***функція корисності є опуклою.***

Приклад. Підприємство виробляє x одиниць продукції за ціною $P(x) = 50 - \frac{1}{10}x$, а сукупні витрати виробництва задаються функцією

$$TC(x) = \frac{1}{50}x^2 + 14x + 800.$$

Знайти оптимальний для підприємства обсяг випуску продукції та відповідний йому максимальний випуск.

Нехай $TR(x)$ – валовий дохід, $Z(x)$ – прибуток від реалізації x одиниць продукції за ціною $P(x)$. Тоді

$$TR(x) = x \cdot P(x);$$

$$Z(x) = TR(x) - TC(x),$$

де $P(x)$, $TC(x)$ – відомі функції.

Для розв'язання задачі слід дослідити функцію $Z(x)$ на екстремум. При цьому прибуток буде максимальним для такого обсягу x випуску продукції, для якого $Z'(x) = 0,\ Z''(x) < 0.$

Проведемо це дослідження.

1. Формуємо $Z(x)$, знаходимо $Z'(x)$ і, розв'язавши рівняння $Z'(x)=0$, знаходимо критичну точку. Врахуємо, що

$$TR(x)=50x-\frac{1}{10}x^2,\quad TC(x)=\frac{1}{50}x^2+14x+800;$$

$$Z(x)=TR(x)-TC(x);$$

$$Z'(x)=TR'(x)-TC'(x)=0;\quad TR'(x)=TC'(x);$$

$$50-\frac{1}{5}x=\frac{1}{25}x+14;\quad \frac{6}{25}x=36;\quad x_0=150 \text{ – критична точка.}$$

2. Знаходимо $Z''(x)$ і визначаємо її знак при x_0 = 150:

$$Z''(x_0)=TR''(x_0)-TC''(x_0)=-\frac{1}{5}-\frac{1}{25}=-\frac{6}{25}<0.$$

Отже, x_0 = 150 – точка максимуму функції $Z(x)$, тобто оптимальний обсяг виробництва складає 150 одиниць продукції.

3. Знаходимо максимальний прибуток виробництва, тобто $Z_{\max}=Z(150)$.

При x_0 = 150 ціна $P=50-\dfrac{1}{10}\cdot 150=35;$ валовий доход $TR=35\cdot 150=5250.$

Витрати виробництва

$$TC=\frac{1}{50}\cdot 150^2+14\cdot 150+800=450+2100+800=3350;$$

максимальний прибуток від продажу $Z_{\max}=5250-3350=1900.$

Розглянемо ще декілька економічних задач, що використовують поняття похідної.

Приклад. Економічним відділом заводу встановлено, що при виробництві x одиниць продукції щотижневі повні витрати $\boldsymbol{V(x)}$ визначаються залежністю $\boldsymbol{V(x)=2000+40x}$ (грн), а дохід $\boldsymbol{D(x)}$ - залежністю $\boldsymbol{D(x)=100x-0{,}001x^2}$ (грн). Щотижня завод випускає 3000 одиниць продукції, але бажає збільшити випуск до 3100 одиниць. Обчислити прирости витрат, доходу та прибутку. Знайти величину середнього приросту прибутку. Прокоментувати отримані результати.

Розв'язування. Обчислюємо прирости витрат та доходу при $\Delta x = 3100 - 3000 = 100$:

$$\Delta V = V(3100) - V(3000) = 2000 + 40 \cdot 3100 - 2000 - 40 \cdot 3000 =$$

$$= 4000 \text{(грн)}.$$

$$\Delta D = D(3100) - D(3000) = 100 \cdot 3100 - 0,001(3100)^2 -$$

$$-100 \cdot 3000 + 0,001(3000)^2 = 9390 \text{(грн)}.$$

Приріст прибутку обчислюємо як різницю приростів доходу та витрат:

$$\Delta P = \Delta D - \Delta V = 9390 - 4000 = 5390 \text{(грн)}.$$

Зауважимо, що цей приріст можна знайти, визначивши функцію прибутку:

$$P(x) = D(x) - V(x) = -2000 + 60x - 0,001x^2 \text{(грн)}.$$

Величина середнього приросту прибутку становить $\dfrac{\Delta P}{\Delta x} = \dfrac{5390}{100} = 53,9$ (грн).

Отже, при збільшенні випуску з 3000 до 3100 одиниць дохід зросте на 9390 грн, витрати – на 4000 грн, загальний дохід – на 5390 грн. Дохід від випуску кожної із наступних 100 одиниць продукції в середньому становить 53,9 грн.

Приклад. Функція витрат V (грн) підприємства при виробництві x одиниць продукції має вигляд $V(x) = 50x - 0,01x^2$, $x \in [10;2500]$. Знайти при виробництві $x_1 = 100$ та $x_2 = 1000$ одиниць продукції: а) середні витрати; б) додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції; в) граничні (маржинальні) витрати. Охарактеризувати отримані результати.

Розв'язування. а) Визначимо функцію середніх витрат:

$M(x) = \dfrac{V(x)}{x} = 50 - 0,01x$. Обчислюємо середні витрати при виробництві $x_1 = 100$ та $x_2 = 1000$ одиниць продукції:

$$M(100) = 50 - 0,01 \cdot 100 = 49 \text{(гр.од)};$$
$$M(1000) = 50 - 0,01 \cdot 1000 = 40 \text{(гр.од)}.$$

б) Додаткові витрати на виробництво додаткової одиниці продукції:

$$\Delta V(100)=V(101)-V(100)=50\cdot 101-0{,}01(101)^2-$$

$$-50\cdot 100+0{,}01(100)^2=47{,}99 \text{(гр.од)}.$$

$$\Delta V(1000)=V(1001)-V(1000)=50\cdot 1001-0{,}01(1001)^2-$$

$$-50\cdot 1000+0{,}01(1000)^2=29{,}99 \text{(гр.од)}.$$

в) Для знаходження граничних (маржинальних) витрат спочатку знайдемо похідну функції витрат $V'(x)=50-0{,}02x$, а потім їх відповідні значення:

$$V'(100)=50-0{,}02\cdot 100=48 \text{(гр.од)};$$

$$V'(1000)=50-0{,}02\cdot 1000=30 \text{(гр.од)}.$$

Приклад показує, що при збільшенні випуску середні (питомі) витрати (або витрати на одиницю продукції) зменшуються. Окрім того, бачимо, що граничні витрати приблизно дорівнюють витратам на випуск наступної одиниці продукції.

Економісти часто оперують поняттям еластичності функції. Як відомо, еластичність функції $y=f(x)$ відносно змінної x є показник $E_x(y)=\dfrac{y'}{\left(y/x\right)}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{x}{y}=\dfrac{dy}{y}:\dfrac{dx}{x}$, який приблизно дорівнює процентній зміні значень функції при зміні аргумента на 1%.

Приклад. На ринку деякого товару залежності обсягів (в одиницях) попиту $D(demand)$ та пропозиції $S(supply)$ від ціни $p(price)$ за одиницю товару визначаються формулами: $D(p)=500-2p^2$, $S(p)=200+p^2$. Знайти еластичності попиту $E_p(D)$ та пропозиції $E_p(S)$ відносно рівноважної ціни p_o. Охарактеризувати отримані результати.

Розв'язування. Спочатку знаходимо рівновжну ціну p_o, розв'язуючи рівняння: $D(p)=S(p) \Leftrightarrow 500-2p^2=200+p^2 \Leftrightarrow p^2=100$, допустимим розв'язком якого, очевидно, є $p_o=10$.

Знаходимо еластичності: попиту $E_p(D)=\dfrac{D'}{\left(D/p\right)}=\dfrac{-4p}{\dfrac{500}{p}-2p}$; при

$p_o=10$ дістанемо $E_{p_0}(D)=\dfrac{-4\cdot 10}{\dfrac{500}{10}-2\cdot 10}=-\frac{4}{3}$;

пропозиції $E_p(S)=\dfrac{S'}{\left(S/p\right)}=\dfrac{2p}{\dfrac{200}{p}+p}$; при $p_o=10$ дістанемо

$E_{p_0}(S)=\dfrac{2\cdot 10}{\dfrac{200}{10}+10}=\frac{2}{3}$.

Результати свідчать про те, що, наприклад, при зростанні ціни від рівноважної $p_o=10$ на 1% попит зменшиться приблизно на 4/3%, а пропозиція зросте приблизно на 2/3%.

Розглянемо деякі оптимізаційні задачі (задачі пошуку екстремальних значень функцій).

Приклад. Функція повних витрат має вигляд: $y=x^3-6x^2+15x$, де x - обсяг виробництва продукції. При якому обсязі виробництва середні витрати будуть мінімальними? Якими будуть граничні витрати при знайденому обсязі виробництва?

Розв'язування. Насамперед визначимо функцію середніх витрат:

$M(x)=\dfrac{y(x)}{x}=x^2-6x+15$, область визначення якої (згідно з умовами задачі) $D(M): x\in[0;+\infty)$. Дослідимо функцію на екстремум. Похідна $M'=2x-6$ визначена для будь-яких x, тому серед критичних будуть лише точки, в яких похідна дорівнює нулю, тобто $2x-6=0 \Leftrightarrow x_0=3$ - критична точка. Оскільки похідна другого порядку

$M'' = 2 > 0$, то за теоремою (друга достатня умова екстремума) $x_0 = 3$ - точка мінімума функції середніх витрат, причому цей локальний мінімум є і глобальним (найменше значення функції на $[0;+\infty)$. Отже, мінімальні середні витрати становлять $M_{min} = M(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 15 = 6$ при випуску 3 одиниць продукції. Граничні витрати при даному обсязі випуску, очевидно, дорівнюють $y'(3) = 3(3)^2 - 12 \cdot 3 + 15 = 6$.

Приклад. Компанія виготовляє і реалізує вироби по 2 грн за кожний. Дослідженнями встановлено, що сума $y_В$ (грн) загальних щотижневих витрат на виробництво x (тисяч штук) визначається залежністю: $y_В = 1000 + 1300x + 100x^2$ (грн). Визначити та дослідити залежність щотижневого прибутку $P = y_Д - y_В$ (грн), де $y_Д$ (грн) – доход від реалізації виробленої продукції. При яких об'ємах виробництва забезпечується: а) беззбитковість; б) максимальний прибуток?

Розв'язування. Визначаємо функцію щотижневого прибутку:

$$P(x) = 2 \cdot 1000x - (1000 + 1300x + 100x^2) = -100x^2 + 700x - 1000$$

із областю визначення $D(P): x \in [0;+\infty)$.

Для знаходження об'ємів виробництва, які б забезпечували беззбитковість, потрібно розв'язати рівняння $P(x) = 0 \Leftrightarrow -100x^2 + 700x - 1000 = 0$. Таким чином, беззбитковість забезпечується при випуску від 2 до 5 тисяч одиниць продукції (оскільки при $x \in [2;5]$ $P(x) \geq 0$). Для знаходження максимального прибутка проведемо дослідження на екстремум. Похідна $P' = -200x + 700$ всюди визначена, тому для знаходження критичних точок розв'язуємо рівняння $P' = 0 \Leftrightarrow -200x + 700 = 0$. Критична точка $x_0 = 3,5$ є точкою максимума, оскільки $P'' = -200 < 0 \ \forall x$. Отже, максимальний прибуток $P_{max} = P(3,5) = -100(3,5)^2 + 700 \cdot 3,5 - 1000 = 225$ (грн) досягається при випуску 3500 одиниць продукції.

Приклад. Продуктивність праці робітників цеху визначається функцією $y = 23,94x \cdot e^{-0,4x}$, де y - обсяг продукції, виготовленої за одиницю часу, x (год.) - час, що відраховується від початку роботи. Визначити момент часу, в який продуктивність праці максимальна, і знайти цю максимальну продуктивність.

Розв'язування. Знаходимо найбільше значення функції $y = 23{,}94x \cdot e^{-0{,}4x}$ на замкненому проміжку $x \in [0;8]$. Знаходимо похідну та її критичні точки, що належать проміжку:

$y' = 23{,}94 \cdot e^{-0{,}4x}(1 - 0{,}4x)$. Оскільки показникова функція набуває лише додатних значень, то критична точка визначається із умови $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}4x = 0$. Критична точка $x_0 = 2{,}5 \in [0;8]$. Серед значень

$y(0) = 0,\ y(2{,}5) = 23{,}94 \cdot 2{,}5 \cdot e^{-1} \approx 22,\ y(8) = 23{,}94 \cdot 8 \cdot e^{-3{,}2} \approx 7{,}8$ очевидно, найбільшим є 22. Отже, максимальна продуктивність становить $y_{max} = y(2{,}5) \approx 22$ одиниць продукції за годину і досягається через 2,5 години після початку робочої зміни.

Тема 17. Похідна функції. Геометричний, економічний сенс похідної. Зв'язок з неперервністю. Арифметичні теореми. Похідна складеної, оберненої функції. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Логарифмічне диференціювання, похідна неявної функції. Диференціал. Геометричний сенс, інваріантність форми диференціалу. Похідні та диференціали вищих порядків.

Похідна функції. Геометричний, економічний сенс похідної. Зв'язок з неперервністю.

Нехай функція $y = f(x)$ задана на деякій множині X. Виберемо точку $x_0 \in X$ і надамо приріст аргументу $\Delta x = x - x_0$ $(\Delta x \neq 0)$. Тоді функція $y = f(x)$ набуде приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ за аргументом x в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до віповідного приросту аргументу, коли останній прямує до нуля (якщо розглянута границя існує).

Позначається: $y'(x_0) = \dfrac{df(x_0)}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Нагадаємо геометричний, фізичний і економічний зміст похідної:

1. Похідна $y'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіку функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 .
2. Якщо функція $y = s(t)$ визначає залежність пройденого матеріальною точкою шляху s на момент часу t (закон рівномірного руху точки), то похідна $s'(t_0)$ дорівнює швидкості точки в момент t_0.
3. Якщо функція $y = f(x)$ визначає залежність витрат виробництва f від об'єму x виробленої продукції, то похідна $f'(x_0)$ дорівнює граничним витратам виробництва (приблизно рівним витратам на випуск $x_0 + 1$-ої одиниці продукції).

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_0, то вона називається **диференційовною** в цій точці.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Доведення: Так як функція $y = f(x)$ має похідну в точці, то за означенням існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$. За теоремою про зв'язок збіжної та нескінченно малої при $\Delta x \to 0$ величина $\frac{\Delta y}{\Delta x} - y'(x_0) = \alpha(\Delta x)$ - НМ. Звідси $\Delta y = y'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ - НМ за властивостями НМ.

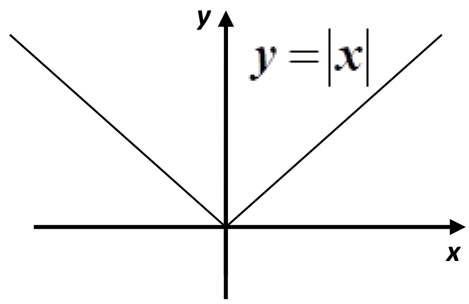
Отримали $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а за означенням це означає, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0. Теорема доведена.

Зауваження: Обернене твердження взагалі кажучи невірне. Функція може бути неперервною в точці, але похідна в цій точці може не існувати.

Наприклад, розглянемо функцію $y = |x|$. Ця функція в точці $x_0 = 0$ неперервна, але похідна в цій точці не існує. Покажемо це:

$\Delta x = x - 0 = x$, а

$\Delta y = y(x) - y(0) = |x| - 0 = |x|$



За означенням:

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

При розкритті модуля доведеться знаходити односторонні границі:

при $x > 0$ $|x| = x$, тому $y'(0+0) = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1$;

при $x < 0$ $|x| = -x$, тому $y'(0-0) = \lim\limits_{x \to 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1$.

Односторонні границі існують, але не співпадають, тому границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не існує (порушується єдиність), а отже, не існує похідна функції $y = |x|$ в точці $x_0 = 0$.

Приклад показує, що графіком диференційовної функції повинна бути **гладка крива** (у якої немає кутових точок).

Арифметичні теореми. Похідна складеної, оберненої функції. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Логарифмічне диференціювання, похідна неявної функції.

Теорема 1. Нехай функції $u(x)$, $v(x)$ диференційовні в точці x_0. Тоді їх алгебраїчна сума $u \pm v$ також диференційовна в точці x_0, причому $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Доведення. За означенням: $(u \pm v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \pm v)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) \pm v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) \pm v(x_0))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \pm (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x_0) \pm \Delta v(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) =$$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'$, оскільки $u(x)$, $v(x)$ диференційовні в точці x_0. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай функції $u(x)$, $v(x)$ диференційовні в точці x_0. Тоді їх добуток $u \cdot v$ також диференційовна в точці x_0 функція, причому $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Доведення. За означенням: $(u \cdot v)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) \cdot v(x_0))}{\Delta x}.$$

В чисельнику віднімемо і додамо добуток $u(x_0) \cdot v(x_0 + \Delta x)$, перегрупуємо доданки та винесемо спільні множники:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) \cdot v(x_0 + \Delta x) + u(x_0) \cdot (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x_0) \cdot v(x_0 + \Delta x) + u(x_0) \cdot \Delta v(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x_0 + \Delta x) + u(x_0) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) =$$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v'$, оскільки $u(x)$, $v(x)$ диференційовні в точці x_0 (а значить – неперервні, тому $v(x_0 + \Delta x) \to v(x_0)$). Теорему доведено.

Наслідок. Сталий множник виноситься за знак похідної, тобто:

$$\left(c\cdot v\right)^{'}=c\cdot v^{'}\ ,\quad c=const.$$

Теорема 3. Нехай функції $u(x)$, $v(x)$ диференційовні в точці x_0 і $v(x_0)\neq 0$. Тоді їх частка $\dfrac{u}{v}$ також диференційовна в точці x_0 функція, причому $\left(\dfrac{u}{v}\right)^{'}=\dfrac{u^{'}\cdot v-u\cdot v^{'}}{v^2}$.

Теорема (похідна складеної функції). Нехай складена функція $y=f(\varphi(x))$ визначена на множині X. Якщо функція $\varphi(x)$ диференційовна в точці x_0, а зовнішня функція $y=f(\varphi)$ диференційовна в точці $\varphi_0=\varphi(x_0)$, то складена функція $y=f(\varphi(x))$ диференційовна в точці x_0 і її похідна знаходиться за формулою:

$$y'(x_0)=f'_{\varphi}(\varphi_0)\cdot\varphi^{'}_{x}(x_0),$$

тобто похідна складеної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції на похідну її аргументу (внутрішньої функції).

Доведення. За означенням $y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Поділимо і домножимо на приріст $\Delta\varphi$, який прямує до нуля при $\Delta x\to 0$ (це випливає із диференційовності, а значить, і неперервності функції $\varphi(x)$). Дістанемо:

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta\varphi}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=$$

$=f'_{\varphi}(\varphi_0)\cdot\varphi^{'}_{x}(x_0)$. Теорему доведено.

Теорема (про похідну оберненої функції). Якщо функція $y=f(x)$ диференційовна в точці x_0 і $f'(x_0)\neq 0$, то обернена функція $x=\varphi(y)$:

1) існує в деякому околі точки y_0 $\left(y_0=f(x_0)\right)$;

2) диференційовна в точці y_0 ,причому $\varphi'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, тобто похідна оберненої функції дорівнює оберненій величині похідної даної функції.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. Похідна сталої дорівнює нулю: $(c)'=0$.

2. Похідна степеневої функції: $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, зокрема $(x)'=1$.

3. Похідна показникової функції: $\left(a^x\right)'=a^x\cdot \ln a$, зокрема $\left(e^x\right)'=e^x$.

4. Похідна логарифмічної функції: $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\cdot \ln a}$, зокрема $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

Похідні тригонометричних функцій. **5.** $(\sin x)'=\cos x$.

6. $(\cos x)'=-\sin x$. **7.** $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **8.** $(ctgx)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

Похідні обернених тригонометричних функцій.

9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **10.** $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$. **12.** $(arcctgx)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$.

Доведемо деякі із табличних похідних. При цьому будемо користуватися означенням похідної $y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ та доведеними вище теоремами.

1. Розглянемо похідну сталої функції $y=c$. За означенням:

$$c' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

5. Розглянемо похідну функції $y = \sin x$. За означенням:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$: із чудової границі випливає, що функція $\sin\frac{\Delta x}{2}$ - НМ, еквівалентна аргументу $\frac{\Delta x}{2}$, а $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$. Тому:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cdot\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x$$

.

7. Розглянемо похідну функції $y = tgx$. За арифметичними теоремами та враховуючи похідні функцій $\sin x, \cos x$, дістанемо:

$$(tg\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

11. Розглянемо похідну функції $y = arctgx$, яка є оберненою для функції $x = tgy$. За теоремою про похідну оберненої функції, враховуючи, що $x' = (tgy)' = \frac{1}{\cos^2 y}$, маємо:

$$y' = \frac{1}{x'} = \cos^2 y = \cos^2(arctgx) = \frac{1}{tg^2(arctgx)+1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Приклади:

Знайти похідні функцій:

а) $y = x^3 \sin 3x + 3^{arctg\sqrt{x}}$.

Розв'язування: $y' = \left(x^3 \sin 3x + 3^{arctg\sqrt{x}} \right)' =$ за арифметичними теоремами (похідна суми та добутку функцій)

$$= \left(x^3 \sin 3x \right)' + \left(3^{arctg\sqrt{x}} \right)' = \left(x^3 \right)' \sin 3x + x^3 \left(\sin 3x \right)' + \left(3^{arctg\sqrt{x}} \right)' =$$

за таблицею та правилом диференціювання складеної функції, враховуючи, що зовнішніми є функції $\sin\varphi, 3^{\varphi}$, маємо

$$= 3x^2 \cdot \sin 3x + x^3 \cos 3x \cdot (3x)' + 3^{arctg\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \left(arctg\sqrt{x} \right)' =$$

залишились: похідна $(3x)' = 3(x)' = 3$, а також похідна складеної функції, у якої зовнішня функція $arctg\varphi$

$$= 3x^2 \cdot \sin 3x + x^3 \cos 3x \cdot 3 + 3^{arctg\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1} \left(\sqrt{x} \right)' =$$

оскільки похідна степеневої функції $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2} \right)' = \frac{1}{2} x^{1/2 - 1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, остаточно дістаємо

$$= 3x^2 \cdot \sin 3x + x^3 \cos 3x \cdot 3 + 3^{arctg\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

б) $y = 6 \arcsin^5 3x - \frac{\ln\sqrt{x^2+3}}{ctg\, 2x}$.

Розв'язування: $y' = \left(6 \arcsin^5 3x - \frac{\ln\sqrt{x^2+3}}{ctg\, 2x} \right)' =$ за арифметичними теоремами (похідна різниці та частки)

$$=\left(6\arcsin^5 3x\right)' - \left(\frac{\ln\sqrt{x^2+3}}{ctg\,2x}\right)' =$$

$$=6\left(\arcsin^5 3x\right)' - \frac{\left(\ln\sqrt{x^2+3}\right)' ctg\,2x - \ln\sqrt{x^2+3}\left(ctg\,2x\right)'}{ctg^2\,2x} =$$

за таблицею та правилом диференціювання складеної функції, враховуючи, що зовнішніми є функції $\varphi^5, \ln\varphi, ctg\varphi$, маємо

$$=6\cdot 5\arcsin^4 3x\left(\arcsin 3x\right)' -$$

$$-\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\left(\sqrt{x^2+3}\right)' ctg\,2x - \ln\sqrt{x^2+3}\cdot\frac{-1}{\sin^2 2x}\left(2x\right)'}{ctg^2\,2x} =$$

за теоремою про похідну складеної функції (зовнішні функції: $\arcsin\varphi, \sqrt{\varphi}$)

$$=30\arcsin^4 3x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(3x\right)^2}}\left(3x\right)' -$$

$$-\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\left(x^2+3\right)' ctg\,2x - \ln\sqrt{x^2+3}\cdot\frac{-1}{\sin^2 2x}\cdot 2}{ctg^2\,2x} =$$

остаточно, із врахуванням спрощень, дістаємо

$$=90\arcsin^4 3x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} - \frac{\frac{x\,ctg\,2x}{x^2+3} - \frac{-2\ln\sqrt{x^2+3}}{\sin^2 2x}}{ctg^2\,2x}.$$

Похідна неявної функції, логарифмічне диференціювання.

Нехай значення змінних x,y зв'язані між собою рівнянням $F(x,y)=0$. Якщо функція $y=f(x)$ визначена на деякій множині і при підстановці у рівняння $F(x,y)=0$ перетворює його в тотожність, то кажуть, що **функція** $y=f(x)$ **задана неявно** і записують $F(x,y)=0$.

Відзначимо, що будь-яку явно задану функцію $y=f(x)$ можна записати у неявному вигляді $y-f(x)=0$.

При диференціюванні неявної функції потрібно користуватись теоремою про похідну складеної функції, враховуючи, що $y=y(x)$ є функцією аргумента x. В якості приклада розглянемо так зване **логарифмічне диференціювання**, яке застосовується для знаходження похідної степенево-показникової функції $y=U(x)^{V(x)}$.

Знайти похідну функції $y=(x)^{tgx}$.

Проблемою тут є те, що незрозуміло, яку із функцій вважати зовнішньою: степеневу чи показникову. Тому, спочатку логарифмують (як правило, за натуральною основою) обидві частини рівності (при $x>0$):

$$\ln y=\ln(x)^{tgx} \Leftrightarrow \ln y=tgx\cdot\ln x.$$

Отримали неявну функцію, яку диференціюємо:

$$\left(\ln y\right)'=\left(tgx\cdot\ln x\right)' \Leftrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln x+\frac{tgx}{x}.$$

Звідси $y'=y\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln x+\dfrac{tgx}{x}\right)=\left(x\right)^{tgx}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln x+\dfrac{tgx}{x}\right)$.

Зауважимо, що логарифмічне диференціювання часто застосовують і при економіко-математичному моделюванні.

Диференціал. Геометричний сенс, інваріантність форми диференціалу. Похідні та диференціали вищих порядків.

Розглянемо функцію $y=f(x)$, яка визначена в околі точки x_0 і має похідну в точці x_0, тобто існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x_0)$. Звідси, за теоремою про зв'язок збіжної та нескінченно малої:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$$ або

$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x)$ - НМ при $\Delta x \to 0$.

Означення. Диференціалом функції в даній точці x_0 називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції в цій точці. Для функції, яка має похідну, диференціал дорівнює добутку похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 на довільний приріст аргументу в цій точці.

Позначається: $dy(x_0) = df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Наслідок. Якщо $f(x) = x$, то $dx = \Delta x$, тобто диференціал незалежної змінної дорівнює довільному приросту цієї змінної. Тому $df(x) = f'(x)dx$. Це дозволяє сприймати запис $f'(x) = \frac{df}{dx}$ не тільки як позначення похідної, а і як відношення диференціалів (що часто використовується).

Основні властивості диференціала.

1. $dc = 0$, де $c = const$
2. $d(cu) = c \cdot du$
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$
4. $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, \ (v \neq 0)$

Наприклад, знайти диференціал функції:

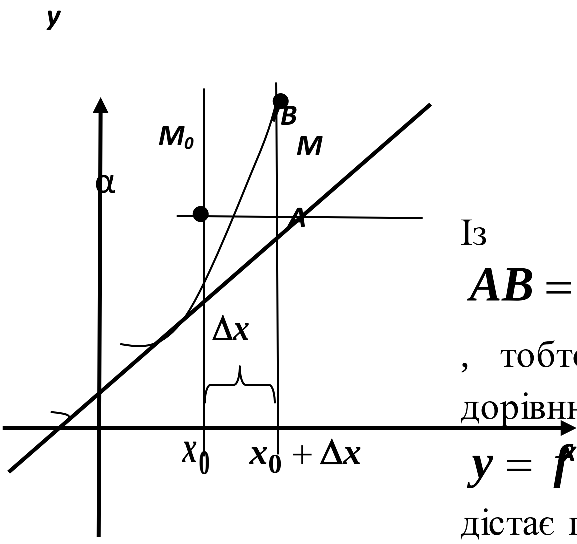
$$y = \left(2x^3 + 5\right)^4$$

$$dy = \left((2x^3 + 5)^4\right)' \cdot dx$$

$$dy = 4(2x^3 + 5)^3 \cdot 6x^2 \cdot dx$$

$$dy = 24x^2(2x^3 + 5)^3 \cdot dx$$

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0. Тоді в точці $(x_0, f(x_0))$ графік функції має дотичну, що утворює кут α, $tg\alpha = f'(x_0)$ із додатним напрямом осі OX:



Із рисунка видно, що $AB = M_0A \cdot tg\alpha = f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$, тобто диференціал функції в точці x_0 дорівнює приросту дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x_0, коли незалежна змінна дістає приріст Δx. Це є **геометричний зміст** диференціала функції.

Аналізуючи рисунок, можна помітити, що $AM = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, тобто, має місце наближена рівність $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$, і вона тим точніша, чим менше приріст аргумента Δx.

Таким чином, при досить малому Δx можна записати наближену рівність:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Цю формулу часто використовують при наближених обчисленнях.

Нехай складена функція $y = f(\varphi(x))$ визначена на множині X. Знайдемо її диференціал:

$$dy = \left(f(\varphi(x)) \right)'_x dx = f'_\varphi \cdot \varphi'_x dx = f'_\varphi \cdot d\varphi.$$

Ця формула виражає **інваріантність форми диференціалу** першого порядку. Вона стверджує, що диференціал складеної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції на диференціал її аргумента (внутрішньої функції). Але на відміну від звичайної функції, у цій формулі не можна замінити диференціал $d\varphi$ на приріст $\Delta\varphi$ (оскільки це функція, а не аргумент).

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякій множині, а $f'(x)$ - її похідна, яка, в свою чергу, є функцією аргумента x. Для цієї функції $f'(x)$ можна визначити **похідну другого порядку**, якщо вона існує:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f'}{\Delta x}.$$

Означення. Похідною n*–го* порядку називається похідна від похідної $(n-1)$*–го* порядку і позначається $f^{(n)}(x)$, тобто

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Приклад.

Знайти похідні вищих порядків для функції $y = x^4$

Розв’язування:

$$y' = 4x^3;\ y'' = 12x^2;\ y''' = 24x;\ y^{IV} = 24;\ y^{V} = 0.$$

Зауваження. Похідні $(n+1)$*–го* та більш високих порядків від многочленів n*–го* степеня тотожньо дорівнюють нулю.

Аналогічно визначаються диференціали вищих порядків. Наприклад, диференціал другого порядку:

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2.$$

Тема 18. Теорема Лагранжа, наслідки. Теорема Коші, правило Лопіталя. Критерій монотонності, наслідок. Екстремум функції. Необхідна умова екстремума. Перша достатня умова екстремума. Дослідження функцій на монотонність та екстремуми. Опуклість, угнутість, точки перегину. Друга достатня умова екстремума. Асимптоти. Повне дослідження функції.

Теорема Лагранжа, наслідки. Теорема Коші, правило Лопіталя.

Теорема (Лагранжа). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Тоді існує хоча б одна точка $c \in (a;b)$ така, що:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометрично це означає, що на графіку функції існує точка з абсцисою c, в якій дотична паралельна хорді. Із теореми безпосередньо випливає так звана формула Лагранжа (формула скінчених приростів):

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Наслідок 1. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Якщо похідна функції тотожньо дорівнює нулю, тобто $y' = 0\ \forall x \in (a;b)$, то функція на цьому відрізку є сталою $y = const$.

Наслідок 2. Для того, щоб диференційовні на деякому проміжку функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мали тотожно рівні похідні необхідно і достатньо, щоб ці функції відрізнялись лише на сталу величину, тобто:

$$\forall x \in (a;b):\ f'(x) = g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = const.$$

Теорема **(Коші).** Нехай функції $f(x), g(x)$ неперервні на сегменті $[a;b]$ і диференційовні на інтервалі $(a;b)$, причому $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a;b)$. Тоді існує хоча б одна точка $c \in (a;b)$ така, що:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Використовуючи теорему Коші, можна довести **правило Лопіталя.**

Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ диференційовні в околі точки x_0 (або при $x \to \infty$). Тоді:

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Приклад. Знайти границю:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\cos x}{x} = \left[\frac{\ln\cos 0}{0} \right] = \left[\frac{0}{0} \right]$$ за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\ln\cos x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Критерій монотонності, наслідок. Екстремум функції. Необхідна умова екстремума. Перша достатня умова екстремума. Дослідження функцій на монотонність та екстремуми.

Однією із характерних особливостей поведінки функції є її монотонність: зростання, неспадання, спадання, незростання. Розглянемо застосування методів диференціального числення для дослідження монотонності.

Теорема (критерій монотонності). Для того, щоб диференційовна на інтервалі $(a;b)$ функція $y = f(x)$ була неспадною (незростаючою) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб її похідна $y' = f'(x)$ була невід'ємною (недодатною) на $(a;b)$.

Доведення. Необхідність. Проведемо для неспадної функції. Виберемо довільні $x, \Delta x > 0$ так, щоб точки $x < x + \Delta x \in (a;b)$. Оскільки функція неспадна, то $f(x + \Delta x) \geq f(x)$, тому $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$, а $\frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$. Якщо ж довільні $x, \Delta x < 0$ такі, що точки $x > x + \Delta x \in (a;b)$, то із неспадання функції випливає $f(x + \Delta x) \leq f(x)$, тому $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0$, а $\frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$.

Для диференційовної функції існує границя $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\geq 0$ за однією із теорем порівняння. Необхідність доведено.

Достатність. Виберемо на інтервалі $(a;b)$ довільні точки $x_1<x_2$. На сегменті $[x_1;x_2]\subset(a;b)$ застосуємо формулу Лагранжа:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot\left(x_2-x_1\right),\quad c\in\left(x_2;x_1\right).$$

Так як $x_2-x_1>0$, а за умовами теореми $f'(c)\geq 0$, то $f(x_2)-f(x_1)\geq 0$. Отже, для будь-яких $x_2>x_1\in(a;b):\quad f(x_2)\geq f(x_1)$. За означенням функція неспадна на інтервалі $(a;b)$. Достатність доведено.

Наслідок. Із доведення достатності випливає наступне твердження (**достатня умова строгої монотонності**). Якщо на деякому інтервалі похідна $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), то функція $f(x)$ зростає (спадає) на цьому інтервалі.

Зауважимо, що знакосталість похідної не є необхідною умовою строгої монотонності. Наприклад, функція $y=x^3$ зростає на $(-\infty;+\infty)$, але в точці $x_0=0$ її похідна дорівнює нулю.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в точці $x=c$ та в деякому її околі.

Означення. Точка $x=c$ називається **точкою максимума (мінімума)** функції $y=f(x)$, якщо для всіх x із околу точки $x=c$ виконується:

$$f(x)<f(c)\quad\left(f(x)>f(c)\right).$$

Означення. Точки максимума та мінімума називають **точками екстремума** і кажуть, що функція має екстремуми (локальні) у цих точках.

Означення. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує називають **критичними** (критичними точками першої похідної або критичними точками першого порядку). Точки, в яких похідна існує і дорівнює нулю, ще називають **стаціонарними**.

Теорема (необхідна умова екстремума). Якщо функція $y=f(x)$ має в точці $x=c$ екстремум, то ця точка є критичною.

Наслідок. Якщо точка $x = c$ не є критичною, то функція в цій точці екстремума не має.

Висновок. Точки екстремума слід шукати лише серед критичних точок.

Але не будь-яка критична точка буде точкою екстремума (див. вище приклад функції $y = x^3$). Тому необхідні достатні умови.

Теорема (перша достатня умова екстремума). Якщо при переході аргументу через критичну точку похідна змінює знак, то ця критична точка є точкою екстремума. При цьому, якщо похідна змінює знак з плюса на мінус (з мінуса на плюс), то критична точка є точкою максимума (мінімума).

Попередні теореми дозволяють сформулювати наступну **схему дослідження функції на монотонність та екстремуми:**

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти похідну та її критичні точки.
3. Критичними точками розбити область визначення на інтервали, кінцями яких є кінці області визначення та критичні точки.
4. Визначити знак похідної на цих інтервалах.
5. Зробити висновок про монотонність та екстремуми.

Відмітимо, що результати досліджень зручно оформляти у вигляді таблиці.

Приклад. Дослідити функцію $y = x^4 - 4x^3$ на монотонність та екстремуми.

Розв'язування. 1. $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $y' = 4x^3 - 12x^2$. Похідна визначена при всіх x, тому серед критичних будуть лише точки, в яких похідна дорівнює нулю: $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$.

$D(y)$	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	0	$\searrow$	$y_{min} = -27$	$\nearrow$

3., 4.

$y'(-1)=4(-1)^3-12(-1)^2<0 \Rightarrow y'<0$ на інтервалі $(-\infty;0)$;

$y'(1)=4(1)^3-12(1)^2<0 \Rightarrow y'<0$ на інтервалі $(0;3)$;

$y'(4)=4(4)^3-12(4)^2>0 \Rightarrow y'>0$ на інтервалі $(3;+\infty)$.

5. Функція спадає на інтервалах $(-\infty;0)$ та $(0;3)$, а на інтервалі $(3;+\infty)$ функція зростає. В точці $x_1=0$ екстремуму немає. Точка $x_2=3$ - точка мінімуму функції, причому $y_{min}=y(3)=-27$.

Опуклість, угнутість, точки перегину. Друга достатня умова екстремума. Асимптоти. Повне дослідження функції.

Означення. Крива (або функція $y=f(x)$) називається **опуклою (опуклою догори) в точці** $x=c$, якщо для всіх $x\neq c$ із деякого окола точки ордината кривої менша відповідної ординати дотичної, проведеної до графіка функції в точці з абсцисою $x=c$.

Означення. Крива (або функція $y=f(x)$) називається **угнутою (опуклою донизу) в точці** $x=c$, якщо для всіх $x\neq c$ із деякого окола точки ордината кривої більша відповідної ординати дотичної, проведеної до графіка функції в точці з абсцисою $x=c$.

Ці означення можна переформулювати: функція $y=f(x)$ називається **опуклою (угнутою) в точці** $x=c$, якщо для всіх $x\neq c$ із деякого окола точки різниця **Укр-Удот<0 (Укр-Удот>0).**

Теорема (правило «дощу»). Нехай функція $y=f(x)$ має неперервну похідну другого порядку в точці $x=c$. Тоді, якщо $f''(c)>0$ ($f''(c)<0$), то функція $y=f(x)$ **угнута (опукла) в точці** $x=c$.

Теорема (друга достатня умова екстремума). Нехай $x=c$ - критична точка першої похідної функції $y=f(x)$. Якщо в цій точці $f''(c)>0$ ($f''(c)<0$), то $x=c$ - точка мінімума (максимума) функції.

Означення. Точка $x = c$ називається **точкою перегину** функції $y = f(x)$, якщо при переході аргумента x через дану точку різниця **Укр-Удот** змінює знак.

Теорема (необхідна умова перегину). Якщо $x = c$ - точка перегину двічі диференційовної функції $y = f(x)$, то ця точка є критичною (другого порядку) для другої похідної, тобто, $f''(c) = 0$ або не існує.

Теорема (достатня умова перегину). Якщо при переході аргумента x через критичну точку $x = c$ другого порядку друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то $x = c$ - точка перегину функції $y = f(x)$.

Дослідження функції на опуклість, угнутість, точки перегину проводиться за схемою, аналогічною схемі дослідження функції на монотонність та екстремуми. Продемонструємо це на прикладі.

Приклад. Дослідити функцію $y = x^4 - 4x^3$ на опуклість, угнутість, точки перегину.

Розв'язування. 1. $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $y' = 4x^3 - 12x^2$. Друга похідна $y'' = 12x^2 - 24x$ визначена при всіх x, тому серед критичних будуть лише точки, в яких друга похідна дорівнює нулю: $y'' = 0 \Leftrightarrow 12x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$.

3., 4.

$D(y)$	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\cup$	$y(0)=0$	$\cap$	$y(2)=-16$	$\cup$

$y''(-1) = 12(-1)^2 - 24(-1) > 0 \Rightarrow y'' > 0$ на інтервалі $(-\infty;0)$;

$y''(1) = 12(1)^2 - 24(1) < 0 \Rightarrow y'' < 0$ на інтервалі $(0;2)$;

$y''(4) = 12(4)^2 - 24(4) > 0 \Rightarrow y'' > 0$ на інтервалі $(2;+\infty)$.

5. Функція угнута на інтервалах $(-\infty;0)$ та $(2;+\infty)$, а на інтервалі $(0;2)$ функція опукла. Точки $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$ - точки перегину. Ординати точок перегину вказані в таблиці.

Для більш повного уявлення про функцію вивчають її поведінку в «крайніх» точках області визначення функції. При цьому аргумент може прямувати до деякого фіксованого числа або до нескінченності.

Означення. Пряму l називають **асимптотою графіка функції** $y = f(x)$, якщо при прямуванні точки по графіку функції в нескінченність відстань від цієї точки до прямої прямує до нуля.

Асимптоти будемо поділяти на вертикальні та невертикальні. Рівняння асимптот мають вигляд: вертикальних - $l: x = x_0$; невертикальних - $l: y = kx + b$.

Для пошуку асимтот будемо використовувати наступні теореми (які наведемо без доведень).

Теорема (критерій існування вертикальної асимптоти). Для того, щоб пряма $l: x = x_0$ була вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$, необхідно і достатньо, щоб хоча б одна із односторонніх границь $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ або $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ була нескінченно великою величиною.

Наслідок. Із теореми випливає, що точки x_0 - це або точки розриву, або крайні точки області визначення функції.

Теорема (критерій існування невертикальної асимптоти). Для того, щоб пряма $l: y = kx + b$ була невертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$, необхідно і достатньо, щоб одночасно існували дві границі:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ і } b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right]$$

$$\text{(або } k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ і } b = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - kx \right]\text{).}$$

Зауваження. Інколи пряма $l: y = kx + b$ є «двосторонньою» асимптотою графіка функції, тобто, існують і співпадають наведені вище границі при $x \to +\infty$ та при $x \to -\infty$.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$.

Розв'язування. Область визначення функції $D(y): x \in (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$.

А) Вертикальні асимптоти. Оскільки $x=-1$ точка розриву функції (або «крайня» точка області визначення), то пряма $x=-1$ - «підозріла» на вертикальну асимптоту.

Знайдемо односторонні границі:

$y(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ для розкриття невизначеності скористуємось правилом Лопіталя $=\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{\left(x^2-2x-3\right)'}{\left(x+1\right)'}=\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{2x-2}{1}=-4.$

Аналогічно $y(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=-4.$

Оскільки існують і співпадають односторонні границі, то існує границя $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=-4$, тобто, точка $x_0=-1$ - точка усувного розриву. За теоремою пряма $x=-1$ не є вертикальною асимптотою. Отже, графік даної функції не має вертикальних асимптот.

Б) Невертикальні асимптоти. Знаходимо дві границі.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2x-3}{x+1}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x-3}{x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{x}=-3$$

.

За теоремою, пряма $l: y=x-3$ - невертикальна асимптота графіка даної функції. Звернемо увагу, що дана пряма є «двосторонньою» асимптотою, тобто при $x\to\pm\infty$.

Схема повного дослідження функції:

1. Знайти область визначення.
2. Дослідити функцію на неперервність. Знайти та класифікувати точки розриву.
3. Знайти вертикальні та невертикальні асимптоти.
4. Знайти (якщо можливо) координати точок перетину графіка з координатними осями.
5. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми.
6. Дослідити функцію на опуклість, угнутість, перегини графіка.
7. Побудувати ескіз графіка функції.

Приклади та вправи до розділу 4

4.1. Дослідити функцію. Схематично побудувати графік.

$$y = 10 - 4x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

4.2. Дослідити функцію. Схематично побудувати графік.

$$y = xe^{-x}.$$

4.3. Дослідити функцію. Схематично побудувати графік.

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3.$$

4.4. Дослідити функцію. Схематично побудувати графік. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

4.5. Дослідити функцію. Схематично побудувати графік.

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 5.$$

4.6. Дослідити функцію. Схематично побудувати графік.
$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.

4.7. Дослідити функцію. Схематично побудувати графік. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} + 8$
.

4.8. Дослідити функцію. Схематично побудувати графік. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

4.9. Дослідити функцію. Схематично побудувати графік. $y = \frac{x^2}{2 - x}$.

4.10. Дослідити функцію. Схематично побудувати графік. $y = \frac{x^2}{x + 1}$.

4.11. Функція випуску має вигляд: $y = 15 + 12x - x^2$.

Знайти граничну продуктивність ресурсу (швидкість зміни випуску), якщо витрати ресурсу складають 2 ум. од.

Розв'язання. Швидкість зміни випуску знайдемо за похідною:

$$y' = 12 - 2x \quad \Rightarrow \quad y'(2) = 12 - 2 \cdot 2 = 8.$$

Отже, якщо витрати складають 2 ум. од., то швидкість зміни випуску складає 8 ум. од.

4.12. Обсяг продукції, що вироблена бригадою робітників протягом однієї робочої зміни, визначається рівнянням:

$$y = -\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 + 50x, \qquad 0 \le x \le 8,$$

де x – робочий час (у годинах). Знайти продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) через годину після початку роботи; б) за годину до її закінчення.

Розв'язання. Продуктивність праці в будь-який момент часу – це похідна від обсягу продукції, отже:

$$P(x) = y' = -2x^2 + 12x + 50.$$

Швидкість – це похідна від продуктивності праці, тобто похідна другого порядку від обсягу продукції:

$$P'(x) = y'' = -4x + 12.$$

Темп зміни продуктивності праці є похідна від логарифма продуктивності або відношення швидкості до продуктивності:

$$\mathrm{T}(x) = (\ln P(x))',$$

$$\mathrm{T}(x) = \left(\ln\left(-2x^2 + 12x + 50\right)\right)' = \frac{1}{-2x^2 + 12x + 50} \cdot (-4x + 12).$$

При $x = 1$ маємо:

$P(1) = 60$; $\quad P'(1) = 8$; $\quad \mathrm{T}(1) = 0{,}13$.

$P(7) = 36$; $\quad P'(7) = -16$; $\quad \mathrm{T}(7) = -0{,}44$.

Отже, продуктивність праці наприкінці робочого дня зменшується.

4.13. Обчислити еластичність функції витрат y від обсягу продукції x, якщо відомо, що ця функція має вигляд: $y = 200x - 2x^3$, а також визначити середні і граничні витрати за обсягом продукції, який становить 5 одиниць.

Розв'язання. Для обчислення еластичності функції застосовуємо формулу: $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$.

Знаходимо y': $y' = 200 - 6x^2$.

Тоді

$$E_x(y) = \frac{x}{200x - 2x^3} \cdot \left(200 - 6x^2\right) = \frac{100 - 3x^2}{100 - x^2}.$$

$$E_5\left(y\right)=\frac{100-3\cdot 5^2}{100-5^2}=0,33\,\%.$$

Отже, у разі випуску продукції 5 одиниць збільшення його на 1 % призведе до збільшення витрат на 0,33 %.

Функція середніх витрат визначається як відношення функції витрат y до обсягу продукції x: $S(x)=\dfrac{y}{x}=200-2x^2$.

Якщо обсяг продукції становить 5 одиниць, то
$S\left(5\right)=200-2\cdot 5^2=150$.

Для знаходження граничних витрат знаходимо похідну від функції витрат: $y'=200-6x^2$ і обчислюємо її при $x=5$, одержуємо $y'(5)=50$.

Отже, у разі випуску 5 одиниць продукції середні та граничні витрати складають відповідно 150 од. і 50 од.

4.14. Дослідним шляхом було встановлено функцію попиту $q=\dfrac{p+8}{p+3}$ та функцію пропозиції $S=0{,}5p+1$, де p – ціна товару, q і S – кількість товару, що купується і пропонується відповідно в одиницю часу. Знайти: 1) рівновагову ціну; 2) еластичності попиту і пропозиції для цієї ціни.

Розв'язання.

1. Рівновагова ціна визначається за умови $q=S$, а саме:
$\dfrac{p+8}{p+3}=0{,}5p+1$, або $p^2+3p-10=0$, звідки $p_1=2$ ($p_2=-5$ – не підходить).

Отже, ціна рівноваги дорівнює 2 (гр. од.).

2. Знайдемо еластичності попиту та пропозиції за формулою $E_x(y)=\dfrac{x}{y}\cdot y'$:

$$E_p\left(q\right)=\frac{p\left(p+3\right)}{p+8}\cdot\frac{p+3-p-8}{\left(p+3\right)^2}=\frac{-5p}{\left(p+8\right)\left(p+3\right)};$$

$$E_p\left(S\right)=\frac{p}{0{,}5p+1}\cdot 0{,}5=\frac{p}{p+2}.$$

Якщо ціна рівноваги $p=2$, то

$E_2\left(q\right)=-0,2$; $\qquad E_2\left(S\right)=0,5$.

Отже, попит і пропозиція даного товару при ціні рівноваги $p=2$ нееластичні відносно ціни, бо значення еластичності за абсолютною величиною менші за одиницю. Це означає, що зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту і пропозиції, а саме: якщо ціна p збільшиться на 1 %, попит зменшиться на 0,2 %, а пропозиція збільшиться на 0,5 %.

4.15. Підприємство виготовляє x одиниць продукції щотижня і реалізує її за ціною $S = 15 - \frac{x}{20}$. Сумарні витрати виробництва складають $C = \frac{1}{10}x^2 + 3x + 100$. При якому обсязі виробництва прибуток підприємства буде найбільшим?

Розв'язання. Прибуток $Z = Sx - C$,

$$Z = \left(15 - \frac{1}{20}x\right)x - \frac{1}{10}x^2 - 3x - 100 = -\frac{3}{20}x^2 + 12x - 100.$$

Досліджуємо цю функцію на екстремум. Знаходимо її похідну: $Z' = -\frac{3}{10}x + 12$. Далі $Z' = 0 \Rightarrow -\frac{3}{10}x + 12 = 0 \Rightarrow x = 40$.

Отже, прибуток підприємства буде максимальним, бо $Z'' = -\frac{3}{10} < 0$, при обсязі виробництва $x = 40$ одиниць і складатиме $Z(40) = 140$ (гр. од.).

4.16. Нехай функція витрат має вигляд: $y = x + 2\ln(x+2)$.

Обчислити граничні витрати виробництва, якщо випуск виробництва складає $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. При яких значеннях x функція витрат зростає (спадає) повільніше (швидше)?

Розв'язання. Для обчислення граничних витрат знаходимо похідну від функції витрат: $y' = 1 + \frac{2}{x+2}$ і обчислюємо її у відповідних точках: $y'(4) = \frac{4}{3}$ та $y'(8) = \frac{6}{5}$. Отже, якщо обсяг виробництва зростає, граничні витрати спадають. Область визначення функції: $x \in (-2, \infty)$. Враховуючи, що x – обсяг виробництва, маємо: $x \in (0, \infty)$. На цьому інтервалі $y' > 0$.

Знайдемо похідну другого порядку:

$$y'' = -\frac{2}{(x+2)^2} < 0 \qquad \forall x \in (0, \infty).$$

Отже, функція витрат зростає повільніше, бо $y' > 0$, а $y'' < 0$ для $x \in (0, \infty)$.

4.17. Фірма планує випускати пластикові вікна. Дослідним шляхом установлена залежність попиту q від ціни p за вікно: $q = 2500 - 100p$, де q – кількість вікон. Витрати фірми на випуск q вікон складають

$C = 100 + 13q + 0{,}002q^2$.

Визначити максимальний прибуток.

Розв'язання. Валовий прибуток дорівнює $p \cdot q$. Прибуток від реалізації q вікон $Z = p \cdot q - C$. З рівняння $q = 2500 - 100p$ отримуємо

$p = 25 - 0{,}01q$. Тоді $Z = (25 - 0{,}01q)q - 100 - 13q - 0{,}002q^2$,

або $Z = -0{,}012q^2 + 12q - 100$.

Знаходимо похідні

$Z' = -0{,}024q + 12$, $Z'' = -0{,}024$.

За необхідною умовою екстремуму:

$-0{,}024q + 12 = 0$,

звідки $q = 500$ і $Z'' < 0$, тобто при $q = 500$ функція досягає максимуму.

Обчислюємо: $Z(500) = -0{,}012 \cdot 500^2 + 12 \cdot 500 - 100 = 2900$.

4.18. Функція попиту на товар має вигляд: $q = -p^2 + 5p + 50$, де p – ціна на товар. Знайти граничний попит. За якою ціною попит:

1) буде найбільшим; 2) зникне? Знайти темп зміни попиту.

Розв'язання. Граничний попит – це похідна від функції попиту, а саме: $q' = -2p + 5$.

1. За необхідною умовою екстремуму маємо:

$-2p + 5 = 0$,

звідки $p = 2{,}5$.

Отже, за ціною $p = 2{,}5$ попит буде найбільшим ($q'' = -2 < 0$) і дорівнюватиме:

$q(2{,}5) = -(2{,}5)^2 + 5 \cdot 2{,}5 + 50 = 56{,}25$.

2. Попит дорівнює 0, якщо

$-p^2 + 5p + 50 = 0$,

звідки $p_1 = 10$, $p_2 = -5$ (не підходить, бо p – ціна товару).

Темп зміни попиту знаходимо за похідною другого порядку від функції попиту, а саме: $q'' = -2$.

Якщо ціна зростає до 2,5, то попит теж зростає і становиться максимальним, а саме 56,25 при ціні 2,5.

Далі при зростанні ціни від 2,5 до 10 попит спадає і зникає, якщо ціна $p \geq 10$.

Якщо $p \in (0; 2{,}5)$, то зростання попиту повільніше $(q' > 0, q'' < 0)$. Якщо $p \in (2{,}5; 10)$ попит спадає повільніше $(q' < 0, q'' < 0)$.

Отже, граничний попит $q' = -2p + 5$. Максимальний попит $q_{\max} = 56{,}25$ досягається за ціною товару $p = 2{,}5$. Попит зникає, якщо ціна $p \geq 10$.

4.19. Залежність витрат виробництва від обсягу продукції задана функцією $y = -0{,}025x^3 + 18750x + 115$.

При якому обсязі продукції витрати виробництва почнуть спадати?

Розв'язання. Знайдемо похідну:

$y' = -0{,}075x^2 + 18750$.

Витрати спадають, коли

$-0,075x^2 + 18750 < 0$, або $x^2 > 250000$,

звідки

$x < -500$ або $x > 500$.

Враховуючи, що $x > 0$, залишається: $x > 500$.

Отже, витрати почнуть спадати, якщо обсяг виробництва $x > 500$.

4.20. Нехай функція $C = 8q - \dfrac{q^2}{10}$ встановлює залежність витрат фірми від кількості виготовленої продукції, а $q = 40 - 2p$ – залежність попиту від ціни. Знайти максимальний обсяг виробництва. Порівняти оптимальну ціну з гранич-ними витратами.

Розв'язання. Прибуток фірми складає: $Z = pq - C$, де p – ціна одиниці продукції; q – кількість виготовленої продукції; C – відповідні витрати.

З рівняння $q = 40 - 2p$ отримуємо, що $p = 20 - 0{,}5q$.

Тоді $$Z = (20 - 0,5q)\,q - 8q + \frac{q^2}{10},$$

або $Z = -0,4q^2 + 12q$.

Отже, треба дослідити цю функцію на екстремум.

За необхідною умовою екстремуму: $Z' = 0$. Знайдемо: $Z' = -0{,}8q + 12$.

Тоді $-0{,}8q + 12 = 0$, звідки $q = 15$ – це максимальний обсяг виробництва, оскільки $Q'' = -0{,}8 < 0$.

Відповідна ціна $p = 20 - 0,5 \cdot 15 = 12,5$. Граничні витрати при цьому становлять: $C'(15) = \left(8 - \dfrac{q}{5}\right)\Bigg|_{q=15} = 5$.

Порівнюємо оптимальну ціну з граничними витратами: $\dfrac{12,5}{5} = 2,5$.

Отже, максимальний обсяг продукції фірми складає 15 одиниць, відповідна ціна – 12,5 грн, найбільш вигідна ціна для фірми у 2,5 раза більша за граничні витрати.

Розділ 5. Функції декількох змінних (ФДЗ)

У багатьох задачах економіки доводиться моделювати залежності результату від впливу на нього декількох (більше одного) факторів. Це призводить до необхідності вивчення функцій декількох незалежних змінних вигляду $\boldsymbol{z = f(x_1, x_2, ..., x_n)}$.

Після вивчення даної теми ви зможете:

- використовувати ФДЗ для формалізації економічних явищ та процесів;
- розуміти економічний смисл частинних похідних ФДЗ;
- знати методи диференціювання ФДЗ;
- вміти знаходити еластичність ФДЗ і проводити економічні дослідження із її застосуванням та інтерпретувати отримані результати;
- вміти обчислювати похідну за напрямом і градієнт функції та застосовувати їх в економіко-математичних моделях;
- вміти обчислювати екстремуми ФДЗ, їх найбільше та найменше значення;
- вміти застосовувати інструменти диференціального числення ФДЗ до розв'язання реальних економічних задач;
- знати поняття емпіричних формул та методу найменших квадратів (МНК);
- застосовувати емпіричні формули та МНК до обробки даних;
- використовувати електронні таблиці MS Excel у своїх дослідженнях.

Тема 19. Застосування методів ФДЗ числення до моделювання та розв'язування економічних задач

Функції декількох змінних (ФДЗ) широко застосовуються у різних областях знань, у тому числі, і в економіці для опису досліджуваних процесів і явищ. Дослідження цих функцій на локальний або глобальний екстремуми покладені в основу методів побудови економічних моделей та визначення стратегії керування економічними процесами з метою оптимізації роботи економічних систем того чи іншого рівня. Прикладом застосування функцій кількох змінних в економіці є ***виробнича функція*** $z = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$, яка встановлює залежність величини створеного суспільного продукту z від різних факторів: витрати (живої) праці (x_1), об'єм виробничих фондів (x_2), енергоємність виробництва (x_3) тощо; параметри α_i задовольняють умову: $0 < a_i < 1,\ i = \overline{0, n}$. Прикладом виробничої функції є ***функція Кобба – Дугласа***, яка встановлює функціональну залежність між обсягом основних фондів K, витратами праці L і обсягом продукції $F(K,L) = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, де $a > 0$ – параметр продуктивності обраної технології, $0 < \alpha < 1$ – частка капіталу у прибутку. У задачах ***споживчого вибору*** використовується так звана ***функція корисності***, яка описує кількісну характеристику z доцільності придбання того чи іншого набору n різних товарів (благ) $X=(x_1, x_2, x_3,..., x_n)$, де x_i– кількість i -го блага в натуральних одиницях. Прикладами таких функцій є:

логарифмічна функція

$z=\sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i-c_i)$, де a_i, c_i – параметри ($a_i>0, \quad x_i>c_i\geq 0$);

функція сталої (незмінної) еластичності

$z=\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i}\left(x_i-c_i\right)^{1-b_i}$, де b_i – сталі ($a_i>0,\ 0<b_i<1,\ x_i>c_i\geq 0$).

Звичайно, в основу моделі поведінки споживачів покладають гіпотезу: кожен з них, здійснюючи вибір наборів благ при заданих цінах і наявному доході, прагне максимізувати рівень задоволення своїх потреб.

Лінії рівня. Частинні похідні.

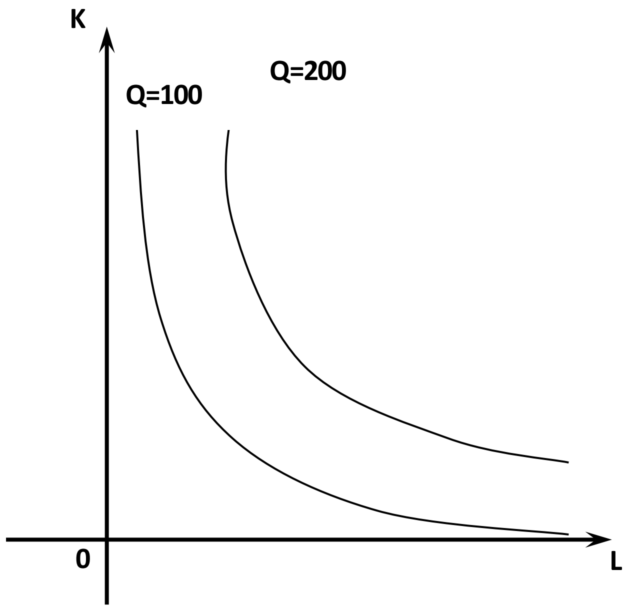
Приклад. Об'єм продукції $\boldsymbol{Q}$, що випускається фірмою визначається виробничою функцією Кобба-Дугласа $\boldsymbol{Q=50K^{1/3}L^{2/3}}$, де $\boldsymbol{K}$ - обсяг вкладеного капіталу, а $\boldsymbol{L}$ - трудових ресурсів. Схематично побудувати ізокванти (лінії рівня), що відповідають випуску $\boldsymbol{Q_1=100}$ та $\boldsymbol{Q_2=200}$ одиниць продукції. Дати економічну інтерпретацію.

Для знаходження рівнянь ізоквант (ліній рівня виробничої функції) покладаємо у функції замість $\boldsymbol{Q}$ значення $\boldsymbol{Q_1=100}$ та $\boldsymbol{Q_2=200}$. Дістанемо:

$$\boldsymbol{100=50K^{1/3}L^{2/3} \Leftrightarrow 2=K^{1/3}L^{2/3} \Leftrightarrow 2^3=KL^2 \Leftrightarrow K=\frac{8}{L^2}};$$

$$\boldsymbol{200=50K^{1/3}L^{2/3} \Leftrightarrow 4=K^{1/3}L^{2/3} \Leftrightarrow 4^3=KL^2 \Leftrightarrow K=\frac{64}{L^2}}.$$

Отримали рівняння гіпербол. Враховуючи невід'ємність виробничих факторів, побудуємо ці гіперболи у першій чверті:



Рухаючись вздовж першої ізокванти, ми забезпечуємо один і той самий випуск $\boldsymbol{Q = 100}$ при різних комбінаціях виробничих факторів, наприклад, при $\boldsymbol{K_1 = 8, L_1 = 1}$, або при $\boldsymbol{K_1 = 4, L_1 = 2}$. Аналогічно, вздовж другої ізокванти забезпечується випуск $\boldsymbol{Q = 200}$ при інших комбінаціях факторів. Відмітимо, що більшому випуску $\boldsymbol{Q}$ відповідають ізокванти, більш віддалені від початку координат.

Приклад. Обсяг продукції, що виробляється фірмою, визначається формулою $\boldsymbol{Q = 75K^{1/3}L^{2/3}}$, де $\boldsymbol{K}$ - обсяг вкладеного капіталу (грн), $\boldsymbol{L}$ - обсяг витраченої праці (людино-годин). Знайти граничні продуктивності капіталу і праці, якщо $\boldsymbol{K_0 = 1800}$ (грн), $\boldsymbol{L_0 = 225}$ (людино-годин). Дати економічне тлумачення знайденого розв'язку.

Знаходимо граничні продуктивності капіталу (граничну капіталовіддачу) і праці як частинні похідні виробничої функції:

$$\boldsymbol{Q'_K = \left(75K^{1/3}L^{2/3}\right)'_K = 75L^{2/3} \cdot \frac{1}{3}K^{-2/3} = 25\left(\frac{L}{K}\right)^{2/3}};$$

$$\boldsymbol{Q'_L = \left(75K^{1/3}L^{2/3}\right)'_L = 75K^{1/3} \cdot \frac{2}{3}L^{-1/3} = 50\left(\frac{K}{L}\right)^{1/3}}.$$

Обчислюємо значення цих частинних похідних у заданій точці:

$$\boldsymbol{Q'_K(K_0; L_0) = 25\left(\frac{225}{1800}\right)^{2/3} = \frac{25}{4} = 6,25};$$

$$Q_L^/(K_0;L_0)=50\left(\frac{1800}{225}\right)^{1/3}=50\cdot 2=100.$$

Знайдені граничні ефективності показують, що при збільшенні капіталу з $K_0=1800$ на одну одиницю (при незмінному $L_0=225$) випуск зросте приблизно на 6,25 одиниць, а при збільшенні обсягу витраченої праці з $L_0=225$ на одну одиницю (при незмінному $K_0=1800$) випуск зросте приблизно на 100 одиниць.

Приклад. Маркетинговими дослідженнями ринку встановлено, що попит на два пов'язаних між собою види товару визначається функціями $D_1=400-3p_1-2p_2$ та $D_2=250-5p_1-6p_2$, де p_1 - ціна одиниці першого товару, а p_2- ціна одиниці другого товару. Знайти функції граничного попиту на ці товари і дати економічну інтерпретацію. Якими є дані товари: конкурентними чи взаємодоповнюючими?

Розв'язування. Функції граничного попиту знаходимо як частинні похідні від функцій попиту по відповідним цінам:

$$(D_1)_{p_1}^/=(400-3p_1-2p_2)_{p_1}^/=-3;\ (D_1)_{p_2}^/=(400-3p_1-2p_2)_{p_2}^/=-2;$$

$$(D_2)_{p_1}^/=(250-5p_1-6p_2)_{p_1}^/=-5;\ (D_2)_{p_2}^/=(250-5p_1-6p_2)_{p_2}^/=-6.$$

Знайдені граничні попити показують:

$(D_1)_{p_1}^/=-3$ означає, що при зростанні ціни першого товару на одну одиницю (при незмінній ціні другого) попит на перший товар зменшиться приблизно на 3 одиниці;

$(D_1)_{p_2}^/=-2$ означає, що при зростанні ціни другого товару на одну одиницю (при незмінній ціні першого) попит на перший товар зменшиться приблизно на 2 одиниці;

$(D_2)_{p_1}^/=-5$ означає, що при зростанні ціни першого товару на одну одиницю (при незмінній ціні другого) попит на другий товар зменшиться приблизно на 5 одиниць;

$\left(D_2\right)'_{p_2} = -6$ означає, що при зростанні ціни другого товару на одну одиницю (при незмінній ціні першого) попит на другий товар зменшиться приблизно на 6 одиниць.

Оскільки обидві частинні похідні $\left(D_1\right)'_{p_2} = -2$ та $\left(D_2\right)'_{p_1} = -5$ від'ємні, то дані товари є взаємодоповнюючими (зростання ціни на один із товарів викликає зменшення попиту на інший товар).

Еластичність функції кількох змінних.

Чуттєвістю ринка до зміни будь-якого з показників находить відображення у такій його властивості, як *еластичність,* характеристикою якої є коефіцієнт еластичності за цим показником, тобто частинний коефіцієнт еластичності.

Частинним коефіцієнтом еластичності функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ за її аргументом називається границя питомого частинного приросту функції за цим аргументом до питомого приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, при цьому значення всіх інших аргументів цієї функції залишаються сталими. Відповідно, *еластичність функції* $z = f(x, y)$ за *аргументом* x визначається співвідношенням:

$$E_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{\Delta_x z}{z} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z}.$$

Для визначення еластичності функції $z = f(x, y)$ за аргументом y застосовується співвідношення:

$$E_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0}\left(\frac{\Delta_y z}{z} : \frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z}.$$

Отже, еластичність за деяким фактором наближено визначає відношення темпів приросту функції до темпів приросту цього фактору при незмінному значенні усіх інших, тобто еластичність показує, на скільки відсотків зміниться випуск продукції, якщо витрати будь-якого ресурсу зростуть на 1 % при незмінному обсягу іншого ресурсу. Коефіцієнт еластичності не має вимірності.

За значенням коефіцієнта еластичності для певного аргументу функції поділяють на: ***еластичні*** в точці (якщо частинний коефіцієнт еластичності за абсолютною величиною більше одиниці), ***нееластичні*** (якщо він по модулю менше одиниці), і нейтральні (якщо він дорівнює одиниці).

Розглянемо деякі приклади застосування еластичності функції в економічних дослідженнях. Однією з поширених областей застосування функції кількох змінних у дослідженнях економічних процесів є побудова виробничих функцій. Під ***виробничою функцією*** розуміють таку функціональні залежність, яка описує кількість продукції, що виробляється, в залежності від витрачених факторів виробництва. Найбільш відомою виробничою функцією є ***функція Кобба – Дугласа***, аргументами якої є витрати живої праці L та капіталу K. *У 1928 році Чарльз Кобб та Пол Дуглас при аналізі факторів виробництва у переробній промисловості США запропонували описувати вплив витрат праці та капіталу на виробництво продукції за допомогою виробничої функції, яка в подальшому отримала їх ім'я. Функція була побудована за емпіричними даними і не мала теоретичного обґрунтування. До речі, при визначенні її параметрів автори застосували метод найменших квадратів.*

Традиційно функція Кобба – Дугласа записується у вигляді:

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta},$$

де $A > 0$ – технологічний коефіцієнт; α та β – параметри моделі, де $0 < \alpha < 1$ та $0 < \beta < 1$, причому, у більшості випадків $\alpha + \beta = 1$.

Визначимо, який сенс мають параметри виробничою функції. Для цього знайдемо її коефіцієнти еластичності за кожним аргументом. Так, за фактором праці маємо:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{A \cdot K^{\beta} \cdot \alpha \cdot L^{\alpha-1} \cdot L}{A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}} = \alpha,$$

тобто показник степеня при аргументі L у функції Кобба – Дугласа є частинним коефіцієнтом еластичності за аргументом L. Відповідно,

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{A \cdot L^{\alpha} \cdot \beta \cdot K^{\beta-1} \cdot K}{A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}} = \beta,$$

тобто показник степеня при аргументі K у функції Кобба – Дугласа є частинним коефіцієнтом еластичності за аргументом K.

Якщо $\alpha + \beta = 1$, то попередню формулу можна перетворити:

$$\frac{Q}{L} = A\frac{L^{\alpha} K^{1-\alpha}}{L} = A\frac{L^{\alpha-1}}{K^{\alpha-1}} = A\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha-1}.$$

Відношення $\frac{Q}{L}$ є середньою продуктивністю праці, а $\frac{L}{K}$ – середньою капіталоозброєністю праці. Відношення $\frac{Q}{K}$ називається середньою капіталовіддачею. Обернений дріб $\frac{K}{Q}$ визначає середню капіталоємність продукції, а $\frac{L}{Q}$ – її середню трудоємність.

За виробничою функцією Кобба - Дугласа гранична продуктивність праці визначається формулою:

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=\frac{\partial}{\partial L}\left(A\cdot L^{\alpha}\cdot K^{\beta}\right)=\alpha\cdot A\cdot L^{\alpha-1}\cdot K^{\beta}=\alpha\frac{Q}{L},$$

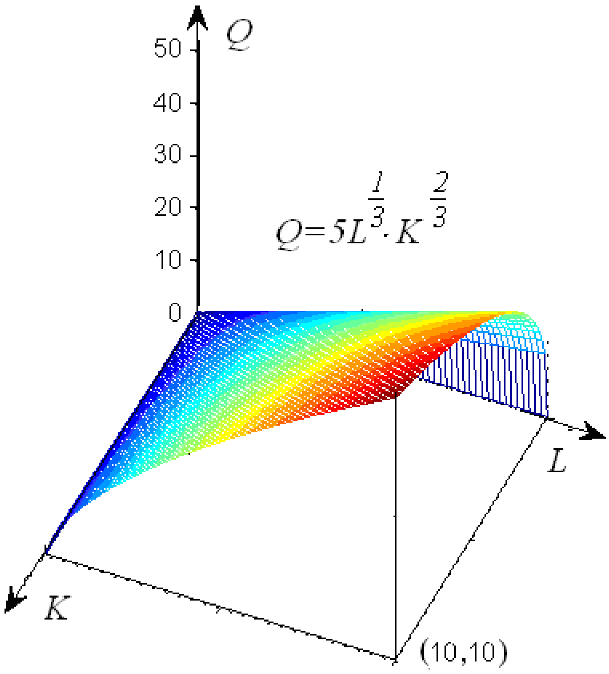
отже, величина ефекту від кожної додаткової одиниці праці, що витрачається на виробництво продукції, пропорціональна середній продуктивності праці, але менша її, оскільки $\alpha<1$.

Відмітимо, що функція Кобба – Дугласа визначає можливість взаємної заміни таких факторів виробництва, як праця і капітал. Це можна проілюструвати на прикладі функції, значення якої наведені в табл. На рис. зображено фрагмент поверхні, яка відображає залежність обсягу Q від праці L і капітала Q.

Таблиця.

Зв'язок між зміною ресурсів «праця» та «капітал»

	Затрати праці (L)				
Затрати капіталу (K)	1	2	3	4	5
1	10	30	45	55	60
2	30	50	65	75	80
3	45	65	80	90	95
4	55	75	90	100	105
5	60	80	95	105	110



.

Визначимо, який зміст мають параметри виробничою функції. Для цього знайдемо її коефіцієнти еластичності за кожним аргументом. Так, за фактором праці маємо:

$E_L=\frac{\partial Q}{\partial L}\cdot\frac{L}{Q}=\frac{A\cdot K^{\beta}\cdot\alpha\cdot L^{\alpha-1}\cdot L}{A\cdot L^{\alpha}\cdot K^{\beta}}=\alpha$, тобто показник степеня при аргументі L функції Кобба – Дугласа є *частинним коефіцієнтом еластичності* за аргументом L.

Аналогічно, $E_K=\frac{\partial Q}{\partial K}\cdot\frac{K}{Q}=\frac{A\cdot L^{\alpha}\cdot\beta\cdot K^{\beta-1}\cdot K}{A\cdot L^{\alpha}\cdot K^{\beta}}=\beta$, тобто показник степеня при аргументі K функції Кобба – Дугласа є частинним коефіцієнтом еластичності за аргументом K.

Якщо $\alpha+\beta=1$, то попередню формулу можна перетворити:

$$\frac{Q}{L} = A\frac{L^{\alpha}K^{1-\alpha}}{L} = A\frac{L^{\alpha-1}}{K^{\alpha-1}} = A\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha-1}.$$

Відношення $\frac{Q}{L}$ є середньою продуктивністю праці, а $\frac{L}{K}$ – середньою капіталоозброєністю праці. Відношення $\frac{Q}{K}$ називається середньою капіталовіддачею. Обернений дріб $\frac{K}{Q}$ визначає середню капіталоємність продукції, а $\frac{L}{Q}$ – її середню трудоємність.

За виробничою функцією Кобба – Дугласа гранична продуктивність праці визначається формулою:
$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}\right) = \alpha \cdot A \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{\beta} = \alpha\frac{Q}{L}$. Отже, величина ефекту від кожної додаткової одиниці праці, що витрачається на виробництво продукції, пропорційна середній продуктивності праці, але менша за неї, оскільки $\alpha < 1$.

Приклад. Нехай певне виробництво можна описати за допомогою функції Кобба – Дугласа. Відомо, що кожний робітник щомісячно виробляє продукції на 100 000 грн. Загальна чисельність робітників становить 1 000 осіб. Основні фонди оцінюються у 64 млн грн. Відомо, що для збільшення продукції на 3 % треба збільшити або вартість фондів на 6 %, або чисельність робітників на 9 %. Визначимо для даного підприємства функцію Кобба – Дугласа за допомогою її коефіцієнтів еластичності.

За умовою $L = 1000$ осіб, $K = 64 \cdot 10^6$ грн. Відповідно обсяг продукції у вартісному вигляді становить:

$Q = L \cdot 100\ \ 000 = 1\ \ 000 \cdot 100\ \ 000 = 10^8$ (грн).

Запишемо функцію Кобба – Дугласа у відносних приростах:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \approx \alpha\frac{\Delta L}{L} + \beta\frac{\Delta K}{K}.$$

Знайдемо частинні коефіцієнти еластичності.

Оскільки для збільшення випуску продукції на 3 % необхідно збільшити вартість фондів на 6 % (при незмінній кількості робітників), то

$$0,03 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0,06 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 1/2.$$

Відповідно, для збільшення випуску продукції на 3 % необхідно збільшити кількість робітників на 9 % (при незмінній вартості фондів),

$0,03 = \alpha \cdot 0,09 + \beta \cdot 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{3}.$

Тепер знайдемо технологічний коефіцієнт:

$$A = \frac{Q}{L^{1/3} \cdot K^{1/2}} = \frac{10^8}{\sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt{64 \cdot 10^6}} = 1250.$$

Отже, виробнича функція Кобба – Дугласа для даного підприємства має вигляд:

$Q = 1250 \cdot L^{1/3} \cdot K^{1/2}$.

Приклад. Нехай певне виробництво можна описати за допомогою функції Кобба – Дугласа. Відомо, що кожний робітник щомісячно виробляє продукції на 100 000 тис. грн. Загальна чисельність робітників становить 1 000 осіб. Основні фонди оцінюються у 64 млн. грн. Відомо, що для збільшення продукції на 3% треба збільшити або вартість фондів на 6 %, або чисельність робітників на 9 %. Визначимо для даного підприємства функцію Кобба – Дугласа за допомогою її коефіцієнтів еластичності.

Розв'язування. За умовою $L = 1000$ осіб, $K = 64 \cdot 10^6$ грн. Відповідно обсяг продукції у вартісному вигляді становить:

$$Q = L \cdot 100000 = 1000 \cdot 100000 = 10^8 \text{ (грн).}$$

Запишемо функцію Кобба – Дугласа у відносних приростах:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \approx \alpha \frac{\Delta L}{L} + \beta \frac{\Delta K}{K}.$$

Знайдемо частинні коефіцієнти еластичності. Оскільки для збільшення випуску продукції на 3 % необхідно збільшити вартість фондів на 6 % (при незмінній кількості робітників), то

$$0,03 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0,06 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \frac{1}{2}.$$

Відповідно, для збільшення випуску продукції на 3 % необхідно збільшити кількість робітників на 9 % (при незмінній вартості фондів),

$$0,03 = \alpha \cdot 0,09 + \beta \cdot 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{3}.$$

Тепер знайдемо технологічний коефіцієнт:

$$A = \frac{Q}{L^{1/3} \cdot K^{1/2}} = \frac{10^8}{\sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt{64 \cdot 10^6}} = 125.$$

Отже, виробнича функція Кобба – Дугласа для даного підприємства має вигляд:

$$Q = 125 \cdot L^{1/3} \cdot K^{1/2}.$$

Екстремуми ФДЗ.

Приклад. Для збільшення ваги худоби розроблено два види комбікормів. З'ясовано, що збільшення ваги P (кг) задається залежністю $P(x;y) = xy(20 - x - 2y)$, де $x > 0$ та $y > 0$ - використані кількості одиниць першого та другого видів комбікормів. Скільки одиниць цих видів комбікормів максимізують збільшення ваги худоби?

Розв'язування. Математична модель задачі: знайти точку максимуму функції ваги $P(x;y) = xy(20 - x - 2y)$ при умові $D(P) = \left\{(x;y) \in R^2 : \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}\right\}$.

Проведемо дослідження функції $P(x;y) = 20xy - x^2y - 2xy^2$ на екстремум. Частинні похідні першого порядку: $P_x^/ = 20y - 2xy - 2y^2$; $P_y^/ = 20x - x^2 - 4xy$ визначені всюди, тому серед критичних будуть лише стаціонарні точки, які знаходимо, розв'язуючи систему:

$\begin{cases} P_x^/ = 0 \\ P_y^/ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y(10 - x - y) = 0 \\ x(20 - x - 4y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x + 4y = 20 \end{cases}$, враховуючи, що $x > 0$, $y > 0$.

Розв'язок системи дає стаціонарну точку $M(\frac{20}{3};\frac{10}{3})$, яка за теоремою (необхідна умова екстремуму) є «підозрілою» на точку екстремуму. Скористуємось теоремою (достатня умова екстремуму функції двох змінних). Знаходимо значення частинних похідних другого порядку в точці $M(\frac{20}{3};\frac{10}{3})$:

$$P_{xx}^{//} = \left(20y - 2xy - 2y^2\right)_x^/ = -2y, \quad P_{xx}^{//}(M) = -\frac{20}{3};$$

$$P_{yy}^{//} = \left(20x - x^2 - 4xy\right)_y^/ = -4x, \quad P_{yy}^{//}(M) = -\frac{80}{3};$$

$$P_{xy}^{//} = \left(20y - 2xy - 2y^2\right)_y^/ = 20 - 2x - 4y = P_{yx}^{//}, \quad P_{xy}^{//}(M) = -\frac{20}{3}.$$

Обчислюємо Гессіан в стаціонарній точці:

$$\Delta(M)=\begin{vmatrix}-\frac{20}{3} & -\frac{20}{3}\\ -\frac{20}{3} & -\frac{80}{3}\end{vmatrix}=\frac{160}{3}-\frac{40}{3}=\frac{120}{3}=40>0$$ тому, точка $M(\frac{20}{3};\frac{10}{3})$

є точкою екстремуму. Оскільки $P''_{xx}(M)=-\frac{20}{3}<0$, то стаціонарна точка $M(\frac{20}{3};\frac{10}{3})$ є точкою максимуму функції $P(x;y)$. Отже, максимум збільшення ваги худоби досягається при використанні $\frac{20}{3}$ одиниць першого виду комбікорму та $\frac{10}{3}$ одиниць другого виду комбікорму.

Приклад. Підприємство випускає x одиниць та y одиниць двох видів продукції, попит на які визначається співвідношеннями $p_1=50-x$ та $p_2=60-2y$ (p_1 - ціна одиниці першого виду продукції, а p_2 - другого). Функція загальних витрат має вигляд $C(x;y)=2xy$. Знайти максимальний прибуток підприємства, а також відповідні обсяги випуску та ціни продукції.

Розв'язування. Для складання математичної моделі задачі знайдемо функцію прибутку підприємства, яка визначається як різниця доходу від реалізації продукції та витрат. Доход від реалізації випускає x та y одиниць двох видів продукції за цінами p_1 та p_2 становитиме $x(50-x)+y(60-2y)$, а прибуток: $P(x;y)=50x-x^2+60y-2y^2-2xy$. Отже, необхідно знайти максимум функції $P(x;y)$ при $x\geq 0, y\geq 0$.

Проведемо дослідження функції $P(x;y)=50x-x^2+60y-2y^2-2xy$ на екстремум. Частинні похідні першого порядку: $P'_x=50-2x-2y$; $P'_y=60-4y-2x$ визначені всюди, тому серед критичних будуть лише стаціонарні точки, які знаходимо, розв'язуючи систему:

$$\begin{cases}P'_x=0\\ P'_y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}50-2x-2y=0\\ 60-2x-4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=25\\ x+2y=30\end{cases}.$$ Розв'язок системи дає стаціонарну точку $M(20;5)$, яка за теоремою (необхідна умова екстремуму)

є «підозрілою» на точку екстремуму. Скористуємось теоремою (достатня умова екстремуму функції двох змінних). Знаходимо значення частинних похідних другого порядку в точці $\boldsymbol{M(20;5)}$:

$\boldsymbol{P_{xx}^{//} = \left(50 - 2x - 2y\right)_x^{/} = -2}$; $\boldsymbol{P_{yy}^{//} = \left(60 - 4y - 2x\right)_y^{/} = -4}$;

$\boldsymbol{P_{xy}^{//} = \left(50 - 2x - 2y\right)_y^{/} = -2 = P_{yx}^{//}}$. Обчислюємо Гессіан в стаціонарній точці:

$\boldsymbol{\Delta(M) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0}$ тому, точка $\boldsymbol{M(20;5)}$ є точкою екстремуму. Оскільки $\boldsymbol{P_{xx}^{//}(M) = -2 < 0}$, то стаціонарна точка $\boldsymbol{M(20;5)}$ є точкою максимуму функції $\boldsymbol{P(x;y)}$. Отже, максимальний прибуток підприємство отримає при випуску $\boldsymbol{20}$ одиниць першого виду продукції та $\boldsymbol{5}$ одиниць другого виду продукції і становитиме $\boldsymbol{P(20;5) = 650}$. При цьому ціна одиниці першого виду продукції буде $\boldsymbol{p_1 = 50 - 20 = 30}$, а другого виду - $\boldsymbol{p_2 = 60 - 2 \cdot 5 = 50}$.

Приклад. Фірма виробляє два види продукції, які продає за цінами 500 та 600 грн за одиницю. Обсяги випуску продукції становлять x_1 і x_2 відповідно. Функція витрат має вигляд: $K\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$.

Знайти такий план випуску продукції, за яким отриманий прибуток буде максимальним. Обчислити цей прибуток.

Розв'язування. Прибуток від продажу продукції обох видів складатиме $C = 500x_1 + 600x_2$. З урахуванням функції витрат фірма отримає такий прибуток:

$$P = C - K = 500x_1 + 600x_2 - x_1{}^2 - 2x_2{}^2 - 2x_1x_2.$$

Далі необхідно дослідити цю функцію на екстремум. Знаходимо стаціонарні точки, для чого визначаємо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 500 - 2x_1 - 2x_2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 600 - 4x_2 - 2x_1.$$

За необхідною умовою існування екстремуму: $\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$, тобто:

$\begin{cases} 500 - 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ 600 - 2x_1 - 4x_2 = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1 + x_2 = 250, \\ x_1 + 2x_2 = 300, \end{cases}$ звідки $x_1 = 200$, $x_2 = 50$.

Перевіримо, що при такому обсязі продукції прибуток буде максимальним. Для цього побудуємо матрицю Гессе (матрицю похідних другого порядку) і обчислимо її визначник у точці $(200;50)$.

$$A = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1{}^2} = -2;\ C = \frac{\partial^2 P}{\partial x_2{}^2} = -4;\ B = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} = -2.$$

Тоді $AC - B^2 = 8 - 4 > 0$, а $A < 0$, тому при $x_1 = 200$, $x_2 = 50$ фірма отримує максимальний прибуток, який становить:

$$P_{\max} = 500 \cdot 200 + 600 \cdot 50 - 200^2 - 2 \cdot 50^2 - 2 \cdot 200 \cdot 50 = 65000 \text{ (грн)}.$$

Відповідь: прибуток у розмірі 65000 грн фірма отримає, якщо буде виробляти 200 од. продукції за ціною 500 грн, і 50 од. продукції за ціною 600 грн.

Приклад. Фірма реалізує частину товару на внутрішньому ринку, де ціна одиниці товару становить p одиниць, і пов'язана з кількістю товару x_1 залежністю $p + 2x_1 = 400$, а іншу частину товару поставляє на експорт, де ціна товару p і його кількість x_2 пов'язані залежністю $3p + 2x_2 = 540$. Сумарні витрати мають вигляд $Q = 10000 + 40x_1 + 20x_2$.

Визначити, яку кількість товару необхідно реалізувати на внутрішньому ринку, а яку поставити на експорт, щоб фірма отримувала максимальний прибуток.

Розв'язування. За рівнянням $p + 2x_1 = 400$ знаходимо, що ціна реалізації одиниці товару на внутрішньому ринку становить $p = 400 - 2x_1$.

З рівняння $3p + 2x_2 = 540$ знаходимо, що ціна реалізації одиниці товару, який поставляється на експорт, становить $p = \frac{1}{3}(540 - 2x_2)$.

Прибуток від реалізації товарів складає: $C = (400 - 2x_1)x_1 + \frac{1}{3}(540 - 2x_2)x_2$.

З урахуванням витрат фірма має прибуток:

$$\Pi = \left(400 - 2x_1\right) x_1 + \frac{1}{3}\left(540 - 2x_2\right) x_2 - 10000 - 40x_1 - 20x_2,$$

або

$$\Pi = -2x_1^2 - \frac{2}{3} x_2^2 + 360x_1 + 160x_2 - 10000.$$

Знаходимо частинні похідні: $\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = -4x_1 + 360$; $\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -\frac{4}{3} x_2 + 160$.

За необхідною умовою існування екстремуму маємо:

$$\begin{cases} -4x_1 + 360 = 0, \\ -\frac{4}{3} x_2 + 160 = 0, \end{cases}$$

звідси $x_1 = 90$ од., $x_2 = 120$ од.

За достатньою умовою екстремуму перевіримо, що при $x_1 = 90$, $x_2 = 120$ фірма матиме максимальний прибуток. Знайдемо другі похідні функції в точці $(90;120)$:

$$A = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^2} = -4; \quad C = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2} = -\frac{4}{3}; \quad B = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Визначимо знак $AC - B^2 = -4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} > 0$, тобто у стаціонарній точці $(90;120)$ має місце екстремум. Крім того, $A = -4 < 0$, а це свідчить про те, що функція має максимум.

Відповідь: фірма матиме максимальний прибуток, якщо на внутрішньому ринку буде реалізовувати 90 од., а на зовнішньому – 120 од. товару, при цьому $\Pi_{max} = 15800$ (гр. од.).

Приклад. Приватний підприємець заключив контракт на постачання 77 одиниць сорочок та спідниць. Функція повних витрат виробництва має вигляд $\boldsymbol{C(x;y) = 7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64}$, де $\boldsymbol{x}$ - кількість виготовлених сорочок, а $\boldsymbol{y}$ - спідниць. Знайти оптимальну комбінацію випуску сорочок та спідниць, яка мінімізує повні витрати на їх виробництво.

Розв'язування. Математична модель задачі: знайти мінімум функції $\boldsymbol{C(x;y) = 7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64}$ при умові $\boldsymbol{x + y = 77}$. Для пошуку умовного екстремуму скористуємось методом Лагранжа. Складаємо функцію Лагранжа:

$$L(x;y;\lambda)=7x^2-2xy+5y^2+64+\lambda(x+y-77)$$

і дослідимо її на екстремум. Частинні похідні першого порядку:

$$L'_x=\left(7x^2-2xy+5y^2+64+\lambda(x+y-77)\right)'_x=14x-2y+\lambda;$$

$$L'_y=\left(7x^2-2xy+5y^2+64+\lambda(x+y-77)\right)'_y=-2x+10y+\lambda;$$

$$L'_\lambda=\left(7x^2-2xy+5y^2+64+\lambda(x+y-77)\right)'_\lambda=x+y-77.$$

Стаціонарну точку знаходимо, розв'язуючи систему:

$$\begin{cases}L'_x=0\\L'_y=0\\L'_\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14x-2y+\lambda=0\\-2x+10y+\lambda=0\\x+y-77=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=77\\16x-12y=0\\\lambda=2x-10y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{4x}{3}=77\\y=\dfrac{4x}{3}\\\lambda=2x-10y\end{cases}.$$

Розв'язок системи дає стаціонарну точку $M(33;44;-374)$, яка за теоремою (необхідна умова екстремуму) є «підозрілою» на точку екстремуму. Скористуємось достатньою умовою існування умовного екстремуму функції Лагранжа $L(x,y,\lambda)=C(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, де $\varphi(x,y)=x+y-77$. Для цього в стаціонарній точці необхідно обчислити визначник:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}0&\varphi'_x&\varphi'_y\\\varphi'_x&L''_{xx}&L''_{xy}\\\varphi'_y&L''_{yx}&L''_{yy}\end{vmatrix}.$$

Знаходимо значення частинних похідних другого порядку в точці $M(33;44;-374)$:

$$L''_{xx}=\left(14x-2y+\lambda\right)'_x=14;\ L''_{yy}=\left(-2x+10y+\lambda\right)'_y=10;$$

$$L''_{xy}=\left(14x-2y+\lambda\right)'_y=-2=L''_{yx},\quad \varphi'_x=(x+y-77)'_x=1=\varphi'_y.$$

Обчислюємо визначник в стаціонарній точці:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 14 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{vmatrix} = -(0-2-2-14-0-10) = 28 > 0$$ тому,

стаціонарна точка $M(33;44;-374)$ є точкою умовного мінімуму функції Лагранжа. Отже, мінімальні повні витрати досягаються при випуску $x = 33$ сорочок та $y = 44$ спідниць. Зауважимо, що значення множника Лагранжа $\lambda = -374$ показує, що збільшення загального замовлення із 77 одиниць до 78 (на одну одиницю) призведе до збільшення загальних витрат приблизно на 374 гр.од.

Приклад. Функція корисності для споживача двох товарів має вигляд $U(x;y) = x^2 y$, де x - кількість одиниць першого товару, а y - другого. Ціна одиниці першого товару $p_1 = 4$ (грн), а другого - $p_2 = 2$ (грн). Дохід споживача становить 600 грн. Знайти кількості придбаних споживачем товарів, які забезпечать йому найбільшу корисність (при його бюджетному обмеженні, тобто, при повному використанні доходу).

Розв'язування. Математична модель задачі: знайти максимум функції корисності $U(x;y) = x^2 y$ при умові $4x + 2y = 600$ (бюджетне обмеження).

Метод виключення змінних. Із умови $y = 300 - 2x$. Підставляємо у $U(x;y) = x^2 y$ і знаходимо найбільше значення функції однієї змінної $U(x) = 300x^2 - 2x^3$ на проміжку $x \in [0;150]$. Похідна $U' = 600x - 6x^2$, її критичні точки $x_1 = 0, x_2 = 100$. Обчислюємо значення функції в точках $x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 150$:

$$U(0) = 0; U(100) = 300 \cdot 100^2 - 2 \cdot 100^3 = 100^3;$$

$$U(150) = 300 \cdot 150^2 - 2 \cdot 150^3 = 0$$

Найбільшим серед цих значень є $U(100) = 100^3$. Отже, найбільшу корисність споживачеві забезпечить придбання $x = 100$ одиниць першого товару та $y = 300 - 2 \cdot 100 = 100$ одиниць другого товару (при цьому повністю витрачається його дохід 600 грн).

При моделюванні часто необхідно різні явища описувати за допомогою функцій, які визначаються за статистичними (емпіричними, вибірковими) даними. Тому актуальною є задача знаходження параметрів таких функцій

Поняття про емпіричні формули і метод найменших квадратів (МНК).

Нехай при дослідженні явища проводяться спостереження за двома змінними величинами: фактор x, який впливає на показник y. В результаті, ми отримуємо n пар значень (x, y), які зазвичай подаються у вигляді наступної таблиці:

Таблиця результатів спостережень

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Необхідно за даними експерименту знайти функціональну залежність y від x, яка б найкращим чином описувала результати спостережень.

Емпіричними формулами називають функціональні залежності, які побудовані за результатами експерименту. Оскільки значення y залежної змінної (функції), які обчислюються за емпіричними формулами $\tilde{y} = f(x)$, можуть відрізнятись від результатів спостережень y_i для відповідного значення x_i, то значення, що обчислені за емпіричними формулами, позначаються $\tilde{y}_i$.

Побудова емпіричної формули здійснюється у два етапи.

Перший етап передбачає визначення множини можливих функцій, до яких може згідно з теоретичним припущенням належати шукана залежність. Вибір функції, яку доцільно використовувати для наближеного опису (*апроксимації*) результатів досліджень, здійснюється на основі теоретичних припущень щодо природи явища, яке досліджується, або за результатами візуального аналізу розташування точок на площині.

Кожний клас функцій характеризується кількома числовими параметрами $a_0, a_1, ..., a_m$, кількість яких залежить від типу функції. Наприклад, лінійна залежність $\boldsymbol{y = a_0 + a_1 x}$ містить два параметри: $\boldsymbol{a_1}$ – кутовий коефіцієнт, $\boldsymbol{a_0}$ – величина відрізка, який пряма відтинає на осі ординат; квадратична залежність описується формулою, у якої три числових параметра: $\boldsymbol{y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$, де x – поточна змінна, а $\boldsymbol{\{a_0, a_1, a_2\}}$ – множина параметрів тощо. Відповідно, значення функції, якого вона набуватиме за емпіричною формулою, залежить не тільки від значення аргументу, але і від цих параметрів, тому параметри теж вносять у символічний запис емпіричної формули: $\tilde{y} = f(x,\ a_0,\ a_1,...,a_m)$.

На другому етапі знаходять оцінки значень числових параметрів $\boldsymbol{a_0, a_1,...,a_m}$. Ці параметри повинні бути такими, щоб функція найкращим чином описувала явище, що вивчається. Слід зазначити, що побудова емпіричних формул є однією з задач, що досліджує математична статистика, а саме це задача регресійного аналізу.

Одним із найбільш поширених методів, що застосовуються для відшукання параметрів емпіричних формул, є *метод найменших квадратів (МНК)*. Він базується на тому, що функція вважається найкращою для апроксимації емпіричних даних, якщо сума квадратів різниць між емпіричними значеннями залежної змінної y_i і тими, які обчислені за шуканою функцією $\tilde{y}_i$ при одних і тих самих значеннях аргументу x_i, є мінімальною.

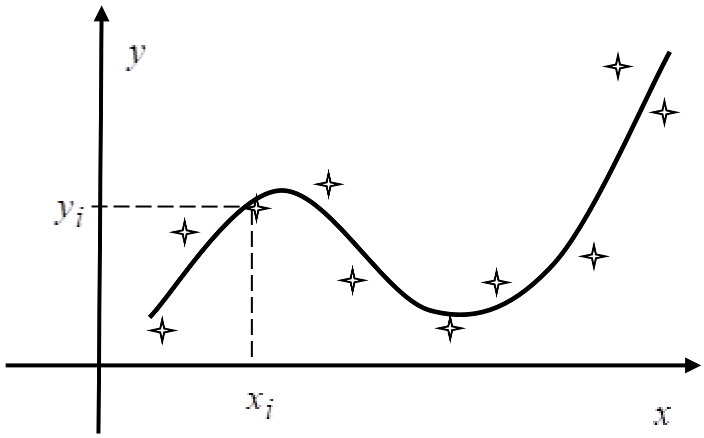


Рис. Ілюстрація до методу найменших квадратів

Різниця між значеннями y_i ($i=\overline{1,n}$), які отримані як результат досліджень, і тими, що обчислені за емпіричною формулою

$$\tilde{y}_i = f(x_i,\ a_0,\ a_1,...,a_m),$$

тобто відхилення емпіричних значень функціональної змінної від теоретичних, є похибками моделі. Ці похибки позначають через ε_i.

Отже,

$$y_i - f(x_i,\ a_0,\ a_1,...,a_m) = \varepsilon_i,\ \ i=\overline{1,n}.$$

Згідно з принципом МНК невідомі параметри функції, за допомогою якої здійснюється апроксимація, вибирають таким чином, щоб сума квадратів похибок була мінімальною:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i,\ a_0,\ a_1,...,a_m)\right)^2 \to \min.$$

Дана функція називається ***функцією похибок***. Очевидно, що вона залежить від параметрів моделі a_j ($j=\overline{0,m}$), тобто $S = S(a_0,\ a_1,...,a_m)$.

Отже, згідно з методом МНК, ми маємо функцію від $m+1$ змінної, яку необхідно дослідити на мінімум.

Відшукання параметрів емпіричних формул здійснюється за таким алгоритмом:

1) *складають* суму квадратів відхилень емпіричних значень залежної змінної від її теоретичних значень, тобто за формулою (2.1) утворюють функцію похибок S;

2) *знаходять* $a_j,\ j=\overline{0,m}$, які забезпечують мінімальне значення S. Для цього, за необхідною умовою локального екстремуму, знаходять частинні похідні та прирівнюють їх нулю $\boldsymbol{\partial S/\partial a_j = 0,\ j=\overline{0,m}}$. Розв'язуючи отриману СЛАР (так звану систему нормальних рівнянь), отримують шукані параметри моделі $a_j,\ j=\overline{0,m}$. Доведено, що відповідна стаціонарна точка є точкою мінімуму функції $S=S(a_0,\ a_1,\ldots,a_m)$.

Одним із принципів, які покладені в основу побудови емпіричних формул, є припущення, що зв'язок між факторами, що розглядаються, є лінійним. Отже, розглянемо побудову емпіричної формули на прикладі, коли апроксимуючою є лінійна функція $\tilde{y}(x,\ a_0,\ a_1)=a_0+a_1x.$ Побудуємо функцію похибок, яка у даному випадку має вигляд:

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_0-a_1x_i)^2 .$$

За необхідною умовою екстремуму відшукуємо її частинні похідні першого порядку і прирівнюємо їх до нуля. Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} S'_{a_0}=\sum\limits_{i=1}^{n}2(y_i-a_0-a_1x_i)\cdot(-1)=0; \\ S'_{a_1}=\sum\limits_{i=1}^{n}2(y_i-a_0-a_1x_i)\cdot(-x_i)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0\sum\limits_{i=1}^{n}1+a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i; \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i. \end{cases}$$

Ця система називається ***системою нормальних рівнянь*** для знаходження параметрів емпіричних формул.

Розв'язок системи дає найкращі значення шуканих параметрів, при яких для обраного виду функції сума квадратів похибок буде найменшою.

У тому випадку, коли залежність між змінними y та x слід апроксимувати функцією, яка не є лінійною, то застосування МНК потребує попередньої ***лінеаризації*** моделі, тобто введення нових змінних таким чином, щоб залежність між цими новими змінними була би лінійною. Наприклад, якщо залежність змінною y від змінної x описується гіперболічною функцією, тобто $f(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1 x^{-1}$, то вводять змінну $X = x^{-1}$, і систему нормальних рівнянь записують відносно цієї змінної.

Якщо апроксимуюча функція є степеневою, тобто $f(x, a_0, a_1) = a_0 x^{a_1}$, функцію спочатку треба прологарифмувати за будь-якою основою (наприклад, за основою $\boldsymbol{e}$):

$$\mathbf{ln}\, \boldsymbol{y} = \mathbf{ln}\, \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1} \cdot \mathbf{ln}\, \boldsymbol{x}.$$

Введемо нові змінні: $\boldsymbol{Y} = \mathbf{ln}\, \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{X} = \mathbf{ln}\, \boldsymbol{x}$. Відносно нових змінних укладаємо систему нормальних рівнянь, і за цією системою визначаємо параметри моделі $\boldsymbol{A_0} = \mathbf{ln}\, \boldsymbol{a_0}$ та a_1. Після їх обчислення необхідно повернутись до вихідних змінних.

Нехай апроксимуюча функція параболічна, тобто:

$$f(x, a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Укладемо функцію похибок:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - y_i)^2 \quad \to \min$$

та визначимо її частинні похідні за невідомими a_0, a_1 та a_2. Прирівнюючи їх нулю (за необхідною умовою екстремуму), маємо:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot (-1) = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot (-x_i) = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i) \cdot (-x_i^2) = 0. \end{cases}$$

Перетворимо систему:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Отримали систему нормальних рівнянь для знаходження параметрів a_0, a_1 та a_2.

Слід зазначити, що значення параметрів певної функції, обчислення яких проводилось за МНК, забезпечують найменшу суму квадратів похибок порівняно з іншими параметрами такого типу функції, однак застосування для апроксимації функції іншого типу може дати менше значення суми квадратів похибок.

Тема 20. Основні поняття

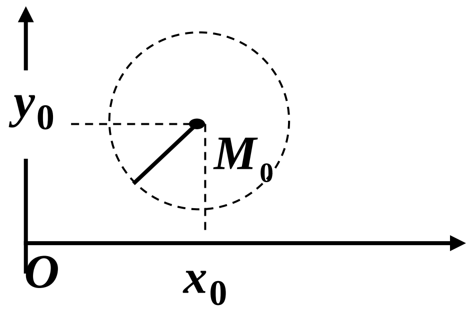
Для спрощення і можливості геометричної інтерпретації (не втрачаючи при цьому загальності) всюди надалі розглядаються лише функції двох змінних $z = f(x_1, x_2)$ або $z = f(x, y)$.

Спочатку розглянемо поняття збіжності послідовностей точок простору R^2.

Означення. ε-околом точки $M_o(x_0; y_0)$ називається відкритий круг (без границі – кола) радіуса $\varepsilon > 0$ з центром у цій точці.

Аналітично – це множина точок $M(x; y)$ площини xOy, координати яких задовольняють умову

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon.$$



Геометрична ілюстрація:

У загальному випадку простору $R^n, n \geq 3$ ε-околом точки M_o називають відкриту кулю радіуса $\varepsilon > 0$ з центром у цій точці.

Означення. Точка $M_o(x_0; y_0)$ називається границею послідовності точок $\{M_n(x_n; y_n)\}$, якщо до будь-якого ε-околу точки $M_o(x_0; y_0)$ попадають усі точки послідовності, починаючи з деякого номера N. Часто точку $M_o(x_0; y_0)$ називають точкою згущення послідовності і позначають $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = M_0$ або $M_n \to M_0$.

Неважко показати, що така збіжність еквівалентна покоординатній збіжності, тобто:

$$M_n \to M_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \end{cases}.$$

Надалі будуть розглядатись множини точок простору R^2.

Означення. Точка множини називається **внутрішньою**, якщо разом із цією точкою множині належить і деякий її ε-окіл.

Означення. Множина називається **відкритою**, якщо усі її точки внутрішні.

Означення. Точка множини називається **граничною**, якщо будь-який її ε-окіл містить як точки множини, так і точки, які не належать множині. Сукупність усіх граничних точок називається **границею**.

Означення. Множина називається **замкненою**, якщо вона містить усі свої граничні точки (границю).

Означення. Якщо кожній точці $M(x;y) \in D(f) \subset R^2$ за деяким законом або правилом f поставлено у відповідність єдине число $z \in E(f) \subset R$, то кажуть, що задано **функцію двох незалежних змінних** $z = f(x,y)$ або $z = f(M)$.

При цьому множина $D(f)$ називається **областю визначення функції**, а множина $E(f)$ – **множиною значень функції.**

Якщо $D(f)$ не задана, то **область визначення** аналітично заданої функції двох змінних $z = f(x,y)$ є множина точок $(x;y)$ простору R^2, при яких аналітичний вираз $f(x,y)$ має сенс.

Розглянемо деякі приклади знаходження областей визначення функцій двох змінних. При цьому для наочності будемо знаходити геометричні образи областей визначення.

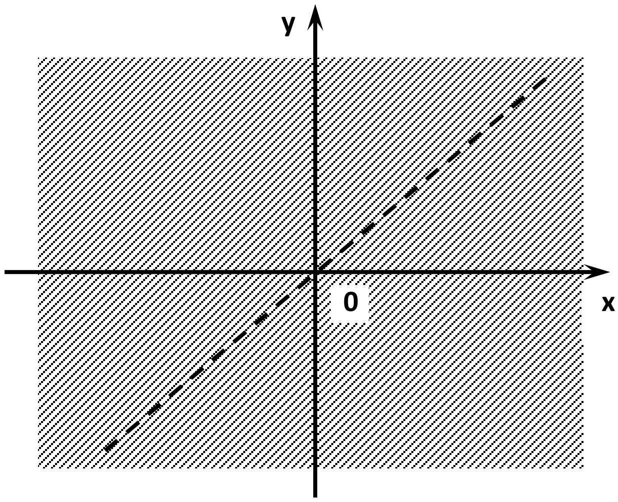
Приклад . Знайти область визначення функції $z = \dfrac{1}{y - x}$.

Розв'язування.

$D(z) = \{(x;\, y) \in R^2 : y - x \neq 0\}$

оскільки аналітичний вираз має сенс, коли його знаменник не дорівнює нулю.

Геометричний образ $D(z)$ – множина усіх точок площини xOy, окрім точок прямої $y = x$ (див.рис).



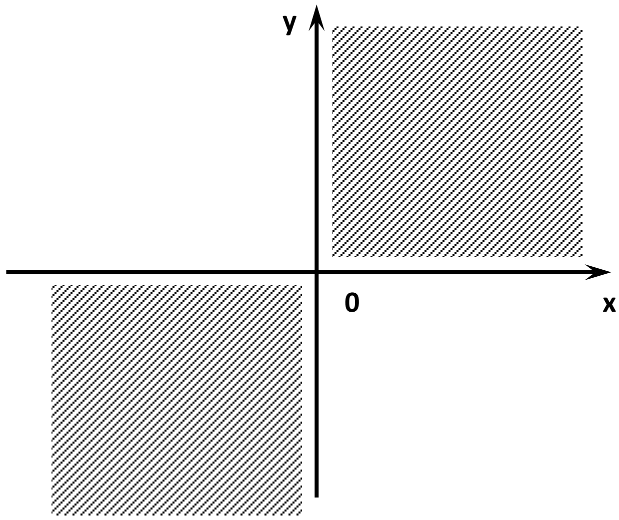
Приклад . Знайти область визначення функції $z = ln(xy)$.

Розв'язування.

$D(z) = \{(x;\, y) \in R^2 : xy > 0\}$,

оскільки аналітичний вираз має сенс, коли аргумент логарифма додатний.

Геометричний образ $D(z)$ - це множина точок площини xOy, координати яких мають однаковий знак (I і III координатні чверті), окрім точок, які належать осям Ox і Oy.



У подальшому, при знаходженні геометричних образів розв'язків нерівностей з двома змінними та їх систем будемо використовувати наступне правило, яке базується на властивості збереження знаку неперервною функцією.

Правило («метод пробної точки»). Нехай у площині задана лінія L, яка визначається рівнянням $f(x, y) = 0$ (де f - неперервна функція), і ця лінія розбиває площину на дві області: G^+ та G^- . Якщо у довільній точці $M_1\left(x_1;y_1\right)$, що належить одній із цих областей, виконується нерівність $f\left(x_1;y_1\right)>0$ ($f\left(x_1;y_1\right)<0$), то вона виконується в усіх точках цієї області.

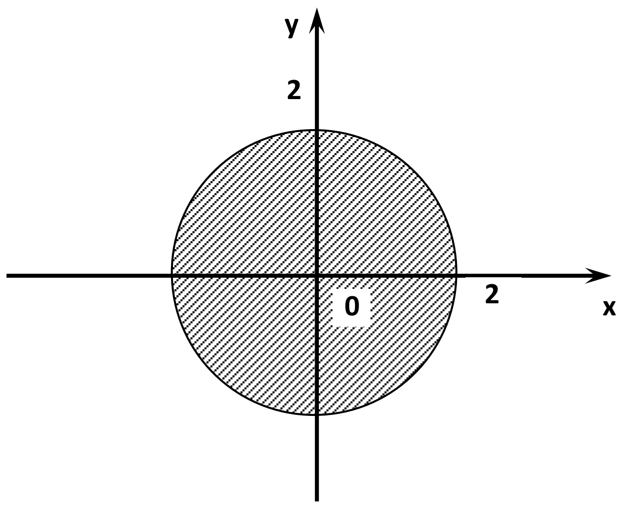
Приклад . Знайти область визначення функції $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

$$D(z)=\left\{\left(x;y\right)\in R^2 : 4-x^2-y^2\ge 0\right\}.$$

Для знаходження геометричного образа області визначення розглянемо рівняння границі L:

$$4-x^2-y^2=0, \text{ або } x^2+y^2=4.$$

Це рівняння кола з центром у точці $O(0;\ 0)$ і радіуса $R=2$. Дане коло поділяє всю координатну площину на дві частини: внутрішню (усередині кола) і зовнішню (поза ним). "Методом пробної точки" визначаємо потрібну частину площини: наприклад, координати точки $O(0;\ 0)$, яка лежить усередині кола, задовольняють нерівність $4-x^2-y^2>0$.



За вказаним правилом ця нерівність буде виконуватись для всіх точок площини, які лежать усередині кола. Отже, областю визначення функції $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ є круг разом із границею - колом.

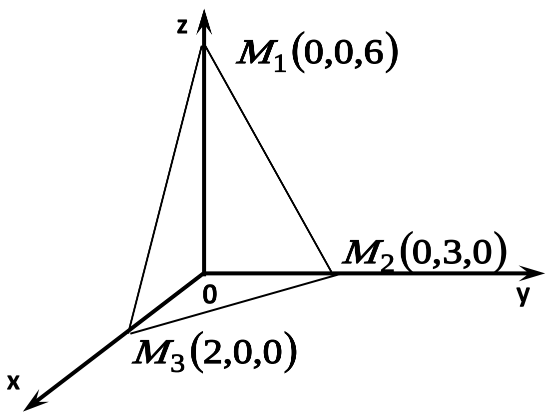
У попередніх прикладах функція двох змінних була задана аналітично (формулою), але її також можна задати таблицею, графічно тощо.

Наприклад, залежність об'єму виробництва Q від двох основних факторів виробництва K – капіталу і L – праці – можна зобразити у вигляді таблиці, де для кожного набору витрат капіталу K_j і витрат праці L_i можна знайти відповідний об'єм виробництва $Q_{ij} = f(L_i, K_j)$:

$L \backslash K$	K_1	K_2	...	K_n
L_1	Q_{11}	Q_{12}	...	Q_{1n}
L_2	Q_{21}	Q_{22}	...	Q_{2n}
...	...	...	...	...
L_m	Q_{m1}	Q_{m2}	...	Q_{mn}

Графіком функції двох змінних $z = f(x;\ y)$ називається множина точок $M(x;\ y;\ f(x,\ y))$ простору $Oxyz$. Ця множина, як правило, утворює деяку поверхню у трьохвимірному просторі.

Приклади.



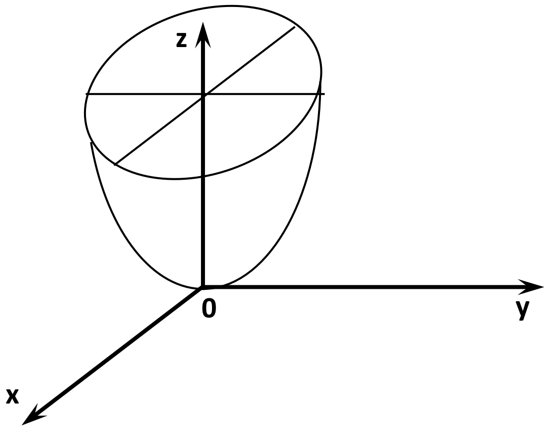
Графіком функції

$$z = 6 - 3x - 2y$$

є площина, яка перетинає осі координат у точках M_1, M_2, M_3.

Зауважимо, що графіком будь-якої лінійної функції $z = Ax + By + C$ є деяка площина π у трьохвимірному просторі.

Приклад .



Графіком функції $z = x^2 + y^2$ є так званий параболоїд обертання. Ця поверхня утворюється, якщо обертати параболу $z = x^2$ або $z = y^2$ навколо осі Oz.

Як бачимо, накреслити графік функції $z = f\left(x,\, y\right)$ не завжди просто.

Більш простою геометричною ілюстрацією функції двох змінних є лінії рівня.

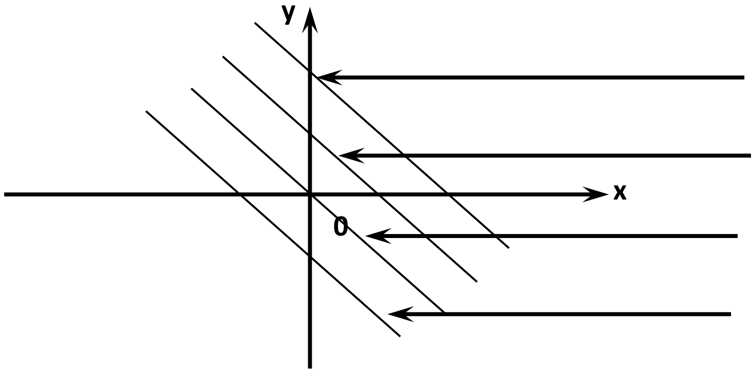
Лінії рівня.

Лінії рівня функції $z = f\left(x,\, y\right)$ визначаються рівнянням $f(x,\ y) = C$, де C – довільні сталі, узяті із множини значень функції.

Лінії рівня отримуються проектуванням на площину xOy перетинів графіка функції площинами $z = C$ і лежать в області визначення функції $D(\,f\,)$. Лінії рівня не перетинаються і вздовж них функція залишається сталою.

Сукупність усіх ліній рівня називається картою ліній рівня.

Приклад . Для функції $z = 1 - x - y$ лінії рівня визначаються рівнянням $1 - x - y = C$ або $x + y = 1 - C$, де $C \in \left(-\infty;\ \infty\right)$. Карта ліній рівня – множина паралельних прямих (див.рис.).



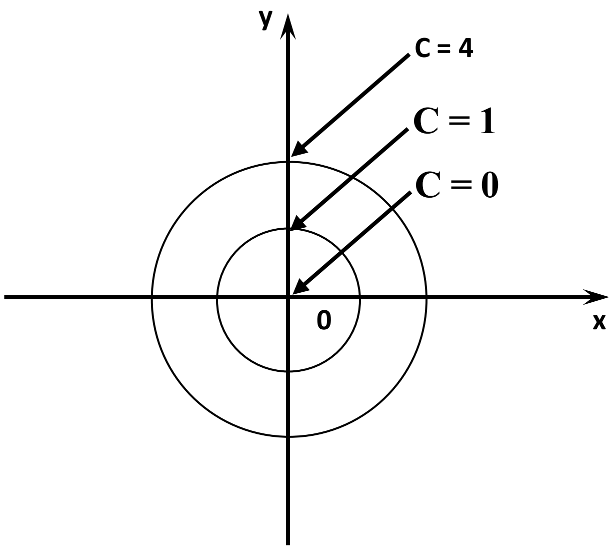
При $C = -1 \quad x + y = 2$

При $C = 0 \quad x + y = 1$

При $C = 1 \quad x + y = 0$

При $C = 2 \quad x + y = -1$

Приклад . Для функції $z = x^2 + y^2$ лінії рівня визначаються рівнянням $x^2 + y^2 = C$, де $C \in [0; +\infty)$. Карта ліній рівня – множина концентричних кіл з центром в точці $O(0;\ 0)$ і радіусом $R = \sqrt{C}$.



При $C = 0$:

$x^2 + y^2 = 0$ – єдина точка $O(0;\ 0)$.

При $C = 1$:

$x^2 + y^2 = 1$ – коло $R = 1$.

При $C = 4$:

$x^2 + y^2 = 4$ – коло $R = 2$.

Границя і неперервність ФДЗ.

Визначення границі і неперервності функції двох змінних аналогічні відповідним визначенням функції однієї змінної.

Число A називається **границею функції** $z=f(M)$ в точці $M_0(x_0;\ y_0)$, якщо для будь-якої послідовності точок $\{M_n(x_n;y_n)\}$ $\in D(z)$, яка збігається до точки $M_0(M_n \neq M_0)$, відповідна послідовність значень функції $\{f(M_n)\}$ збігається до одного і того самого числа A.

Позначення: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=A$ або $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$.

Для збіжних, нескінченно малих (НМ), нескінченно великих (НВ) функцій багатьох змінних справедливі усі властивості, аналогічні функціям однієї змінної.

Але для ФБЗ можна розглядати і частинні границі, тобто, границі по окремим змінним (усі інші змінні фіксуються). Наприклад: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\ y_0)=A$ або $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,\ y)=B$. При цьому із існування границі функції в точці по сукупності змінних $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$ випливає існування (і рівність) частинних границь по окремим змінним, але із існування частинних границь, взагалі кажучи, не слідує існування границі по сукупності змінних.

Приклад . Знайти границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\left(3x+y^2\right)=3+4=7$ за арифметичними теоремами, властивостями збіжних.

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$ за властивостями НМ, НВ.

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$позбуваємось радикалів, які дають невизначеність=

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(\sqrt{xy+1}-1\right)\left(\sqrt{xy+1}+1\right)}{xy\left(\sqrt{xy+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy+1-1}{xy\left(\sqrt{xy+1}+1\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y}{x+y} = \left[\frac{0}{0}\right] = \begin{bmatrix} y = kx \\ x\to 0 \Rightarrow y \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-kx}{x+kx} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1-k)}{x(1+k)} = \frac{1-k}{1+k}.$$

При різних k отримуємо різні значення величини $\frac{1-k}{1+k}$, а це означає, що границі функції в точці $(0;\ 0)$ не існує. Відзначимо, що частинні границі по окремим змінним існують: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-0}{x+0} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$, $\lim\limits_{y\to 0} \frac{0-y}{0+y} = \left[\frac{0}{0}\right] = -1$, але вони не співпадають.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ **неперервна** в точці $M_0(x_0; y_0)$ (по сукупності змінних), якщо виконуються три умови:

1. Функція визначена в точці $M_0(x_0; y_0)$, тобто $\exists\, f(M_0)$.
2. Функція має границю при $M \to M_0$, тобто $\exists \lim\limits_{M\to M_0} f(M)$.
3. Границя функції при $M \to M_0$ співпадає зі значенням функції в тій точці, тобто $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається розривною в цій точці.

Для ФДЗ справедливі усі властивості неперервних функцій, аналогічні функціям однієї змінної. Зокрема, відзначимо властивість неперервних на обмежених замкнених областях функцій досягати своїх найменшого та найбільшого значень (теорема Вейєрштраса), властивість збереження знаку між коренями («правило пробної точки») тощо.

Приклад. Функція $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2x - y}$ неперервна як елементарна на R^2, але розривна у точках, які належать прямій $y = 2x$, оскільки в цих точках функція не визначена.

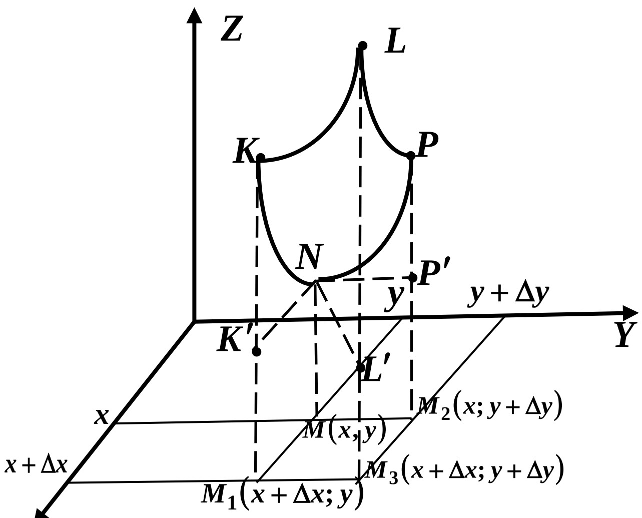
Зауважимо, що (як і для границі) із неперервності по сукупності змінних випливає неперервність по кожній окремій змінній. Обернене твердження, взагалі кажучи, невірне.

Тема 21. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФДЗ.

Частинні прирости, похідні та диференціали.

Розглянемо функцію $Z = f(x;\ y)$. Візьмемо довільну точку $M(x;\ y)$ з області визначення функції і надамо аргументу x приріст Δx, залишаючи y без зміни.

Функція отримала приріст $\Delta_x Z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, який **називається частинним приростом функції Z по змінній x** (геометричну ілюстрацію показано на рис.).



$KK' = \Delta_x Z = Z(M_1) - Z(M)$ – частинний приріст Z по x.

Аналогічно,

$$PP' = \Delta_y Z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$
$$= Z(M_2) - Z(M)$$

– частинний приріст функції Z по y.

$$LL' = \Delta Z = f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f(x;\ y)$$
$$= Z(M_3) - Z(M)$$

– повний приріст функції.

Відмітимо, що взагалі кажучи: $\Delta Z \neq \Delta_x Z + \Delta_y Z$.

Означення. Частинною похідною функції декількох змінних по одній із них називається границя відношення відповідного частинного приросту функції до приросту цієї змінної, коли останній прямує до нуля, якщо границя цього відношення існує.

Отже,

$$Z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x}$$ – частинна похідна функції Z по x.

Інші позначення f'_x; $\frac{\partial Z}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$Z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y Z}{\Delta y}$$ – частинна похідна функції Z по y.

Інші позначення f'_y; $\frac{\partial Z}{\partial y}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Вирази вигляду $d_x Z = Z'_x dx$ і $d_y Z = Z'_y dy$ називаються **частинними диференціалами.**

З означення частинної похідної по одній із змінних випливає, що при її знаходженні ми повинні усі інші змінні розглядати як сталі величини. Слід зазначити, що для частинних похідних справедливі усі теореми, властивості, аналогічні похідній функції однієї змінної (одного аргументу).

Приклад . Знайти частинні похідні функцій:

а) $Z = x^3 + 3x^2 y - 5y^2$ б) $Z = e^{x^2 - y^5}$

в) $Z = \sin(xy)$; г) $Z = \frac{xy}{x+y}$.

При знаходженні частинних похідних функції двох змінних застосовуються арифметичні теореми для диференційовних функцій, таблиця похідних основних елементарних функцій, теорема про похідну складеної функції однієї змінної.

а) $Z'_x = 3x^2 + 6xy$ $(y = const)$; $Z'_y = 3x^2 - 10y$ $(x = const)$.

б) $Z'_x = e^{x^2 - y^5} \cdot 2x$ $(y = const)$;

$Z'_y = e^{x^2 - y^5} \cdot \left(-5y^4\right)$ $(x = const)$.

в) $Z'_x = cos(xy) \cdot y$ $(y = const)$; $Z'_y = cos(xy) \cdot x$ $(x = const)$.

г) $Z'_x = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$ $(y = const)$;

$$Z'_x=\frac{x(x+y)-xy}{(x+y)^2}=\frac{x^2}{(x+y)^2}\quad (x=const).$$

Диференційовність функції двох змінних.

Функція $Z=f(x,y)$ називається **диференційовною в точці** $M(x;y)$, якщо її повний приріст у цій точці може бути поданим у вигляді:

$$\Delta Z=Z'_x\cdot\Delta x+Z'_y\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y,$$

де α і β – нескінченно малі величини при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$.

Головна (лінійна відносно Δx і Δy) частина $Z'_x\cdot\Delta x+Z'_y\cdot\Delta y$ повного приросту ΔZ диференційовної функції $Z=f(x,y)$, називається **повним диференціалом** цієї функції і позначається dZ, тобто

$dZ=Z'_x dx+Z'_y dy$, де $dx=\Delta x$ і $dy=\Delta y$ - диференціали незалежних змінних (аргументів), які співпадають з їх приростами.

Зауважимо, що на відміну від функції однієї змінної, для якої диференційовність еквівалентна існуванню похідної, для диференційовності ФДЗ необхідно не тільки існування, а ще й неперервність частинних похідних.

Приклад . Знайти частинні і повний диференціали функції $Z=x^3y^2$ у точці $M(2;\ 1)$.

$Z'_x=3x^2y^2$ - неперервна; $Z'_x(2;\ 1)=3\cdot2^2\cdot1^2=12$;
$d_xZ(2;\ 1)=12dx$;

$Z'_y=2x^3y$- неперервна; $Z'_y(2;\ 1)=2\cdot2^3\cdot1=16$;
$d_yZ(2;\ 1)=16dy$; $dZ(2;\ 1)=12dx+16dy$.

Похідна за напрямком.

Відзначимо, що $Z'_x = \dfrac{\partial Z}{\partial x}$ є похідною функції $Z = f\left(x, y\right)$ у випадку, коли точка $M\left(x; y\right)$ зміщується у напрямку осі Ox (або за напрямком одиничного вектора $\bar{i} = (1;\ 0)$ - орта при додатному Δx); аналогічно $Z'_y = \dfrac{\partial Z}{\partial y}$ – похідна за напрямком осі Oy (або за напрямком орта $\bar{j} = (0;\ 1)$). Аналогічно можна визначити поняття похідної за довільним напрямком, який задається одиничним вектором $\bar{l} = (\cos\alpha;\ \cos\beta)$ співнаправленим з вектором $\bar{a} = \left(a_x; a_y\right)$, де $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$ і $\cos\beta = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$ – напрямні косинуси вектора $\bar{a}$.

Похідна $\dfrac{dZ}{d\bar{a}}$ **за напрямком вектора** $\bar{a} = \left(a_x; a_y\right)$ **функції** $Z = f\left(x, y\right)$ **у точці** $M(x;\ y)$ обчислюється за формулою:

$$\frac{dZ\left(M\right)}{d\bar{a}} = Z'_x\left(M\right) \cdot \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} + Z'_y\left(M\right) \cdot \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

і визначає швидкість зміни значень функції за цим напрямком.

Приклад. Знайти похідну функції $Z = 2x^3 + y^2 x$ у точці $M_0(1;\ 2)$ за напрямком вектора $\bar{a} = (3;\ -4)$.

Розв'язування. Знайдемо частинні похідні функції в точці $M_0(1;\ 2)$:

$$Z'_x = 6x^2 + y^2; \quad Z'_x(1;2) = 6 \cdot 1^2 + 2^2 = 10.$$

$$Z'_y = 2yx; \quad Z'_y(1;2) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\bar{a}=(3;-4)$:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5};\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}=\frac{-4}{5}.$$

За формулою похідної за напрямком отримаємо:

$$\frac{dZ(M_0)}{d\bar{a}}=10\cdot\frac{3}{5}+4\cdot\frac{-4}{5}=\frac{14}{5}=2{,}8.$$

Отже, функція $Z=2x^3+y^2x$ у точці $M_0(1;\ 2)$ за напрямком вектора $\bar{a}=(3;\ -4)$ зростає зі швидкістю $2{,}8$.

Зауваження. На відміну від функцій однієї змінної для ФДЗ можна говорити про зростання або спадання лише у певному напрямку.

Градієнт.

Серед усіх напрямків, що виходять із даної точки, виділяють особливий – так званий градієнтний.

Означення. Градієнтом функції $Z=f(x,y)$ у точці $M(x;\ y)$ називається вектор, координатами якого є значення частинних похідних у цій точці.

Вектор градієнт позначається $\overrightarrow{grad}\,Z(M)=\left(Z'_x(M);Z'_y(M)\right)$.

Очевидно, що в кожній точці області визначення функції, в якій існують частинні похідні, можна визначити такий вектор.

Найважливіші властивості градієнту:

1. Градієнт вказує напрямок найбільш швидкого зростання (а протилежний йому (антиградієнт)– найшвидшого спадання) функції, а його модуль визначає величину цієї швидкості.
2. $\overrightarrow{grad}\,Z(M)$ є вектором нормалі до лінії рівня $f(x,\ y)=C$, яка проходить через точку M.

Приклад. Для функції $Z = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ знайти напрям із точки $M(3;\,4)$, у якому швидкість зростання функції максимальна (вектор-градієнт). Визначити довжину градієнта, схематично побудувати на координатній площині цей вектор та відповідну лінію рівня.

Напрям, у якому швидкість зростання функції максимальна, визначає вектор-градієнт. Знайдемо його за формулою:

$$\overrightarrow{grad}\,Z(M) = \left(Z'_x(M),\ Z'_y(M)\right)$$

$$Z'_x = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}};\quad Z'_x(3;4) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$Z'_y = \frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}};\quad Z'_y(3;4) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Отже, $\overrightarrow{grad}\,Z(3;\,4) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Довжина градієнта:

$\left|\overrightarrow{grad}\,Z(3;\,4)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{48}} = \frac{5}{4\sqrt{3}}$. Отже, в точці $M(3;\,4)$ у напрямку градієнта функція зростає найшвидше (а у протилежному напрямку спадає найшвидше) зі швидкістю $\frac{5}{4\sqrt{3}}$ Оскільки $Z(3;\,4) = \sqrt{3\cdot 4} = 2\sqrt{3}$, то лінія рівня функції, що проходить через точку $M(3;\,4)$ визначається рівнянням $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$, або $xy = 12$, або $y = \frac{12}{x}$. Це рівняння рівнобічної гіперболи (точніше - її вітка, яка розташована у першій чверті координатної площини xOy. Геометрична ілюстрація).

Зауваження 1. *Вектор-градієнт використовують для пошуку екстремумів ФДЗ (зокрема, у математичному програмуванні).*

Зауваження 2. *Якщо функція лінійна* $Z = ax + by + c$, *то її частинні похідні* $Z'_x = a$ *і* $Z'_b = b$ *є сталі величини і вектор-градієнт* $\overrightarrow{grad}\, Z = (a;\ b)$ має незмінний напрямок у кожній точці області визначення функції.

Приклад . Для функції $Z = 2x + y + 1$ знайти напрямок, у якому швидкість зростання функції максимальна. З'ясувати геометричний зміст розв'язку.

Розв'язування. Знайдемо градієнт:

$$Z'_x = 2; \quad Z'_y = 1; \quad \overrightarrow{grad}\, Z = (2;\ 1) \text{ або } \overline{N} = (2;\ 1).$$

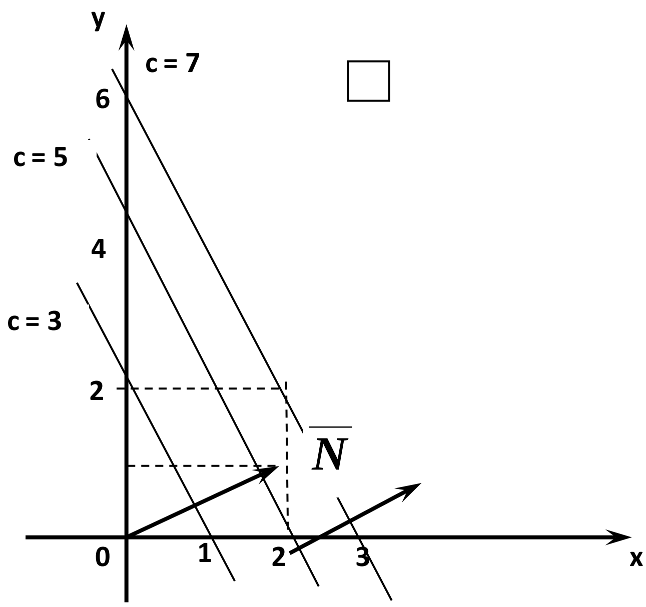
Лінії рівня даної функції визначаються рівнянням $2x + y + 1 = c$ або $2x + y = c - 1$.

При $c = 3$ $\quad 2x + y = 2$ $\quad$ або $\quad \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} = 1.$

При $c = 5$ $\quad 2x + y = 4$ $\quad$ або $\quad \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1.$

При $c = 7$ $\quad 2x + y = 6$ $\quad$ або $\quad \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} = 1.$

Зобразимо градієнт і лінії рівня на координатній площині.



Довжина градієнта

$$\left|\overline{N}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Найбільша швидкість зростання функції у будь-якій точці площини дорівнює $\sqrt{5}$, напрямок найбільшого зростання задає вектор градієнт $\overline{N} = (2;\, 1)$.

Частинні похідні вищих порядків.

Якщо функція $Z = f\left(x, y\right)$ має частинні похідні першого порядку $Z'_x = \dfrac{\partial Z}{\partial x}$ і $Z'_y = \dfrac{\partial Z}{\partial y}$, то у загальному випадку вони є функціями змінних x та y і, у свою чергу, також можуть мати частинні похідні, які називаються **частинними похідними другого порядку** і позначаються:

$$Z''_{xx} = \left(Z'_x\right)'_x = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2},$$ читається : «де два зет по де ікс двічі»;

$$Z''_{xy} = \left(Z'_x\right)'_y = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y},$$ читається : «де два зет по де ікс, де ігрек»;

$$Z''_{yy} = \left(Z'_y\right)'_y = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$, читається : «де два зет по де ігрек двічі»;

$$Z''_{yx} = \left(Z'_y\right)'_x = \frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}$$, читається : «де два зет по де ігрек, де ікс»;

Z''_{xy} і Z''_{yx} називаються **мішаними похідними другого порядку.** Аналогічно визначаються похідні більш високих порядків.

Схематично процес утворення похідних можна зобразити наступним чином:

$$Z = f\left(x, y\right)$$

$$Z'_x \qquad\qquad\qquad\qquad Z'_y$$

$$Z''_{xx} \qquad Z''_{xy} \qquad\qquad Z''_{yy} \qquad Z''_{yx}$$

$$Z'''_{xxx} \quad Z'''_{xxy} \quad Z'''_{xyx} \quad Z'''_{xyy} \quad Z'''_{yyy} \quad Z'''_{yyx} \quad Z'''_{yxx} \quad Z'''_{yxy}$$

Відзначимо, що кількість частинних похідних подвоюється зі збільшенням на одиницю порядку похідної.

Приклад . Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$Z = x^3 y^2 - xy^3 + 5.$$

Розв'язування.

$Z'_x = 3x^2 y^2 - y^3$; $\qquad Z''_{xx} = 6xy^2$; $\qquad Z''_{xy} = 6x^2 y - 3y^2$;

$Z'_y = 2x^3 y - 3xy^2$; $\qquad Z''_{yy} = 2x^3 - 6xy$; $\qquad Z''_{yx} = 6x^2 y - 3y^2$;

Співпадання мішаних похідних не випадкове.

Справедлива теорема Шварца (про рівність мішаних похідних). Якщо мішані похідні другого порядку Z''_{xy} і Z''_{yx} існують і неперервні в точці $M(x;y)$, то в цій точці вони співпадають $Z''_{xy}(x;y)=Z''_{yx}(x;y)$.

Аналогічно диференціалу першого порядку визначаються диференціали більш високих порядків. Наприклад, повний диференціал другого порядку функції двох змінних має вигляд (за умови існування і неперервності усіх похідних):

$$d^2Z = Z''_{xx}dx^2 + 2Z''_{xy}dxdy + Z''_{yy}dy^2.$$

Відмітимо, що повний диференціал другого порядку може бути поданим у вигляді квадратичної форми від диференціалів (приростів) аргументів:

$$d^2Z = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z''_{xx} & Z''_{xy} \\ Z''_{yx} & Z''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

де $\Gamma = \begin{pmatrix} Z''_{xx} & Z''_{xy} \\ Z''_{yx} & Z''_{yy} \end{pmatrix}$ - так звана матриця Гессе, визначник якої називають Гессіаном.

Диференціали другого порядку використовуються при дослідженні ФДЗ на екстремуми.

Екстремуми функції двох змінних.

Означення. Точка $M_0(x_0;\ y_0)$ називається **точкою максимуму (мінімуму) функції** $Z = f(x;\ y)$, якщо існує окіл точки M_0, що для всіх точок $M(x;\ y)$, які належать цьому околу і відмінних від M_0, виконується умова

$$f(x;y) < f(x_0;y_0) \qquad \left(f(x;y) > f(x_0;y_0)\right)$$

Точки максимуму і мінімуму функції називаються **точками екстремуму**.

Означення. Точки з області визначення функції, в яких усі частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю або не існують, називаються **критичними точками.**

Означення. Ті точки, в яких усі частинні похідні першого порядку існують і дорівнюють нулю, називаються **стаціонарними.**

В цих точках вектор-градієнт є нуль-вектор. Іншими словами: повний диференціал першого порядку у стаціонарних точках тотожно (при будь-яких приростах аргументів) дорівнює нулю.

Теорема (необхідна умова екстремуму функції).

Якщо функція $Z = f\left(x, y\right)$ у точці $M_0\left(x_0;\ y_0\right)$ досягає екстремуму, то ця точка є критичною.

Із теореми випливає, що екстремуми слід шукати лише серед критичних точок (які можна назвати **підозрілими на екстремуми**).

Зауваження. *Кожна точка екстремуму є критичною, але не кожна критична точка є точкою екстремуму.*

Приклад . $Z = xy$.

$$\begin{matrix} Z'_x = y \\ Z'_y = x \end{matrix};\qquad \begin{cases} Z'_x = 0 \\ Z'_y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases};$$

$M_0(0;\ 0)$ – критична точка і $Z(0;\ 0) = 0$. Але вона не є точкою екстремуму, оскільки $Z(x;\ y) > Z(0;\ 0)$, якщо $xy > 0$ (тобто, x і y мають однаковий знак), і $Z(x;\ y) < Z(0;\ 0)$, якщо $xy < 0$ (тобто x і y мають різні знаки).

Для з'ясування питання про існування екстремуму функції $Z = f(x;\ y)$ у критичній точці $M_0(x_0;\ y_0)$ потрібно знайти у цій точці диференціал другого порядку $d^2Z(M_0) = Z''_{xx}(M_0)dx^2 + 2Z''_{xy}(M_0)dxdy + Z''_{yy}(M_0)dy^2$ і дослідити його знак при довільних приростах dx, dy аргументів. Якщо $d^2Z(M_0) > 0$, то M_0 - точка мінімуму, а якщо $d^2Z(M_0) < 0$, то M_0 -

точка максимуму (порівняй із другою достатньою умовою екстремуму для функції одного аргументу, так званим «правилом дощу»). Але якщо для функції одного аргументу $d^2 f(M_0) = f''(M_0)dx^2$ і знак диференціала другого порядку співпадає зі знаком другої похідної, то для функцій двох і більше аргументів це не так. Тому використовують достатню умову, яка базується на дослідженні диференціалу другого порядку як квадратичної форми відносно приростів аргументів (а саме – на основі додатної або від'ємної визначеності цієї форми).

Теорема (достатня умова екстремуму). Нехай у деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_0;\ y_0)$ функція $Z = f(x;\ y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку.

Розглянемо визначник Гессе (Гессіан) у цій точці.

$$\Gamma(M_0) = \begin{vmatrix} Z''_{xx}(M_0) & Z''_{xy}(M_0) \\ Z''_{yx}(M_0) & Z''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = Z''_{xx}(M_0) Z''_{yy}(M_0) - \left(Z''_{xy}(M_0)\right)^2$$

.

1. Якщо $\Gamma(M_0) > 0$, то M_0 - точка екстремуму, причому: якщо $Z''_{xx}(M_0) > 0$, то M_0 – точка мінімуму; якщо $Z''_{xx}(M_0) < 0$, то M_0 – точка максимуму.
2. Якщо $\Gamma(M_0) < 0$, то в точці M_0 екстремуму немає.
3. Якщо $\Gamma(M_0) = 0$, то питання про існування екстремуму залишається відкритим і потрібні додаткові дослідження.

Зауваження 1. *Очевидно, що коли* $\Gamma(M_0) > 0$, *то*

$$Z''_{xx}(M_0) Z''_{yy}(M_0) > \left(Z''_{xy}(M_0)\right)^2 > 0,$$

тобто, $Z''_{xx}(M_0)$ *і* $Z''_{yy}(M_0)$ *мають однакові знаки, тому визначити вид екстремуму (*$\max$ *або* $\min$*) можна і за знаком* $Z''_{yy}(M_0)$.

Зауваження 2. *Очевидно, що коли* $\Gamma\left(M_0\right)>0$ *, то умова а)* $Z''_{xx}\left(M_0\right)>0$ *еквівалентна додатності диференціала другого порядку, тобто* $d^2Z(M_0)>0 \quad \forall dx,dy,$ *а умова б)* $Z''_{xx}\left(M_0\right)<0$ *еквівалентна від'ємності диференціала другого порядку, тобто* $d^2Z(M_0)<0 \quad \forall dx,dy$.

Приклад . Дослідити на екстремум функцію:
$Z=4x^3+6x^2+y^2-4y.$

Область визначення функції $D\left(Z\right)=R^2$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$Z'_x=12x^2+12x, \qquad Z'_y=2y-4.$$

Оскільки похідні визначені на R^2, то серед критичних будуть лише стаціонарні точки. Знайдемо їх, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases}12x^2+12x=0\\ 2y-4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}12x(x+1)=0\\ 2y=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0,\ x_2=-1\\ y=2\end{cases}.$$

Маємо дві стаціонарні точки $M_1(0;\,2)$ і $M_2(-1;\,2)$ - підозрілі на екстремум (за теоремою – необхідна умова екстремуму). Застосуємо теорему - достатню умову існування екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$Z''_{xx}=24x+12; \quad Z''_{yy}=2; \quad Z''_{xy}=Z''_{yx}=0.$$

Вираз для Гессіана має наступний вигляд:

$$\Gamma=Z''_{xx}\cdot Z''_{yy}-\left(Z''_{xy}\right)^2=\left(24x+12\right)\cdot 2-0^2=48x+24.$$

$\Gamma\left(M_1\right)=\Gamma\left(0;\,2\right)=48\cdot 0+24=24>0 \quad \Rightarrow \quad M_1$ - точка екстремуму.

Оскільки $Z''_{xx}\left(0;\,2\right)=24\cdot 0+12>0 \Rightarrow M_1\left(0;\,2\right)$ – точка мінімуму.

$$Z_{min}(0;\,2)=4\cdot 0^3+6\cdot 0^2+2^2-4\cdot 2=-4$$

$\Gamma(M_2)=\Gamma(-1;\,2)=48\cdot(-1)+24=-24<0 \quad\Rightarrow$ в точці M_2 екстремуму немає.

Відповідь: $Z_{min}(0;\,2)=-4$.

Приклад . Дослідити на екстремум функцію: $Z=x^4+y^4$.

$D(Z)=R^2$; частинні похідні першого порядку: $Z'_x=4x^3$, $Z'_y=4y^3$ визначені у будь-якій точці координатної площини, тому серед критичних будуть лише стаціонарні точки. Знайдемо їх, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} Z'_x=0 \\ Z'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3=0 \\ 4y^3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

стаціонарна точка $M_0(0;\,0)$ – підозріла на екстремум (за теоремою – необхідна умова екстремуму). Застосуємо теорему - достатню умову існування екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$Z''_{xx}=12x^2; \quad Z''_{yy}=12y^2; \quad Z''_{xy}=Z''_{yx}=0.$$

Вираз для Гессіана: $\Gamma=Z''_{xx}\cdot Z''_{yy}-\left(Z''_{xy}\right)^2=144x^2y^2$.

$\Gamma(M_0)=\Gamma(0;0)=144\cdot 0^2\cdot 0^2=0 \quad\Rightarrow$ за теоремою питання про екстремум в точці $M_0(0;\,0)$ відкрите. Але в точці $M_0(0;\,0)$ функція досягає мінімуму $Z_{min}(0;\,0)=0$, оскільки очевидно, що $Z(x;\;y)>0$ для всіх точок $M(x;\,y)\neq M_0(0;\,0)$.

Приклад . Дослідити на екстремум функцію: $Z=x^3+y^3$.

$D\left(Z\right)=R^2$; частинні похідні першого порядку $Z'_x=3x^2$; $Z'_y=3y^2$ визначені у будь-якій точці координатної площини, тому серед критичних будуть лише стаціонарні точки. Знайдемо їх, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} Z'_x=0 \\ Z'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

стаціонарна точка $M_0\left(0;\,0\right)$ – підозріла на екстремум (за теоремою – необхідна умова екстремуму). Застосуємо теорему - достатню умову існування екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$Z''_{xx}=6x;\qquad Z''_{yy}=6y;\qquad Z''_{xy}=Z''_{yx}=0.$$

Вираз для Гессіана: $\Gamma=Z''_{xx}\cdot Z''_{yy}-\left(Z''_{xy}\right)^2=36xy$.

$\Gamma\left(M_0\right)=\Gamma\left(0;0\right)=36\cdot 0\cdot 0=0\ \Rightarrow$ за теоремою питання про екстремум в точці $M_0(0;\,0)$ відкрите. Додаткові дослідження показують, що для всіх точок площини з від'ємними координатами $Z\left(x;\,y\right)<0=Z(M_0)$, а для всіх точок площини з додатними координатами $Z\left(x;\,y\right)>0=Z(M_0)\ \Rightarrow$ в точці M_0 екстремуму немає.

Умовний екстремум.

При розв'язуванні багатьох задач, зокрема економічних, потрібно знаходити екстремум функції $Z=f\left(x,y\right)$ при певних додаткових обмеженнях, наприклад, при умові накладення деякого зв'язку на незалежні змінні $\varphi(x,\,y)=0$. Такі задачі називаються задачами знаходження умовного екстремуму функції, а рівняння $\varphi(x,\,y)=0$ – рівнянням зв'язку.

Для розв'язування задач на пошук умовних екстремумів застосовують метод виключення змінної (якщо це можливо) або більш універсальний метод Лагранжа (часто називають метод множників Лагранжа).

Суть першого методу полягає в тому, що із рівняння зв'язку одну із змінних виражають через іншу, підставляють у функцію і задачу умовного екстремуму зводять до задачі пошуку екстремуму функції однієї змінної.

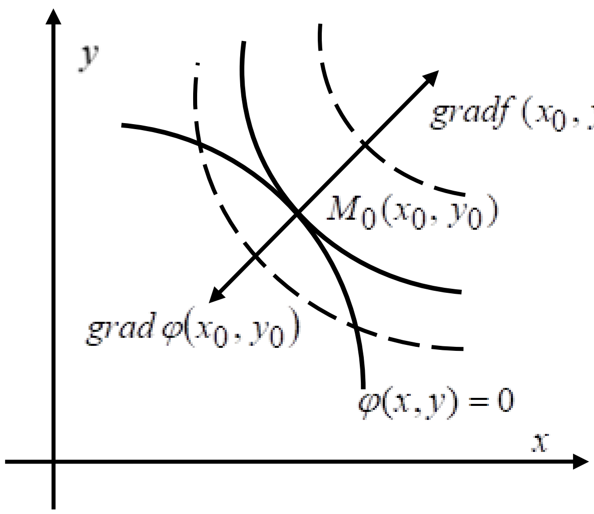
Метод виключення при знаходженні умовного екстремуму застосовується не завжди, оскільки рівняння зв’язку не завжди можна розв’язати відносно однієї із змінних. Методика знаходження умовного екстремуму, вільна від цього недоліку, була запропонована Лагранжем. Основою методу Лагранжа є наступна теорема.

Теорема. Якщо функція $Z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0;\ y_0)$ екстремум при умові $\varphi(x,\ y) = 0$ і $\varphi'_y(x_0,\ y_0) \neq 0$, то існує число λ_0 таке, що упорядкована трійка дійсних чисел $(x_0; y_0; \lambda_0)$ є розв’язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0, \end{cases}$$ де $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ – функція Лагранжа.

Ця теорема є лише необхідною умовою існування екстремуму.

Геометричний зміст умовного екстремуму продемонструємо на рис. Функції $f(x, y)$ відповідає декілька ліній рівня, серед яких виділена саме та, на якій функція досягає екстремального значення $z = f(x_0, y_0)$, а для функції $\varphi(x, y)$ – лише одна лінія рівня, для якої виконується умова $\varphi(x, y) = 0$. Отже, лінії рівня функцій $z = f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ в точці екстремуму (x_0, y_0) дотикаються.



Фрагмент *карти ліній рівня*, зображеної на рис. 19.3, є типовим для задач економічного змісту. Наприклад, такий вигляд мають лінії сталого значення виробничих функцій – *ізокванти*. Якщо виробнича функція є функцією двох аргументів (найчастіше, це витрати і капітал), то ізокванти відображають можливі комбінації факторів виробництва для досягнення певного рівня виробництва. Отже, ізокванта визначає можливість заміщення одного фактора виробництва іншим.

Якщо приросту Δx відповідає таке значення Δy, що перехід від одних умов виробництва до інших здійснюється за ізоквантою, то диференціал виробничої функції (на ізокванті) дорівнює нулю.

Схема методу Лагранжа.

1. Скласти функцію Лагранжа і знайти її стаціонарні точки $\left(x_0; y_0; \lambda_0\right)$.

2. Для кожної стаціонарної точки $\left(x_0; y_0; \lambda_0\right)$, підставивши λ_0 у вираз $L(x,\ y,\ \lambda)$, одержимо функцію двох змінних $L(x,\ y,\ \lambda_0)$.

3. Для отриманої функції $L(x,\ y,\ \lambda_0)$ знайти диференціал другого порядку $d^2L(M_0)$ в точці $M_0(x_0;\ y_0)$ і виразити його через приріст тільки однієї змінної (тобто, $d^2L(M_0) = F(dx^2)$ або $d^2L(M_0) = F(dy^2)$), використовуючи умову $\varphi(x,\ y) = 0$. Оцінюючи знак $d^2L(M_0)$, можна зробити висновок про наявність умовного мінімуму або максимуму в точці $M_0(x_0;\ y_0)$.

Зауваження **.** *Стаціонарна точка* $M_0\left(x_0; y_0; \lambda_0\right)$ буде:

точкою умовного мінімуму, якщо $d^2L(M_0) = F(dx^2) > 0 \quad \forall dx, dy$,

або у еквівалентному вигляді: $\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x' & \varphi_y' \\ \varphi_x' & L_{xx}'' & L_{xy}'' \\ \varphi_y' & L_{yx}'' & L_{yy}'' \end{vmatrix} > 0$;

точкою умовного максимуму, якщо $d^2L(M_0) = F(dx^2) < 0 \quad \forall dx, dy$,

або у еквівалентному вигляді: $\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x' & \varphi_y' \\ \varphi_x' & L_{xx}'' & L_{xy}'' \\ \varphi_y' & L_{yx}'' & L_{yy}'' \end{vmatrix} < 0$.

Приклад. Знайти екстремум функції $Z = 2x^2 + y^2$ при умові $x - y - 3 = 0$.

Оскільки з рівняння зв'язку легко виразити одну змінну через іншу, то використаємо метод виключення.

$y = x - 3$ тоді $Z = 2x^2 + \left(x - 3\right)^2$ або $Z(x) = 3x^2 - 6x + 9$.

Задача звелася до знаходження екстремуму функції однієї змінної.

За відомою схемою дослідження функції на екстремум маємо:

$$D(Z) = R;\ Z' = 6x - 6;\ D\left(Z'\right) = R \Rightarrow$$

$$Z' = 0 \Leftrightarrow\ 6x - 6 = 0 \Rightarrow$$

критична точка $x_0 = 1$ – підозріла на екстремум за теоремою (необхідна умова екстремуму).

Оскільки при переході через критичну точку похідна Z' змінює знак з "–" на "+", то за першою достатньою умовою існування екстремуму $x_0 = 1$ - точка мінімуму.

$$Z_{min} = Z\left(1\right) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 9 = 6.$$

Знайдемо значення y при $x_0 = 1$: $\quad y_0 = x - 3\Big|_{x_0 = 1} = -2$

Отже, функція $Z = 2x^2 + y^2$ має умовний мінімум у точці $M_0(1; -2)$.

Відповідь: $Z_{min}\left(1; -2\right) = 6$ при умові $x - y - 3 = 0$.

Приклад . Знайти екстремум функції $Z = x^2 y$ при умові $x + y = 2$.

Розв'язування. Метод виключення змінних. Із умови $y = 2 - x$. Підставляємо у $Z = x^2 y$ і досліджуємо функцію однієї змінної $Z(x) = 2x^2 - x^3$ на екстремуми. Похідна $Z' = 4x - 3x^2$, її критичні точки $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}$ - підозрілі на екстремуми. Похідна другого порядку $Z'' = 4 - 6x$ в першій критичній точці $Z''(0) = 4 > 0$, тому за другою достатньою умовою екстремуму $x_1 = 0$ є точкою мінімуму. В другій критичній точці $Z''\left(\frac{4}{3}\right) = -4 < 0$, тому за другою достатньою умовою екстремуму $x_2 = \frac{4}{3}$ є точкою максимуму. Отже, умовними екстремумами функції є $Z_{min} = Z(0,2) = 0,\quad Z_{max} = Z(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{32}{27}$ при умові $x + y = 2$.

Метод Лагранжа. Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = Z(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

де $Z(x, y) = x^2 y$, а $\varphi(x, y) = x + y - 2$.

$$L(x, y, \lambda) = x^2 y + \lambda(x + y - 2).$$

Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{aligned} L'_x &= 2xy + \lambda \\ L'_y &= x^2 + \lambda \\ L'_\lambda &= x + y - 2 \end{aligned} \qquad \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + \lambda = 0 \\ x^2 + \lambda = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Віднімаючи перші два рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 0 \\ y = 2 - x \\ \lambda = -x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x(2 - x) = 0 \\ y = 2 - x \\ \lambda = -x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 - 4x = 0 \\ y = 2 - x \\ \lambda = -x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4/3 \\ y_2 = 2/3 \\ \lambda_2 = -16/9 \end{cases} \quad \begin{matrix} M_1(0;\, 2; 0) \\ M_2\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{16}{9}\right) \end{matrix}$$ – стаціонарні точки.

Дослідимо диференціал другого порядку функції двох змінних $L(x,\, y,\, \lambda_0)$.

Частинні похідні другого порядку:

$$L''_{xx} = 2y; \quad L''_{yy} = 0; \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 2x.$$

Вираз для диференціалу другого порядку:

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 = 2ydx^2 + 4xdxdy.$$

Диференціюванням умови дістаємо:

$$d(x + y - 2) = d(0) \Rightarrow dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx.$$

Враховуючи зв'язок між приростами аргументів, маємо:

$$d^2L = 2ydx^2 - 4xdx^2 = (-4x + 2y)dx^2.$$

Оскільки при $\lambda_1 = 0$: $d^2L(M_1) = (-4 \cdot 0 + 2 \cdot 2)dx^2 = 4dx^2 > 0$ при будь-яких приростах аргументів, то M_1 - точка умовного мінімуму функції $Z = x^2y$ при умові $x + y = 2$.

При $\lambda_2 = \dfrac{-16}{9}$: $d^2L(M_2) = \left(-4 \cdot \dfrac{4}{3} + 2 \cdot \dfrac{2}{3}\right)dx^2 = -4dx^2 < 0$

при будь-яких приростах аргументів, то M_2 - точка умовного максимуму функції $Z = x^2y$ при умові $x + y = 2$.

Зауваження. *Часто для оцінки знаку диференціалу другого порядку в точці немає необхідності використовувати умову і виражати диференціали аргументів один через інший (див. вищенаведені приклади).*

Приклад. Знайти екстремум функції $z = x + y$ за умови, що на її змінні накладено обмеження: $9x^2 + 4y^2 = 13$.

Перепишемо рівняння зв'язку у вигляді: $9x^2 + 4y^2 - 13 = 0$. Звідси $\varphi(x,\ y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$. Складемо функцію Лагранжа:

$$L(\lambda, x, y) = x + y + \lambda \cdot (9x^2 + 4y^2 - 13)$$

і знайдемо її частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 9x^2 + 4y^2 - 13; \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 18\lambda x; \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 8\lambda y.$$

Відповідно необхідній умові екстремуму функції Лагранжа одержуємо систему рівнянь для визначення координат стаціонарних точок:

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 - 13 = 0; \\ 1 + 18\lambda x = 0; \\ 1 + 8\lambda y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{324\lambda^2} + \dfrac{4}{64\lambda^2} - 13 = 0; \\ x = \dfrac{-1}{18\lambda}; \\ y = \dfrac{-1}{8\lambda}. \end{cases}$$

Розв'язавши перше рівняння системи, знайдемо, що $\lambda = \pm\frac{1}{12}$. Отже, для функції $L(\lambda, x, y)$ маємо стаціонарні точки $M\left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{12}\right)$ та $N\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{12}\right)$. Відповідно для вихідної функції точки $M_1\left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$ та $M_2\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$ є стаціонарними точками умовного екстремуму.

Для перевірки виконання достатньої умови екстремуму для функції Лагранжа треба визначити знак другого диференціала d^2L у точках M та N.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

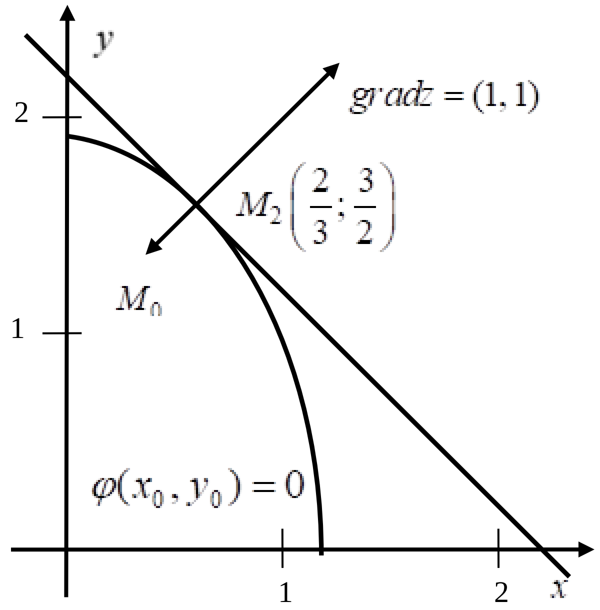
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 18\lambda; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 8\lambda; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0.$$

Отже, другий диференціал функції Лагранжа (19.11) має вигляд:
$d^2L = 18\lambda dx^2 + 8\lambda dy^2 = 2\lambda(9dx^2 + 4dy^2)$.

Як бачимо, знак d^2L збігається зі знаком множника Лагранжа λ.

Таким чином, у точці M диференціал $d^2L > 0$ і функція Лагранжа в цій точці досягає мінімуму. Отже, функція $z = f(x, y)$ у точці $M_1\left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$ досягає умовного мінімуму, $z_{\min} = -13/6$. У точці N диференціал $d^2L < 0$ і функція Лагранжа досягає максимуму, а функція $z = f(x, y)$ у відповідній точці $M_2\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$ досягає умовного максимуму, $z_{\max} = \frac{13}{6}$.

Цей приклад можна проілюструвати геометрично (див. рис.). На графіку наведено лінії рівня функцій $z = x + y$ та $\varphi(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$, що проходять через точку максимуму $M_2\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ функції Лагранжа. Графік не просто ілюструє наведений приклад, але дозволяє запропонувати достатньо простий спосіб його розв'язання.



Визначимо проекції градієнта функції $z = x + y$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

З урахуванням співвідношення $grad\ f(x_0, y_0) = -\lambda_0 \cdot grad\ \varphi(x_0, y_0)$ для точки M відносно проекцій градієнта функції $\varphi(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$ можна записати:

$$-18\lambda x_0 = 1; \ -18\lambda y_0 = 1.$$

Підставивши ці співвідношення до умови обмеження, отримаємо рівняння відносно λ. Зрозуміло, що в точці M_2 функція $z = x + y$ досягає умовного максимуму. Оскільки функція $\varphi(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 13$ описує еліпс з центром симетрії у початку координат, то в точці $M_1\left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$ для функції $z = x + y$ буде спостерігатись умовний мінімум.

Найбільше і найменше значення функції в обмеженій замкненій області.

В обмеженій замкненій області D неперервна функція $Z=f\left(x,y\right)$ завжди досягає свого найбільшого і найменшого значення (теорема Вейєрштрасса), які можуть досягатись або в критичній точці усередині області, або на межі (границі) області.

Алгоритм розв'язування такої задачі є аналогічним знаходженню найбільшого та найменшого значень функції однієї змінної на замкненому проміжку - сегменті.

1. По заданих обмеженнях побудувати область D.

2. Знайти критичні точки і обчислити значення функції в тих критичних точках, які належать області D.

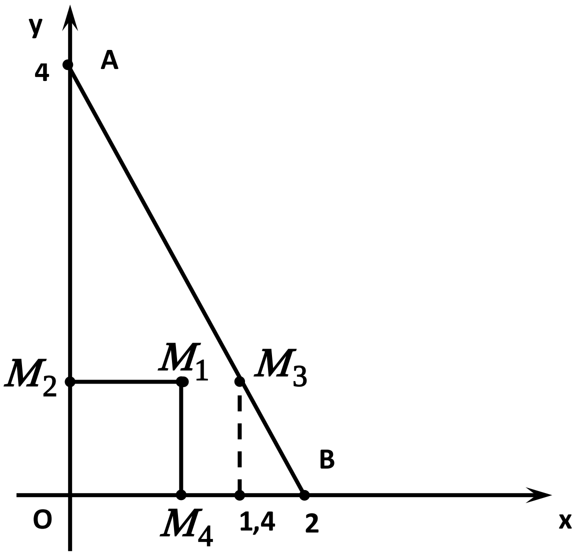
3. Знайти найбільше і найменше значення функції Z на межі області D.

4. Серед усіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $Z=x^2+y^2-2x-2y$ в трикутнику, обмеженому прямими $x=0$, $y=0$, $2x+y=4$.

1. Побудуємо заданий трикутник OAB – геометричний образ області

$$D=\left\{(x;y)\in R^2:\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\\ 2x+y\leq 4\end{cases}\right\}$$ (див. рис.)



2. Знайдемо критичні точки:

$$Z'_x=2x-2 \qquad \begin{cases}2x-2=0\\ 2y-2=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$
$$Z'_y=2y-2$$

Критична точка $M_1(1;\,1)\in D$ і $Z(M_1)=-2$.

3. Знайдемо найбільше і найменше значення Z на межі (границі) заданої області D, яка складається із трьох сторін трикутника: OA, AB і OB.
На стороні OA $x=0$, тому знаходимо найбільше та найменше значення функції однієї змінної: $Z(0,y)=Z(y)=y^2-2y$ на сегменті $y\in[0;\,4]$.

$Z'=2y-2$; $2y-2=0$; критична точка $y_0=1\in[0;\,4]$ і $Z(1)=-1$.

На кінцях відрізка OA: $Z(0)=Z(0;0)=0$; $Z(4)=8$.

Отже, на стороні OA найменше значення $Z(M_2)=Z(0;\,1)=-1$, а найбільше - $Z(A)=Z(0;\,4)=8$.

На стороні AB $2x+y=4$ або $y=4-2x$, тому знаходимо найбільше та найменше значення функції однієї змінної: $Z(x)=x^2+(4-2x)^2-2x-2(4-2x)=5x^2-14x+8$ на сегменті $x\in[0;\,2]$.

$Z'=10x-14$, $10x-14=0$, критична точка $x_0=1{,}4\in[0;\,2]$ і $Z(1{,}4)=5\cdot 1{,}4^2-14\cdot 1{,}4+8=-1{,}8$.

На кінцях відрізка:

$$Z(0)=Z(A)=8;\; Z(2)=Z(B)=5\cdot 2^2-14\cdot 2+8=0.$$

Отже, на стороні AB найменше значення $Z(M_3)=Z(1{,}4;\,1{,}2)=-1{,}8$, а найбільше - $Z(A)=Z(0;\,4)=8$.

На стороні ОВ $y=0$, тому знаходимо найбільше та найменше значення функції однієї змінної: $Z(x,0)=Z(x)=x^2-2x$ на сегменті $x\in[0;\,2]$.

$Z'_x=2x-2$; $2x-2=0$; критична точка $x_0=1\in[0;\,2]$ і $Z(1)=-1$.

На кінцях відрізка: $Z(0)=Z(0;0)=0$; $Z(2)=Z(B)=0$.

Отже, на стороні ОВ найменше значення: $Z(M_4)=Z(1;\,0)=-1$, а найбільше: $Z(O)=Z(B)=0$.

Порівнюючи значення функції Z в точках M_1, M_2, O, A, M_3, B, M_4:

$$Z(M_1)=-2;\quad Z(M_2)=-1;\quad Z(O)=0;\quad Z(A)=8;$$

$Z(M_3)=-1{,}8$; $Z(B)=0$; $Z(M_4)=-1$, робимо висновок: найбільше значення, яке дорівнює 8, функція Z набуває на межі області D в точці $A(0;4)$, а найменше значення, яке дорівнює -2, функція набуває всередині області D в точці $M_1(1;\,1)$.

Зауваження. Якщо функція $Z=ax+by+c$ - лінійна, то її графіком є деяка площина у просторі R^3, а область D задається системою лінійних нерівностей, які визначають опуклий многокутник на площині R^2, то критичних точок всередині, а також на межі області не існує (не існує точок, в яких $Z'=0$). Тому лінійна функція набуває своїх найбільшого і найменшого значень тільки в точках, які є вершинами многокутника.

Приклади та вправи до розділу 5

1. Знайти області визначення та неперервності функцій. Зробити схематичне зображення цих областей:

а) $Z = \dfrac{9}{x^2 - y^2}$. б) $Z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

2. Знайти вектор-градієнт $\overline{N}$ і похідну за напрямом вектора $\overline{a} = (a_x; a_y)$ функції $Z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$. Порівняти результати, схематично зобразити $\overline{N}$ і $\overline{a} = (a_x; a_y)$.

а) $Z = x^3 + y^3 - 3xy$; $M_0(2; 1)$; $\overline{a} = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

б) $Z = 2x^2 - 3y^2$; $M_0(0; -2)$; $\overline{a} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

в) $Z = ln\sqrt{2x^2 + 2y^2}$; $M_0(1; -1)$; $\overline{a} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

3. Знайти вектор-градієнт $\overline{N}$ і похідну за напрямом вектора $\overline{a} = (a_x; a_y)$ функції $Z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$. Порівняти результати, схематично зобразити $\overline{N}$ і $\overline{a} = (a_x; a_y)$.

а) $Z = sin(3x^2 - 2y^2 + 6)$; $M_0(2, 3)$; $\overline{a} = (3; 4)$.

б) $Z = e^{x^2 - 7xy + 3x - 4y}$; $\qquad M_0(0,\ 0)$; $\quad \bar{a} = (3;\ 0)$.

в) $Z = ln\left(4x^2 - 3xy + 2x + 1\right)$; $\qquad M_0(1,\ 2)$; $\quad \bar{a} = (8;\ -15)$.

4. Знайти екстремуми функції $Z = f(x;\ y)$.

а) $Z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

б) $Z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$

в) $Z = x^3 + y^3 - 3xy$

г) $Z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$

5. Знайти екстремуми функції $Z = f\left(x;\ y\right)$.

а) $Z = 1 - 2x^2 - 3y^2.$

б) $Z = x^3 - 6x^2 - y^2 + 2y$

в) $Z = x^3 + y^3 - 6xy$

г) $Z = 4x^3 + 6x^2 + y^2 - 4y$

6. Знайти екстремуми функції $Z = f\left(x;\ y\right)$ при умові $\varphi\left(x, y\right) = 0$.

а) $Z = x + y,$

$$\varphi\left(x, y\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}.$$

г) $Z = xy^2,$

$$\varphi\left(x, y\right) = x + 2y - 1.$$

в) $Z = 2x + 4y,$

$$\varphi\left(x, y\right) = x^2 - y + 1$$

д) $Z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$

$$\varphi\left(x, y\right) = x + y - 2$$

7. Знайти найбільше і найменше значення функції $Z = f\left(x;\ y\right)$ в замкненій обмеженій області D:

а) $Z = x^2 + y^2 - 6x - 4y;\quad D: \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$ (в трикутнику).

б) $Z = x^2 y;\quad D:\ x^2 + y^2 \leq 1$ (в крузі).

в) $Z = 2x + y + 5;\quad D: \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 4 - x^2 \end{cases}.$

г) $Z = 5x + 2y + 3;\quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$ (в прямокутнику).

8. Знайти екстремуми функції $Z = f(x;\ y)$ при умові $\varphi(x, y) = 0$.

а) $Z = 2x^2 + y^2,$

$\varphi(x, y) = x - y - 3.$

б) $Z = 2x + y,$

$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5.$

в) $Z = 2x^2 + 5y^2,$

$\varphi(x, y) = 2x - 5y - 14$

г) $Z = x^2 - 2y,$

$\varphi(x, y) = x + 2y - 1.$

9. Знайти найбільше і найменше значення функції $Z = f(x;\ y)$ в замкненій обмеженій області D:

г) $Z = x^3 + y^2 - 3x - 4y;\quad D: \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$ (в трикутнику).

д) $Z = 2x^3 + 4y^2 + y^2 - 2xy;\quad D: \begin{cases} y \leq 4 \\ y \geq x^2 \end{cases}.$

е) $Z = 4x^2 - 2y^2 - 8x + 4y;\quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ (в прямокутнику).

10. Знайти область визначення функції корисності Стоуна (множину допустимих наборів благ)

$$U = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y - 2},$$

де x – кількість одиниць першого блага, y – кількість одиниць другого блага, U – корисність від споживання першого і другого благ, та схематично її побудувати. Знайти рівняння і схематично побудувати карту ліній рівня (кривих байдужості) функції корисності Стоуна.

11. Об'єм продукції Q, що випускається фірмою, визначається виробничою функцією Кобба-Дугласа $Q = 25 \cdot K^{1/3} \cdot L^{2/3}$, де K – обсяг вкладеного капіталу, а L – трудових ресурсів. Схематично побудувати ізокванти (лінії рівня), що відповідають випуску $Q_0 = 50$ одиниць продукції. Дати економічну інтерпретацію.

12. Нехай $z = \sqrt{x} \cdot \ln(y+1)$ – функція обсягу випуску деякого товару, де x – кількість робочого часу кваліфікованого персоналу, y – кількість робочого часу некваліфікованого персоналу. Знайти:

а) граничну продуктивність робітників кваліфікованого персоналу, якщо $x = 2$, $y = 3$,

б) граничну продуктивність робітників некваліфікованого персоналу, якщо $x = 2$, $y = 3$.

Дати економічне тлумачення.

13. Відомі функції попиту двох пов'язаних видів продукції A і B:

$$\begin{cases} D_A = 400 - 3p_A - 2p_B \\ D_B = 250 - 5p_A - 6p_B \end{cases}$$

Знайти:

1) граничний попит на товар A відносно ціни на товар A (p_A) і відносно ціни на товар B (p_B),
2) граничний попит на товар B відносно ціни на товар A (p_A) і відносно ціни на товар B (p_B),
3) якими є товари A і B: конкурентними чи доповнюючими?

14. Знайти найбільший прибуток підприємства, якщо функції цін на його товари A і B дорівнюють $p_1 = 50 - x$ і $p_2 = 60 - 2y$, де x і y - кількість

одиниць відповідних товарів, а функція загальних витрат має вигляд $C(x;y)=2xy$. Визначити обсяги випуску та ціни товарів, які відповідають максимальному прибутку.

15. При виробництві деякого товару фірма використовує два вироби: A і B. Застосування виробу A дає прибуток 10 грн., а виробу B - 12 грн. Кожного тижня фірма може використати x виробів A та y виробів B, причому у співвідношенні $x^2+y^2-61=0$. Знайти максимальний щотижневий прибуток фірми і відповідний попит на кількість одиниць виробів A і B.

16. Знайти і схематично побудувати область визначення функції корисності Стоуна (множину допустимих наборів благ)

$$U=\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{y-1},$$

де x – кількість одиниць першого блага, y – кількість одиниць другого блага, U – корисність від споживання першого і другого благ. Знайти рівняння і схематично побудувати карту ліній рівня (кривих байдужості).

17. Об'єм продукції Q, що випускається фірмою, визначається виробничою функцією Кобба-Дугласа $Q=100\cdot K^{2/3}\cdot L^{1/3}$, де K – обсяг вкладеного капіталу, а L – трудових ресурсів. Схематично побудувати ізокванти (лінії рівня), що відповідають випуску $Q=100$ одиниць продукції. Дати економічну інтерпретацію.

18. Маркетинговими дослідженнями ринку встановлено, що попит на два пов'язаних між собою види товару визначається функціями $D_1=400-3p_1-2p_2$ та $D_2=250-5p_1-6p_2$, де p_1 - ціна одиниці першого товару, а p_2- ціна одиниці другого товару. Знайти функції граничного попиту на ці товари і дати економічну інтерпретацію. Якими є дані товари: конкурентними чи взаємодоповнюючими?

19. Приватний підприємець заключив контракт на постачання 77 одиниць сорочок та спідниць. Функція повних витрат виробництва має вигляд $C(x;y)=7x^2-2xy+5y^2+64$, де x - кількість виготовлених сорочок, а y - спідниць. Знайти оптимальну комбінацію випуску сорочок та спідниць, яка мінімізує повні витрати на їх виробництво.

20. Залежність між вартістю основних коштів і собівартістю одиниці продукції наведені в таблиці:

Вартість основних коштів (ум. Од.)	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5

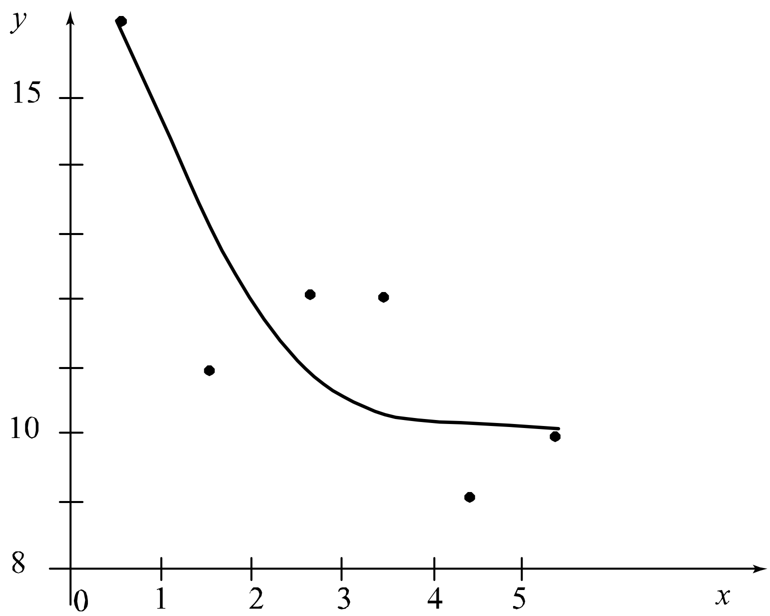
Собівартість одиниці продукції (ум. Од.)	16	11	12	12	9	10

Знайти емпіричну формулу, що описує залежність між вартістю основних коштів і собівартістю одиниці продукції.

Розв'язання. За x беремо вартість основних коштів, а за y – собівартість одиниці виробу. Для того щоб підібрати емпіричну формулу, перенесемо дані таблиці на графік:

За змістом задачі і виглядом графіка можна зробити висновок, що «найкращою» лінією для визначення залежності є гіпербола. Тому емпіричну формулу будемо шукати у такому вигляді:

$$\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}.$$



Спочатку лінеаризуємо цю залежність.

Позначимо $\frac{1}{x} = x'$, тоді відносно нової змінної маємо лінійний зв'язок:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x'.$$

Параметри a_0 і a_1 цієї залежності знайдемо за методом найменших квадратів із системи нормальних рівнянь.

Допоміжні розрахунки для визначення коефіцієнтів системи нормальних рівнянь проведемо у вигляді таблиці:

№	x	y	$\frac{1}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\tilde{y}$
1	0,5	16	2	32	4	15,95
2	1,5	11	0,667	7,333	0,445	11,79
3	2,5	12	0,400	4,800	0,160	10,96
4	3,5	12	0,286	3,429	0,082	10,60
5	4,5	9	0,222	2,000	0,049	10,40

6	5,5	10	0,182	1,818	0,033	10,28
Сума	18,0	70	3,757	51,380	4,769	69,98

Використовуючи суми останнього рядка таблиці, маємо:

$$\begin{cases} 6a_0 & + & 3,757a_1 & = & 70, \\ 3,757a_0 & + & 4,769a_1 & = & 51,380. \end{cases}$$

З цієї системи знайдемо: $a_0 = 9,71$, $a_1 = 3,12$.

Отже, емпірична формула відносно змінної x' має вигляд:

$$\tilde{y} = 9,71 + 3,12x'.$$

Тепер повернемося до вихідної змінної:

$$\tilde{y} = 9,71 + \frac{3,12}{x}.$$

Для оцінки адекватності емпіричної формули обчислимо $\tilde{y}_i$ для кожного значення x_i і порівняємо з y_i. Розрахунки записуємо в 7-му стовпці таблиці. За одержаною формулою побудуємо графік функції. Емпіричні точки розташовані досить близько до побудованої кривої.

21. Залежність між вартістю основних коштів і місячним випуском продукції задана таблицею:

Вартість основних коштів (ум. Од.)	1	2	3	4	5
Місячний випуск продукції (ум. Од.)	2	5	9	10	11

Знайти емпіричну формулу, що описує залежність між вартістю основних коштів (x) і щомісячним випуском продукції (y) у припущенні, що ця залежність є параболічною.

Розв'язання. Емпіричну формулу шукаємо в такому вигляді:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Застосовуючи метод найменших квадратів, параметри a_0, a_1, a_2 обчислюються із системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_o + a_1\sum x + a_2\sum x^2 = \sum y, \\ a_o\sum x + a_1\sum x^2 + a_2\sum x^3 = \sum yx, \\ a_o\sum x^2 + a_1\sum x^3 + a_2\sum x^4 = \sum yx^2. \end{cases}$$

Для того щоб записати систему нормальних рівнянь, необхідно обчислити $\sum x, \sum x^2, \sum x^3, \sum x^4, \sum y, \sum yx, \sum yx^2.$ Усі допоміжні обчислення проведемо в таблиці:

№	x	y	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4	$\tilde{y}$
1	1	2	2	1	2	1	1	1,8
2	2	5	10	4	20	8	16	5,6
3	3	9	27	9	81	27	81	8,4
4	4	10	40	16	160	64	256	10,2
5	5	11	55	25	275	125	625	11
Сума	15	37	134	55	538	225	979	37

Система нормальних рівнянь набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} 5a_o + 15a_1 + 55a_2 = 37, \\ 15a_o + 55a_1 + 225a_2 = 134, \\ 55a_o + 225a_1 + 979a_2 = 538. \end{cases}$$

Цю систему лінійних рівнянь можна розв’язати будь-яким із відомих вам методів та отримати розв’язок системи: $a_0 = -3, a_1 = 5,3, a_2 = -0,5,$ а емпірична формула має вигляд:

$$\tilde{y} = -3 + 5,3x - 0,5x^2.$$

Обчислимо значення $\tilde{y}$ для всіх x_i і занесемо в останній стовпець таблиці. Порівнюючи $\tilde{y}$ та y бачимо, що відхилення невеликі, що свідчить про адекватність емпіричної формули.

22. Вартість будівництва 1 м^2 фасаду дорівнює a гр. од., інших стін – b гр. од., даху – c гр. од. Визначити, за яких розмірів будинку вартість його будівництва (з урахуванням верхнього покриття) буде найменшою при заданій кубатурі, якщо вартість будівництва описується формулою:

$$S = a\frac{v}{y} + b\frac{v}{y} + 2b\frac{v}{x} + cxy,$$

де x – довжина фасаду (м); y – ширина будинку (м); z – висота будинку (м); v – об'єм будинку.

Розв’язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку від функції вартості будівництва і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=-\frac{2bv}{x^2}+cy,\ \ \frac{\partial S}{\partial y}=-\frac{av}{y^2}-\frac{bv}{y^2}+cx\,.$$

Отримуємо систему рівнянь відносно координат стаціонарної точки:

$$\begin{cases}-\dfrac{2bv}{x^2}+cy=0;\\ -\dfrac{av}{y^2}-\dfrac{bv}{y^2}+cx=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{2bv}{x^2}=cy;\\ \dfrac{v\left(a+b\right)}{y^2}=cx.\end{cases}$$

З другого рівняння знайдемо x і підставимо у перше:

$$\begin{cases}\dfrac{2bv\cdot y^4c^2}{v^2\left(a+b\right)^2}=cy;\\ x=\dfrac{v\left(a+b\right)}{cy^2}.\end{cases}$$

Тепер з першого рівняння останньої системи маємо:

$$y=\sqrt[3]{\frac{v\left(a+b\right)^2}{2bc}}\,.$$

Тоді

$$x=\frac{v\left(a+b\right)}{c}\sqrt[3]{\left(\frac{2bc}{v\left(a+b\right)^2}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{4vb^2}{c\left(a+b\right)}}\,,$$

$$z=\frac{v}{xy}=\frac{v}{\sqrt[3]{\dfrac{4vb^2}{c\left(a+b\right)}\dfrac{v\left(a+b\right)^2}{2bc}}}=\sqrt[3]{\frac{c^2v}{2b\left(a+b\right)}}\,.$$

Перевіримо, що при цих значеннях x, y і z функція S має мінімум. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{4bv}{x^3},\quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=\frac{2av}{y^3}+\frac{2bv}{y^3},\quad \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}=c.$$

Для перевірки достатньої умови обчислюємо $AC - B^2$, де

$$A=\frac{4bvc(a+b)}{4vb^2}=\frac{c(a+b)}{b},\ \ C=\frac{2v(a+b)2bc}{v(a+b)^2}=\frac{4bc}{a+b},\ \ B=c.$$

Маємо: $AC-B^2=\frac{c(a+b)}{b}\frac{4bc}{a+b}-c^2=4c^2-c^2=3c^2>0,$ отже, екстремум є. Оскільки $A>0$, то функція S у стаціонарній точці має мінімум.

Відповідь: вартість будівництва будинку буде мінімальною за таких розмірів будинку:

$$x=\sqrt[3]{\frac{4vb^2}{c(a+b)}}\ (\text{м});\quad y=\sqrt[3]{\frac{v(a+b)^2}{2bc}}\ (\text{м});\quad z=\sqrt[3]{\frac{c^2v}{2b(a+b)}}\ (\text{м}).$$

23. На підприємстві використовують два види ресурсів у кількостях x_1 і x_2 одиниць. Вартість одиниці кожного з ресурсів дорівнює 1 і 2 грн. Для придбання ресурсів виділено 10 000 грн. Визначити оптимальний розподіл ресурсів, який забезпечує підприємству максимальний прибуток, якщо відомо, що сумарний прибуток z залежно від витрат ресурсів описується такою функцією:

$$z=2x_1+10x_2-x_2{}^2.$$

Розв'язання. Треба знайти такі значення x_1 і x_2, які задовольняють умову $x_1 + 2x_2 = 10000$ і за яких функція $z = 2x_1 + 10x_2 - x_2{}^2$ має максимум.

З рівняння $x_1 + 2x_2 = 10000$ знайдемо x_1 і підставимо у функцію z. Отже, $x_1 = 10000 - 2x_2$, тоді:

$$z(x_2)=20000+6x_2-x_2{}^2.$$

Ми одержали функцію однієї змінної. Тепер знаходимо її похідну:

$$z'(x_2)=6-2x_2.$$

За необхідною умовою екстремуму:

$$6-2x_2=0,$$

звідки $x_2 = 3$, тоді $x_1 = 9994$.

Перевіряємо, що ця стаціонарна точка відповідає максимуму функції. Для цього визначаємо знак другої похідної: $z''(x_2) = -2 < 0$. Отже, дійсно, у стаціонарній точці функція має максимальне значення.

Відповідь: на виділені кошти необхідно придбати першого ресурсу в кількості 9994 одиниць, а другого – 3 од. Прибуток при цьому дорівнює $z_{\max}(9994;3) = 20009$ (грн).

24. Функція загальних витрат підприємства має вигляд:

$$Q = 0,4x^2 + 0,5xy + 0,6y^2 + 500x + 400y + 1000,$$

де x і y – кількості товарів видів A і B відповідно.

Загальна кількість виготовленої продукції повинна бути 1000 од. Визначити кількість одиниць товару A і B, яку необхідно виготовити, щоб витрати на їх виготовлення були мінімальними.

Розв'язання. Треба знайти такі значення x і y, за яких функція

$$Q = 0,4x^2 + 0,5xy + 0,6y^2 + 500x + 400y + 1000 \ (\min)$$

за умови $\varphi(x, y) = x + y - 1000 = 0$.

Для дослідження цієї функції на умовний екстремум складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 0,4x^2 + 0,5xy + 0,6y^2 + 500x + 400y + 1000 + \lambda(x + y - 1000).$$

Знаходимо її частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0,8x + 0,5y + 500 + \lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0,5x + 1,2y + 400 + \lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1000.$$

За необхідною умовою екстремуму маємо:

$$\begin{cases} 0,8x + 0,5y + 500 + \lambda = 0; \\ 0,5x + 1,2y + 400 + \lambda = 0; \\ x + y - 1000 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,3x - 0,7y + 100 = 0; \\ x + y - 1000 = 0; \\ 0,5x + 1,2y + 400 + \lambda = 0. \end{cases}$$

Звідси: $x = 600$, $y = 400$, $\lambda = -1180$.

Отже, знайшли стаціонарну точку функції Лагранжа.

Для перевірки достатньої умови екстремуму визначаємо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0,8; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 1,2; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0,5.$$

Складаємо другий диференціал функції Лагранжа при фіксованому λ:

$$d^2 L = 0,8dx^2 + 0,5dxdy + 1,2dy^2.$$

З урахуванням умови $\varphi(x, y) = x + y - 1000 = 0$ маємо: $dy = -dx$.

Отже, $$d^2 L = 1,5dx^2 > 0.$$

Оскільки $d^2 L > 0$, то маємо умовний мінімум $Q_{\min}(600; 400) =$ $= 821000$ (ум. Од.).

Відповідь: мінімальні витрати у розмірі 821 000 (ум. Од.) підприємство матиме за умови виготовлення продукції A у кількості 600 од. і продукції B у кількості 400 од.

25. Річні витрати підприємства (амортизація, ремонт, вклади на відновлення тощо) залежно від обсягу двох видів продукції x_1 і x_2 описуються функцією:

$$z = a + b(x_1 + x_2) + \frac{c}{x_1 + x_2} + \frac{c_1}{x_1} + \frac{c_2}{x_2},$$

де a, b, c, c_1, c_2 – додатні сталі.

Визначити умови господарювання підприємства.

Розв'язання. Досліджуємо на екстремум функцію $z = f(x_1, x_2)$.

Спочатку знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = b - \frac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \frac{c_1}{x_1^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = b - \frac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \frac{c_2}{x_2^2}.$$

За необхідною умовою екстремуму складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} b - \dfrac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \dfrac{c_1}{x_1^2} = 0; \\ b - \dfrac{c}{(x_1 + x_2)^2} - \dfrac{c_2}{x_2^2} = 0. \end{cases}$$

Віднімаємо з першого рівняння друге і отримуємо:

$$\frac{c_1}{x_1^2} = \frac{c_2}{x_2^2},$$

звідки $x_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} x_2$. Підставляємо x_1 у перше рівняння системи, отримуємо:

$$b - \frac{c}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} x_2 + x_2\right)^2} - \frac{c_1}{\frac{c_1}{c_2} x_2^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b - \frac{c}{x_2^2 \left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} + 1\right)^2} - \frac{c_2}{x_2^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2 x_2^2 - cc_2 - c_2\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}{x_2^2\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2} = 0.$$

Звідси, обсяг продукції другого виду дорівнює:

$$x_2 = \sqrt{\frac{c_2}{b}\left(1 + \frac{c}{\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}\right)}.$$

Тепер у співвідношення $x_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} x_2$ підставляємо знайдене x_2 і отримуємо обсяг продукції першого виду:

$$x_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \sqrt{\frac{c_2}{b}\left(1 + \frac{c}{\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}\right)} = \sqrt{\frac{c_1}{b}\left(1 + \frac{c}{\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}\right)}.$$

Перевіримо, що при цих значеннях x_1 і x_2 функція має мінімум.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{2c}{\left(x_1 + x_2\right)^3} + \frac{2c_1}{x_1^3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{2c}{\left(x_1 + x_2\right)^3} + \frac{2c_2}{x_2^3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{2c}{\left(x_1 + x_2\right)^3}.$$

Визначаємо знак $AC - B^2$, де A – значення $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ у критичній точці; C – значення $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ у критичній точці; B – значення $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ у критичній точці:

$$AC - B^2 = \left(\frac{2c}{(x_1+x_2)^3} + \frac{2c_1}{x_1^3}\right)\left(\frac{2c}{(x_1+x_2)^3} + \frac{2c_2}{x_2^3}\right) - \frac{4c^2}{(x_1+x_2)^6} =$$

$$= \frac{4c^2}{(x_1+x_2)^6} + \frac{4cc_2}{x_2^3(x_1+x_2)^3} + \frac{4cc_1}{x_1^3(x_1+x_2)^3} + \frac{4c_1c_2}{x_1^3x_2^3} - \frac{4c^2}{(x_1+x_2)^6} =$$
$$= \frac{4cc_2}{x_2^3(x_1+x_2)^3} + \frac{4cc_1}{x_1^3(x_1+x_2)^3} + \frac{4c_1c_2}{x_1^3x_2^3}.$$

Кожний доданок є додатним, тому $AC - B^2 > 0$, а це означає, що екстремум є. Оскільки $A > 0$, то функція $f(x_1, x_2)$ у стаціонарній точці має мінімум.

Відповідь: витрати підприємства будуть мінімальними, якщо воно вироблятиме продукцію у таких обсягах:

$$x_1 = \sqrt{\frac{c_1}{b}\left(1 + \frac{c}{\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}\right)},\quad x_2 = \sqrt{\frac{c_2}{b}\left(1 + \frac{c}{\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}\right)}.$$

26. Нехай $z(x, y)$ – виробнича функція, де x – витрати живої праці, y – витрати уречевленої праці. Знайти закон зміни виробничої функції щодо кожного чинника. Обчислити еластичність функції за кожним чинником при $x = 1$, $y = 1$. Зробити висновок.

А) $z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3$; б) $z = e^{x^2 y}$; в) $z = \ln\left(2x^3 + 3y^2\right)$.

27. Задана виробнича функція, що залежить від чотирьох чинників: $z = 0,76x_1^{0,25}x_2^{0,37}x_3^{0,45}x_4^{-0,15}$. Провести аналіз впливу відносних приростів чинників на темпи зміни виробничої функції.

28. Для розширення виробництва підприємець виділяє 150 000 гр. од. Відомо, що коли на придбання обладнання витратити x тис. гр. од., а на зарплату нових робітників – y тис. гр. од., то приріст обсягу продукції складатиме $Q = 0,001x^{0,6}y^{0,4}$. Як треба розподілити виділені кошти, щоб приріст обсягу продукції був максимальним?

29. Підприємство виготовляє два види виробів у кількостях x_1 і x_2. Функція витрат має вигляд: $C = 5x_1 + 2x_1x_2$. Зв'язок ціни одиниці товару і попиту: $P_1 = 20 - x_1 + 2x_2$; $P_2 = 10 + x_1 - 2x_2$. За умови, що загальна кількість виробництва товарів складає 15 одиниць, знайти максимальний прибуток підприємства.

Індивідуальні завдання

Знайти емпіричну формулу для аналітичного опису залежності між двома величинами за відомими табличними даними. Для обчислення параметрів застосувати метод найменших квадратів.

30.

а)

X	1	1,5	2	2,5	3
Y	2,15	2,3	2,6	2,8	2,5

б)

X	2	4	6	8	10
Y	4,5	7,0	8,0	7,5	9,0

31.

X	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Y	45,2	49,9	54,8	59,8	65,1	70,2

32.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	157,0	168,2	181,5	190,9	201.1	212,3	221,8	231,9	245,1

33.

Обсяг продукції (ум. од.)	1	2	3	4	5	6
Собівартість одиниці продукції (ум. од.)	7,7	7,1	6,9	6,8	6,74	6,7

34.

X	10	20	30	40	50
Y	14	12	11,3	11	10,8

Розділ 6. Інтегральне числення функцій однієї змінної

Однією з основних задач диференціального числення є відшукання похідної даної функції. Дослідження у багатьох галузях науки, у тому числі й економічної, приводять до оберненої задачі, а саме виникає необхідність за даною функцією знайти таку функцію, похідна від якої дорівнювала б початковій
функції. В економіці це означає, що за граничними характеристиками (швидкостями) процесів необхідно відтворити їх загальні властивості (загальні витрати, загальний прибуток тощо).

Після вивчення даної теми ви зможете:

- інтерпретувати зміст інтегралів в математичних моделях економічних процесів;
- володіти методами інтегрування різних функцій;
- пізнавати типи задач в економіці, для розв'язання яких доцільно застосовувати інтеграли;
- застосовувати інструменти інтегрального числення для відшукання вихідних величин за відомими функціями факторів, що впливають на них;
- досліджувати економічну динаміку процесів із застосуванням інтегралів.

Тема 22. Застосування визначеного інтеграла до деяких економічних задач.

Інтегрування в економіці має широкий спектр використання. Наприклад, для відшукання функцій витрат, прибутку, споживання, якщо відомі відповідні функції граничних витрат, граничного прибутку, граничного споживання тощо. Для визначення довільної сталої інтегрування необхідна додаткова умова. Якщо знаходиться функція витрат, використовується умова: при кількості продукції $x = 0$ значення функції витрат дорівнює фіксованим витратам, а при відшуканні функції прибутку: при кількості продукції $x = 0$ значення функції дорівнює нулю (прибуток дорівнює нулю, якщо вироби не продані).

Розглянемо ряд економічних задач, при розв'язуванні яких використовується поняття невизначеного та визначеного інтегралів.

Приклад. Відшукання виробничої функції. Для певного підприємства визначено функцію граничного прибутку залежно від обсягу x виробленої продукції:

$$R'(x) = 30 - 0,02x.$$

Знайдемо функцію прибутку цього підприємства як первісну від функції граничного прибутку:

$$R(x) = \int (30 - 0,02x)dx = 30x - 0,01x^2 + C.$$

Ця функція повинна задовольняти певні умови. Так, при $x = 0$, $R(x) = 0$, звідки $C = 0$. Отже, функція прибутку набуває вигляду:

$$R(x) = 30x - 0,01x^2.$$

Приклад. Нехай функція граничних витрат підприємства при виробництві x одиниць продукції має вигляд:

$$f'(x) = 60 - 0,04x + 0,003x^2.$$

Необхідно:

а) знайти функцію витрат, якщо витрати на 100 одиниць продукції складають 7 тис. грн;

б) знайти фіксовані витрати;

в) визначити, якими будуть витрати на виробництво 250 одиниць продукції;

г) знайти максимальне значення прибутку, якщо ціна складає 65,5 грн за одиницю продукції.

Розв'язання. 1) Знайдемо функцію витрат як первісну від функції граничних витрат підприємства:

$$f(x) = \int (60 - 0,04x + 0,003x^2)dx = 60x - 0,02x^2 + 0,001x^3 + C.$$

Обчислимо довільну сталу C з початкової умови: $f(100) = 7000$, одержимо:

$$7000 = 60 \cdot 100 - 0,02 \cdot 100^2 + 0,001 \cdot 100^3 + C \;\Rightarrow\; C = 200.$$

Таким чином, функція витрат має вигляд:

$$f(x) = 60x - 0,02x^2 + 0,001x^3 + 200.$$

2) Для відшукання фіксованих витрат обчислимо функцію витрат при $x = 0$. При цьому $f(0) = 200$.

3) Витрати на виробництво 250 од. продукції складають:

$$f(250) = 60 \cdot 250 - 0,02 \cdot 250^2 + 0,001 \cdot 250^3 + 200 = 29575.$$

4) Прибуток підприємства визначаємо за формулою:

$P(x) = px - f(x)$, де $p-$ ціна одиниці продукції,

отже, $P(x) = 65,5x - 60x + 0,02x^2 - 0,001x^3 - 200$.

Для визначення максимального значення прибутку проведемо дослідження функції прибутку на екстремум. Спочатку знаходимо критичні точки функції прибутку $P(x)$:

$$P'(x) = 5,5 + 0,04x - 0,003x^2,$$

$$5,5 + 0,04x - 0,003x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 50,\ x_2 = -36,7 < 0.$$

Визначимо знак другої похідної у критичній точці:

$$P''(x) = 0,04 - 0,006x.$$

При $x = 50$ маємо $P''(50) = 0,04 - 0,006 \cdot 50 = -0,26 < 0$, тобто функція прибутку при $x = 50$ має максимум. Значення функції прибутку в цій точці становить: $P(50) = 0$. Таким чином, якщо реалізовувати продукцію за ціною 65,5 грн за одиницю, підприємство не буде мати прибутку.

Приклад. Відомо, що витрати виробництва $f(x)$ залежно від його обсягу x описуються за допомогою функції $f(x) = 1000 + 2x + 0,04x^2$. Обсяг виробництва змінюється від 100 до 200 одиниць. Визначити середні витрати виробництва.

Для того щоб визначити шукані середні витрати виробництва, використаємо теорему про середнє, записавши її так:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

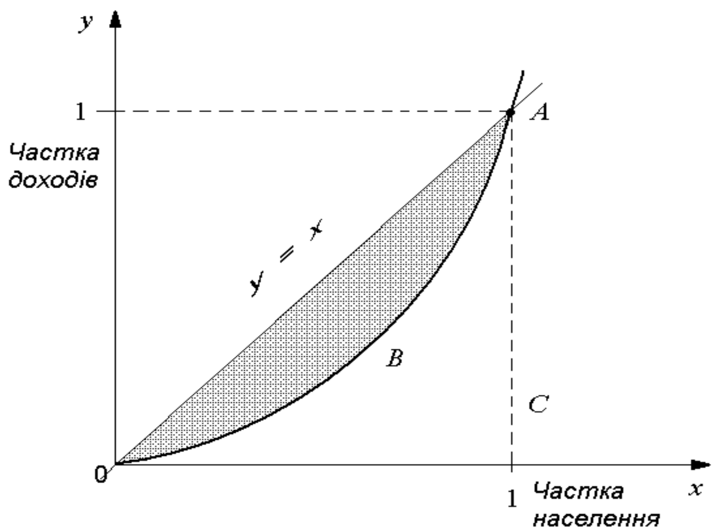
Якщо підінтегральною функцією є $f(x) = 1000 + 2x + 0,04x^2$, а межі інтегрування $a = 100$, $b = 200$, то одержуємо:

$$f(c) = \frac{1}{200-100}\int_{100}^{200}(1000 + 2x + 0,04x^2)dx = \frac{1}{100}(1000x + x^2 + 0,04\frac{x^3}{3})\Big|_{100}^{200} = 2233.$$

Отже, середні витрати виробництва складають 2233 гр. од.

Приклад (Крива Лоренца). Розглянемо відому в економіці задачу про визначення ***коефіцієнта Джині,*** що характеризує ступінь нерівності в розподілі доходів населення країни. Нехай функція $y = f(x)$ – це залежність відсотка доходів від відсотка населення, що їх має. Ця функція має назву ***кривої Лоренца***. Наприклад, якщо $y(0,8) = 0,6$, то це означає, що 80 % населення одержують 60 % сукупного доходу. Очевидно, що $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $y \le x$.

На рис. наведено графік функції $y = f(x)$ – кривої Лоренца.



Якщо розподіл доходу рівномірний (в ідеалі), то функцією, яка характеризує такий розподіл, є пряма лінія $y = x$. Відхилення реального розподілу від ідеального вимірюється відношенням площі фігури, обмеженої прямою $y = x$ і кривою Лоренца (на рис. вона заштрихована), до площі трикутника, що утворений прямими $y = x$, $x = 1$ та віссю Ox.

Це відношення і є коефіцієнтом Джині.

Позначимо його через k, отже, $k = \dfrac{S_{O\breve{A}B}}{S_{\Delta OAC}}$. Відмітимо, що коефіцієнт Джині завжди $0 \le k \le 1$. При цьому, якщо $k = 0$, то розподіл доходів серед населення рівномірний, якщо $k = 1$ – нерівність розподілу доходів найбільша.

Приклад. Нехай для однієї із держав крива Лоренца задається рівнянням $y = x^2$, де x – частка населення, y – частка доходу, яку отримує населення.

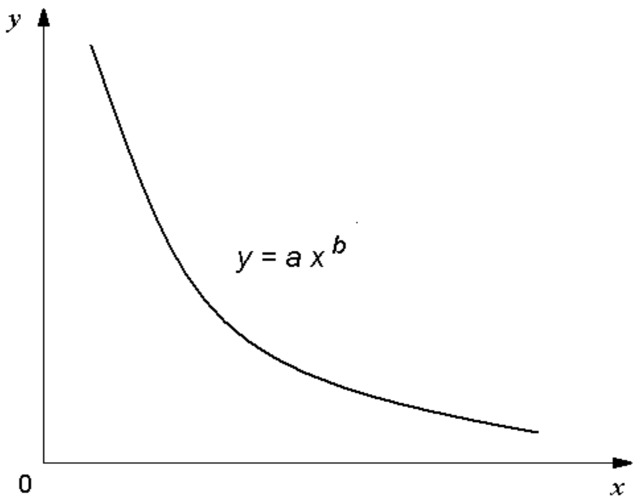
Обчислимо коефіцієнт Джині: $k=\dfrac{S_{OĂB}}{S_{\Delta OAC}}$, де $S_{OAC}=\dfrac{1}{2}$,

$$S_{OĂB}=\int_0^1 (x-x^2)dx=(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

Отже, $$k=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}>0{,}3.$$

Таким чином, досить високе порівняно з нулем значення k показує суттєво нерівномірний розподіл доходів серед населення держави.

Приклад (Крива навчання). Розглянемо деякі питання, що виникають при освоєнні виробництва нової продукції. Нехай функція $T=F(x)$ описує час, який витрачається на виробництво перших x одиниць продукції. Тоді $f(x)=F'(x)$ приблизно дорівнює часу, який витрачається на виробництво $(x+1)$-ї одиниці продукції. Звичайно використовують функції виду $f(x)=ax^b$, де $a>0$, $-1\le b<0$, a – витрати часу на перший виріб, b – показник виробничого процесу. Така функція називається ***кривою навчання***. Її графік зображено на рис.



Дійсно, функція $f(x)$ є спадною, тому що час, необхідний для виконання деякої операції, спадає при зростанні числа повторів.

Час, який буде витрачено на виробництво одиниць продукції з номерами від (n_1+1) до n_2, визначається формулою:

$$\Delta T=\int_{n_1}^{n_2} f(x)dx.$$

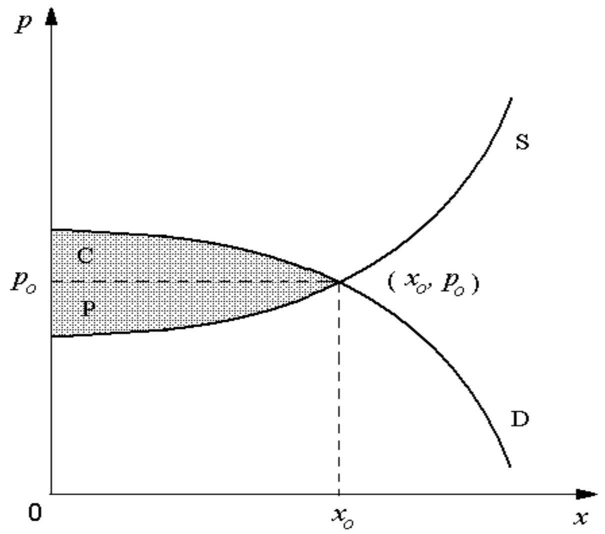
Приклад. Нехай після виробництва 100 годинників виявилось, що час, який потрібний для виробництва наступних виробів спадає відповідно з формулою $y=15x^{-0,14}$. Знайдемо час, який буде витрачено на виробництво ще 20 годинників.

За формулою $\Delta T=\int\limits_{n_1}^{n_2} f(x)dx$ маємо:

$$\Delta T=\int\limits_{100}^{120} 15x^{-0,14}dx=\frac{15x^{0,86}}{0,86}\Bigg|_{100}^{120}=\frac{1500}{86}\left(120^{0,86}-100^{0,86}\right)=155,4.$$

Приклад (Закон попиту та пропозиції). Нехай ***крива попиту*** на деякий товар описується функцією $p=f(x)$, а ***крива пропозиції*** на той самий товар – функцією $p=g(x)$. Знайти виграш споживачів та виграш постачальників.

Уздовж осі Ox відкладається кількість товару (x), а вздовж осі Oy – його вартість (p). На рис. наведено графіки цих кривих. Традиційно крива попиту позначається літерою D, а крива пропозиції – літерою S (див.рис.). Точка перетину цих кривих $(x_0; p_0)$ є ***точкою рівноваги***, якій відповідає ринкова ціна продукції. Зрозуміло, що деякі споживачі зможуть заплатити за товар ціну $p>p_0$.



Знайдемо виграш споживачів від встановленої ціни p_0. Розіб'ємо проміжок $[0;x_0]$ на частинні проміжки точками $0<x_1<x_2<...<x_n=x_0$.

На кожному частковому проміжку $x_{i-1}\le x\le x_i$ візьмемо довільну точку u_i $(i=\overline{1,n})$. Виграш споживачів на цьому відрізку становить $(f(u_i)-p_0)\Delta x_i$, де $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Тоді середній виграш на проміжку $[0;x_0]$ буде:

$$\sum_{i=1}^{n}(f(u_i)-p_0)\Delta x_i.$$

Якщо функція попиту неперервна і $n\to\infty$, а $\max\Delta x_i\to 0$, то ця інтегральна сума має границю:

$$\int\limits_0^{x_0}(f(x)-p_0)dx.$$

Таким чином, виграш споживачів дорівнює

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0 .$$

Аналогічно знаходиться виграш постачальників

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx .$$

Очевидно, що виграш споживачів дорівнює площі між кривою попиту D та прямою $p = p_0$. Виграш постачальників дорівнює площі між прямою $p = p_0$ та кривою пропозиції S.

Приклад. Знайдемо виграші споживачів та постачальників, якщо функція попиту має вигляд $f(x) = 116 - x^2$, а функція пропозиції – $g(x) = \frac{5}{3}x + 20$.

Спочатку визначимо точку ринкової рівноваги: $116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20$,

або $$3x^2 + 5x - 288 = 0.$$

Корені квадратного рівняння $x_1 = 9$, $x_2 = -\frac{32}{3}$. Тоді при $x_0 = 9$ маємо $p_0 = f(9) = 35$. За формулою для С виграш споживача становить:

$$C = \int_0^9 \left(116 - x^2\right)dx - 35 \cdot 9 = \left(116x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^9 - 315 = 486.$$

За формулою для Р визначаємо виграш постачальника:

$$P = 315 - \int_0^9 \left(\frac{5}{3}x + 20\right)dx = 315 - \left(\frac{5}{6}x^2 + 20x\right)\Bigg|_0^9 = 315 - \frac{5}{6} \cdot 81 - 180 = 67,5.$$

Приклад (Задача дисконтування). Ще однією реальною економічною задачею, до розв'язання якої застосовується інтегральне числення, є задача дисконтування. Визначення початкової суми капіталовкладень за її кінцевою вартістю, яка одержана протягом часу t (зазвичай, це роки) за відомим річним відсотком, або відсотковою ставкою p, називається ***дисконтуванням.*** Тобто дисконтування дозволяє визначити вартість усіх майбутніх грошових потоків, яку б вони мали на початковий момент часу. Задача дисконтування розглядається при визначенні економічної ефективності капіталовкладень.

Нехай обчислення прибутків відбувається протягом періоду $[0, T]$. Тоді K_t – сума, яка накопичена за t років (майбутня вартість), K – сума, дисконтована на початок періоду (початкова вартість), $i = \frac{p}{100}$ – питома відсоткова ставка, або ***ставка дисконту***. Зазвичай при плануванні грошових потоків проміжки часу визначаються у роках, тому розрахунки здійснюються за формулою складних відсотків (відсотки нараховуються не тільки на основний капітал, але і на відсотки попереднього періоду). Отже, сума наприкінці t-го року становитиме $K_t = K \cdot (1+i)^t$.

Звідси визначимо початкову суму:

$$K = \frac{K_t}{(1+i)^t}.$$

Якщо надходження здійснюються щорічно протягом певного проміжку часу, то дисконтована вартість визначається як сума за усіма періодами надходження грошей:

$$PV = \frac{K_1}{1+i} + \frac{K_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{K_n}{(1+i)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{K_t}{(1+i)^t},$$

де PV – поточна вартість (present value).

За останньою формулою передбачається, що стала відсоткова ставка діє протягом усього проміжку часу. Якщо щорічний прибуток змінюється з часом, то майбутні надходження доцільно розглядати як неперервний грошовий потік, що характеризується певною ***інтенсивністю*** – прибутком за одиницю часу.

Розіб'ємо весь період часу $[0; T]$ на однакові проміжки $\Delta t = T/n$. Нехай миттєве значення інтенсивності потоку в момент часу t задано функцією $f(t)$. На достатньо малому проміжку часу $[t, t+\Delta t]$ інтенсивність потоку можна вважати сталою, середнє значення якої дорівнює $f(t_k), k = \overline{1, n}$, де $t_k \in [t, t+\Delta t]$. Тоді величина надходжень обчислюється як $f(t_k) \cdot \Delta t$, а поточна їх вартість становить $PV_k = f(t_k) \cdot \Delta t \cdot (1+i)^{-t_k}$. Для наближеного обчислення загальної вартості грошових потоків, що відповідає поточному моменту, отримуємо співвідношення:

$$PV \approx \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot (1+i)^{-t_k} \cdot \Delta t.$$

Ця формула описує інтегральну суму. Якщо перейти до границі цієї суми за умови, що $\Delta t \to 0$, то отримуємо співвідношення для точного визначення сучасної вартості

$$PV = \int_0^T f(t)(1+i)^{-t} dt.$$

Якщо замість ставки дисконту застосувати іншу характеристику – силу зростання, яка визначається формулою $\rho = \ln(1+i)$, то отримуємо таке співвідношення:

$$PV = \int_0^T f(t) e^{-\rho \cdot t} dt.$$

Приклад. Припустимо, що фірма передбачає випуск продукції протягом року і за цей період планує отримати прибуток 100 млн грн. Продаж продукції здійснюється рівномірно протягом року. Ставка дисконту становить 15 %.

Поточну вартість майбутніх надходжень можна наближено оцінити, якщо розглядати дискретний грошовий потік з періодом, що становить 1 рік. Так, за формулою теперішньої вартості при $t = 1$ маємо:

$$PV_1 \approx \frac{100}{1+0{,}15} = 86{,}96 \text{ (млн грн).}$$

Однак такий розрахунок є наближеним, оскільки грошовий потік є неперервним. За умовою задачі надходження від реалізації продукції поступають регулярно протягом року, тому вважатимемо інтенсивність потоку сталою величиною, яка дорівнює 100 млн грн/ рік. Визначаємо, що сила зростання становить $\rho = \ln 1{,}15 = 0{,}14$, і підставляємо ці дані у формулу:

$$PV = \int_0^1 100 \cdot e^{-0{,}14t} dt = -\frac{100}{0{,}14} e^{-0{,}14t} \Bigg|_0^1 = 93{,}32 \text{ (млн грн).}$$

Значення $PV = 93{,}32$ говорить про те, що загальний прибуток, який фірма буде отримувати протягом року і який ми оцінюємо як 100 млн грн, на початку року становить 93,32 млн грн.

Тема 23. Первісна функція. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування.

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для $f(x)$ на множині X, якщо в кожній точці цієї множини $f(x)$ є похідною від $F(x)$ або, що те ж саме, добуток $f(x)dx$ є диференціалом функції $F(x)$:

$$\left[\begin{array}{l} F'(x) = f(x), \\ dF(x) = f(x)dx. \end{array}\right.$$

Так, первісною для $f(x) = \cos x$ на множині R є функція $F(x) = \sin x$. Перевірити це твердження можна, якщо продиференціювати функцію $F(x)$. Оскільки $(\sin x)' = \cos x$, то $F(x) = \sin x$ дійсно є первісною для $f(x) = \cos x$.

Відшукання для $f(x)$ усіх її первісних називають ***інтегруванням*** функції $f(x)$, а відповідний розділ математики, в якому розв'язується задача відшукання функції за її похідною або диференціалом, називається ***інтегральним численням***.

Теорема ***(про множину первісних)***. Якщо для функції $f(x)$, яка визначена на множині X, існують первісні, то:

1) їх нескінченно багато;

2) всі вони відрізняються одна від одної лише сталою величиною.

Доведення. 1. Нехай функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на множині X, тоді за означенням $F'(x) = f(x)$. Оскільки похідна сталої величини дорівнює нулю, то функція $F(x) + C$ $\forall C \in R$ також є первісною для $f(x)$ за означенням: $\left(F(x) + C\right)' = f(x)$. Отже, якщо існує одна первісна, то буде існувати також незліченна множина інших первісних, що відрізняються на довільну сталу C.

2. Нехай $F_1(x)$ і $F_2(x)$ є деякими первісними для функції $f(x)$, тобто за означенням: $F_1'(x) = f(x)$ і $F_2'(x) = f(x)$. Побудуємо допоміжну функцію $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Для будь-якого $x \in X$ маємо:

$$\varphi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Оскільки для будь-якого $x\in X$ маємо $\varphi'\equiv 0$, то звідси $\varphi(x)=C$, тобто $F_1(x)-F_2(x)=C$. Отже, з даної теореми випливає: якщо $F(x)$ – одна з первісних для $f(x)$, то множина всіх первісних має вигляд $F(x)+C$.

Наприклад, для функції $f(x)=\sin 2x$ на множині $x\in R$ первісними є і функція $F_1(x)=\sin^2 x$, і функція $F_2(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$ (*переконайтеся!*). Хоча за виглядом вони різні, проте відрізняються лише сталим доданком:

$$F_1(x)-F_2(x)=\sin^2 x+\frac{1}{2}\cos 2x=\sin^2 x+\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 x\right)=\frac{1}{2}.$$

Отже, для відшукання первісних заданої функції достатньо знати тільки одну, а кожна інша є сумою знайденої первісної та довільної дійсної сталої.

Невизначений інтеграл. Означення, властивості, таблиця основних інтегралів.

Множина всіх первісних для $f(x)$ на області її визначення X називається ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначається:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

де $\int$ – символ (знак) невизначеного інтеграла;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

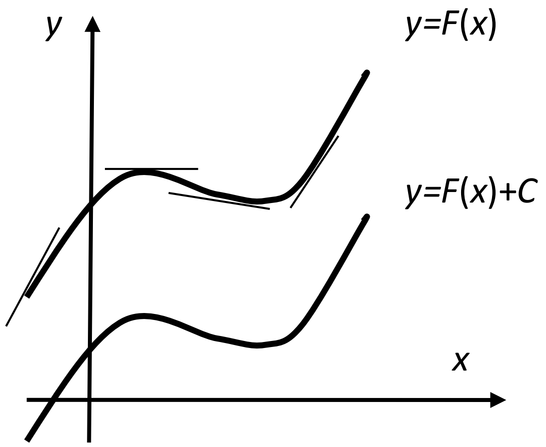
dx – диференціал ***змінної інтегрування*** x;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Сучасне позначення невизначеного інтеграла знаком $\int$ було запропоноване Лейбніцем, який трансформував літеру S, що є першою літерою у слові summa (сума).

З геометричної точки зору будь-яка первісна – це лінія $y = F(x)$, а невизначений інтеграл – сім'я ліній $y = F(x) + C$, яку одержуємо зсувом однієї з них паралельно самій собі вздовж осі Oy (див. рис.).

За геометричним змістом похідної маємо, що $F'(x)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої $y = F(x)$ у точці з абсцисою x. Тоді знайти первісну для $f(x)$ означає знайти таку криву $y = F(x)$, кутовий коефіцієнт дотичної до якої в довільній точці x дорівнював би значенню функції $f(x)$ у цій точці.



Теорема (***теорема про існування невизначеного інтеграла***). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на області її визначення X, то для неї існує невизначений інтеграл як множина функцій, похідна кожної з яких дорівнює $f(x)$. Теорему приймаємо без доведення.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

1^0. Похідна від невизначеного інтеграла за змінною інтегрування дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Дійсно:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$$

2^0. Диференціал від невизначеного інтеграла за змінною інтегрування дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$$

тому що диференціал функції – це добуток похідної функції і диференціала аргументу.

3^0. Невизначений інтеграл від диференціала будь-якої функції, що має похідну, є однопараметричною сім'єю цієї функції:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Обґрунтування таке ж саме, як і для властивості 2^0.

4^0. Невизначений інтеграл від похідної будь-якої диференційовної функції є однопараметричною сім'єю цієї функції:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Нижче наведені властивості, які називають також ***правилами інтегрування***, доводяться за допомогою порівняння множин, які відповідають лівій і правій частинам рівностей, або диференціюванням лівої та правої частин рівностей, які треба довести.

5^0. Сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx,\; a \in R \setminus \{0\}.$$

Знайдемо похідні від обох частин рівності. Від лівої частини за властивістю (21.4) маємо: $\left(\int a\, f(x)dx\right)' = a\, f(x)$. За тією ж властивістю від правої частини маємо: $a \cdot \left(\int f(x)dx\right)' = a \cdot f(x)$. Отже, похідні від обох частин наведеного вище співвідношення рівні між собою, тобто описують одну й ту ж саму множину первісних (*обміркуйте* випадок $a = 0$).

6^0. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від доданків цієї суми:

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Знову знайдемо похідні від обох частин цієї рівності. Так, від лівої частини маємо:

$$\left(\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx\right)' = f_1(x)\pm f_2(x).$$

Від правої частини маємо:

$$\left(\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx\right)' = \left(\int f_1(x)\,dx\right)'\pm\left(\int f_2(x)\,dx\right)' = f_1(x)\pm f_2(x).$$

Як бачимо, похідні від обох частин рівностей збіпали, отже, правильна й сама рівність.

Властивість 6^0 узагальнюється на будь-яке скінченне число доданків.

7^0. Якщо невизначений інтеграл від функції $f(x)$ є відомим, то невизначений інтеграл від цієї функції з аргументом $kx+b$, де $k,b-const$, породжується тією ж первісною, але від аргументу $kx+b$, і з коефіцієнтом $1/k$:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

Для доведення властивості 7^0 знайдемо похідні від обох частин рівності, одержимо:

$$\left(\frac{1}{k}F(\underbrace{kx+b}_{t})+C\right)'_x = \frac{1}{k}\cdot F_t'(t)\cdot t_x' = \frac{1}{k}\cdot f(kx+b)\cdot k = f(kx+b),$$

де t – проміжний аргумент.

Наприклад, безпосереднє застосування цієї формули дає:

$$\int\cos(3x-5)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x-5)+C, \text{ бо } \int\cos x\,dx = \sin x + C.$$

8^0 (***про інваріантність форми невизначеного інтеграла***). Вигляд формули інтегрування не залежить від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною чи функцією від неї:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad\Rightarrow\quad t=\varphi(x):\ \int f(t)\,dt = F(t)+C.$$

До таблиці основних інтегралів відносять, як правило, ті інтеграли, які можна отримати безпосередньо за таблицею похідних, якщо прочитати її справа наліво. У табл. до таких інтегралів ще додані формули (7), (8), (15) та

(16). Повний перелік інтегралів від елементарних функцій можна знайти у довіднику з вищої математики.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $\alpha\neq -1$	9. $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$
2. $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$	10. $\int e^{x}dx=e^{x}+C$
3. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$	11. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
4. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$	12. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
5. $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\mathrm{tg}\,x+C$	13. $\int\frac{dx}{x^2+1}=\mathrm{arctg}\,x+C$
6. $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\mathrm{ctg}\,x+C$	14. $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$
7. $\int\mathrm{tg}\,x\,dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	15. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
8. $\int\mathrm{ctg}\,x\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$	16. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$

Справедливість кожної формули таблиці, як і загалом результату інтегрування, перевіряється диференціюванням згідно зі властивістю 1^0 (про похідну невизначеного інтеграла).

Наприклад, перевіримо справедливість формули (16). Для цього знайдемо похідну від правої частини цієї рівності:

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C\right)'=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}.$$

Дійсно, ми отримали підінтегральну функцію, що треба було довести.

Інтегрування функцій як операція, що є оберненою до диференціювання, є більш складною, ніж відшукання похідної. Для визначення похідних від добутку або частки функцій існують певні співвідношення, а для інтегрування таких співвідношень немає. Яким би не був складним вираз, для якого треба відшукати похідну, це завжди можна зробити, чого неможна стверджувати відносно інтегрування. Оволодіння технікою інтегрування потребує, перш за все, знання невизначених інтегралів основних елементарних функцій, які наведені в табл.

ДЕЯКІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Безпосереднє інтегрування.

Безпосереднє інтегрування – це такий спосіб інтегрування, при якому, користуючись алгебраїчними та іншими перетвореннями, а також властивостями невизначених інтегралів, заданий інтеграл зводиться до табличного.

Приклад . Знайти інтеграли:

а) $$\int x^3dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+C=\frac{x^4}{4}+C.$$

б) $$\int 8x^7dx=8\int x^7dx=8\cdot\frac{x^8}{8}+C=x^8+C.$$

в) $$\int x^2\left(4x^6+2\right)dx=\int\left(4x^8+2x^2\right)dx=\int 4x^8dx+\int 2x^2dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^9}{9}+C_1+2\cdot\frac{x^3}{3}+C_2=\frac{4}{9}x^9+\frac{2}{3}x^3+C.$$

Зауваження. *Декілька сталих інтегрування можна об'єднати в одну, оскільки сума декількох довільних сталих є також довільна стала.*

г) $$\int\left(\frac{x+1}{x}\right)^2dx=\int\frac{x^2+2x+1}{x^2}dx=\int\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

$$=\int dx+\int\frac{2}{x}dx+\int x^{-2}dx=x+2\ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}+C.$$

д) $$\int\left(\sqrt[7]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x}\right)dx=\int x^{\frac{2}{7}}dx+\int x^{-\frac{2}{3}}dx-\int\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{9}{7}}}{\frac{9}{7}}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}-\ln|x|+C=\frac{7}{9}x^{\frac{9}{7}}+3x^{\frac{1}{3}}-\ln|x|+C.$$

Приклад . Знайти невизначені інтеграли:

а) $$\int\frac{\cos^3 x+1}{\cos^2 x}dx=\int\left(\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\sin x+tg\,x+C.$$

б) $$\int\frac{dx}{4x^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{4}arctg\,x+C.$$

в) $$\int\frac{dx}{x^2+8}=\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{8}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{8}}arctg\frac{x}{\sqrt{8}}+C\ .$$

г) $$\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

д) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+C$$

Приклад. Знайти інтеграли, використовуючи інваріантність форми інтеграла:

1. $$\int e^{-x}dx=\frac{1}{-1}\int e^{-x}d(-x)=-e^{-x}+C.$$

2. $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{6}} = \frac{1}{1/6}\int \frac{d(x/6)}{\cos^2 \frac{x}{6}} = 6\,tg\,\frac{x}{6} + C$.

3. $\int \frac{dx}{(9x+2)^5} = \frac{1}{9}\int (9x+2)^{-5}\, d(9x+2) = \frac{1}{9}\cdot\frac{(9x+2)^{-4}}{-4} + C =$

$$= -\frac{1}{36}(9x+2)^{-4} + C.$$

4. $\int \frac{dx}{3x-8} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-8)}{3x-8} = \frac{1}{3}\ln|3x-8| + C$.

5. $\int \sqrt{1-2x}\,dx = \frac{1}{-2}\int (1-2x)^{1/2}\, d(1-2x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{(1-2x)^3} + C.$$

Приклад . Використовуючи формулу $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$, знайти інтеграли:

а) $\int \frac{3x^2+5}{x^3+5x+7}dx = \ln\left|x^3+5x+7\right| + C$, оскільки

$\left(x^3+5x+7\right)' = 3x^2+5$.

б) $\int tg\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C$.

в) $\int \frac{x\,dx}{x^2+11} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+11}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+11\right) + C$.

Тут знак модуля можна замінити дужками, оскільки $x^2+11>0$.

Заміна змінної у невизначеному інтегралі.

Теорема. Нехай $f(x)$ - складна функція, аргументом якої є $x=\varphi(t)$ - неперервно диференційовна функція аргумента t. Тоді справедлива формула заміни змінної у невизначеному інтегралі:

$$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'\left(t\right)dt.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$, тобто: $F'(x)=f(x)$. Доведемо, що $F(x)$ - також є первісною для підінтегральної функції у правій частині формули. Для цього знайдемо її похідну по аргументу t:

$$\left(F(x)\right)_t'=F_x'\cdot x_t'=f(x)\cdot x_t'=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t).$$

Теорему доведено.

Зауваження. На практиці, у багатьох випадках роблять заміну змінних «навпаки», позначаючи $\phi(x)=t$, виражаючи потім dx через dt. Окрім того, доцільність заміни виправдана, якщо відносно нової змінної отримується інтеграл простіший у порівнянні з даним інтегралом.

Приклад . Знайти невизначені інтеграли:

1. $$\int e^{\sin x}\cos x\,dx=\begin{bmatrix}\sin x=t\\ d\left(\sin x\right)=dt\\ \cos x dx=dt\end{bmatrix}=\int e^t dt=e^t+C=e^{\sin x}+C.$$

2. $$\int\frac{\ln^5 x}{x}dx=\begin{bmatrix}\ln x=t\\ d\left(\ln x\right)=dt\\ \dfrac{1}{x}dx=dt\end{bmatrix}=\int t^5dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{\ln^6 x}{6}+C.$$

3.

$$\int\frac{\sqrt{arctg\,x}}{1+x^2}dx=\begin{bmatrix} t=arctg\,x \\ dt=\dfrac{1}{1+x^2}dx \end{bmatrix}=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{\left(arctg\;x\right)^3}+C.$$

4. $$\int\left(x^4+7\right)^6\cdot x^3dx=\begin{bmatrix} t=x^4+7 \\ dt=4x^3dx \\ x^3dx=\dfrac{dt}{4} \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\int t^6dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^7}{7}+C=\frac{\left(x^4+7\right)^7}{28}+C.$$

5. $$\int\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^2\cos\frac{x}{2}dx=\begin{bmatrix} t=2\sin\dfrac{x}{2}+3 \\ dt=\cos\dfrac{x}{2}dx \end{bmatrix}=$$

$$=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{3}\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^3+C.$$

6. $$\int\frac{x^4dx}{x^{10}+4}=\begin{bmatrix} t=x^5;\; x^{10}=\left(x^5\right)^2 \\ dt=5x^4dx \\ x^4dx=\dfrac{dt}{5} \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{10}arctg\frac{x^5}{2}+C.$$

Інтегрування частинами.

Теорема. Якщо $u(x)$ та $v(x)$ - неперервно диференційовні функції, тоді справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Доведення. За правилом знаходження диференціала добутку функцій маємо:

$$d(uv)=u\,dv+v\,du.$$

Звідси $u\,dv=d(uv)-v\,du$. Проінтегруємо обидві частини і застосуємо властивість інтеграла від алгебраїчної суми функцій:

$$\int u\,dv=\int d\left(uv\right)-\int v\,du.$$

Враховуючи властивість інтеграла від диференціала функції, дістаємо:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Формулу доведено.

Метод інтегрування, що ґрунтується на застосуванні цієї формули, називається **методом інтегрування частинами.**

При цьому підінтегральний вираз розбивається на добуток двох частин: u і dv, вибір яких обумовлений, як правило, наступними міркуваннями: похідна $u'\left(x\right)$ повинна бути простішою за $u\left(x\right)$, а $\int dv$ – табличний або ж його знаходження не пов’язане з великими труднощами. Відзначимо два основні типи інтегралів, які знаходяться за допомогою метода інтегрування частинами (причому, є певні рекомендації стосовно вибору u і dv). Це інтеграли виду:

$$\int P_n\left(x\right)f(x)dx,$$

де $P_n(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ - многочлен степеня n, а $f(x)$ - функція з одного із двох типів:

I. $$f(x)=\begin{Bmatrix} sin(ax+b) \\ cos(ax+b) \\ c^{ax+b}, c>0, c\neq 1 \end{Bmatrix}, \quad ax+b \text{ - лінійні функції.}$$

У цьому випадку рекомендується при застосуванні формули інтегрування частинами вибирати в якості u многочлен $P_n(x)$, оскільки при диференціюванні його степінь понижується, а в якості $dv = f(x)dx$, оскільки інтеграли від $f(x)$ - це функції того ж типу.

ІІ. $$f(x) = \left\{ \begin{matrix} arc\sin(ax+b), arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b), arcctg(ax+b) \\ log_c(ax+b), c>0, c \neq 1 \end{matrix} \right\}.$$

У цьому випадку рекомендується при застосуванні формули інтегрування частинами вибирати в якості u обернену тригонометричну або логарифмічну функцію, оскільки при диференціюванні отримуються раціональні функції, а в якості $dv = P_n(x)dx$, оскільки інтеграли від $P_n(x)$ теж є многочленами.

Приклад . Знайти інтеграли:

а) $\int xe^{2x}dx$. Цей інтеграл належить до І типу. Тому:

$$\int xe^{2x}dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & v = \int e^{2x}dx = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{bmatrix} = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

.

б) $\int (2x+1)\cdot cos6x\,dx$. Цей інтеграл належить до І типу. Тому:

$$\int (2x+1)\cdot cos6x\,dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1 & dv = cos6x\,dx \\ du = 2dx & v = \dfrac{1}{6}sin6x \end{bmatrix} =$$

$$= (2x+1)\cdot\frac{1}{6}sin6x - \int \frac{2}{6}sin6x\,dx = \frac{2x+1}{6}sin6x + \frac{1}{18}cos6x + C$$

.

в) $\int (x^2+1)e^x dx$. Цей інтеграл належить до І типу. Тому:

$$\int\left(x^2+1\right)e^x dx=\begin{bmatrix} u=x^2+1 & dv=e^x dx \\ du=2x\,dx & v=e^x \end{bmatrix}=\left(x^2+1\right)e^x-\int e^x\cdot 2x\,dx=$$

$$=\left(x^2+1\right)e^x-2\int xe^x dx=\begin{bmatrix} u=x & dv=e^x dx \\ du=dx & v=e^x \end{bmatrix}=$$

$$=\left(x^2+1\right)e^x-2\left(xe^x-\int e^x dx\right)=\left(x^2+1\right)e^x-2xe^x+2e^x+C.$$

г) $\int x^6 \ln x\,dx$. Цей інтеграл належить до II типу. Тому:

$$\int x^6 \ln x\,dx=\begin{bmatrix} u=\ln x & dv=x^6 dx \\ du=\dfrac{1}{x}dx & v=\dfrac{x^7}{7} \end{bmatrix}=\frac{x^7}{7}\ln x-\int\frac{x^7}{7}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^7}{7}\ln x-\frac{1}{7}\int x^6 dx=\frac{x^7}{7}\ln x-\frac{x^7}{49}+C.$$

д) $\int \arccos x\,dx$. Цей інтеграл належить до II типу. Тому:

$$\int \arccos x\,dx=\begin{bmatrix} u=\arccos x & dv=dx \\ du=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v=x \end{bmatrix}=x\arccos x-\int\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\arccos x-\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arccos x-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}+C=$$

$$=x\arccos\ x-\sqrt{1-x^2}+C$$

(тут застосовано формулу $\int\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+C$).

За допомогою методу інтегрування частинами можна знаходити й інші інтеграли, наприклад, д) $$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = \begin{bmatrix} u = x & dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} \\ du = dx & v = -ctg\,x \end{bmatrix} = -x\,ctg\,x - \int(-ctg\,x)\,dx =$$

$$= -x\,ctg\,x + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = -x\,ctg\,x + \ln|\sin x| + C$$

(тут скористувались формулою $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$).

Інтегрування раціональних дробів.

Означення. Раціональною функцією (раціональним дробом) називається відношення двох многочленів, яке позначається

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0}.$$

Раціональний дріб називається **правильним**, якщо $m < n$, у супротивному випадку дріб називається **неправильним**.

Наприклад, $\dfrac{x+3}{3x^2+x+2}$ – правильний раціональний дріб, а $\dfrac{x^3+2}{x^2+4x+3}$; $\dfrac{x^3+1}{4x^3+2}$ – неправильні раціональні дроби.

а) Інтегрування найпростіших дробів.

Найпростішими (елементарними) дробами називаються правильні дроби вигляду:

1. $\dfrac{A}{x-a}$;

2. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, де m – ціле число, більше за одиницю.

3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, де $D=p^2-4q<0$, тобто квадратний тричлен не має дійсних коренів.

4. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, де n– ціле число більше за одиницю і квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів.

В усіх чотирьох випадках A, B, a, p, q – дійсні числа. Перелічені дроби будемо відповідно називати найпростішими дробами I, II, III і IV типів.

Зауваження. У нашому курсі інтегрування дробів IV типу не розглядається.

Розглянемо інтеграли від найпростіших дробів:

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$

II.

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int(x-a)^{-m}d(x-a)=A\cdot\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C.$$

III. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx \quad (D<0).$

При знаходженні інтегралів III типу будемо застосовувати підстановку $t=\dfrac{1}{2}\left(x^2+px+q\right)'$ і далі зводити до суми інтегралів двох типів:

$$\int \frac{dt}{a^2+t^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C; \qquad \int \frac{f'(t)}{f(t)}dt=ln\left|f(t)\right|+C.$$

Знаходження інтегралів даного типу проілюструємо на прикладах.

Приклад . Знайти інтеграли:

а) $$\int \frac{dx}{x^2+4x+6}=\begin{bmatrix} t=\frac{1}{2}\left(x^2+4x+6\right)'=x+2 \\ x=t-2; \qquad dx=dt \end{bmatrix}=$$

$$=\int \frac{dt}{(t-2)^2+4(t-2)+6}=\int \frac{dt}{t^2-4t+4+4t-8+6}=\int \frac{dt}{t^2+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C.$$

б) $$\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+5}=\begin{bmatrix} t=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+5\right)'=x-2 \\ x=t+2; \qquad dx=dt \end{bmatrix}=$$

$$=\int \frac{3(t+2)-1}{(t+2)^2-4(t+2)+5}dt=\int \frac{3t+5}{t^2+1}dt=\int\left(\frac{3t}{t^2+1}+\frac{5}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=3\int \frac{t\,dt}{t^2+1}+5\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+1}+5\int \frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{3}{2}ln\left(t^2+1\right)+5arctg\,t+C=\frac{3}{2}ln\left(x^2-4x+5\right)+5arctg\left(x-2\right)+C$$

.

б) Розкладання правильного раціонального дробу

на суму найпростіших.

Нехай $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – правильний нескорочуваний раціональний дріб, тобто степінь многочлена в чисельнику менша степені многочлена в знаменнику $(m < n)$. Тоді його завжди можна розкласти в суму елементарних дробів (найпростіших).

Для цього потрібно:

1. Розкласти знаменник дробу на лінійні та квадратні (з від'ємним дискримінантом) множники (такого вигляду, як знаменники елементарних дробів):

$$Q_n(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + px + q\right)^l,$$

де $p^2 - 4q < 0$, k, ..., l – натуральні числа, а коефіцієнт старшого одночлена у $Q_n(x)$ дорівнює одиниці (якщо коефіцієнт старшого одночлена знаменника дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ виявився відмінним від одиниці, то потрібно розділити чисельник і знаменник на цей коефіцієнт).

2. Правильний раціональний дріб подати у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + \ldots + \frac{M_l x + N_l}{\left(x^2 + px + q\right)^l},$$

де A_1, A_2, ..., A_k, M_1, N_1, M_2, N_2, ..., M_l, N_l – невизначені числові коефіцієнти.

3. Обчислити невизначені коефіцієнти A_1, A_2, ..., A_k, M_1, N_1, M_2, N_2, ..., M_l, N_l. Для цього треба привести праву частину рівності до спільного знаменника, прирівняти многочлени у чисельниках дробів і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x одержаної тотожності, отримати систему рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів. Можна визначити коефіцієнти й іншим способом, надаючи змінній x в одержаній тотожності довільних числових значень. Часто буває зручно комбінувати обидва способи обчислення коефіцієнтів.

в) Схема інтегрування раціональних дробів.

А. Якщо дано неправильний раціональний дріб $\dfrac{P(x)}{Q_n(x)}$ (степінь многочлена в чисельнику не менша степені многочлена в знаменнику), то необхідно виділити цілу частину дробу, тобто подати його у вигляді суми многочлена і правильного дробу:

$$\frac{P(x)}{Q_n(x)} = M(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де $M(x)$ – многочлен, а $m < n$.

Б. Розкласти правильний дріб в суму елементарних дробів.

В. Проінтегрувати. Тобто, інтегрування будь-якого раціонального дробу зводиться до інтегрування многочленів та елементарних дробів.

Розглянемо деякі приклади інтегрування раціональних дробів.

Випадок 1. Знаменник раціонального дробу має тільки дійсні різні корені, тобто розкладається на лінійні множники першого степеня.

Приклад . Знайти $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{(x+1)(x-1)(x-2)}dx$.

Розв'язування. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб.

Оскільки множники $(x+1)$, $(x-1)$, $(x-2)$ входять до знаменника у першому степені, розклад правильного раціонального дробу має вигляд:

$$\frac{x^2+5}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x-2}.$$

Зведемо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{x^2+5}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{A_1(x-1)(x-2)+A_2(x+1)(x-2)+A_3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

Зрівнявши після цього многочлени в чисельниках дробів, дістанемо тотожність (рівність при будь–яких значеннях x):

$$x^2+5=A_1(x-1)(x-2)+A_2(x+1)(x-2)+A_3(x+1)(x-1).$$

Надаючи x послідовно значень -1,+1,2 (корені знаменника), отримаємо:

$$\begin{array}{l|ll} x=-1 & 1+5=A_1(-2)(-3), & A_1=1 \\ x=1 & 1+5=A_2\cdot 2(-1), & A_2=-3 \\ x=2 & 4+5=A_3\cdot 3(-1), & A_3=3 \end{array}$$

Таким чином:

$$\int\frac{(x^2+5)dx}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-3}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx=$$
$$=ln|x+1|-3ln|x-1|+3ln|x-2|+C.$$

Приклад . Знайти $\int\frac{x^3+6}{x^2+5x+6}dx$.

Розв’язування.

А. Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб, тому спочатку виділимо цілу частину:

$$
\begin{array}{rl}
-\dfrac{x^3+0x^2+0x+6}{x^3+5x^2+6x} & \left|\begin{array}{l} x^2+5x+6 \\ \hline x-5 \end{array}\right. \\
-\dfrac{-5x^2-6x+6}{-5x^2-25x-30} & \\
19x+36 &
\end{array}
$$

Маємо: $$\frac{x^3+6}{x^2+5x+6}=x-5+\frac{19x+36}{x^2+5x+6}.$$

Б. Розкладемо знаменник отриманого правильного раціонального дробу на множники, враховуючи, що коренями квадратного тричлена є $x_1=-2, x_2=-3$:

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$$

Оскільки множники $(x+2)$ та $(x+3)$ входять до знаменника у першому степені, то розклад правильного раціонального дробу має вигляд:

$$\frac{19x+36}{x^2+5x+6}=\frac{19x+36}{(x+2)(x+3)}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x+3}.$$

Зведемо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{19x+36}{(x+2)(x+3)}=\frac{A_1(x+3)+A_2(x+2)}{(x+2)(x+3)}.$$

Зрівнявши після цього чисельники дробів, дістанемо тотожність:

$$19x+36=A_1(x+3)+A_2(x+2).$$

Надаючи x послідовно значень, які рівні кореням знаменника, отримаємо:

$$\begin{array}{l|l} x=-3 & -57+36=A_2(-1), \qquad A_2=21. \\ x=-2 & -38+36=A_1\cdot 1, \qquad A_1=-2. \end{array}$$

Таким чином, даний інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int \frac{x^3+6}{x^2+5x+6}dx=\int\left(x-5-\frac{2}{x+2}+\frac{21}{x+3}\right)dx.$$

Остаточно, після інтегрування маємо:

$$\int \frac{x^3+6}{x^2+5x+6}dx=\frac{x^2}{2}-5x-2ln|x+3|+21ln|x+2|+C.$$

Випадок 2. Знаменник має лише дійсні корені, причому деякі з них кратні. Тоді правильний дріб розкладається на суму елементарних дробів I і II типів.

Приклад . Знайти $\int \frac{5x+44}{x^3+4x^2+4x}dx$.

Розв'язування. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб.

1. Розкладемо знаменник на множники.

$$x^3+4x^2+4x=x\left(x^2+4x+4\right)=x(x+2)^2.$$

Оскільки x – лінійний множник першого степеня (однократний), а $(x+2)$ – лінійний множник другої кратності, то розклад правильного раціонального дробу в суму елементарних має вигляд:

$$\frac{5x+44}{x(x+2)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{x+2}.$$

Зведемо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{5x+44}{x(x+2)^2}=\frac{A_1(x+2)^2+A_2x+A_3x(x+2)}{x(x+2)^2}.$$

Порівнюючи чисельники дробів, дістанемо тотожність:

$$5x+44=A_1(x+2)^2+A_2x+A_3x(x+2).$$

Надаючи x послідовно значень, рівних кореням знаменника, отримаємо:

$$\begin{array}{r|ll} x=0 & 44=4A_1, & A_1=11. \\ x=-2 & 34=-2A_2, & A_2=-17. \end{array}$$

Для знаходження коефіцієнта A_3 використовуємо довільне значення x, наприклад, $x=-1$:

$$x=-1: \quad 39=A_1-A_2-A_3; \quad 39=11+17-A_3, \quad A_3=-11.$$

Таким чином, шуканий інтеграл дорівнює:

$$\int\frac{5x+44}{x(x+2)^2}dx=\int\left(\frac{11}{x}+\frac{-17}{(x+2)^2}+\frac{11}{x+2}\right)dx=$$

$$=11ln|x|+\frac{17}{x+2}-11ln|x+2|+C.$$

Випадок . Не всі корені знаменника є дійсними.

Приклад . Знайти $\int\frac{x^5-1}{x^4-1}dx$.

Розв'язування. Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^5-1 \\ \underline{x^5-x} \end{array} & \dfrac{x^4-1}{x} \\
\quad x-1 &
\end{array}.
$$

Маємо: $\displaystyle\int\frac{x^5-1}{x^4-1}dx=\int\left(x+\frac{x-1}{x^4-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\int\frac{x-1}{x^4-1}dx.$

Знайдемо тепер інтеграл від правильного раціонального дробу $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^4-1}dx.$

Розкладемо знаменник правильного раціонального дробу на множники.

$$x^4-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right).$$

Тоді: $\displaystyle\frac{x-1}{x^4-1}=\frac{x-1}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}.$

Розкладемо правильний раціональний дріб в суму елементарних дробів I і III типів.

$$\frac{1}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Зведемо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{1}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{A_1\left(x^2+1\right)+Mx\left(x+1\right)+N\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}.$$

Порівнюючи після цього чисельники дробів, дістанемо тотожність:

$$1=A_1\left(x^2+1\right)+Mx\left(x+1\right)+N\left(x+1\right).$$

При $x=-1$ отримаємо: $\quad 1=A_1\cdot 2$, звідки $\quad A_1=\dfrac{1}{2}.$

Зрівнюючи коефіцієнти при x^2, x^0, одержимо:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A_1 + M = 0, \qquad \frac{1}{2} + M = 0; \quad M = -\frac{1}{2}. \\ x^0 & A_1 + N = 1, \qquad \frac{1}{2} + N = 1; \quad N = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Враховуючи, що

$$\int \frac{x-1}{x^2+1}dx = \int\left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right) - arctg\,x + C.$$

Остаточно:

$$\int \frac{x^5-1}{x^4-1}dx = \frac{x^2}{2} + \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx =$$

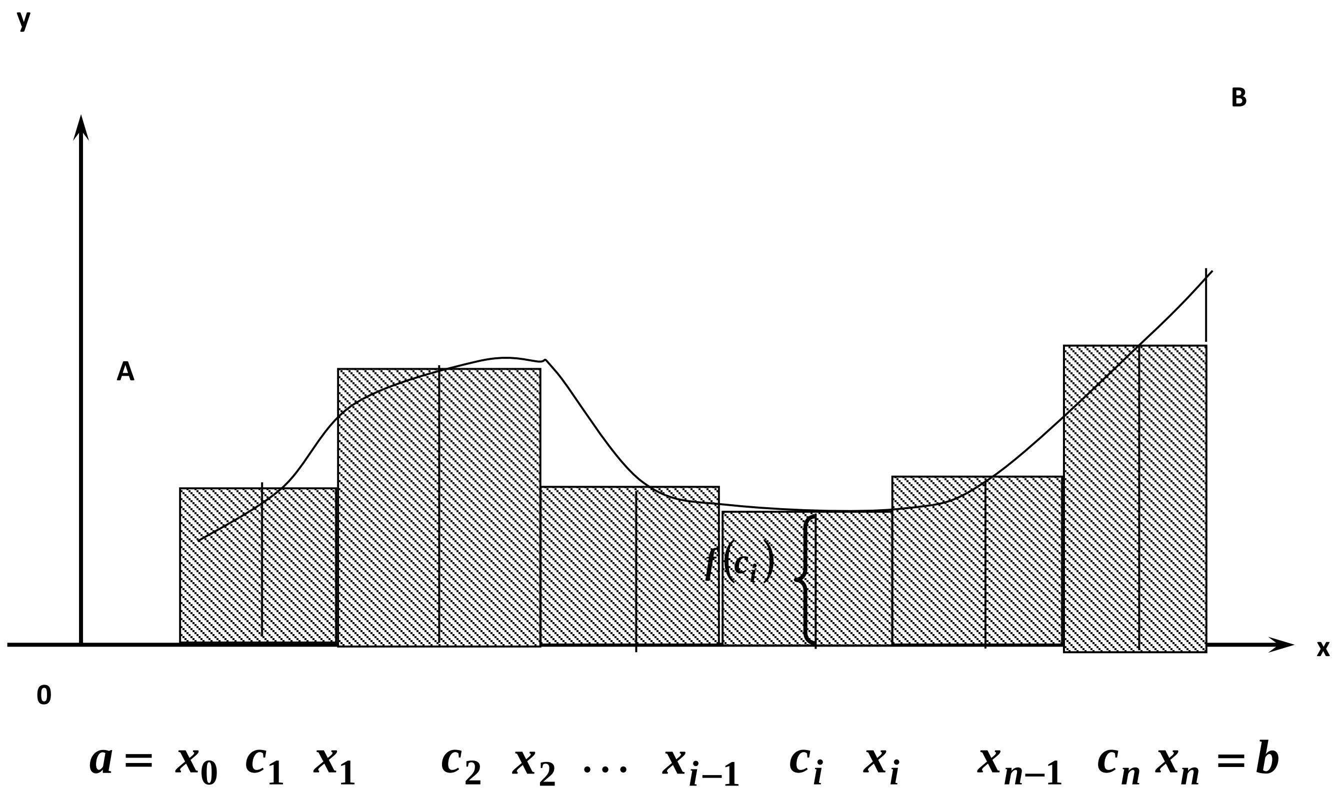
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}ln|x+1| - \frac{1}{4}ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}arctg\,x + C.$$

Тема 24. Визначений інтеграл

Задача про площу криволінійної трапеції.

Фігура, обмежена відрізком $\left[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}\right]$ осі $\boldsymbol{Ox}$, двома прямими $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, і графіком неперервної функції $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)$, яка набуває невід'ємних значень, називається **криволінійною трапецією.**

Знайдемо площу $\boldsymbol{S}$ цієї фігури.



Основу криволінійної трапеції (відрізок $[a;\, b]$) розіб'ємо на n довільних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Площа криволінійної трапеції буде дорівнювати сумі площ частинних криволінійних трапецій: $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$.

На кожному частинному відрізку $[x_{i-1};\, x_i]$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ довжиною $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ виберемо довільну точку $c_i \in [x_{i-1};\, x_i]$ і побудуємо прямокутник із основою Δx_i і висотою $f(c_i)$. Площа кожного такого прямокутника дорівнює $f(c_i)\Delta x_i$ і $S_i \approx f(c_i)\Delta x_i$. Складемо суму: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, яку назвемо **інтегральною сумою.**

Очевидно, що $S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ і можна скласти скільки завгодно таких сум, які, можливо, будуть залежати як від способу розбиття відрізка на частинні, так і від вибору проміжних точок c_i. Довжину найбільшого частинного відрізка позначимо через $\Delta x = \max_i \Delta x_i$.

Означення. Якщо границя інтегральних сум $S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ існує, скінчена і не залежить від способу розбиття відрізка $[a, b]$ на частинні відрізки, а також від вибору проміжних точок c_i, то ця границя називається **площею криволінійної трапеції**.

Поняття визначеного інтеграла.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a, b]$, який розіб'ємо на n частинних сегментів: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$.

На кожному частинному відрізку візьмемо довільну точку c_i і складемо інтегральну суму $S_n = \sum_{i=n}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i$. Позначимо: $\Delta x = \max_i \Delta x_i$.

Означення. Якщо границя інтегральних сум $\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i$ існує, скінчена і не залежить від способу розбиття сегмента $\left[a, b\right]$ на частинні відрізки, а також від вибору проміжних точок c_i, то ця границя називається називається **визначеним інтегралом функції** $f\left(x\right)$ на проміжку $\left[a, b\right]$ і позначається:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i .$$

Числа a і b називаються **нижньою і верхньою межами інтегрування** відповідно. При цьому відрізок $\left[a, b\right]$ називається **проміжком інтегрування**, а x –**змінною інтегрування.**

Теорема (існування визначеного інтеграла). Якщо функція $f\left(x\right)$ неперервна на відрізку $\left[a, b\right]$, то вона на цьому відрізку має визначений інтеграл (або кажуть, що функція $f\left(x\right)$ інтегровна на $\left[a, b\right]$).

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо $f\left(x\right)$ – неперервна і невід’ємна на $\left[a, b\right]$ функція, то з геометричної точки зору, визначений інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f\left(x\right)$, відрізком $\left[a, b\right]$ осі Ox та прямими $x = a$ і $x = b$.

Зв’язок між визначеним і невизначеним інтегралом встановлює формула Ньютона–Лейбніца.

Теорема Ньютона–Лейбніца. Якщо функція $f\left(x\right)$ неперервна на відрізку $\left[a,b\right]$ і $F\left(x\right)$ довільна первісна для функції $f\left(x\right)$ на цьому відрізку, то визначений інтеграл функції $f\left(x\right)$ на $\left[a,b\right]$ дорівнює подвійній підстановці від первісної:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = F\left(x\right)\Big|_a^b = F\left(b\right) - F\left(a\right).$$

По іншому: $\displaystyle\int_a^b f\left(x\right)dx = \left(\int f\left(x\right)dx\right)\Bigg|_a^b.$

Обернений зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами встановлює наступна

Теорема про інтеграл зі змінною верхньою межею. Нехай функція $f\left(x\right)$ неперервна на будь-якому відрізку $\left[a,\,x\right],\,x > a$. Тоді визначений інтеграл $\displaystyle\int_a^x f\left(t\right)dt$ задає деяку функцію $\displaystyle F(x) = \int_a^x f\left(t\right)dt$. Похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею дорівнює підінтегральній функції (із заміною змінної інтегрування на верхню межу):

$$\left(\int_a^x f\left(t\right)dt\right)' = f(x).$$

Іншими словами, інтеграл зі змінною верхньою межею дорівнює первісній для підінтегральної функції.

Доведення. За теоремою Ньютона-Лейбніца:

$$\left(\int_a^x f\left(t\right)dt\right)' = \left(F(x) - F(a)\right)' = F'(x) - 0 = f(x).$$

Властивості визначеного інтеграла, які виражаються рівностями.

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

Доведення. За теоремою Ньютона-Лейбніца: $\int\limits_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$

2. $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx.$

Доведення. За теоремою Ньютона-Лейбніца: $\int\limits_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) =$

$$= -\left(F(b) - F(a)\right) = -\int\limits_a^b f(x)dx.$$

3. $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx, \quad A = const.$ Тобто, сталий множник виноситься за знак визначеного інтеграла.

Доведення. За теоремою Ньютона-Лейбніца і властивістю невизначеного інтеграла:

$$\int\limits_a^b Af(x)dx = \int Af(x)dx \Bigg|_a^b = A\int f(x)dx \Bigg|_a^b = A\int\limits_a^b f(x)dx.$$

4. $\int\limits_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x) \right]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx.$

Доведення. За теоремою Ньютона-Лейбніца і властивістю невизначеного інтеграла:

$$\int_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x) \right] dx = \int \left[f_1(x) \pm f_2(x) \right] dx \Big|_a^b =$$

$$= \left(\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \right) \Big|_a^b = \int f_1(x)dx \Big|_a^b \pm \int f_2(x)dx \Big|_a^b =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Ця властивість виконується при довільному розташуванні точок a,b,c і називається адитивністю визначеного інтеграла.

Доведення. За теоремою Ньютона-Лейбніца:

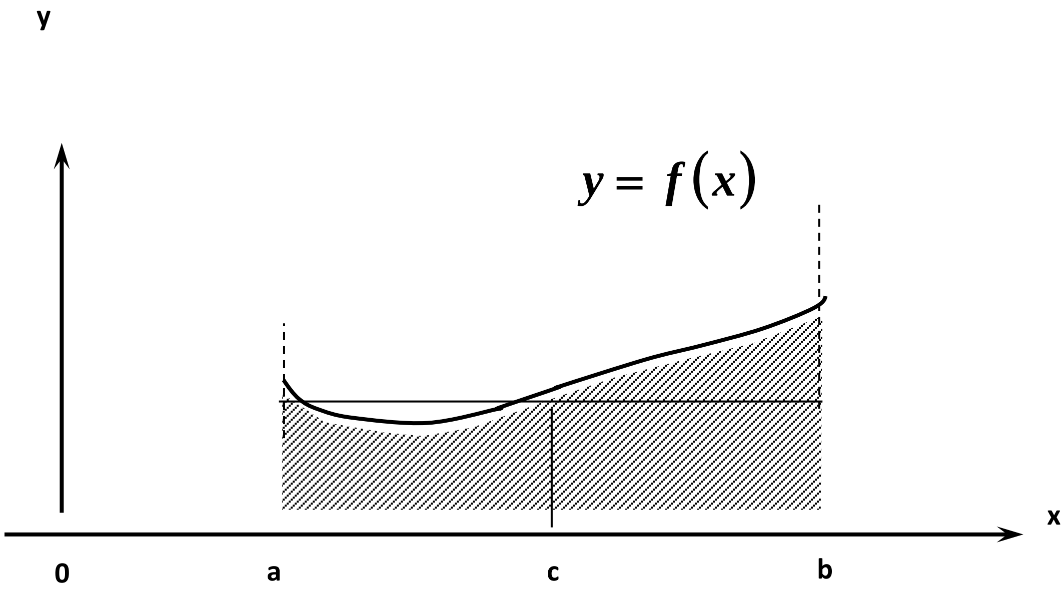
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Теорема про середнє значення. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то існує точка $c \in [a,b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

З геометричної точки зору, ця теорема стверджує, що площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $(f(x) \geq 0)$, , $x = a$, $x = b$, $y = 0$ дорівнює площі прямокутника з основою $(b-a)$ і висотою $f(c)$, де $c \in [a, b]$, тобто c – деяка точка, розташована між a і b (див. рис.).



Властивості визначеного інтеграла, які виражаються нерівностями.

1. Якщо функція $f(x)$ неперервна і $f(x)\ge 0$ на $[a,b]$ $(a<b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

Доведення властивості слідує із геометричного смисла визначеного інтеграла як площі криволінійної трапеції.

2. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і $f(x)\ge g(x)$ на відрізку $[a,b]$ $(a<b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$$

Іншими словами, нерівності можна почленно інтегрувати.

Доведення. За попередньою властивістю для функції $f(x)-g(x)\ge 0$:

$\int_a^b (f(x)-g(x))dx \ge 0$. Застосувавши властивість інтеграла від різниці функцій, дістанемо: $\int_a^b (f(x)-g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \ge 0$

або

$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$, що і потрібно було довести.

При обчисленні визначених інтегралів застосовують ті ж самі методи, що і при знаходженні невизначених інтегралів. Розглянемо декілька прикладів безпосереднього інтегрування.

Приклад . Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^1 x^2 dx$.

Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, одержимо:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

б) $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$

в) $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\Big|_0^a = \frac{1}{a}(arctg 1 - arctg 0) = \frac{\pi}{4a}.$

г)
$$\int_1^2 e^{3x+1}dx=\frac{1}{3}\int_1^2 e^{3x+1}d(3x+1)=\frac{1}{3}e^{3x+1}\Bigg|_1^2=\frac{1}{3}\left(e^7-e^4\right)=\frac{1}{3}e^7-\frac{1}{3}e^4$$
.

д) $$\int_3^5\frac{dx}{(x-2)^2}=\int_3^5(x-2)^{-2}d(x-2)=\frac{(x-2)^{-1}}{-1}\Bigg|_3^5=\frac{-1}{x-2}\Bigg|_3^5=-\frac{1}{3}+\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$$

Метод інтегрування частинами.

Теорема. Нехай u,v - неперервно диференційовні на $[a,b]$ функції. Тоді формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла має вигляд:

$$\int_a^b u\,dv=uv\Bigg|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

Доведення. Використовуючи теорему Ньютона-Лейбніца та формулу інтегрування частинами для невизначеного інтеграла, отримуємо:

$$\int_a^b u\,dv=\int udv\Bigg|_a^b=\left(uv-\int vdu\right)\Bigg|_a^b=uv\Bigg|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

Зауваження. Усі рекомендації відносно вибору u і dv розглянуті для невизначеного інтеграла, застосовуються і для визначеного інтеграла.

Приклад . Обчислити інтеграл $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

Розв'язування. Підінтегральна функція є добутком многочлена на показникову функцію, тому:

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^{-x} \\ du = dx & v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx =$$

$$= -1e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = -e^{-1} - \left(e^{-1} - e^0\right) = 1 - 2e^{-1}.$$

Метод заміни змінної.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ - неперервна на $[a,b]$, а $x = \varphi(t)$ - неперервно диференційовна на $[\alpha,\beta]$ функція, причому $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, і на сегменті $[\alpha,\beta]$ задана складена функція $f\left(\varphi(t)\right)$. Тоді формула заміни змінної у визначеному інтегралі має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$ на $[a,b]$. Тоді за умовами теореми $F\left(\varphi(t)\right)$ буде первісною для функції $f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)$ на $[\alpha,\beta]$. Користуючись теоремою Ньютона-Лейбніца, порівняємо ліву і праву частини формули.

Ліва частина: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Права частина: $\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = F\left(\varphi(\beta)\right) - F\left(\varphi(\alpha)\right) = F(b) - F(a)$.

Теорема доведена.

Зауваження. На відміну від невизначеного інтеграла при заміні змінних у визначеному інтегралі не потрібно повертатись до вихідної змінної, але **обов'язково необхідно змінювати межі інтегрування**.

Приклад . Обчислити інтеграл $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

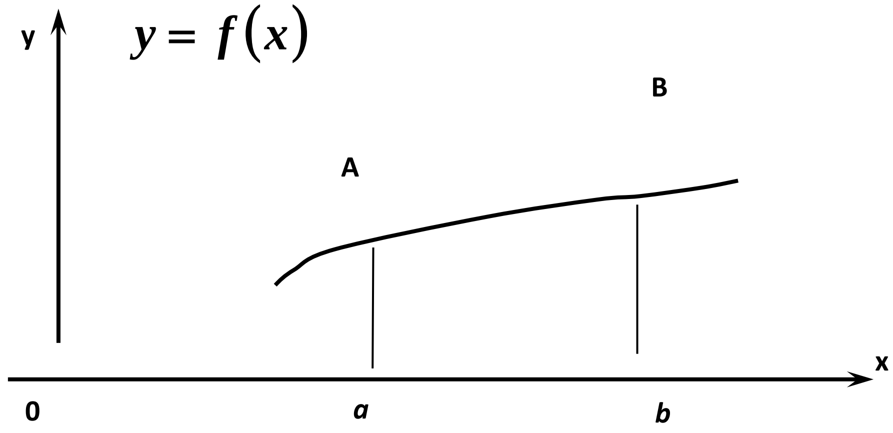
Розв'язування.

$$\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = \left[\begin{array}{lll} t=\sqrt{x}, & x=t^2, & dx = 2t\,dt \\ ï\ ðè\ x=0,\ t=0; & ï\ ðè\ x=4,\ t=2 & \end{array}\right] = \int\limits_0^2 \frac{2t^2dt}{t^2+1} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2+1} =$$

$$= \left[\begin{array}{r|l} t^2 & t^2+1 \\ \cline{2-2} t^2+1 & 1 \\ \cline{1-1} -1 & \end{array}\right] = 2\int\limits_0^2 \left(1+\frac{-1}{t^2+1}\right)dt = 2\left(t - arctg\,t\right)\Big|_0^2 = 4 - 2arctg\,2.$$

Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла.

Задача 1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=f\left(x\right),\ x=a,\ x=b,\ y=0$. Якщо функція $f\left(x\right)\geq 0$ та неперервна на відрізку $\left[a;\,b\right]$, то із геометричного змісту визначеного інтегралу випливає, що площа S обчислюється за формулою: $S=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ (див. рис.).

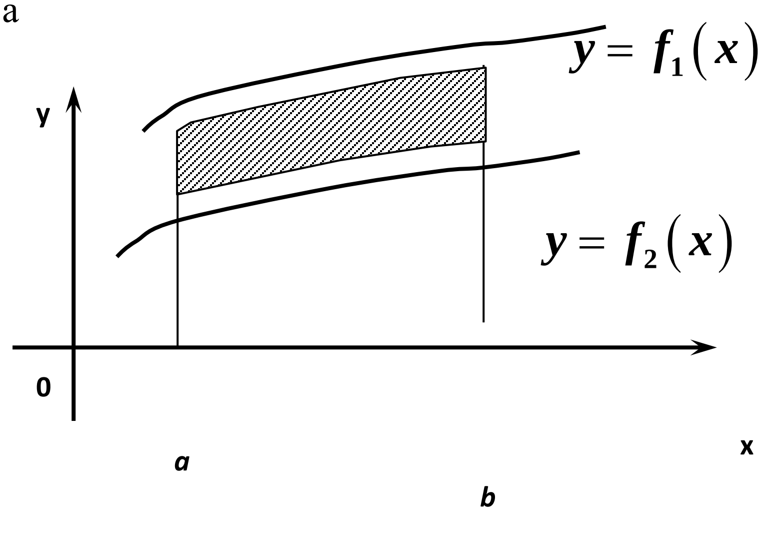


Задача 2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то площа знаходиться за формулою $S = \int_a^b |f(x)|dx$.

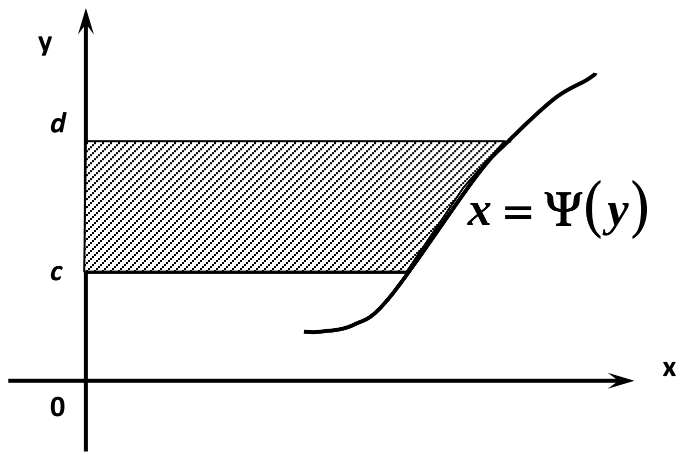
Задача 3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, якщо функції $f_1(x)$ з $f_2(x)$ – неперервні та $f_1(x) \geq f_2(x)$ на $[a; b]$.

Площа S обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx .$$



Задача 4. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x=\Psi\left(y\right)$, $y=c$, $y=d$, $x=0$, якщо функція $\Psi\left(y\right)\geq 0$ та неперервна на $\left[c;d\right]$. Площа S знаходиться за формулою: $S=\int\limits_{c}^{d}\Psi\left(y\right)dy$ (див. рис.).

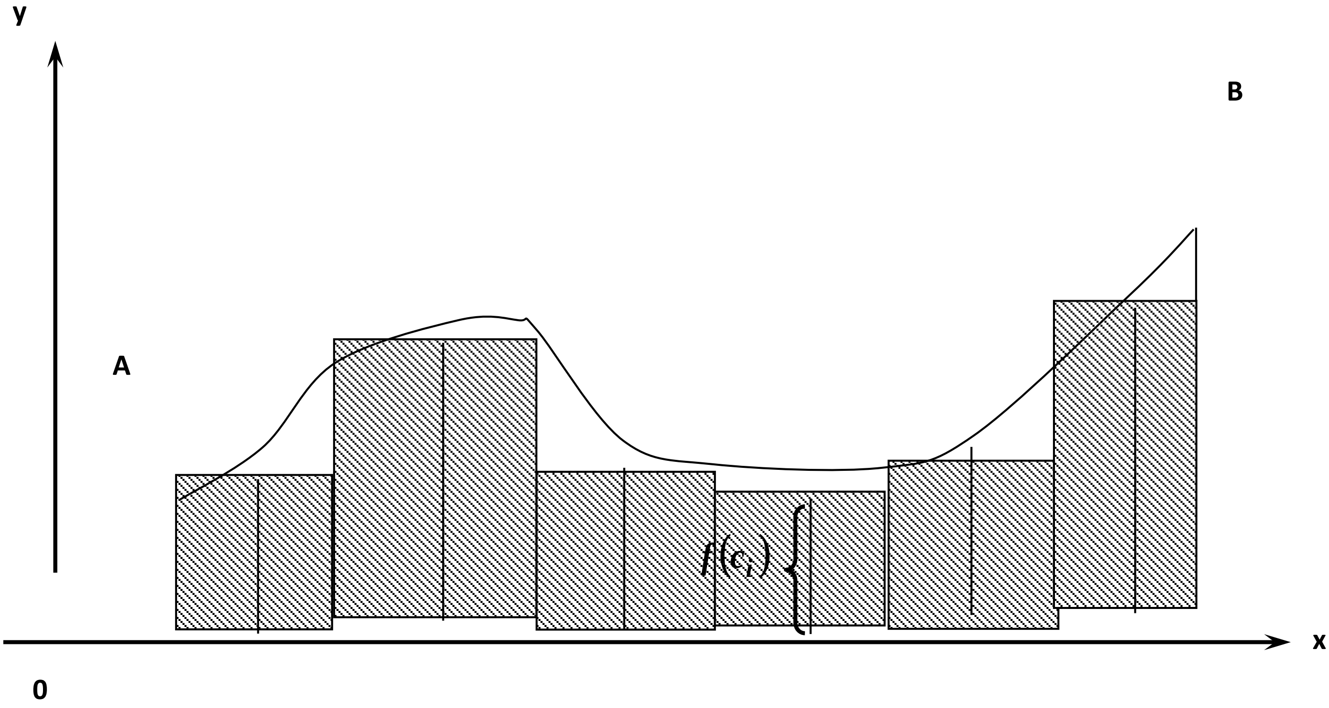


У загальному випадку, щоб знайти площу плоскої фігури, її розглядають як комбінацію фігур, площі яких обчислено вище, причому інтегрування можна проводити як по одній, так і по іншій змінній.

Наближене обчислення визначених інтегралів.

Обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона-Лейбніца передбачає можливість знаходження первісної для підінтегральної функціїї, яка виражається через елементарні функції. Але це не завжди вдається зробити. Так, наприклад, первісні для функцій $f(x)=e^{-x^2}$, $f(x)=\sin x^2$, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ не виражаються через елементарні функції. Окрім того, у багатьох прикладних задачах немає необхідності мати точне значення визначеного інтегралу. Тому на практиці частіше обчислюють визначені інтеграли наближено з певною, наперед заданою точністю. Розглянемо одну із найпростіших формул для наближеного обчислення визначених інтегралів – **формулу трапецій**.

Для наочності розглянемо неперервну, невід’ємну на сегменті $\left[a;b\right]$ функцію $f(x)$. Із геометричного сенсу визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = S$ криволінійної трапеції. Сегмент $\left[a,b\right]$ розіб’ємо на n рівних частинних сегментів: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$, де $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n} = h, i = 1,2,...,n$. У кожній точці цього розбиття обчислимо значення функції $f(x_i)$. Криволінійна трапеція розіб’ється на n частинних криволінійних трапецій (див. рис.), причому $S = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$.



$$a = x_0 \quad c_1 \quad x_1 \qquad c_2 \quad x_2 \ \ldots \ x_{i-1} \quad c_i \quad x_i \qquad x_{n-1} \quad c_n \, x_n = b$$

Площу кожної частинної криволінійної трапеції замінимо площею прямокутної трапеції із основами $f(x_{i-1}), f(x_i)$ і висотою $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Таким чином:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx$$

$$\approx h \cdot \frac{f(x_o) + f(x_1)}{2} + h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h \cdot \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

Після очевидних перетворень дістаємо **формулу трапецій**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_o)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\right).$$

Невласні інтеграли.

При введенні поняття визначеного інтеграла передбачалось, що функція $f(x)$ є неперервною на скінченному проміжку $[a,b]$. У випадку порушень цих вимог ми приходимо до поняття невласних інтегралів. Вони будуть двох видів: невласні інтеграли із нескінченними межами інтегрування та невласні інтеграли від розривних функцій (інші можна розглядати як комбінації цих двох видів).

Невласні інтеграли із нескінченними межами інтегрування.

Нехай функція $f(x)$ є неперервною на нескінченному проміжку $[a,+\infty)$. Невласним інтегралом від цієї функції по даному проміжку називається границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ і позначається $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. Якщо ця границя існує і скінченна, то кажуть, що невласний інтеграл збіжний. У супротивному випадку – розбіжний .

Аналогічно визначається невласний інтеграл із нескінченною нижньою межею інтегрування:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Якщо нескінченними є обидві межі інтегрування, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx,$$ де c - довільне число.

При цьому інтеграл збіжний, якщо одночасно існують обидві границі.

Приклад. Дослідити на збіжність $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

В математичній статистиці застосовується так званий інтеграл Пуассона:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Пропонуємо самостійно переконатись, що невласні інтеграли від степеневих функцій $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^a dx$ збіжні при $a < -1$, та розбіжні при $a \geq -1$.

Невласні інтеграли від розривних функцій.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на півсегменті $(a,b]$ і розривна у точці $x = a$, то невласний інтеграл визначається як границя $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, причому, якщо правостороння границя існує, то інтеграл збіжний, а у супротивному випадку – розбіжний.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на півсегменті $[a,b)$ і розривна у точці $x = b$, то невласний інтеграл визначається як границя $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, причому, якщо ця лівостороння границя існує, то інтеграл збіжний, а у супротивному випадку – розбіжний.

У випадку, коли функція розривна у точці $x = c, a < c < b$, то невласний інтеграл визначається як сума границь:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\delta \to +0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx,$$

причому для його збіжності потрібне одночасне існування обох границь.

Приклади та вправи до розділу 6

6.1. Нехай задана функція граничного доходу залежно від обсягу продукції

$$R'(x) = 25 - 0{,}08x.$$

Знайти функцію доходу та закон попиту на продукцію.

Розв'язання. Оскільки $R'(x) = 25 - 0{,}08x$, то

$$R = \int (25 - 0{,}08x)dx = 25x - 0{,}04x^2 + C.$$

Дохід дорівнює нулю, якщо не реалізовано жодного виробу, тому маємо:

$$R(0) = 0, \text{ звідки } C = 0.$$

Отже, функція доходу така:

$$R(x) = 25x - 0{,}04x^2$$

Якщо ціна одиниці продукції p, то дохід визначається формулою $R = px$. Отже, якщо поділити дохід на x, знайдемо функцію попиту:

$$P(x) = \frac{R(x)}{x} = 25 - 0{,}04x.$$

6.2. Знайти обсяг продукції, що вироблятиме мале підприємство за перші 3 години роботи, якщо функція продуктивності праці має вигляд:

$$f(x) = x^2 + e^{-x}.$$

Розв'язання. Обсяг продукції обчислюється за формулою $P = \int\limits_0^T f(x)dx$.

Отже, $P = \int\limits_0^3 \left(x^2 + e^{-x}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - e^{-x}\right)\Bigg|_0^3 = 9 - e^{-3} + e^0 = 10 - e^{-3} \approx 9{,}95$ (ум. од.).

6.3. Знайти обсяг продукції, виробленої за другу годину, якщо відома функція продуктивності $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x^2}$.

Розв'язання. Для відшукання обсягу продукції обчислимо визначений інтеграл:

$$P = \int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2}{x}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{10}{3} \approx 3{,}3 \text{ (ум. од.).}$$

6.4. На виготовлення 100 поштових конвертів (1 одиниця продукції) було витрачено 50 хвилин. У подальшому час виготовлення змінювався за формулою: $f(x) = 50x^{-0,25}$.

Скільки хвилин буде потрібно для виготовлення 300 конвертів після того, як 400 вже було виготовлено?

Розв'язання. Обчислюємо інтеграл:

$$\int_4^7 50x^{-0,25}dx = 50\left.\frac{x^{0,75}}{0,75}\right|_4^7 = \frac{200}{3}\left(7^{0,75} - 4^{0,75}\right) = 98,34 \text{ (хв.)}.$$

6.5. Знайти середнє значення витрат, якщо обсяг виробництва змінюється від 3 до 5 гр. од., якщо відомо, що витрати залежно від обсягу виробництва можна описати такою функцією: $f(x) = 2x^2 + 3x + 8$. При якому обсязі продукції витрати приймають середнє значення?

Розв'язання. Використаємо теорему про середнє значення функції:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

у результаті чого отримаємо:

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_3^5\left(2x^2 + 3x + 8\right)dx = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 8x\right)\right|_3^5 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{250}{3} + \frac{75}{2} + 40 - \frac{54}{3} - \frac{27}{2} - 24\right) = \frac{158}{3}\text{(гр. од.)}.$$

Отже, середні витрати виробництва дорівнюють $\frac{158}{3}$ (гр. од.).

Тепер знайдемо обсяг продукції, при якому витрати набувають значення $\frac{158}{3}$, тобто розв'яжемо рівняння:

$$2x^2 + 3x + 8 = \frac{158}{3}, \text{ або } 6x^2 + 9x - 134 = 0.$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 3216}}{12};\ x_1 = \frac{-9 + \sqrt{3297}}{12} \approx 4;\ x_2 = \frac{-9 - \sqrt{3297}}{12} - \text{не підходить}.$$

Отже, при $x \approx 4$(гр. од.) витрати набувають середнє значення.

6.6. Функція граничних витрат має вигляд:

$$C'(x) = 50 + 0{,}08x.$$

Фіксовані витрати складають 1200 гр. од. на місяць, вартість одного виробу – 98 гр. од.

Знайти функцію витрат. Які витрати потрібні для виробництва 200 виробів? Визначити максимальний прибуток.

Розв'язання. За умовою задачі відомо, що $C'(x) = 50 + 0{,}08x$, тоді

$$C(x) = \int(50 + 0{,}08x)dx, \quad C(x) = 50x + 0{,}04x^2 + C_1.$$

Фіксовані витрати складають 1200 гр. од., тому маємо:

$$C(x) = 50x + 0{,}04x^2 + 1200.$$

Далі треба обчислити витрати на виробництво 200 виробів.

$$C(200) = 50 \cdot 200 + 0{,}04 \cdot 200^2 + 1200 = 12800 \text{(гр. од.)}.$$

Прибуток залежно від обсягу продукції складає

$$P = 98x - 50x - 0{,}04x^2 - 1200,$$

або

$$P = 48x - 0{,}04x^2 - 1200.$$

Для визначення максимального прибутку знаходимо похідну:

$$P' = 48 - 0{,}08x.$$

Далі за необхідною умовою існування екстремуму маємо:

$$48 - 0{,}08x = 0,$$

звідки $x = 600$. Прибуток буде максимальним при $x = 600$, оскільки $P'' = -0{,}08 < 0$ і складатиме:

$$P(600) = 48 \cdot 600 - 0{,}04 \cdot 600^2 - 1200 = 13200 \text{ (гр. од.)}.$$

Отже: функція витрат $C(x) = 50x + 0{,}04x^2 + 1200$; витрати на виробництво 200 виробів складають 12 800 гр. од.; максимальний прибуток дорівнює
13 200 гр. од.

6.7. Нехай відомі закони попиту та пропозиції:

$$p = 80 - x^2, \qquad q = \frac{2}{3}x + \frac{32}{3}.$$

Знайти виграш споживача та виграш постачальника.

Розв'язання. Знайдемо точку ринкової рівноваги x, для якої $p = q$.

$$80 - x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{32}{3},\ 3x^2 + 2x - 208 = 0,$$

звідки $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+624}}{3}$, $x_1 = 8$, $x_2 = -\dfrac{26}{3}$(не підходить).

Якщо кількість товару складає 8 ум. од., то ринкова ціна становить: $p(8) = 16$ (ум. од.).

Тоді ціна всього товару дорівнює 16·8=108 (ум. од.).

Деякі споживачі можуть заплатити за товар більше ринкової ціни. Тоді виграш споживача (див. (24.18)) складатиме: $C = \int_0^8 p(x)dx - 108$.

$$C = \int_0^8 \left(80 - x^2\right)dx - 108 = \left.\left(80x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^8 - 108 \approx 361 \text{(ум. од.)}.$$

Виграш постачальника (24.19) складатиме:

$$P = 108 - \int_0^8 q(x)dx.$$

$$P = 108 - \int_0^8 \left(\frac{2}{3}x + \frac{32}{3}\right)dx = 108 - \left.\left(\frac{x^2}{3} + \frac{32}{3}x\right)\right|_0^8 \approx 1{,}3 \text{ (ум. од.)}.$$

Отже, виграш споживача наближено становить 361 (ум. од.), виграш постачальника – 1,3 (ум. од.).

6.8. Функція сукупних витрат підприємства та рівняння попиту на товар задаються такими функціями:

$$C(x) = 600 + 92x + 2x^2;\ p = 260 - 3x - x^2.$$

При якому обсязі виробництва підприємство буде мати максимальний прибуток?

Розв'язання. Виграш споживача визначається формулою:

$$S = \int_0^{x_0} p\,dx - p_0 x_0,$$

де x_0 – обсяг виробництва, p_0 – рівноважна ціна. Прибуток підприємства складає:

$$\Pi = px - C(x),$$
$$\Pi = \left(260 - 3x - x^2\right)x - 600 - 92x - 2x^2,$$
$$\Pi = -x^3 - 5x^2 + 168x - 600.$$

Знаходимо похідну і критичні точки функції $\Pi(x)$:

$$\Pi' = -3x^2 - 10x + 168,$$
$$3x^2 + 10x - 168 = 0,$$

звідки $x_1 = 6, x_2 = -\dfrac{28}{3}$ не підходить.

$\Pi'' = -6x - 10,\ \ \Pi''(6) < 0$, отже, при $x_1 = 6$ прибуток максимальний.

$p_0 = p(6) = 260 - 3 \cdot 6 - 6^2 = 206$.

Тоді $p_0 x_0 = 206 \cdot 6 = 1236$. Таким чином, споживач має виграш:

$$S = \int_0^6 \left(260 - 3x - x^2\right)dx - 1236 = \left(260x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^6 - 1236 = 198 \text{ (гр. од.)}$$

Отже, якщо обсяг виробництва становить 6 одиниць, то підприємство має максимальний прибуток, а споживач – виграш 198 гр. од.

6.9. Визначити дисконтований (початковий) прибуток за 5 років, якщо відсоткова ставка дорівнює 8 %, а річний прибуток є функцією часу: $f(t) = t$.

Розв'язання. На проміжку часу $[0; T]$ дисконтований прибуток обчислюється за допомогою визначеного інтеграла:

$$D = \int_0^T f(t) e^{-\alpha t} dt.$$

За умовою задачі маємо:

$$D = \int_0^5 t e^{-0{,}08t} dt.$$

Для обчислення інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Нехай $u = t, dv = e^{-0,08t}dt$, тоді $du = dt,\ \ v = -\dfrac{e^{-0,08t}}{0,08}$.

$$D = \frac{te^{-0,08t}}{-0,08}\Bigg|_0^5 + \int_0^5 \frac{e^{-0,08t}}{0,08}dt = -\frac{125}{2}e^{-0,4} - \frac{e^{-0,08t}}{(0,08)^2}\Bigg|_0^5 =$$

$$= -\frac{125}{2}e^{-0,4} - \frac{625}{4}\left(e^{-0,4} - 1\right) = \frac{625}{4} - \frac{875}{4}e^{-0,4} \approx 9,62 \text{ (гр. од.)}.$$

6.10. Розподіл доходу в деякій країні визначається кривою Лоренца:

$$y = 0{,}79x^2 + 0{,}21x.$$

Яку частку доходу одержують 10 % найбільш незахищеного населення? Обчислити коефіцієнт нерівномірного розподілу сукупного доходу.

Розв'язання. Знайдемо частку доходу, яку одержують 10 % найбільш незахищеного населення:

$$y(0,1) = 0,79\cdot(0,1)^2 + 0,21\cdot 0,1 = 0,0289.$$

Отже, 10 % найбільш незахищеного населення одержують 2,89 % сукупного доходу.

Обчислимо коефіцієнт нерівномірного розподілу сукупного доходу, який дорівнює відношенню площі фігури, що обмежена кривою $y = 0{,}79x^2 + 0{,}21x$ і прямою $y = x$, до площі фігури, що обмежена прямими $y = x,\ x = 1,\ y = 0$ (див. рис. 24.17). Отже, коефіцієнт Джині дорівнює:

$$k = \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{O\breve{A}B}}{S_{\Delta OAC}}.$$

Визначаємо відповідні площі, а саме:

$$S_1 = \int_0^1 \left(x - 0,79x^2 - 0,21x\right)dx = \left(\frac{0,79x^2}{2} - \frac{0,79x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 0,1317;$$

$$S_2 = 0,5.$$

Тоді $k = 0{,}1317/0{,}5 = 0{,}2634$.

Таким чином, коефіцієнт нерівномірного розподілу сукупного доходу (коефіцієнт Джині) складає 0,2634.

6.11. Нехай після виготовлення 50 мобільних телефонів виявилось, що час на виготовлення наступних телефонів спадає за формулою $f(x) = 8x^{-0{,}12}$. Знайти час, який необхідний для виготовлення ще 10 телефонів.

Розв'язання. Час, який необхідний на виробництво одиниць продукції з номерами від $(n_1 + 1)$ до n_2 визначається за формулою:

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x)dx.$$

Для даної задачі:

$$\Delta T = \int_{50}^{60} 8x^{-0{,}12}dx = \left.\frac{8x^{0{,}88}}{0{,}88}\right|_{50}^{60} = \frac{100}{11}\left(60^{0{,}88} - 50^{0{,}88}\right) = 49{,}47 \text{ (од. часу)}.$$

Отже, для виготовлення додатково 10 телефонів необхідно витратити 49,47 од. часу.

6.12. Продуктивність праці робітника протягом дня задається функцією

$$f(t) = -0{,}0324t^2 + 0{,}4t + 0{,}2 \text{ (од./год.)},$$

де t – час від початку роботи, $0 \le t \le 8$.

Знайти функцію, яка характеризує обсяг продукції, та обчислити кількість продукції, виробленої протягом робочого дня.

6.13. Вартість перевезення вантажу на один кілометр задається функцією:

$$f(t) = \frac{25}{x + 3} \text{ (гр. од./км)}.$$

Визначити витрати на перевезення вантажу на відстань 15 км.

6.14. Функція граничного доходу має вигляд:

$$f(t) = 25 - 0{,}02x - 0{,}003x^2.$$

Знайти функцію доходу і рівняння попиту.

6.15. Знайти середнє значення витрат $C(x) = 3x^2 + 5x - 8$, виражених у грошових одиницях, якщо обсяг продукції змінюється від 0 до 4 гр. од. Визначити обсяг виробництва, при якому витрати досягають середнього значення.

6.16. Знайти середнє значення витрат на виробництво деякого обсягу продукції, якщо відомо, що витрати $f(x) = 3x^2 + 8x + 1$ змінюються залежно обсягу виробництва, який зростає від 0 до 3 (гр. од.).

6.17. Продуктивність праці характеризується функцією:

$$f(t) = \frac{4}{2t + 3} + 3.$$

Визначити обсяг продукції, виробленої робітником:

а) за третю годину робочого дня;

б) за перші три години робочого дня.

6.18. Визначити запас товару на складі, який накопичується протягом доби, якщо швидкість надходження товару визначається функцією:

$$f(t) = 3t^2 + 4t + 5,$$

де t – час від початку надходження товару.

6.19. Нехай річний прибуток складає 10 000 гр. од., відсоткова ставка дорівнює 5 %, відсотки нараховуються неперервно. Обчислити дисконтований (початковий) прибуток за 10 років.

6.20. Розподіл прибуткового податку в деякій країні визначається кривою Лоренца $y = f(x)$, де x – частка населення, що сплачує податки, y – частка загального податку.

Яку частку загального податку сплачують 15 % найбіднішого населення? Знайти коефіцієнт Джині, якщо крива Лоренца описується функцією:

а) $y = 0{,}83x^2 + 0{,}17x$;

б) $y = \frac{8}{15}x^2 + \frac{7}{15}x$.

Розділ 7. Диференціальні та різницеві рівняння

Вивчаючи явища природи, розв'язуючи різноманітні задачі економіки, фізики, біології, природознавства та техніки, не завжди вдається безпосередньо встановити прямий зв'язок між величинами, що описують розвиток деякого процесу. Але здебільшого є можливість встановити взаємозв'язки між шуканими величинами (функціями) та швидкостями їхньої зміни відносно незалежних величин (аргументів) або між диференціалами цих змінних величин. При цьому виникають рівняння, в яких невідомі функції містяться під знаком похідної або диференціалу. Такі рівняння називають диференціальними. У більшості випадків закони, що керують тими чи іншими природними явищами, знаходять своє втілення у формі диференціальних рівнянь. Ісаак Ньютон, який вважається засновником математичного природознавства, розглядав дві задачі. У першій з них для заданої функції знаходилась відповідна їй похідна. Отже, це задача диференціального числення. Друга задача передбачає, що за рівнянням, яке містить похідні деякої функції, визначають співвідношення між функцією та аргументом. Отже, у цьому випадку маємо задачу теорії звичайних диференціальних рівнянь. Своє відкриття у цій галузі Ньютон вважав таким важливим, що відомості про нього надав лише у зашифрованому вигляді. У перекладі зміст цього відкриття такий: «Розв'язувати диференціальні рівняння корисно».

Після вивчення даної теми ви зможете:

- Знати й розрізняти типи диференціальних рівнянь та методи їх розв'язання;
- розуміти поняття диференціальних рівнянь як інструменту розв'язання задач в економіці, обґрунтовувати доцільність їх застосування;
- вміти застосовувати диференціальні рівняння при опрацюванні різних моделей в економіці;
- вміти досліджувати економічну динаміку сучасних процесів на основі застосування диференціальних рівнянь;
- знати основні класичні моделі в економіці, що представлені у формі диференціальних рівнянь.

Тема 25. Застосування диференціальних та різницевих рівнянь в економічних задачах

Розглянемо ряд традиційних економічних задач, математичними моделями яких є диференціальні та різницеві рівняння.

Еластичність функції

Нагадаємо, що для функції однієї змінної $y = f(x)$ її ***еластичністю*** називається добуток аргументу x на темп змінювання функції y, а саме: $E_x(y) = x\frac{y'}{y}$. Якщо еластичність функції задано, дістанемо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції y.

Приклад. Знайдемо функцію витрат залежно від обсягу виробництва x, якщо еластичність цієї функції є сталою величиною, тобто $E_x(y) = a$. За умовою задачі маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$a = x\frac{y'}{y}, \text{ або } y' = \frac{ay}{x}.$$

Відокремлюючи змінні, $\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x}$; $\frac{dy}{y} = a\frac{dx}{x}$, знаходимо загальний інтеграл $\int\frac{dy}{y} = a\int\frac{dx}{x} + \ln C, C > 0$ або $\boldsymbol{\ln|y| = a\ln|x| + \ln C}$.

Звідси отримуємо загальний розв'язок $y = Cx^a$. Таким чином, однофакторна виробнича функція зі сталою еластичністю є степенева функція.

Приклад. Знайдемо функцію попиту $D = D(p)$, де D – обсяг товару, а p – його ціна, якщо відомий попит $D_0 = 10$ при ціні $p_0 = 90$, а еластичність попиту має вигляд: $E_p(D) = \frac{D-100}{D}$.

Розв'язування. Враховуючи, що еластичність попиту має вигляд: $E_p(D) = \frac{dD}{dp}\cdot\frac{p}{D}$, за умовою задачі отримуємо математичну модель – задачу

Коші для диференціального рівняння, тобто: знайти частинний розв'язок ДР $\frac{D-100}{D}=\frac{dD}{dp}\cdot\frac{p}{D}$, який задовольняє початкову умову $D_0=10$ при $p_0=90$.

Відокремлюємо змінні і знаходимо загальний інтеграл:

$$\frac{dD}{D-100}=\frac{dp}{p} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dD}{D-100}=\int\frac{dp}{p}+\ln|C|\Rightarrow \ln|D-100|=\ln|p|+\ln|C|.$$

Потенціюванням отримуємо загальний розв'язок: $D-100=pC$ $\Rightarrow D=100+pC$.

Використовуючи початкову умову $10-100=90C$, знаходимо відповідне значення сталої C: $C=-1$.

Таким чином, шукана функція попиту залежно від ціни товару має вигляд:

$D=100-p$.

Модель природного зростання

Припустимо, що функція $y=f(t)$ у точці t змінюється пропорційно значенню функції у цій точці, тобто: $y'(t)=ky(t)$. Отже, функція $y(t)$ є розв'язком диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$\int\frac{dy}{y}=k\int dt+\ln|C|$ - загальний інтеграл

або у явному вигляді (загальний розв'язок) $y=C\cdot e^{kt}$, $C>0-const$.

Вперше це рівняння отримав Якоб Бернуллі. Воно називається **рівнянням природного зростання**. За допомогою цього рівняння описується багато різних процесів у природі та суспільстві. Так, якщо у певної рослини або тварини нема природних ворогів, достатньо території та їжі, то кількість популяції необмежено зростає за цим законом (прикладом є ситуація, що склалась з кількістю кроликів в Австралії). В економіці цим рівнянням описують процеси кредитування, випуск продукції, зростання грошового внеску в банк, зростання населення.

Приклад. Із статистичних матеріалів відомо, що кількість новонароджених за одиницю часу (наприклад, за один рік) пропорційна кількості населення із коефіцієнтом пропорційності $\boldsymbol{k_1}$, а кількість померлих за одиницю часу теж пропорційна кількості населення із коефіцієнтом пропорційності k_2 . Знайти формулу, що виражає залежність кількості населення $y(t)$ в будь-який момент часу t, якщо відома кількість населення y_0 в момент t_0. Передбачається, що не мають місця ані еміграція, ані імміграція.

Розв'язування. За умовами задачі кількість народжених за одиницю часу дорівнює $k_1 y$, а померлих $k_2 y$. Приріст населення за одиницю часу буде визначатися різницею $k_1 y - k_2 y = (k_1 - k_2)y = ky$ (де k - коефіцієнт природнього приросту), а за малий проміжок часу Δt: $\Delta y = ky\Delta t$. Спрямовуючи проміжок часу Δt до нуля, одержуємо ДР з відокремлюваними змінними:

$$dy = kydt.$$

Відокремлюючи змінні у ДР, дістаємо:

$$\frac{dy}{y} = kdt.$$

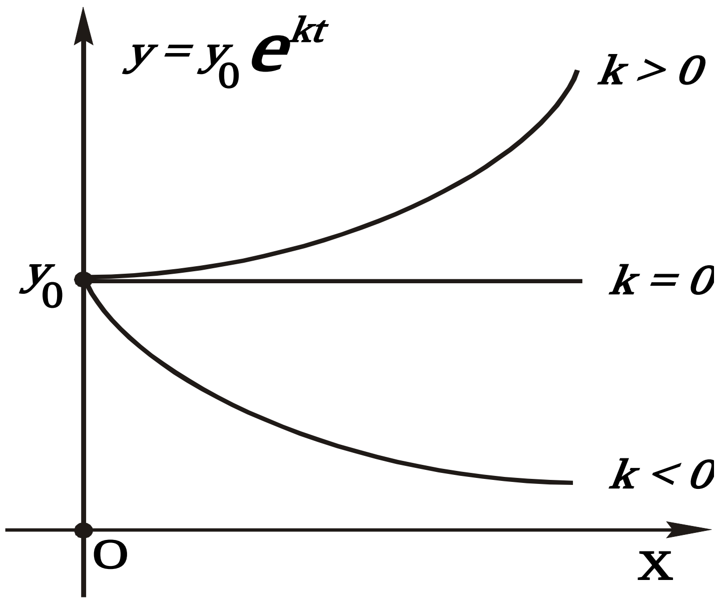
Звідси, після інтегрування:

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt, \quad \ln|y| = kt + C; \quad y = e^{kt+C} = e^C \cdot e^{kt};$$

$$y(t) = Ce^{kt} \quad , \quad C > 0.$$

Таким чином, остання функція описує залежність кількості населення в залежності від часу.

Якщо $k > 0$ одержуємо зростання кількості населення; якщо $k < 0$ - спадання; якщо ж $k = 0$, то кількість населення залишається сталою (див. Рис.).



Зауваження. Математична модель явища, як правило, схематизує це явище. Тому вона дає правильні передбачення лише в деяких границях (у нашому випадку лише при достатньо великій кількості населення і для досить довгих періодів часу). Поза цими границями математична модель, взагалі кажучи, втрачає реальний сенс.

Модель природного зростання випуску продукції.

Знайдемо закон зростання випуску продукції за умов, що ринок не насичується. Припустимо, що деякий товар продається за ціною p, а кількість товару на момент часу t визначається як $y = y(t)$. Тоді прибуток, який отримано на момент часу t, становить $R(t) = p \cdot y(t)$. Якщо ринок не насичується, то підприємство впродовж довгого часу буде мати прибуток, тому доцільно розширювати виробництво. Отже, частина отриманого прибутку буде витрачатись на розширення виробництва. Нехай на інвестиції $I(t)$ у розширення виробництва витрачається m – та частина доходу, тобто: $I(t) = \frac{py(t)}{m}$. Завдяки розширенню виробництва зростає прибуток, і його m-та частина теж використовується на розширення випуску продукції. Це приведе до зростання швидкості випуску, а саме швидкість випуску $y'(t)$ буде пропорційною до збільшення інвестицій. Тобто, $y'(t) = aI(t)$, або $y'(t) = \frac{ap}{m} y(t)$. Отже, ми одержали диференціальне рівняння природного зростання, де $k = \frac{ap}{m}$. Загальним розв'язком цього рівняння є функція

$y = C \cdot e^{kt}$, яка у даному випадку показує, на скільки швидко зростає обсяг виробництва, якщо постійно вкладати частину прибутку у його розширення.

Модель зростання з умовою насичености.

У наведених вище прикладах розв'язком диференціального рівняння природного зростання є функція $y(t) = C \cdot e^{kt}$, яка занадто швидко зростає із зростанням часу t і може буде використана тільки для обмежених проміжків часу, як правило, на початку виробництва нової продукції. У реальних задачах з часом ринок насичується. Тому у моделі зростання коефіцієнт пропорційності k вважається функцією змінної $y(t)$. Наприклад, для зростання населення була запропонована залежність

$y'(t) = a\left(1 - \frac{y(t)}{b}\right) \cdot y(t)$, де a і b – сталі.

Тобто, коефіцієнт $k = a\left(1 - \frac{y(t)}{b}\right)$ є спадаючою функцією, що залежить від величини $y(t)$.

Відокремивши змінні у ДР, отримаємо: $\dfrac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{b}\right)} = adt$. Інтегруванням дістанемо загальний інтеграл:

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b - y}\right) dy = a\int dt + \ln|C|,$$

або

$$\ln|y| - \ln|b - y| = at + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b - y} = Ce^{at}.$$

Звідси можна отримати загальний розв’язок:

$$y(t) = \frac{bCe^{at}}{1 + Ce^{at}}.$$

Отже, зростання в умовах насичености описується функцією . Аналогічну модель можна також використати для зростання випуску продукції в умовах конкуренції.

Нехай $b=1$ та $C=1$. Якщо для цього випадку чисельник і знаменник функції поділити на вираз $\boldsymbol{e^{at}>0}$, то отримаємо цю функцію у вигляді:

$$\boldsymbol{y(t)=\frac{1}{1+e^{-at}}}.$$

Графік функції $\boldsymbol{y=y(t)}$ називається **логістичною кривою** (див. рис.).

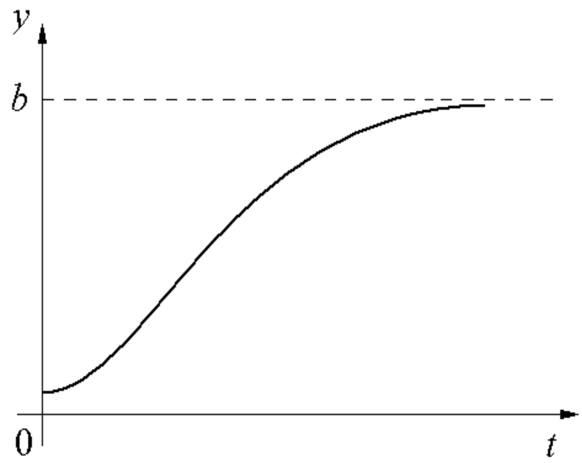


Рис. **Логістична крива**

Пряма, рівнянням якої є функція $y(t)=b$, називається ***прямою насиченості***.

Функція $\boldsymbol{y=y(t)}$ називається ***логістичною функцією.*** Вона використовується у статистичних моделях для прогнозу того, відбудеться чи ні певна подія. Прогноз будується на значеннях великої кількості ознак, а сама функція може приймати лише два значення: 1, якщо подія відбувається, і 0, якщо не відбувається. Це так звані задачі з бінарним відгуком. Сам метод прогнозу має назву **логіт регресії.**

Розглянемо ще один приклад. Нехай кількість населення деякої держави залежно від часу t задовольняє рівнянню

$$\frac{dy}{dt}=0,2y\left(1-\frac{y}{10^4}\right).$$

У початковий момент часу $(t=0)$ населення сягало 1000 осіб. Визначити, через скільки років населення збільшиться у 4 рази.

За умовою задачі $a=0,2$; $b=10^4$. Згідно з рівнянням зростання в умовах насиченості одержимо :

$$y(t)=\frac{10^4Ce^{0,2t}}{1+Ce^{0,2t}}.$$

Визначаємо сталу C з початкової умови: $t=0;\ y(0)=1000$. Отримуємо :

$$10^3=\frac{10^4Ce^{0,2t}}{1+Ce^{0,2t}} \quad\Rightarrow\quad 1+Ce^{0,2t}=C10e^{0,2t}.$$

Звідси: $C=\dfrac{1}{9}$. Частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y(t)=\frac{10^4\cdot 9^{-1}e^{0,2t}}{1+9^{-1}e^{0,2t}}.$$

За умовою задачі треба визначити при якому значенні аргументу t функція матиме значення $y(t)=4\cdot 10^3$. Розв'яжемо рівняння:

$$4\cdot 10^3=\frac{10^4\cdot 9^{-1}e^{0,2t}}{1+9^{-1}e^{0,2t}} \quad\Rightarrow\quad 2=\frac{5}{9e^{-0,2t}+1}.$$

З останньої рівності маємо:

$$18e^{-0,2t}=3 \quad\Rightarrow\quad e^{-0,2t}=6^{-1}.$$

Таким чином, $0,2t=\ln 6$, $t=8,95$. Отже, населення держави зросте у 4 рази приблизно через 9 років.

Динаміка ринкових цін.

Попит та пропозиція є основними економічними категоріями ринкових відносин. Позначимо через $D=D(p)$ функцію попиту залежно від ціни одиниці товару p, а через $S=S(p)$ – відповідну пропозицію, яка також є функцією ціни одиниці товару.

Розглянемо найпростішу модель, в якій попит та пропозиція є лінійними функціями ціни одиниці товару, а саме:

$$\begin{aligned} D(p)&=a-bp, \\ S(p)&=np+m, \end{aligned} \quad (a,b,n,m>0).$$

Дійсно, попит залежно від ціни товару повинен спадати із зростанням p, а пропозиція, навпаки, – зростати. У випадку низьких цін попит буде перевищувати пропозицію, $D(p)>S(p)$, а якщо ціна буде занадто великою – навпаки, пропозиція перевищуватиме попит, $S(p)>D(p)$. Ринок буде збалансованим, якщо попит дорівнює пропозиції, тобто $S(p)=D(p)$. Відповідне значення ціни одиниці товару p_0 у цьому випадку називається

ціною рівноваги, або **рівноважною ціною**, а попит та пропозиція – **рівноважними**. Знайдемо рівноважну ціну із умови $D(p) = S(p)$:

$$a - bp_0 = np_0 + m,$$

звідси

$$p_0 = \frac{a - m}{n + p}.$$

При рівноважній ціні ринок залежно від часу є збалансованим, а ціна на товар лишається сталою. У дійсності попит далеко не завжди знаходиться у відповідності із пропозицією, тобто $D(p) > S(p)$ або $S(p) > D(p)$. Отже, виникає потреба розглянути динамічну модель, у якій ціна товару змінюється протягом часу, тобто $p = p(t)$ і дати відповідь на питання, за який проміжок часу ціна буде прямувати до ціни рівноваги.

Визначимо $p = p(t)$ у припущенні, що швидкість зміни ціни в будь-який момент часу t прямо пропорційна різниці між попитом та пропозицією:

$$\frac{dp}{dt} = k\big(D(p) - S(p)\big), \quad (k > 0),$$

або, враховуючи лінійність попиту і пропозиції:

$$\frac{dp}{dt} = k(a - bp - np - m) \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dt} = k\big(a - m - p(b + n)\big).$$

Перепишемо останнє рівняння у вигляді:

$$p' + k(b + n) \cdot p = k(a - m).$$

Таким чином динамічна модель описується неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, загальний розв'язок якого отримуємо, наприклад методом Бернуллі:

$$p(t) = C\,e^{-k(b+n)t} + \frac{a - m}{b + n}.$$

Знайдемо сталу C із початкової умови: ціна у початковий момент часу $\boldsymbol{t = 0}$ дорівнює $p(0)$. Отже,

$$p(0) = C + \frac{a - m}{b + n} \qquad \Rightarrow \qquad C = p(0) - \frac{a - m}{b + n}.$$

Таким чином,

$$p(t) = \left(p(0) - \frac{a-m}{b+n} \right) e^{-k(b+n)t} + \frac{a-m}{b+n}.$$

Розглянемо тенденції $p(t)$ залежно від часу. Припустимо, що $t \to \infty$, тоді $p(t) \to \frac{a-m}{b+n}$, тобто $p(t)$ прямує до ціни рівноваги, і ринок динамічно стабільний.

Залежно від ціни у початковий момент часу $p(0)$ маємо такі випадки:

1) $p(0) = \frac{a-m}{b+n}$, $p(t) = \frac{a-m}{b+n}$, отже, ринок стабільний;

2) $p(0) > \frac{a-m}{b+n}$, отже, крива $p(t)$ буде розміщена вище прямої рівноваги;

3) $p(0) < \frac{a-m}{b+n}$, отже, крива $p(t)$ буде розміщена нижче прямої рівноваги.

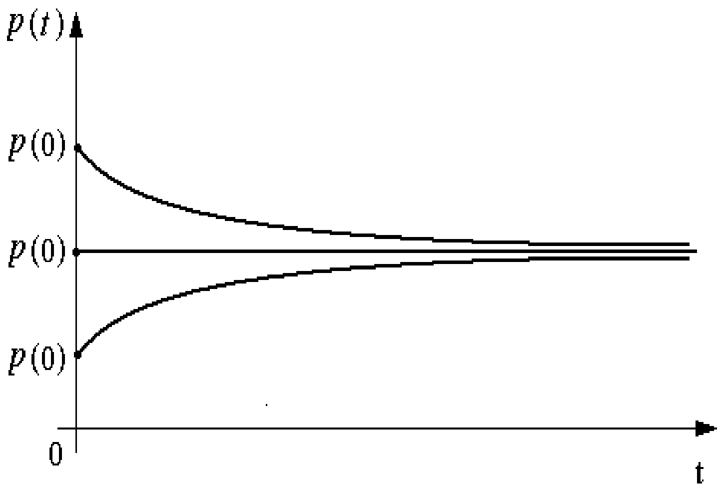


Рис. **Динаміка ринкової ціни**

На рис. наведені приклади співвідношення розташування кривої $p(t)$, що описує зміну ціни на одиницю товару у часі, і прямої, що описує рівноважну ціну.

Таким чином, в усіх розглянутих вище випадках для динамічної стабілізації ринку повинна задовольнятись умова $k(b+n) > 0$.

Розглянемо задачу попиту і пропозиції у дещо іншій постановці. Як відзначалося раніше, попит $S = S(p)$ і пропозиція $D(p)$ – це економічні категорії товарного виробництва, які функціонують на ринку. При цьому і попит, і пропозиція є функціями ціни товару p, і основна проблема ринкових відносин полягає у приведенні у відповідність попиту і пропозиції залежно від часу. Необхідно визначити таку залежність ціни від часу, щоб між попитом і пропозицією зберігалась рівновага.

Якщо позначити функцію ціни $p = p(t)$, то її похідна $p' = p'(t)$ – це тенденція формування ціни на ринку. Залежно від різних факторів попит і пропозиція можуть бути різними функціями ціни, а також тенденцій формування ціни. Найпростіший випадок це лінійна залежність:

$$S(p, p') = a_1 p' + b_1 p + c;$$

$$D(p, p') = a_2 p' + b_2 p + c_2$$

Із умови рівноваги $S(p, p') = D(p, p')$ одержимо диференціальне рівняння з відокремлюванними змінними:

$$(a_1 - a_2) p' + (b_1 - b_2) p + c_1 - c_2 = 0, \text{ або}$$

$$(a_1 - a_2)\frac{dp}{dt} = (b_2 - b_1) p + c_2 - c_1.$$

Загальний інтеграл цього рівняння:

$$(a_1 - a_2)\int \frac{dp}{(b_2 - b_1) p + c_2 - c_1} = \int dt + C.$$

Звідси,

$$\frac{(a_1 - a_2)}{b_2 - b_1}\ln\left|(b_2 - b_1) p + c_2 - c_1\right| = t + C,$$

де C – стала величина, що визначається з початкової умови: $\boldsymbol{t = 0; \quad p(0) = p_0}$.

Приклад. Динамічні функції попиту на деякий товар та пропозиції мають вигляд:

$$D = 30 - p - 4\frac{dp}{dt}, \; S = 20 + p + \frac{dp}{dt}.$$

Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо $p_0 = 7$ при $t = 0$.

Розв'язування. Визначимо рівноважну ціну залежно від часу з умови $D(p, p') = S(p, p')$:

$$30 - p - 4\frac{dp}{dt} = 20 + p + \frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad -2p + 10 = 5\frac{dp}{dt}.$$

Тоді

$$\frac{dp}{p-5}=-\frac{2}{5}dt \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dp}{p-5}=-\frac{2}{5}\int dt+C.$$

Звідси знаходимо:

$$\ln|p-5|=-0,4t+C \quad \Rightarrow \quad p=e^{-0,4t+C}+5.$$

Визначаємо сталу C із початкової умови $\left(t=0;\,p(0)=7\right)$. Тоді рівноважна ціна залежно від часу має вигляд: $p=2e^{-0,4t}+5$.

Відзначимо, що при $t\to\infty$, рівноважна ціна має границею $\lim\limits_{t\to\infty}p=5$, тобто є стійкою.

Приклад. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$S\left(p,p'\right)=50-2p-4\frac{dp}{dt};\; D\left(p,p'\right)=70+2p-5\frac{dp}{dt}.$$

а) Знайти залежність рівноважної ціни p від часу, якщо $p(0)=10$.

б) Знайти $\lim\limits_{t\to\infty}p$. Перевірити, чи є рівноважна ціна стійкою.

Для знаходження рівноважної ціни прирівнюємо попит і пропозицію і отримуємо ДР:

$$50-2p-4\frac{dp}{dt}=70+2p-5\frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dt}=20+4p.$$

Звідси,

$$\frac{dp}{20+4p}=dt \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dp}{20+4p}=\int dt+C.$$

Отже,

$$\frac{1}{4}\ln|20+4p|=t+C \quad \Rightarrow \quad 20+4p=e^{4t+4C}.$$

З початкової умови маємо, що $60=e^{C} \Rightarrow 20+4p=60e^{4t}$. Отже, рівноважна ціна: $p=15e^{4t}-5$.

б) Знайдемо $\lim\limits_{t\to\infty}15\cdot e^{4t}-5=\infty$. Звідси випливає, що рівноважна ціна є нестійкою, а саме, зростає у часі.

Приклад. Розглянемо так звану модель розвитку суспільства. Як відомо із демографії, швидкість збільшення кількості людей на земній кулі у момент часу t пропорційна їх кількості $x(t)$. Швидкість зменшення кількості людей також пропорційна $x(t)$, а також кількості забруднень $y(t)$, які виділяються у навколишнє середовище в результаті людської діяльності. Окрім того, швидкість виділення цих забруднень також пропорційна $x(t)$. Таким чином, математична модель розвитку суспільства - це наступна система ДР:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = kx(t) - k_1 x(t) y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = k_2 x(t) \end{cases},$$

де k , k_1 , k_2 - додатні сталі (коефіцієнти пропорційності).

Розв'язування. Для знаходження розв'язку системи поділимо перше рівняння на друге. В результаті дістанемо ДР з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{k}{k_2} - \frac{k_1}{k_2} y .$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримуємо загальний розв'язок (загальний інтеграл):

$$dx = \frac{k}{k_2} dy - \frac{k_1}{k_2} y dy \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int \frac{k}{k_2} dy - \int \frac{k_1}{k_2} y dy + C_1 .$$

$$x = \frac{ky}{k_2} - \frac{k_1}{2k_2} y^2 + C_1 . \qquad (*)$$

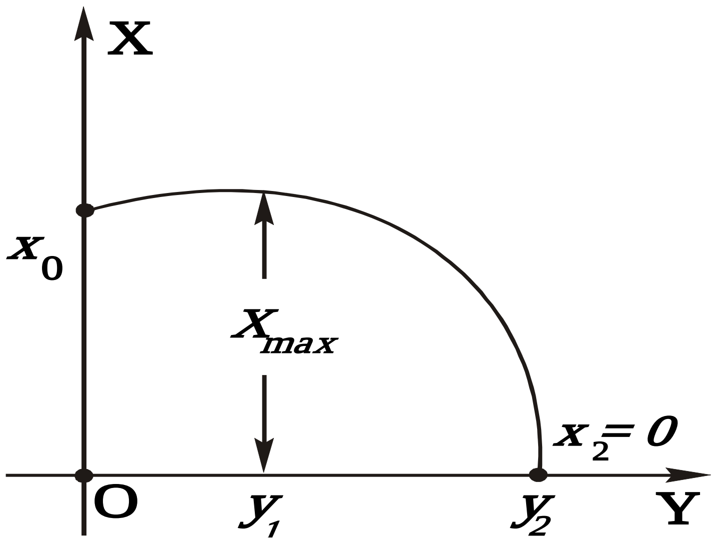
Підставимо його у друге рівняння системи: $y' = ky - \dfrac{k_1}{2} y^2 + C_1$.

Інтегруючи, дістаємо: $y=\frac{k}{2}y^2-\frac{k_1}{6}y^3+C_1t+C_2$.Остаточно, загальний інтеграл системи ДР має вигляд:

$$\begin{cases} x(t)=\frac{ky(t)}{k_2}-\frac{k_1}{2k_2}y^2(t)+C_1 \\ y(t)=\frac{k}{2}y^2(t)-\frac{k_1}{6}y^3(t)+C_1t+C_2 \end{cases}.$$

Викликає окремий інтерес дослідження загального інтегралу, який виражає залежність кількості населення від кількості забруднень, що виділяються у навколишнє середовище в результаті людської діяльності. Якщо припустити, що у початковий момент часу $t=0$ забруднень не було і кількість населення складала x_0 (тобто початкові умови задачі Коші мають вигляд $x(0)=x_0$, $y(0)=0$), то можна визначити значення сталої $C_1=x_0$. Тоді залежність (*) приймає вигляд: $x=x_0+\frac{ky}{k_2}-\frac{k_1}{2k_2}y^2$.

Проаналізуємо її. З плином часу $t>0$ разом зі зростанням кількості населення x зростає і кількість забруднень y . Настає момент часу t_1 (що визначається умовою $y_1=y(t_1)=\frac{k}{k_1}$), коли x досягає максимуму, а потім починає зменшуватись. Як видно із Рис., може настати момент часу t_2 , коли рівень забруднень досягне значення $y_2=y(t_2)$, при якому $x_2=x(t_2)=0$, тобто життя на Землі буде неможливим.



Звичайно, такий песимістичний прогноз матиме підстави, якщо не враховувати інших факторів (розвиток науково-технічного прогресу, боротьбу за екологічну чистоту навколишнього середовища тощо). Досвід показує, що використання ДР як математичних моделей дуже корисне, якщо при цьому не забувати про обмеженість сфери застосування будь-якого роду моделей взагалі.

Використання різницевих рівнянь в економіці.

Розглянемо економічні задачі, математичними моделями яких є різницеві рівняння. Відзначимо, що у задачах, які зводяться до диференціальних рівнянь розглядається функція $y = f(x)$, або $y = f(t)$ на даному етапі часу t, незалежно від того, який процес ця функція описує. Одначе можливі випадки, коли математичною моделлю задачі є співвідношення між значенням функції, яку треба визначити, на даному етапі часу та її значеннями на попередніх етапах часу: $y(t-1)$, $y(t-2)$ і таке інше. Задача у такій постановці зводиться не до диференціальних, а до різницевих рівнянь. Традиційними моделями задач такого типу є ***павутинна модель ринку***, та економічна ***модель розвитку Самуельсона – Хікса***.

Павутинна модель ринку. Розглянемо задачу щодо попиту та пропозиції у такій постановці. Припустимо, що ціна товару на ринку є функцією часу, а пропозиція $S(p)$ розглядається залежно від ціни товару на попередньому часовому етапі, тоді як попит $D(p)$ залежить від ціни товару у даний момент часу $p(t)$. Тобто попит і пропозиція описуються рівняннями:

$S(t)=m+np(t-1)$,

$D(t)=a-bp(t)$.

Виходячи з умов відповідності попиту та пропозиції маємо різницеве рівняння для знаходження рівноважної ціни у момент часу t: $a-bp(t)=m+np(t-1)$,

або $p(t)+\frac{n}{b}p(t-1)=\frac{a-m}{b}$.

При початковій умові $p(t)=p(t-1)=p_0$ одержуємо рівноважну ціну $p_0=\frac{a-m}{b+n}$, яка від часу не залежить. Загальний розв'язок різницевого рівняння першого порядку є сумою загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння

$$p(t)=\overline{p}(t)+\frac{a-m}{b+n}.$$

Знайдемо загальний розв’язок однорідного рівняння. Однорідному рівнянню $p(t)-\frac{n}{b}p(t-1)=0$ відповідає характеристичне: $z+\frac{n}{b}=0 \quad \Rightarrow \quad z=-\frac{n}{b}$.

Отже, загальним розв'язком неоднорідного різницевого рівняння є послідовність

$$p(t)=C\left(-\frac{n}{b}\right)^t+\frac{a-m}{b+n}.$$

Якщо $n<b$, то послідовність $p_t=p(t)$ має коливальний характер і сходиться до ціни рівноваги. Якщо $n=b$, то p_t періодично коливається відносно ціни рівноваги. Якщо $n>b$, то $\left(-\frac{n}{b}\right)^t\to\infty$ (рівновага нестійка). В дійсності нескінченно зростаючі коливання неможливі, тому що при великих відхиленнях від рівноваги лінійні залежності попиту і пропозиції від ціни не реалізуються.

Модель розвитку Самуельсона – Хікса. Нехай функція $y = y(t)$ описує національний доход, $c = c(t)$ є функцією споживання на даному етапі t. Припустимо, що на даному етапі споживання запізнюється від національного прибутку, а саме залежить від $y(t-1)$, тобто від прибутку на попередньому етапі часу:

$$c(t) = my(t-1) + A,$$

де m – гранична швидкість споживання, яка показує, на скільки збільшується споживання, якщо прибуток зростає на одиницю: $m = \frac{\Delta c}{\Delta y}$, A – постійні витрати.

Припустимо також, що підприємці вкладають інвестиції після того, як переконаються, що приріст національного прибутку є стійким, тобто:

$$i(t) = a\big(y(t-1) - y(t-2)\big),$$

де a – фактор акселерації ($a > 0$).

Умова рівноваги попиту та пропозиції має вигляд:

$y(t) = c(t) + i(t)$, або $y(t) = (a+m)y(t-1) - ay(t-2) + \mathrm{A}$.

Отримане рівняння називається ***рівнянням Хікса***. Якщо величини a, m, А є сталими, то рівняння Хікса є лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівнянням відповідного однорідного рівняння $y(t) - (a+m)y(t-1) + ay(t-2) = 0$ має вигляд:

$$\lambda^2 - (a+m)\lambda + a = 0.$$

Найцікавішим для досліджень є випадок, коли дискримінант характеристичного рівняння $D = \frac{(a+m)^2}{4} - a < 0$ (у цьому випадку розв'язок має коливальний характер). Знайдемо два числа:

$$\rho = \sqrt{\frac{(a+m)^2}{4} - D} = \sqrt{\frac{(a+m)^2}{4} - \frac{(a+m)^2}{4} + a} = \sqrt{a},$$

$$\varphi = arc\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{-D}}{\frac{a+m}{2}} = \sqrt{\frac{4a}{(a+m)^2} - 1}.$$

Тоді, загальним розв'язком однорідного різницевого рівняння буде послідовність:

$$\overline{y}_t = \rho^t \left(c_1 \cos\varphi t + c_2 \sin\varphi t \right).$$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного різницевого рівняння, який шукатимемо у вигляді $\tilde{y} = C$. Послідовність $\tilde{y} = C$ підставимо у рівняння і визначимо сталу:

$$C = \frac{A}{1 - (a+m) + a} = \frac{A}{1-m}.$$

Остаточно, загальним розв'язком різницевого рівняння Хікса є послідовність

$$y_t = \left(\sqrt{a}\right)^t \left(c_1 \cos t\varphi + c_2 \sin t\varphi \right) + \frac{A}{1-m}.$$

У реальній економіці $m < 1$ та $a > 1$. При таких значеннях граничної швидкості споживання m і фактору акселерації a розв'язок рівняння Хікса є нестійким і має коливальний характер. Це означає, що навіть при сталому темпі капіталовкладень економіка має нестійкий характер і періоди зростання змінюються періодами спаду.

Приклад. Розв'яжемо рівняння Хікса, якщо $a = 1,22$; $m = 0,98$; $n = 0,05$. За таких умов рівняння Хікса набуває вигляд:

$$y_t - 2,2 y_{t-1} + 1,22 y_{t-2} = 0,05.$$

Знайдемо частинний розв'язок даного рівняння. За виглядом правої частини маємо $\tilde{y} = C$. Підставимо $\tilde{y} = C$ у вихідне рівнянні і отримаємо:

$$C - 2,2C + 1,22C = 0,05 \quad \Rightarrow \quad C = 2,5.$$

Отже, маємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння $\tilde{y} = 2,5$.

Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_t - 2,2 y_{t-1} + 1,22 y_{t-2} = 0$. За його характеристичним рівнянням

$\lambda^2 - 2,2\lambda + 1,22 = 0$ знаходимо числа $\sqrt{\boldsymbol{a}}$ та $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{0,1}{1,1} = 0,78$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння:

$\overline{y}_t = \left(\sqrt{a}\right)^t \left(C_1 \cos\varphi t + C_2 \sin\varphi t\right)$, або $\overline{y}_t = \left(\sqrt{1,22}\right)^t \left(C_1 \cos 0,78t + C_2 \sin 0,78t\right)$.

Таким чином, загальним розв'язком неоднорідного рівняння є послідовність

$y_t = (1,1)^t \left(C_1 \cos 0,78t + C_2 \sin 0,78t\right) + 2,5$.

Приклад . Динамічна модель Леонтьєва.

Нехай $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець валового випуску двох виробничих галузей, $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець кінцевого споживання, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{pmatrix}$ - матриця коефіцієнтів прямих витрат (технологічних коефіцієнтів), елементи якої $\boldsymbol{a_{ij}}$ визначають кількість продукції $\boldsymbol{i}$-тої галузі, які витрачаються на виробництво одиниці валової продукції $\boldsymbol{j}$-ої галузі. Тоді модель міжгалузевого балансу описується рівнянням Леонтьєва

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{Y}$.

У цій моделі усі компоненти передбачаються осередненими за деякий проміжок часу (за спостережуваний період). Але в реальності продукт, який призначений для внутрішнього (матеріального) та кінцевого (що виходить за сферу матеріального виробництва) споживання за період $\boldsymbol{t}$, визначається не поточним випуском, а випуском за наступний період $\boldsymbol{t+1}$. Ця затримка виробництва обумовлена багатьма факторами, зокрема інерцією планування та переобладнання, змінами витрат на сировину тощо.

Із урахуванням вищесказаного система рівнянь міжгалузевого балансу матиме вигляд:

$\boldsymbol{X(t+1) = AX(t) + Y(t)}$.

Тепер задача формулюється наступним чином: при заданій матриці-стовпцеві кінцевого споживання $\boldsymbol{Y(t)}$ і матриці прямих витрат $\boldsymbol{A}$ визначити динаміку матриці-стовпця валового випуску $\boldsymbol{X(t)}$.

Розглянемо конкретний приклад. Визначити динаміку валового випуску $\boldsymbol{X(t)}$ у дискретній моделі Леонтьєва, якщо $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,2\end{pmatrix}}$, $\boldsymbol{Y(t)=\begin{pmatrix}2^t\\ 2^t\end{pmatrix}}$.

Розв'язування. Маємо систему різницевих рівнянь $\boldsymbol{X(t+1)=AX(t)+Y(t)}$, загальний розв'язок якої шукаємо у вигляді $\boldsymbol{X(t)=X_{çî}(t)+X_{÷í}(t)}$, де $\boldsymbol{X_{÷í}(t)}$ - деякий частинний розв'язок неоднорідної системи, а $\boldsymbol{X_{çî}(t)}$ - загальний розв'язок відповідної однорідної системи $\boldsymbol{X(t+1)=AX(t)}$. Для знаходження $\boldsymbol{X_{çî}(t)}$ складаємо характеристичне рівняння

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix}0,2-\lambda & 0,3\\ 0,3 & 0,2-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda^2-0,4\lambda-0,05=0}.$$

Його корені $\boldsymbol{\lambda_1=0,5\neq\lambda_2=-0,1}$. Загальний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\boldsymbol{X_{çî}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\lambda_1{}^t+C_2\lambda_2{}^t\\ \alpha_1\lambda_1{}^t+\alpha_2\lambda_2{}^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1 0,5^t+C_2(-0,1)^t\\ \alpha_1 0,5^t+\alpha_2(-0,1)^t\end{pmatrix}},$$

де числа $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2}$ виражаються через довільні сталі $\boldsymbol{C_1,C_2}$. Підставивши $\boldsymbol{X_{çî}(t)}$ у будь-яке із рівнянь системи (наприклад, у перше) отримаємо:

$$\boldsymbol{C_1 0,5^{t+1}+C_2(-0,1)^{t+1}=}$$
$$\boldsymbol{=0,2C_1 0,5^t+0,2C_2(-0,1)^t+0,3\alpha_1 0,5^t+0,3\alpha_2(-0,1)^t}.$$

Зрівнюючи коефіцієнти при $\boldsymbol{0,5^t}$, $\boldsymbol{(-0,1)^t}$, дістанемо:

$$\boldsymbol{\begin{cases}0,5C_1=0,2C_1+0,3\alpha_1\\ -0,1C_2=0,2C_2+0,3\alpha_2\end{cases}}.$$

Звідси $\alpha_1 = C_1, \alpha_2 = -C_2$. Таким чином, загальний розв'язок відповідної однорідної системи:

$$X_{\text{çî}}(t) = \begin{pmatrix} C_1 0,5^t + C_2(-0,1)^t \\ C_1 0,5^t - C_2(-0,1)^t \end{pmatrix}$$ або у матричному вигляді

$$X_{\text{çî}}(t) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1 & -C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5^t \\ (-0,1)^t \end{pmatrix}.$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи шукаємо у такому ж вигляді, як і $Y(t)$, тобто $X_{\text{÷í}}(t) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \cdot 2^t$, де β_1, β_2 - невизначені коефіцієнти. Підставляючи цю послідовність у систему, отримуємо рівність

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \cdot 2^{t+1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \cdot 2^t + \begin{pmatrix} 2^t \\ 2^t \end{pmatrix}.$$

Звідси після скорочення обох частин на 2^t, дістаємо

$$\begin{pmatrix} 2\beta_1 \\ 2\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2\beta_1 & 0,3\beta_2 \\ 0,3\beta_1 & 0,2\beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ця матрична рівність еквівалентна системі рівнянь:

$$\begin{cases} 1,8\beta_1 - 0,3\beta_2 = 1 \\ -0,3\beta_1 + 1,8\beta_2 = 1 \end{cases}.$$

Розв'язуючи систему, знаходимо невизначені коефіцієнти $\beta_1 = \dfrac{2}{3}, \beta_2 = \dfrac{2}{3}$.

Отже, частинним розв'язком системи є послідовність $X_{\text{÷í}}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot 2^t$.

Остаточно, загальний розв'язок системи :

$$X(t)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1 & -C_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0{,}5^t \\ (-0{,}1)^t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}\cdot 2^t.$$

Отриманий вираз визначає еволюцію вектора $X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ валового випуску у двохгалузевій моделі Леонтьєва із плином часу.

Довільні сталі C_1, C_2 визначаються у кожному конкретному випадку по заданим початковим умовам.

Тема 26. Основні поняття

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що пов'язує невідому функцію однієї або кількох змінних, незалежні змінні та похідні (або диференціали) від функції різних порядків. Якщо функція, відносно якої розглядається диференціальне рівняння, залежить лише від однієї змінної, то таке диференціальне рівняння називається ***звичайним***. Отже, звичайне диференціальне рівняння зв'язує аргумент x, деяку невідому функцію $y = y(x)$ та її похідні має вигляд:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',...,\ y^{(n)}) = 0. \qquad (7.1)$$

Рівняння (7.1) називається ***рівнянням, що не розв'язане відносно старшої похідної***.

Досить часто зустрічаються диференціальні рівняння, в яких старша похідна $y^{(n)}$ виражена в явному вигляді як функція аргументу x, невідомої функції $y = y(x)$ та її похідних нижчих порядків:

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ y'',...,\ y^{(n-1)}). \qquad (7.2)$$

Рівняння виду (7.2) називається ***рівнянням, що розв'язане відносно старшої похідної***.

Якщо невідома функція є функцією кількох змінних, то диференціальне рівняння називається ***рівнянням у частинних похідних***. У цьому розділі розглядаються диференціальні рівняння для функції лише однієї змінної, тому далі термін «звичайне» стосовно диференціального рівняння ми опускатимемо.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної або диференціала, що в нього входить.
Отже, за означенням:

1) $y' + y \cdot x = x^2 + 1$ – диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної;

2) $y'' = e^{-x} + 3 \cdot x^2$ – диференціальне рівняння другого порядку, що розв'язане відносно похідної.

Задача про відшукання розв’язку диференціального рівняння називається задачею його інтегрування. ***Розв’язком диференціального рівняння*** n***-го порядку*** *на деякому інтервалі* називають n разів диференційовну на цьому інтервалі функцію $y=\varphi(x)$, підстановка якої у рівняння перетворює його у тотожність на даному інтервалі. Графік розв’язку диференціального рівняння називається ***інтегральною кривою***. Рівняння (7.1), (7.2) мають безліч розв'язків, які утворюють ***сім’ю інтегральних кривих***. Розв’язати диференціальне рівняння означає знайти всі його розв’язки.

Загальним розв’язком диференціального рівняння n-го порядку називається n-параметрична сім’я функцій

$$y=\varphi(x,C_1,...,C_n), \tag{7.3}$$

(параметри $C_1,C_2,...,C_n$ цієї сім’ї називаються ***довільними сталими***), якщо кожна функція з цієї сім’ї є розв’язком рівняння 27.1), і навпаки, кожен розв’язок рівняння можна задати формулою (7.3), зафіксувавши відповідним чином значення довільних сталих.

Якщо загальний розв’язок отримано в неявному вигляді:

$$\Phi(x,y,C_1,...,C_n)=0, \tag{27.4}$$

то він називається ***загальним інтегралом рівняння***.

Частинним розв'язком рівняння називається розв'язок, який отримують із загального, якщо довільним сталим надати певних числових значень.

Ми вже розглядали задачу про визначення первісної за її похідною. Рівняння

$$y'=f(x)$$

можна розглядати як диференціальне рівняння, яке розв’язане відносно похідної. Загальним розв’язком цього рівняння є множина первісних функції $f(x)$:

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Дійсно, $\left(F(x)+C\right)'=f(x)$, отже, при підстановці будь-якої первісної вихідне рівняння перетворюється у тотожність.

Припустимо, що для деякого підприємства при виробництві A одиниць залежність граничної капіталоємності L праці від обсягу капіталу K описується функцією:

$$\frac{dL}{dK}=-\frac{1}{K^2}.$$

Визначимо функцію, що описує взаємозамінність праці і капіталу при сталому обсязі випуску продукції. Ця задача зводиться до визначення первісної за її відомою похідною. Отже,

$$L_K' = -\frac{A}{K^2} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{A}{K} + C, \quad \text{де } C - \text{довільна стала.}$$

Тема 27. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (7.5)$$

або рівняння

$$y' = f(x, y). \qquad (7.6)$$

З рівняння (7.6) чітко видно, що тут $x -$ незалежна змінна, $y = y(x) -$ шукана функція від x. Інколи диференціальне рівняння першого порядку подається в диференціальній формі

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Така форма запису рівняння симетрична відносно змінних x і y, змінні входять у нього рівноправно. Можна вважати $y = y(x)$ невідомою функцією від незалежної змінної x, або $x = x(y) -$ невідомою функцією від незалежної змінної y.

Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку залежить від однієї довільної сталої C і має вигляд:

$$y = \varphi(x, C). \qquad (7.7)$$

Геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку полягає у наступному. Оскільки згідно з рівнянням (7.6) у кожній точці області D, у якій задана функція $f(x, y)$, визначається похідна першого порядку, тобто кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = \varphi(x, C)$, то говорять, що рівняння (7.6) задає поле напрямів в області D.

Загальному розв'язку (7.7) відповідає безліч інтегральних кривих. Для того щоб серед них виділити криву, яка проходить через певну точку, необхідно задати ***початкову умову*** у вигляді координат цієї точки: $y_0 = y(x_0)$. Задача відшукання розв’язку диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову, має назву ***задачі Коші***.

Розв'язок диференціального рівняння (7.7) може існувати не для будь-якої функції $f(x, y)$ і не за будь-якою початковою умовою.

Теорема 7.1 (*існування та єдиність розв’язку*). Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f'_y(x, y)$ неперервні в деякій області D і точка $(x_0, y_0) \in D$, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, що належить цій області і задовольняє початкову умову $y_0 = y(x_0)$.

Доведення цієї теореми виходить за межі навчальної програми.

Геометричний зміст теореми 7.1 полягає в тому, що існує лише одна інтегральна крива, що проходить через точку $(x_0, y_0) \in D$.

Для відшукання розв'язку задачі Коші потрібно у загальний розв'язок (7.7) диференціального рівняння підставити початкову умову та розв'язати рівняння $y_0 = \varphi(x_0, C)$ відносно сталої C. Тоді частинний розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ буде розв'язком задачі Коші.

Приклад. Знайдемо розв’язок задачі Коші, якщо відомо, що функція $y = y(x)$ задовольняє диференціальне рівняння $y' = x$ та умову $y(2) = 4$.

Спочатку визначимо функцію, для якої похідна першого порядку дорівнює $y' = x$. Це функції вигляду $y = 0{,}5x^2 + C$, де C – довільна стала. Таким чином, ми знайшли загальний розв’язок диференціального рівняння, якому відповідає сім'я кривих (рис. 7.1).

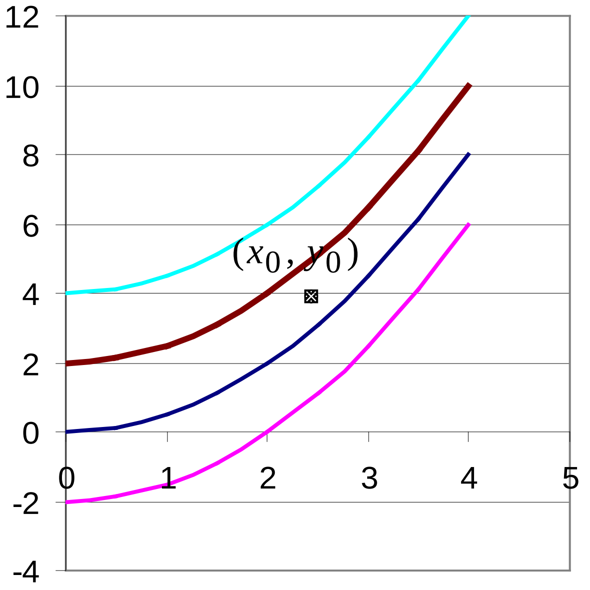


Рис. 7.1

Оскільки функція, яка може бути розв'язком задачі Коші, повинна задовольняти початкову умову

$y(2) = 4$,

то підставивши ці значення у вираз для функції, отримаємо, що $C = 2$.

Отже, в сім'ї кривих, які описуються функціями $y = 0{,}5x^2 + C$, знайдено ту криву $y = 0{,}5x^2 + 2$, яка проходить через точку $(2; 4)$.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння вигляду:

$$M_1(x)N_1(y)dy + M_2(x)N_2(y)dx = 0 \qquad (7.8)$$

називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними***. Цей тип рівнянь є найпростішим, але й дуже важливим, оскільки більш складні рівняння за допомогою спеціальних перетворень зводяться саме до такого типу.

Розглянемо алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь цього типу.

1. Поділивши рівняння (7.8) на добуток $M_1(x) \cdot N_2(y)$ (за умови, що цей добуток не дорівнює нулю), одержимо рівняння, в якому коефіцієнт при диференціалі dy є функцією лише змінної y, а коефіцієнт при диференціалі dx – лише змінної x:

$$\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy + \frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx = 0. \qquad (7.9)$$

У рівнянні (7.9) змінні x та y відокремлені, воно називається ***рівнянням*** з ***відокремленими змінними***.

2. Проінтегрувавши ліву та праву частини рівняння (7.9), отримуємо:

$$\int \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy + \int \frac{M_2(x)}{M_1(x)}dx = C. \tag{7.10}$$

Знаходячи інтеграли, одержуємо розв'язки рівняння у вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$ або $y = \varphi(x, C)$.

Точки площини, в яких умови теореми 7.1 порушуються, називаються ***особливими точками***. Розв'язки рівняння, за яких $M_1(x) \cdot N_2(y) = 0$, називаються ***особливими розв'язками***, бо їх не можна отримати із загального розв'язку ні при якому значенні довільної сталої.

Приклад. Розглянемо рівняння $x\sqrt{y^2 - 1}\,dx + y\sqrt{x^2 - 1}\,dy = 0$.

Поділивши обидві частини рівняння на добуток $\sqrt{y^2 - 1}\sqrt{x^2 - 1} \neq 0$, одержуємо:

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - 1}} = 0.$$

Оскільки змінні відокремлені, то можна інтегрувати рівняння почленно:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \int 0dx,$$

отже, загальним інтегралом рівняння буде функція:

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = C.$$

Окрім того, потрібно окремо розглянути випадок, коли $\sqrt{y^2 - 1}\sqrt{x^2 - 1}$ перетворюється в нуль. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функції $x = \pm 1$ та $y = \pm 1$ також є розв'язками рівняння, які потрібно приєднати до загального розв'язку.

Приклад. Знайдемо розв'язок рівняння $y'(1 - x) = y + 1$.

Переходимо в рівнянні від похідної до диференціалів і відокремлюємо змінні. Одержуємо:

$$(1 + y)dx + (x - 1)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x - 1} + \frac{dy}{y + 1} = 0.$$

Після інтегрування отримуємо:

$$\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dy}{y+1} = C.$$

Оскільки константа C є довільною, то її можна записати у вигляді логарифма, що є зручним для подальших перетворень:

$$\ln|x-1| + \ln|y+1| = \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|(x-1)(y+1)| = \ln|C|, C \neq 0.$$

Звідси отримуємо:

$$(x-1)(y+1) = C.$$

Розглянемо окремо випадок, коли знаменники перетворюються в нуль, тобто випадок $y = -1$. Безпосередньо переконуємося, що це розв'язок рівняння. Він, до речі, міститься у загальному розв'язку при $C = 0$. Випадок $x = 1$ розглядати не потрібно, оскільки в рівнянні відразу вважається, що x – незалежна змінна.

Однорідні диференціальні рівняння

Функція $f(x, y)$ називається ***однорідною виміру*** n, якщо для будь-якого $\lambda \neq 0$ справджується тотожність $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Диференціальні рівняння виду

$$y' = f(x, y) \qquad (7.11)$$

або

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

де $f(x, y)$ - неперервна однорідна функція нульового виміру, $M(x, y), N(x, y)$ – неперервні однорідні функції однакового виміру, називаються ***однорідними***.

Можна показати, що функцію $f(x, y)$ в рівнянні (7.11) можливо представити як функцію відношення своїх аргументів: $f(x, y) = \varphi(y/x)$. У цьому випадку рівняння (7.11) набуває вигляду:

$$y' = \varphi(y/x). \qquad (7.12)$$

Це рівняння легко перетворити у рівняння з відокремлюваними змінними, якщо застосувати таку підстановку:

$$u = y/x.$$

Оскільки $y = ux$ та $y' = u + xu'$, то рівняння (7.12) приймає вигляд:

$$xu' + u = \varphi(u),$$

звідки

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}. \tag{7.13}$$

Це означає, що в рівнянні (7.13) змінні відокремлено. Інтегруючи обидві частини (7.13), одержимо:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C.$$

За цим співвідношенням знайдемо загальний інтеграл рівняння: $F(u,C)=0$. Повертаючись до вихідної змінної за допомогою підстановки $y=xu$, отримаємо розв'язок однорідного рівняння.

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Перевіримо, чи є це рівняння однорідним:

$$f(\lambda x,\ \lambda y)=\frac{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}{2(\lambda x)(\lambda y)}=\frac{\lambda^2(x^2+y^2)}{2\lambda^2 xy}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=f(x,\ y).$$

Отже, функція $f(x,y)$ є однорідною нульового виміру, а диференціальне рівняння є однорідним. Перетворимо його таким чином:

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{1+(y/x)^2}{2y/x}.$$

Тепер зробимо підстановку $y/x=u$, $y=ux$ та $y'=u+xu'$:

$$xu'=\frac{1+u^2}{2u}-u \quad\Rightarrow\quad \frac{2udu}{1-u^2}=\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$-\ln\left|1-u^2\right|=\ln\left|C_1x\right| \quad\Rightarrow\quad C_1x=1/(1-u^2).$$

Повертаючись до вихідної змінної, отримуємо загальний інтеграл:

$$x^2-y^2=Cx,\ \text{де}\ C=\frac{1}{C_1}.$$

Приклад. Знайти частинний розв’язок рівняння $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$, який задовольняє початкову умову $y(2) = \pi$.

Спочатку знайдемо загальний розв’язок рівняння. Оскільки права частина рівняння є функцією відношення $\frac{y}{x}$, рівняння є однорідним. Введемо нову змінну $y/x = u$, тоді $y = ux$ та $y' = u + xu'$. Підставляючи одержані співвідношення в вихідне рівняння, маємо:

$$u + xu' = u + \operatorname{tg} u \quad \Rightarrow \quad ctgu \cdot du = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln C;\ C > 0.$$

Тепер, зробивши обернену підстановку, маємо:

$$\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = \ln|Cx|.$$

Таким чином, ми отримали загальний інтеграл рівняння:

$$\sin\frac{y}{x} = Cx, \text{ де } C \in R.$$

Тепер скористаємось початковою умовою:

$$\sin\frac{\pi}{2} = C \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad C = 0{,}5.$$

Отже, маємо частинний розв’язок:

$$\sin\frac{y}{x} = 0{,}5 \cdot x.$$

До ***однорідних*** рівнянь зводяться рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}, \tag{7.14}$$

де a, b, c, a_1, b_1, c_1 – задані сталі.

Якщо $c = c_1 = 0$, то (7.14) є однорідним, якщо $c \neq 0$ або $c_1 \neq 0$, то роблять заміну $x = u + \alpha,\ y = v + \beta,$ де α, β – деякі сталі. Враховуючи співвідношення $dx = du, dy = dv,\ \ y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{du}$, одержимо (7.14) у вигляді:

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv + a\alpha + b\beta + c}{a_1 u + b_1 v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}. \qquad (7.15)$$

Сталі α, β підбирають так, щоб у лінійних функціях чисельника і знаменника (7.15) зникли вільні члени, тобто щоб пара (α, β) була розв'язком системи

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0. \end{cases} \qquad (7.16)$$

Тоді рівняння (7.15) стає однорідним:

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv}{a_1 u + b_1 v}. \qquad (7.17)$$

Розв'язавши рівняння (7.17), повертаються до змінних x, y.

Якщо система 27.16) несумісна, тобто $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = \lambda \neq \dfrac{c_1}{c}$, то $a_1 = \lambda a,\ b_1 = \lambda b$, звідки

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}.$$

Тоді за допомогою підстановки $z = ax + by$ рівняння зводять до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, враховуючи рівність $\dfrac{dz}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx}$, одержуємо:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b(z + c)}{\lambda z + c_1} + a.$$

Той самий підхід можна застосовувати до інтегрування рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),$$

де f – деяка неперервна функція.

Приклад. Розв'яжемо диференціальне рівняння $y' = \dfrac{x+y-3}{x-y-1}$.

Це рівняння виду (7.14), в якому $c = -3$, а $c_1 = -1$.

Отже, запропоноване рівняння зводиться до однорідного, тому робимо заміну $x = u+\alpha,\ y = v+\beta$. Сталі α, β визначаємо як розв'язок системи

$$\begin{cases} \alpha+\beta-3=0, \\ \alpha-\beta-1=0, \end{cases}$$

звідки $\alpha = 2, \beta = 1$ та $x = u+2,\ y = v+1$.

У нових змінних рівняння стає однорідним і набуває вигляду $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{u+v}{u-v}$.

Робимо заміну $v = tu,\ \dfrac{dv}{du} = t + u\dfrac{dt}{du}$, яка приводить до

$$t + u\frac{dt}{du} = \frac{1+t}{1-t}, \text{ або } u\frac{dt}{du} = \frac{1+t^2}{1-t}.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо рівняння:

$$\frac{1-t}{1+t^2}dt = \frac{du}{u}; \qquad \operatorname{arctg} t - 0,5\ln(1+t^2) = \ln|u| + \ln|C|,\ C \neq 0;$$

$$\operatorname{arctg} t = \ln\left(|Cu|\sqrt{1+t^2}\right).$$

Повертаємось до змінних u, v, а потім до x, y:

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{u} = \ln\left(|C|\sqrt{u^2+v^2}\right); \qquad \operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2} = \ln\left(|C|\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\right).$$

Останнє співвідношення є загальним інтегралом заданого диференціального рівняння.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, тобто рівняння виду:

$$y' + p(x)\, y = g(x), \qquad (7.18)$$

де $p(x)$ та $g(x)$ – задані неперервні на деякому проміжку функції від x (вони також можуть бути сталими). Якщо $g(x) \equiv 0$ то рівняння

$$y' + p(x)\, y = 0$$

називається ***лінійним однорідним***.

Існує декілька методів інтегрування таких рівнянь.

1. Метод Бернуллі. Даний метод полягає в наступному: шукатимемо розв'язок рівняння у вигляді добутку двох невідомих функцій:

$$y = u(x)\, v(x).$$

Диференціюючи останнє співвідношення, дістанемо

$$y' = u'v + uv'.$$

Таким чином, вихідне рівняння (7.18) набуває вигляду:

$$u'v + (v' + p(x)v)u = g(x). \qquad (7.19)$$

Зауважимо, що одну з функцій $u(x)$ або $v(x)$ можна обирати довільним чином, тому функцію $v(x)$ підберемо так, щоб множник при u в рівнянні (7.19) перетворився в нуль. Тоді отримаємо

$$\begin{cases} v' + p(x) \cdot v = 0; \\ u'v = g(x). \end{cases} \qquad (7.20)$$

Обидва рівняння системи (7.20) є рівняннями з відокремлюваними змінними.

Інтегруючи перше рівняння системи, знайдемо функцію $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\, p(x)\, dx.$$

Нагадаємо, що нас цікавить будь-який частинний розв'язок одержаного рівняння, отже,

$$\ln|v| = -\int p(x)dx \quad \Rightarrow \quad v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Підставляючи знайдений розв'язок $v(x)$ у друге рівняння системи (7.20), отримаємо:

$$\frac{du}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} \quad \Rightarrow \quad du = g(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Звідси

$$u(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Таким чином, загальний розв'язок лінійного рівняння (7.18) має вигляд:

$$y(x) = u(x)v(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right). \qquad (7.21)$$

2. Метод варіації довільної сталої (***метод Лагранжа***). Суть методу полягає у тому, що за загальним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку, в якому припускають, що $C = C(x)$, знаходять розв'язок вихідного рівняння.

Отже, за методом Лагранжа спочатку розв'язують лінійне однорідне рівняння

$$y' + p(x)y = 0, \qquad (7.22)$$

яке є рівнянням з відокремлюваними змінними, тому при $y \neq 0$ маємо:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx; \qquad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|;$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \qquad (7.23)$$

Функція (7.23) є загальним розв'язком (7.22), причому частинний розв'язок $y = 0$ міститься у ньому при $C = 0$.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \qquad (7.24)$$

де $C(x)$ – невідома диференційовна функція. Диференціюючи (7.24), дістанемо:

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Тоді (7.18) набуде вигляду:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x),$$

звідки
$$C'(x) = g(x)e^{\int p(x)dx},$$

або
$$C(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx, \qquad (7.25)$$

де перший доданок є загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння, а другий – частинним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння.

Приклад. Розглянемо обидва методи на прикладі. Знайдемо розв'язок рівняння $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x$.

За методом Бернуллі застосовуємо підстановку $y = uv$, де u і v – функції від x, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y і y' у вихідне рівняння, одержуємо:

$$u'v + uv' - uv\,\mathrm{tg}\,x = \cos x.$$

Згрупуємо члени, що містять u, і винесемо u за дужки, а саме:

$$u'v + u\left(v' - v\,\mathrm{tg}\,x\right) = \cos x.$$

Отже,

$$\begin{cases} v' - vtgx = 0; \\ u'v = \cos x. \end{cases}$$

За першим рівнянням системи знаходимо функцію v, для чого відокремлюємо змінні:

$$\frac{dv}{dx} = v\,\mathrm{tg}\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \mathrm{tg}\,xdx$$

і інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \mathrm{tg}\,xdx.$$

Отримуємо частинний розв'язок:

$$\ln|v| = -\ln|\cos x| \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|\cos x|^{-1} \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\cos x}.$$

Знайдену функцію v підставляємо в друге рівняння системи і отримуємо диференціальне рівняння відносно функції u:

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = \cos x \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = \cos^2 x.$$

Отже,

$$du = \cos^2 x dx.$$

Інтегруємо

$$\int du = \int \cos^2 x dx + C \qquad \Rightarrow \qquad u = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx + C.$$

Звідси отримуємо:

$$u = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Таким чином, шуканий загальний розв'язок має вигляд

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C\right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Розв'яжемо цей же приклад методом варіації довільної сталої.

Спочатку складаємо однорідне рівняння, яке відповідає вихідному:

$$y' - ytgx = 0$$

і знаходимо його загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{y} = tgxdx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln|C| \;\Rightarrow\; y = \frac{C}{\cos x}.$$

Припустимо, що $C = C(x)$. Тоді, підставивши у вихідне рівняння $y' = \dfrac{C'(x)\cos x - C(x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$, дістанемо:

$$\frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\operatorname{tg} x = \cos x.$$

Приводимо подібні члени й отримуємо:

$$\frac{C'(x)}{\cos x} = \cos x \;\Rightarrow\; dC = \cos^2 x \cdot dx.$$

Ми вже знаходили функцію за таким диференціалом, отже, можемо записати:

$$C(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Підставляючи замість довільної сталої у загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння знайдене значення $C = C(x)$, матимемо загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C \right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Зрозуміло, що ми отримали той самий розв’язок.

Приклад. Розв’яжемо рівняння $\left(y^3 - xy\right)y' = 1$.

Дане рівняння лінійне, але відносно функції $x = x(y)$. Запишемо його інакше:

$$\left(y^3 - xy\right)\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^3 - xy = \frac{dx}{dy}.$$

Отже, маємо: $x' + xy = y^3$. Ми отримали лінійне рівняння відносно $x(y)$. За методом Бернуллі його розв'язок шукаємо у вигляді $x = u\left(y\right) \cdot v\left(y\right)$, звідки $x' = u'v + uv'$. Підставляємо у рівняння x та x' і одержуємо:

$$u'v + uv' + uvy = y^3.$$

Групуємо в лівій частині другий і третій доданки і виносимо за дужки u:

$$u'v + u\left(v' + vy\right) = y^3.$$

Від рівняння переходимо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} v' + vy = 0, \\ u'v = y^3. \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо v.

$$v' + vy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dy} = -vy,$$

звідки

$$\frac{dv}{v} = -ydy.$$

Інтегруючи одержане рівняння, маємо:

$$\ln|v| = -\frac{y^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Знаючи функцію v, з другого рівняння системи знайдемо u:

$$u'e^{-\frac{y^2}{2}} = y^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy}e^{-\frac{y^2}{2}} = y^3.$$

Отже, у диференціалах записуємо так:

$$du = e^{\frac{y^2}{2}}y^3dy.$$

Інтегруємо це рівняння:

$$u = \int e^{0,5y^2}y^3dy.$$

Знайдемо інтеграл, застосувавши метод інтегрування частинами:

$$\int e^{0,5y^2}y^3dy = \begin{vmatrix} u = y^2 & du = 2ydy \\ dv = e^{0,5y^2}\cdot y\cdot dy & v = e^{0,5y^2} \end{vmatrix} = e^{0,5y^2}\cdot y^2 - 2\int e^{0,5y^2}\cdot ydy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{0,5y^2}\cdot y^3\cdot dy = e^{0,5y^2}\cdot y^2 - 2e^{0,5y^2} + C.$$

Отже, остаточно $\qquad u = y^2e^{\frac{y^2}{2}} - 2e^{\frac{y^2}{2}} + C.$

Таким чином,

$$x = \left(y^2e^{\frac{y^2}{2}} - 2e^{\frac{y^2}{2}} + C\right)e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = y^2 - 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Рівняння Бернуллі. Диференціальне рівняння виду:

$$y' + p(x)y = y^n g(x), \text{ де } n \in R,\ n \neq 0, n \neq 1, \qquad (7.26)$$

називається ***рівнянням Бернуллі.*** У цьому рівнянні $p(x)$ та $g(x)$ – деякі неперервні функції, які можуть бути і сталими. Рівняння Бернуллі є нелінійним рівнянням, оскільки невідома функція $y(x)$ в праву частину рівняння входить нелінійно. Рівняння Бернуллі можна розв'язати зведенням його до лінійного, якщо застосувати заміну змінної. Зауважимо, що для додатних n функція $y = 0$ є частинним розв'язком рівняння (7.26). Далі, вважаючи $y \neq 0$, поділимо обидві частини рівняння (7.26) на y^n, тоді одержимо:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\,y^{1-n} = g(x). \qquad (7.27)$$

Введемо нову функцію

$$z(x) = y^{1-n}. \qquad (7.28)$$

Для першої похідної цієї функції маємо:

$$z' = (1-n)\,y^{-n}\,y'.$$

Підставимо одержані співвідношення у (7.27) і отримаємо лінійне диференціальне рівняння відносно функції z, а саме:

$$z' + (1-n)z\,p(x) = (1-n)g(x),$$

алгоритм розв'язання якого нам вже відомий.

Приклад. Знайдемо розв'язок рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.

Це рівняння Бернуллі. Приводимо його до лінійного, застосовуючи заміну (27.28). У нашому прикладі $n = 2$, тому

$$z = y^{-1} \;\Rightarrow\; z' = -\frac{1}{y^2}\cdot y' \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y^2} = -z'.$$

Рівняння приймає вигляд:

$$y' + \frac{y}{x} = -xy^2 \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = -x \;\Rightarrow\; z' - \frac{z}{x} = x.$$

Отже, ми отримали лінійне рівняння відносно z. Розв'язок його шукаємо у вигляді $z = uv$, звідси $z' = u'v + uv'$. Підставляючи z і z' у рівняння, отримуємо:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x \;\Rightarrow\; u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = x \Rightarrow \begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = x. \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо v.

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}.$$

Відокремлюємо змінні й інтегруємо рівняння:

$$\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}.$$

Отже, $\ln|v|=\ln|x|$, тобто $v=x.$

З другого рівняння системи знайдемо u:

$$u'v=x, \text{ звідки } \quad u'x=x, \text{ або } \frac{du}{dx}=1 \quad \Rightarrow \quad du=dx.$$

Після інтегрування отримуємо:

$$u=x+C.$$

Таким чином, $$z=\left(x+C\right)x.$$

Повертаємося до змінної $y=\dfrac{1}{z}$:

$$y=\frac{1}{x\left(C+x\right)}=\frac{1}{Cx+x^2}.$$

Рівняння у повних диференціалах

Диференціальне рівняння виду

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{7.29}$$

називається ***рівнянням у повних диференціалах***, якщо $M(x,y), N(x,y),$ $\dfrac{\partial M}{\partial y}, \ \dfrac{\partial N}{\partial x}$ – неперервні функції, причому

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{7.30}$$

Назва рівняння пояснюється тим, що при виконанні умови (7.30) ліва частина рівняння (7.29) є повним диференціалом, тобто існує така диференційовна функція $U(x,y), \ (x,y)\in D$, що має місце рівність

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=dU(x,y), \tag{7.31}$$

Доведемо, що (7.30) є необхідною та достатньою умовою (7.31).

Дійсно, нехай виконується (7.31), тоді $M(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $N(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial y}$,

звідки $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$.

Згідно з неперервністю мішаних частинних похідних маємо $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$, тому $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Нехай виконується умова (7.30). Побудуємо деяку диференційовну функцію $U(x,y)$, таку, щоб мало місце (7.31) , тобто $M(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $N(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial y}$.

Із першої рівності маємо:

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y), \tag{7.32}$$

де x_0 – абсциса будь-якої точки з області існування розв'язку рівняння. При інтегруванні за змінною x змінна y вважається параметром, тому і довільна стала інтегрування має залежати від y. Підберемо функцію $\varphi(y)$ так, щоб виконувалось $N(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial y}$. Для цього диференціюємо (7.32) за змінною y:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y)\right)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+\varphi'(y),$$

тоді з урахуванням (7.30):

$$N(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}dx+\varphi'(y); \qquad N(x,y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y);$$

$$\varphi'(y)=N(x_0,y); \qquad \varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+C_1.$$

Отже, шукана функція матиме вигляд

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+C_1, \tag{7.33}$$

де (x_0, y_0) – деяка точка з області існування розв'язку диференціального рівняння. Нагадаємо, що (7.33) – це функція, диференціал якої дорівнює лівій частині рівняння (7.29), тому загальний інтеграл цього рівняння має вигляд $U(x,y)=C$, або

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C. \qquad (7.34)$$

Зауважимо, що при практичному використанні формул (7.32) – (7.34), можна обчислювати невизначені інтеграли замість визначених.

Якщо умова (7.30) не виконується, то інколи вдається підібрати таку функцію $\mu(x,y)$, після множення на яку обох частин рівняння (7.29) ліва частина цього рівняння стає повним диференціалом. Функція $\mu(x,y)$ називається ***інтегрувальним множником*** рівняння.

Помножимо (7.29) на $\mu(x,y)$:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0.$$

Це рівняння буде рівнянням у повних диференціалах, якщо $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, тобто

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}; \qquad M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right);$$

$$M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} - N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \qquad (7.35)$$

Рівняння (7.35) є диференціальним рівнянням у частинних похідних відносно невідомої функції $\mu(x,y)$. Доведено, що за певних умов це рівняння має безліч розв'язків, тобто $\mu(x,y)$ існує, але у загальному випадку задача (27.35) складніша, ніж задача (7.29).

Розглянемо частинні випадки, коли рівняння (7.35) спрощується. Нехай інтегрувальний множник залежить лише від y, тобто $\mu(x,y)=\mu(y)$, тоді $\dfrac{\partial \ln\mu}{\partial x} = 0$, а співвідношення (7.35) набуде вигляду

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{M}. \qquad (7.36)$$

Якщо права частина рівності (7.36) не залежить від змінної x, то

$$\mu(y) = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{M} dy}. \qquad (7.37)$$

Аналогічно, якщо $\mu(x,y) = \mu(x)$, то інтегрувальний множник обчислюється за формулою:

$$\mu(y) = e^{-\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{N} dy}. \qquad (7.38)$$

Приклад. Розв'яжемо диференціальне рівняння $\left(2x + 3x^2 y\right)dx + \left(x^3 - 3y^2\right)dy = 0$.

Дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах, бо виконується умова (7.30), дійсно:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x + 3x^2 y\right) = 3x^2; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 - 3y^2\right) = 3x^2.$$

Застосуємо формулу (7.32) для відшукання функції $U(x,y)$:

$$U(x,y) = \int \left(2x + 3x^2 y\right)dx + \varphi(y) = x^2 + x^3 y + \varphi(y),$$

звідки згідно з умовою $N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$ дістанемо:

$$x^3 + \varphi'(y) = x^3 - 3y^2; \qquad \varphi'(y) = -3y^2; \qquad \varphi(y) = -y^3 + C_1.$$

Отже, $\qquad U(x,y) = x^2 + x^3 y - y^3 + C_1,$

тому загальним інтегралом рівняння є

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$$

Приклад. Розв'яжемо диференціальне рівняння $\left(y + xy^2\right)dx - xdy = 0$.

Для даного рівняння не виконується умова (7.30), бо

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y + xy^2\right) = 1 + 2xy; \qquad \frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1.$$

Складемо вираз, що є правою частиною співвідношення (7.36):

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{M}=\frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}=-\frac{2}{y}\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y},$$

звідки маємо

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=-\frac{2}{y};\;\; \ln|\mu|=-2\ln|Cy|.$$

Вибираємо $C=1$ й одержуємо шуканий інтегрувальний множник $\mu=\dfrac{1}{y^2}$.

Помножимо вихідне рівняння на $\mu=\dfrac{1}{y^2}$: $\left(\dfrac{1}{y}+x\right)dx-\dfrac{x}{y^2}dy=0$.

Для цього рівняння $M(x,y)=\dfrac{1}{y}+x,\;\; N(x,y)=-\dfrac{x}{y^2}$, а значить умова повного диференціала (7.30) виконується, тому

$$U(x,y)=\int\left(\frac{1}{y}+x\right)dx+\varphi(y)=\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+\varphi(y).$$

Згідно з умовою $N(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial y}$ маємо:

$$-\frac{x}{y^2}+\varphi'(y)=-\frac{x}{y^2};\quad \varphi'(y)=0;\;\; \varphi(y)=C_1.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=C$.

Тема 28. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (пункт 8)

Означення. ***Лінійним ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами*** називається рівняння, лінійне відносно невідомої функції $y = y(x)$ та її похідних y' і y'':

$$ay'' + by' + cy + F(x) = 0,$$

де $a \neq 0, b, c$ - сталі коефіцієнти, а $F(x)$ - задана неперервна функція.

Очевидно, що поділивши обидві частини рівняння на $a \neq 0$, його завжди можна привести до вигляду:

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (8.1)$$

де p, q - сталі коефіцієнти, а функція $f(x)$ - неперервна.

Рівняння вигляду (8.1) у випадку, коли $f(x) \neq 0$, будемо називати ***лінійним*** ***неоднорідним ДР другого порядку*** (скорочено - ЛНДР).

У випадку, коли $f(x) = 0$, рівняння

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (8.2)$$

називається ***лінійним однорідним ДР другого порядку*** (скорочено - ЛОДР).

Властивості розв'язків ЛОДР.

Теорема 1. Якщо $y_0 = y_0(x)$ - розв'язок (частинний) ЛОДР (8.2), то функція Cy_0, де C - будь-яке дійсне число, також є розв'язком ЛОДР (8.2).

Доведення. Так як y_0 розв'язок ЛОДР (8.2), то справедлива тотожність:

$$y_0'' + py_0' + qy_0 \equiv 0.$$

Підставляючи функцію Cy_0 у ЛОДР (8.2) і враховуючи, що сталий множник C виноситься за знак похідної, дістаємо:

$$Cy_0'' + pCy_0' + qCy_0 = C(y_0'' + py_0' + qy_0) = C \cdot 0 \equiv 0.$$

Отже, функція Cy_0 є розв'язком ЛОДР (8.2), оскільки перетворює це рівняння в тотожність.

Теорема 2. Якщо функції $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ - розв'язки ЛОДР (8.2), то їх сума $y_1 + y_2$ також є розв'язком цього рівняння.

Доведення. Так як y_1, y_2 - розв'язки ЛОДР (8.2), то

$$y_1'' + py_1' + qy_1 \equiv 0, \quad y_2'' + py_2' + qy_2 \equiv 0.$$

Підставляючи функцію $y_1 + y_2$ у рівняння (8.2) і враховуючи, що похідна суми дорівнює сумі похідних, дістаємо:

$$y_1'' + y_2'' + p(y_1' + y_2') + q(y_1 + y_2) =$$

$$= y_1'' + py_1' + qy_1 + y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 + 0 \equiv 0.$$

Оскільки функція $y_1 + y_2$ перетворює рівняння в тотожність, ця сума є розв'язком ЛОДР (8.2), що і потрібно було довести.

Із теорем 1,2 випливає наступна

Теорема 3. Якщо $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ - розв'язки ЛОДР (8.2), то їх лінійна комбінація $C_1y_1 + C_2y_2$, де C_1, C_2 - будь-які дійсні числа, також є розв'язком ЛОДР (8.2).

Пропонуємо цю теорему довести самостійно.

Зауваження. Теореми 1-3 справедливі для ЛОДР будь-якого порядку, причому коефіцієнтами рівняння можуть бути довільні неперервні функції.

Означення. Функції $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ називаються ***лінійно залежними***, якщо їх відношення $\dfrac{y_2}{y_1}$ дорівнює сталому числу C, тобто $\dfrac{y_2}{y_1} = C$ (або $y_2 = Cy_1$). У супротивному випадку функції y_1, y_2 називають ***лінійно незалежними***.

Наприклад: функції $y_1 = 4x^3$, $y_2 = 9x^3$ - лінійно залежні, оскільки їх відношення $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{9}{4} = const$; а функції $y_1 = 3x^2$, $y_2 = 2x$ - лінійно незалежні, оскільки $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{2}{3x} \neq const$.

Зауваження. При розв’язуванні задачі Коші для ДР другого порядку, його частинні розв’язки знаходять із загального розв’язку, користуючись початковими умовами $y_0 = y(x_0)\,,\; y_0' = y'(x_0)$.

Справедлива наступна

Теорема 4 (***структура загального розв’язку ЛОДР другого порядку***). Якщо функції $y_1 = y_1(x)\,,\; y_2 = y_2(x)$ - лінійно незалежні розв’язки ЛОДР (8.2), то функція

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{8.3}$$

є загальним розв’язком цього рівняння (тут і надалі: C_1, C_2 - довільні сталі).

Доведення. З **теореми 3** випливає, що функція y є розв’язком ЛОДР (8.2) при всіх значеннях C_1, C_2. Покажемо, що будь-який частинний розв’язок ЛОДР (8.2), який задовольняє дані початкові умови, можна отримати із загального розв’язку (8.3). Продиференціювавши (8.3): $y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)$ і скориставшись початковими умовами (див. попереднє зауваження), для знаходження відповідних значень сталих C_1, C_2 дістаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) \end{cases}.$$

Визначник цієї системи:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

як визначник Вронського для лінійно незалежних функцій y_1 , y_2. Тому система має єдиний розв’язок.

Таким чином, функція (8.3) задовольняє всім умовам, що накладаються на загальний розв'язок (при будь-яких значеннях сталих є розв'язком ЛОДР і будь-який частинний розв'язок, що задовольняє дані початкові умови, можна дістати із (8.3) при певних значеннях сталих). Теорему доведено.

З **теореми 4** робимо висновок, що для знаходження загального розв'язку ЛОДР (8.2) потрібно знайти два його лінійно незалежні розв'язки і записати їх лінійну комбінацію.

Розв'язки ЛОДР (8.2) будемо розшукувати у вигляді показникової функції $y = e^{kx}$, де k - деяке число (ідея Ейлера). Підставляючи цю функцію у рівняння (8.2), одержуємо:

$$(e^{kx})'' + p(e^{kx})' + qe^{kx} = 0,$$

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) \equiv 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$ для будь-яких x, то остання тотожність справедлива тоді і тільки тоді, коли число k є коренем квадратного рівняння:

$$k^2 + pk + q = 0,$$

яке називають ***характеристичним рівнянням*** ЛОДР (8.2).

Позначимо через $D = p^2 - 4q$ дискримінант характеристичного рівняння і розглянемо три можливих випадки: $D > 0$, $D = 0$ та $D < 0$.

Теорема 5 (випадок $D > 0$). Якщо характеристичне рівняння має два дійсних відмінних кореня $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок ЛОДР (8.2) має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{8.4}$$

Доведення. Функції $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$ є розв'язками ЛОДР (8.2), оскільки k_1, k_2 - корені характеристичного рівняння. Ці функції – лінійно незалежні, так як їх відношення $\frac{y_2}{y_1} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq const$, враховуючи, що $k_1 \neq k_2$. За **теоремою 4**, загальним розв'язком ЛОДР (8.2) буде функція (8.4).

<u>Теорема 6</u> (випадок $D=0$). Якщо характеристичне рівняння має співпадаючі корені $k_1=k_2=k_0=-\frac{p}{2}$, то загальний розв'язок ЛОДР (8.2) має наступний вигляд:

$$y=e^{k_0x}(C_1+C_2x). \tag{8.5}$$

<u>Доведення</u>. Очевидно, що функція $y_1=e^{k_0x}$ є розв'язком ЛОДР (8.2), оскільки k_0 - корінь характеристичного рівняння. Впевнимось, що функція $y_2=xe^{k_0x}$ також є розв'язком ЛОДР (8.2). Підставляючи y_2 у рівняння (8.2), дістаємо:

$$(xe^{k_0x})''+p(xe^{k_0x})'+qxe^{k_0x}=$$

$$=(2k_0e^{k_0x}+k_0{}^2xe^{k_0x})+p(e^{k_0x}+k_0xe^{k_0x})+qxe^{k_0x}=$$

$$=e^{k_0x}\left[x(k_0{}^2+pk_0+q)+2k_0+p\right]\equiv 0,$$

оскільки вираз в квадратних дужках дорівнює нулю (зважаючи на те, що $k_0=-\frac{p}{2}$ - кратний корінь характеристичного рівняння).

Відношення $\frac{y_2}{y_1}=x\neq const$, отже функції $y_1=e^{k_0x}$ та $y_2=xe^{k_0x}$ лінійно незалежні. За **теоремою 4**, лінійна комбінація цих функцій (тобто, функція (8.5)) є загальним розв'язком ЛОДР (8.2).

<u>Теорема 7</u> (випадок $D<0$). Якщо характеристичне рівняння не має дійсних коренів, то загальний розв'язок ЛОДР (8.2) має наступний вигляд:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x), \tag{8.6}$$

де $\alpha=-\frac{p}{2},\beta=\frac{\sqrt{-D}}{2}$.

<u>Доведення</u>. Покажемо, що функція $y_1=e^{\alpha x}\sin\beta x$ є розв'язком ЛОДР (8.2). Знайдемо похідні y_1',y_1'' :

$$y_1' = e^{\alpha x}(\alpha \sin\beta x + \beta\cos\beta x),$$

$$y_1'' = e^{\alpha x}(\alpha^2 \sin\beta x - \beta^2 \sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x).$$

Підставляючи y_1, y_1', y_1'' у ЛОДР (8.2), одержуємо:

$$e^{\alpha x}[\sin\beta x(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q) + \cos\beta x(2\alpha\beta + p\beta)] =$$

$$= e^{\alpha x}[\sin\beta x(\frac{p^2}{4} - \frac{-p^2+4q}{4} + p\cdot\frac{-p}{2} + q) + \cos\beta x(2\cdot\frac{-p}{2}\cdot\beta +$$

$$+ p\beta)] = e^{\alpha x}[\sin\beta x(\frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} + q) + 0] \equiv 0.$$

Отже, функція $y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ є розв'язком ЛОДР (8.2).

Аналогічно доводиться, що функція $y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ також є розв'язком ЛОДР (8.2). Оскільки розв'язки y_1 та y_2 лінійно незалежні (їх відношення $\frac{y_2}{y_1} = ctg\,\beta x \neq const$), то, за **теоремою 4**, функція (8.6)

$$y = C_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_2 e^{\alpha x}\cos\beta x$$

є загальним розв'язком ЛОДР (8.2).

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' - 7y' + 10y = 0,$$

який задовольняє початкові умови $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Розв'язування. Дане рівняння – це ЛОДР другого порядку вигляду (8.2). Для знаходження його загального розв'язку складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 7k + 10 = 0.$$

Його дискримінант $D = (-7)^2 - 4\cdot 10 = 9 > 0$, а корені: $k_1 = 5 \neq k_2 = 2$. За **теоремою 5** загальний розв'язок матиме вигляд:

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{2x}.$$

Звідси

$$y' = 5C_1e^{5x} + 2C_2e^{2x}.$$

Використовуючи початкові умови та враховуючи вигляд y і y', для визначення відповідних значень сталих C_1 , C_2 дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 1 = 5C_1 + 2C_2 \end{cases}.$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $C_1 = -1$, $C_2 = 3$.

Отже, шуканий частинний розв'язок вихідного ЛОДР, який задовольняє дані початкові умови, має вигляд:

$$y = -e^{5x} + 3e^{2x}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Розв'язування. Маємо ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Для знаходження загального розв'язку складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 6k + 9 = 0.$$

Його корені: $k_1 = k_2 = -3$, оскільки $D = 0$. За **теоремою 6** загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд:

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2x).$$

Приклад . Знайти загальний розв'язок ДР

$$2y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Розв'язування. Дане рівняння – це ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Приведемо його спочатку до вигляду (8.2), поділивши обидві частини на 2. Одержуємо:

$$y'' - \frac{5}{2}y' + 2y = 0.$$

Дискримінант характеристичного рівняння $k^2 - \frac{5}{2}k + 2 = 0$:

$$D=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4\cdot 2=-\frac{7}{4}<0.$$

Тому, за **теоремою 7**, знаходимо числа:

$$\alpha=-\frac{p}{2}=\frac{5}{4}\quad,\quad \beta=\frac{\sqrt{-D}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Отже, загальний розв'язок вихідного ДР (згідно **теоремі 7**) має вигляд:

$$y=e^{\frac{5}{4}x}(C_1 \sin\frac{\sqrt{7}}{4}x+C_2 \cos\frac{\sqrt{7}}{4}x).$$

Розглянемо тепер ЛНДР, тобто ***<u>лінійні неоднорідні ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами</u>*** вигляду (8.1):

$$y''+py'+qy=f(x).$$

<u>Теорема 8</u> (***<u>структура загального розв'язку ЛНДР другого порядку</u>***). Загальний розв'язок ЛНДР (8.1) має наступний вигляд:

$$Y=y_0+Z, \tag{8.7}$$

де y_0 - загальний розв'язок відповідного ЛОДР, а Z - довільний частинний розв'язок ЛНДР (8.1).

<u>Доведення</u>. Оскільки y_0 - загальний розв'язок відповідного ЛОДР, а Z - деякий частинний розв'язок ЛНДР, то справедливі тотожності:

$$y_0''+py_0'+qy_0\equiv 0\ ,\ Z''+pZ'+qZ\equiv f(x).$$

Підставимо функцію (8.7) $Y=y_0+Z$ у ЛНДР. Враховуючи, що похідна суми дорівнює сумі похідних, після нескладних перетворень, одержуємо:

$$(y_0+Z)''+p(y_0+Z)'+q(y_0+Z)=$$

$$=(y_0''+py_0'+qy)+(Z''+pZ'+qZ)\equiv 0+f(x)\equiv f(x).$$

Зважаючи на те, що Y містить дві незалежні довільні сталі $\tilde{N}_1, C_2$, робимо висновок, що функція $Y = y_0 + Z$ є загальним розв'язком ЛНДР (8.1).

Зауважимо, що доведення єдиності розв'язку задачі Коші для ЛНДР (8.1) проводиться аналогічно теоремі 4.

Знаходження загального розв'язку ЛОДР було розглянуто вище, тому виникає питання знаходження частинних розв'язків ЛНДР.

Розглянемо найпростіший випадок знаходження частинних розв'язків ЛНДР (8.1), коли права частина $f(x)$ цього рівняння має спеціальний вигляд:

$$f(x) = e^{\lambda x} P_n(x), \tag{8.8}$$

де λ - дійсне число, а $P_n(x)$ - многочлен степеня n.

А. Якщо λ не співпадає з жодним із коренів характеристичного рівняння відповідного ЛОДР, то частинний розв'язок ЛНДР (8.1) шукають у вигляді:

$$Z = e^{\lambda x} Q_n(x), \tag{8.9}$$

де $Q_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ - многочлен степеня n (як і $P_n(x)$) загального вигляду із невизначеними коефіцієнтами.

Б. Якщо $\lambda = k_1 \neq k_2$ (тобто λ співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння), то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді:

$$Z = x e^{\lambda x} Q_n(x), \tag{8.10}$$

В. Якщо $\lambda = k_1 = k_2$ (тобто λ співпадає із обома коренями характеристичного рівняння), то частинний розв'язок ЛНДР шукають у вигляді:

$$Z = x^2 e^{\lambda x} Q_n(x), \tag{8.11}$$

Зауваження. Всі три випадки ***А***,***Б*** і ***В*** можна об'єднати в одну формулу:

$$Z = x^{\mu} e^{\lambda x} Q_n(x),$$

де число μ приймає значення $0, 1, 2$ у випадках ***А***,***Б***,***В*** відповідно.

Приклад . Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 3y = (x-3)e^{2x},$$

з початковими умовами $y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0$.

Розв’язування. Спочатку знайдемо загальний розв’язок відповідного ЛОДР:

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $k^2 - 4k + 3 = 0$: $k_1 = 1 \neq k_2 = 3$, тому, за **теоремою 5**, загальний розв’язок відповідного ЛОДР:

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

У правій частині вихідного рівняння функція

$$f(x) = e^{2x}(x-3)$$

вигляду (8.8), причому $\lambda = 2$, а $P_n(x) = x - 3$ - многочлен першого степеня. Оскільки $\lambda = 2$ не співпадає з жодним із коренів характеристичного рівняння, то частинний розв’язок ЛНДР шукаємо у вигляді (8.9):

$$Z = e^{2x}(Ax + B).$$

Знаходимо похідні:

$$Z' = e^{2x}(2Ax + A + 2B), \; Z'' = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B).$$

Підставляючи $Z \; , Z' \; , Z''$ у вихідне ЛНДР, дістаємо тотожність:

$$e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) - 4e^{2x}(2Ax + 2A + 2B) +$$

$$+3e^{2x}(Ax + B) \equiv e^{2x}(x-3),$$

або, скоротивши обидві частини на $e^{2x} \neq 0$,

$$-Ax - B \equiv x - 3.$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x, знаходимо: $A = -1 \quad , \quad B = 3$.

Таким чином, частинний розв’язок вихідного НЛДР має вигляд:

$$Z = e^{2x}(-x+3),$$

а його загальний розв'язок :

$$Y = y_0 + Z = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + e^{2x}(3-x).$$

Знайдемо похідну:

$$Y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} + e^{2x}(5-2x).$$

Враховуючи вигляд Y та Y', використаємо задані початкові умови для знаходження відповідних значень сталих C_1 і C_2. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + 3 \\ 0 = C_1 + 3C_2 + 5 \end{cases}.$$

Розв'язуючи її, отримуємо: $C_1 = -2$, $C_2 = -1$.

Остаточно, шуканий частинний розв'язок вихідного ЛНДР, що задовольняє заданим початковим умовам, має вигляд:

$$Y = -2e^x - e^{3x} + e^{2x}(3-x).$$

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$y'' + 3y' = 5x - 1 .$$

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння відповідного ЛОДР: $k^2 + 3k = 0$, корені якого: $k_1 = 0 \neq k_2 = -3$. Тому, загальний розв'язок y_0 ЛОДР за **теоремою 5** матиме вигляд:

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

Права частина вихідного ЛНДР має вигляд (8.8):

$$f(x) = 5x - 1 = e^{0 \cdot x}(5x-1) ,$$

де $\lambda = 0 = k_1 \neq k_2$ (співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння), а $P_n(x) = 5x - 1$ - многочлен першого степеня. Тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді (8.10):

$$Z = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Знаходимо похідні:

$$Z' = 2Ax + B \quad , \quad Z'' = 2A.$$

Підставляючи їх у вихідне ЛНДР, дістанемо тотожність:

$$2A + 6Ax + 3B \equiv 5x - 1,$$

з якої визначаємо коефіцієнти A та B :

$$\begin{cases} 6A = 5 \\ 2A + 3B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5/6 \\ B = -8/9 \end{cases}.$$

Отже, частинний розв'язок вихідного ЛНДР:

$$Z = x(\frac{5}{6}x - \frac{8}{9}) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{8}{9}x ,$$

а його загальний розв'язок:

$$Y = y_0 + Z = C_1 + C_2e^{-3x} + \frac{5}{6}x^2 - \frac{8}{9}x.$$

Зауваження. Очевидно, всі положення даного пункту справедливі також і для лінійних ДР першого порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$y' + py = f(x),$$

де p - дійсне число, а $f(x)$ - задана неперервна функція.

Тема 29. Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами (пункт 9)

Системи звичайних ДР часто зустрічаються при вивченні взаємодії кількох процесів або у випадках, коли шукана функція є матрицею.

Розглянемо спочатку ***однорідну систему двох лінійних ДР першого порядку зі сталими коефіцієнтами*** (скорочено - СЛОДР) вигляду:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) \\ y_2'(x) = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) \end{cases}, \tag{9.1}$$

або у матричному вигляді:

$$y'(x) = A\,y(x)\,,$$

де

$$y = y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$ - матриця шуканих функцій,

$$y' = y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$ - матриця похідних,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ - задана числова матриця.

Аналогічно попередньому пункту, розв'язки системи (9.1) будемо шукати у вигляді:

$$y = y(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{kx} \\ \alpha_2 e^{kx} \end{pmatrix} = e^{kx}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

де числа $\alpha_1\,,\alpha_2\,,k$ підлягають визначенню.

<u>Зауваження</u>. Звичайно, числа $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ дають тривіальний розв'язок $y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, але нас будуть цікавити нетривіальні розв'язки, які відповідають ненульовим матрицям (векторам) $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$.

Підставляючи y та $y' = \begin{pmatrix} \alpha_1 k e^{kx} \\ \alpha_2 k e^{kx} \end{pmatrix} = e^{kx}\begin{pmatrix} k\alpha_1 \\ k\alpha_2 \end{pmatrix}$ у СЛОДР (9.1), після скорочення на $e^{kx} \neq 0$ і перенесення всіх членів у ліві частини рівнянь, одержуємо систему для знаходження $\alpha_1\,,\alpha_2$:

$$\begin{cases}(a_{11}-k)\alpha_1+a_{12}\alpha_2=0\\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-k)\alpha_2=0\end{cases}, \qquad (9.2)$$

або у матричному вигляді:

$$(A-kE)\alpha=\overline{O} \quad \Leftrightarrow \quad A\alpha=k\alpha\ ,$$

де $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ - одинична матриця, а $\overline{O}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ - нуль-вектор.

Як відомо, для існування нетривіальних розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (9.2) необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-k\end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2+pk+q=0\ , \qquad (9.3)$$

де $p=-(a_{11}+a_{22})\,,q=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Дане рівняння (9.3) називається ***<u>характеристичним рівнянням</u>*** СЛОДР (9.1). У нашому випадку – це квадратне відносно k рівняння (а у загальному випадку однорідної системи n лінійних ДР першого порядку – будемо мати рівняння степеня n).

Покажемо, що СЛОДР (9.1) завжди можна звести до одного ЛОДР другого порядку відносно однієї із невідомих функцій, наприклад, відносно $y_1=y_1(x)$. Для цього із першого рівняння системи (9.1) знаходимо функцію y_2 : $y_2=\dfrac{1}{a_{12}}y_1'-\dfrac{a_{11}}{a_{12}}y_1$. Продиференціювавши, дістаємо : $y_2'=\dfrac{1}{a_{12}}y_1''-\dfrac{a_{11}}{a_{12}}y_1'$. Підставивши y_2 та y_2' у друге рівняння системи, одержуємо для функції $y_1=y_1(x)$ наступне ДР:

$$\frac{1}{a_{12}}y_1'' - \frac{a_{11}}{a_{12}}y_1' = a_{21}y_1 + a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}y_1' - \frac{a_{11}}{a_{12}}y_1\right).$$

Домноживши обидві частини останнього рівняння на a_{12} , маємо:

$$y_1'' - a_{11}y_1' - a_{22}y_1' + a_{11}a_{22}y_1 - a_{21}a_{12}y_1 = 0 ,$$

або

$$y_1'' + py_1' + qy = 0 , \tag{9.4}$$

де коефіцієнти p та q визначаються такими ж співвідношеннями, як і в (9.3). Отже, СЛОДР (9.1) і ЛОДР другого порядку (9.4) мають однакові характеристичні рівняння.

Встановлений вище факт дозволяє знаходити загальні розв'язки СЛОДР (9.1) аналогічно попередньому пункту (використовуючи відповідні теореми).

Зауваження. У загальному випадку однорідну систему n лінійних ДР першого порядку можна звести до ЛОДР n-го порядку.

Продемонструємо процес знаходження загальних розв'язків СЛОДР вигляду (9.1) на прикладах.

Приклад . Розв'язати систему

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \end{cases}.$$

Розв'язування. Маємо СЛОДР, характеристичне рівняння якої

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 2k - 3 = 0$$

має відмінні корені $k_1 = 3 \neq k_2 = -1$ (оскільки дискримінант $D > 0$). Розв'язки системи будемо шукати у вигляді (порівняйте з **теоремою 5** попереднього пункту):

$$y_1 = y_1(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}; \quad y_2 = y_2(x) = \alpha_1e^{3x} + \alpha_2e^{-x},$$

де числа α_1, α_2 виражаються через довільні сталі C_1, C_2. Підставивши y_1 та y_2 у будь-яке із рівнянь системи (наприклад, у перше) отримаємо:

$$3C_1e^{3x} - C_2e^{-x} = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + 2\alpha_1e^{3x} + 2\alpha_2e^{-x}.$$

Звідси: $2C_1 - 2\alpha_1 = 0$, $-2C_2 - 2\alpha_2 = 0$; отже $\alpha_1 = C_1$, $\alpha_2 = -C_2$.

Таким чином, загальний розв'язок вихідної СЛОДР має вигляд:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} \\ y_2(x) = C_1e^{3x} - C_2e^{-x} \end{cases},$$

або у матричному виді:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1 & -C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases}.$$

Розв'язування. Характеристичне рівняння даної СЛОДР

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 4k + 4 = 0$$

має співпадаючі корені (або кратний корінь) $k_0 = k_1 = k_2 = 2$ (випадок, коли дискримінант $D = 0$). По аналогії з **теоремою 6** попереднього пункту розв'язки системи шукаємо у вигляді:

$$y_1 = y_1(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x}; \quad y_2 = y_2(x) = (\alpha_1 + \alpha_2x)e^{2x}.$$

Підставляючи ці функції у вихідну систему і скорочуючи на $e^{2x} \neq 0$, дістаємо:

$$\begin{cases} C_2 + 2C_1 + 2C_2 x \equiv C_1 + C_2 x - \alpha_1 - \alpha_2 x \\ \alpha_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 x \equiv C_1 + C_2 x + 3(\alpha_1 + \alpha_2 x) \end{cases}.$$

Порівнюючи коефіцієнти при x та вільні члени, наприклад, у першому рівнянні, одержуємо: $\alpha_1 = -C_1 - C_2$, $\alpha_2 = -C_2$ (зауважимо, що друге рівняння дає ті ж розв’язки).

Таким чином загальний розв’язок вихідної СОЛДР має наступний вигляд:

$$\begin{cases} y_1(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x} \\ y_2(x) = (-C_1 - C_2 - C_2 x)e^{2x} \end{cases},$$

або у матричному виді:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ -C_1 - C_2 & -C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Розв’язати систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}.$$

Розв’язування. Характеристичне рівняння даної СЛОДР

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 + 1 = 0$$

не має дійсних коренів, оскільки дискримінант $D = -4 < 0$. Зважаючи на **теорему 7** попереднього пункту, знаходимо два числа: $\alpha = -\frac{p}{2} = 0$ та $\beta = \frac{\sqrt{-D}}{2} = 1$. Розв’язки системи шукатимемо у вигляді:

$$y_1(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x\,; \quad y_2(x) = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x.$$

Підставивши ці функції у вихідну СЛОДР і зрівнявши коефіцієнти при $\sin x$ та $\cos x$ (в одному із рівнянь системи), дістанемо:

$$\begin{cases} C_1 \cos x - C_2 \sin x \equiv \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x \\ \alpha_1 \cos x - \alpha_2 \sin x \equiv -C_1 \sin x - C_2 \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -C_2 \\ \alpha_2 = C_1 \end{cases}.$$

Отже, загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x \\ y_2(x) = -C_2 \sin x + C_1 \cos x \end{cases},$$

або у матричному виді:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ -C_2 & C_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Розглянемо тепер ***неоднорідну систему двох лінійних ДР першого порядку зі сталими коефіцієнтами*** (скорочено - СЛНДР):

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11} y_1(x) + a_{12} y_2(x) + f_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21} y_1(x) + a_{22} y_2(x) + f_2(x) \end{cases}, \tag{9.5}$$

або у матричному вигляді:

$$y'(x) = Ay(x) + f(x),$$

де $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ - матриця заданих неперервних функцій.

Неважко довести (аналогічно теоремі 8 попереднього пункту 8), що загальний розв'язок СЛНДР (9.5) має вигляд:

$$Y = y + Z,$$

де $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y_1}\\ \boldsymbol{Y_2}\end{pmatrix}$ - загальний розв’язок СЛНДР (9.5), $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y_1}\\ \boldsymbol{y_2}\end{pmatrix}$ - загальний розв’язок відповідної СЛОДР (9.1), а $\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z_1}\\ \boldsymbol{Z_2}\end{pmatrix}$ - деякий частинний розв’язок СЛНДР (9.5).

Методика знаходження загальних розв’язків однорідних систем була розглянута вище. Покажемо, як аналогічно попередньому пункту можна знаходити частинні розв’язки $\boldsymbol{Z}$ неоднорідних систем у випадку, коли задані функції $\boldsymbol{f_1(x)}$ та $\boldsymbol{f_2(x)}$ в СЛНДР (9.5) мають спеціальний вигляд:

$$\boldsymbol{f_i(x)=P_i(x)e^{\lambda_i x} \quad ; \quad i=1,2}\ ,$$

де $\boldsymbol{P_i(x)}$ - многочлени, а $\boldsymbol{\lambda_i}$ - дійсні числа.

Може бути один із трьох випадків : ***А*** , ***Б*** або ***В*** (див. вище). Розглянемо один із цих випадків на прикладі.

Приклад. Знайти загальний розв’язок системи

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1'(x)=y_1(x)+2y_2(x)+e^x} \\ \boldsymbol{y_2'(x)=2y_1(x)+y_2(x)+e^{3x}} \end{cases}.$$

Розв’язування. Маємо СЛНДР вигляду (9.5). Спочатку знайдемо загальний розв’язок відповідної однорідної системи:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1'(x)=y_1(x)+2y_2(x)} \\ \boldsymbol{y_2'(x)=2y_1(x)+y_2(x)} \end{cases}.$$

Характеристичне рівняння цієї СЛОДР

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{1-k} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1-k} \end{vmatrix}=\boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{k^2-2k-3=0}$$

має відмінні корені $\boldsymbol{k_1=3\neq k_2=-1}$. Загальним розв’язком однорідної системи є матриця-стовпець :

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1e^{3x}+C_2e^{-x} \\ C_1e^{3x}-C_2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Для знаходження частинного розв'язку $Z=\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ вихідної СЛНДР проаналізуємо задані функції $f_1(x)=e^x$ та $f_2(x)=e^{3x}$, яким відповідають числа $\lambda_1=1$ (не співпадає з жодним із коренів характеристичного рівняння) і $\lambda_2=3=k_1$ (співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння). Многочлени $P_1(x)=P_2(x)\equiv 1$, тобто є многочленами степеня нуль. Отже, частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$Z=\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1e^x+(b_2+b_3x)e^{3x} \\ a_1e^x+(a_2+a_3x)e^{3x} \end{pmatrix},$$

де $a_i,b_i \quad (i=1,2,3)$ - невизначені коефіцієнти. Підставивши функції Z_1 та Z_2 у вихідну СЛНДР, дістаємо тотожності:

$$\begin{cases} b_1e^x+b_3e^{3x}+3(b_2+b_3x)e^{3x}\equiv \\ a_1e^x+a_3e^{3x}+3(a_2+a_3x)e^{3x}\equiv \end{cases}$$

$$\begin{cases} \equiv b_1e^x+(b_2+b_3x)e^{3x}+2a_1e^x+2(a_2+a_3x)e^{3x}+e^x \\ \equiv 2b_1e^x+2(b_2+b_3x)e^{3x}+a_1e^x+(a_2+a_3x)e^{3x}+e^{3x} \end{cases}.$$

Зрівнюючи коефіцієнти при e^x, e^{3x} та xe^{3x}, знаходимо $a_i,b_i \quad (i=1,2,3)$, розв'язуючи систему:

$$\begin{cases} 2a_1 + 1 = 0 \\ b_3 + 3b_2 = b_2 + 2a_2 \\ 3b_3 = b_3 + 2a_3 \\ 2b_1 = 0 \\ a_3 + 3a_2 = 2b_2 + a_2 + 1 \\ 3a_3 = 2b_3 + a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -1/2 \\ b_1 = 0 \\ a_3 = 1/2 \\ a_2 = 1/4 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = 1/2 \end{cases}$$

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідної системи:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} xe^{3x} \\ -\frac{1}{2} e^{x} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} x) e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Остаточно, загальний розв'язок вихідної СЛНДР має вигляд:

$$Y = y + Z = \begin{pmatrix} C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} xe^{3x} \\ C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^{x} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} x \right) e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Тема 30. Лінійні різницеві рівняння

Основні поняття та означення

Аналогом диференціальних рівнянь для функції $y = f(x)$, де x приймає натуральні значення $(x \in N)$, є різницеві рівняння. Вони часто використовуються в економіці при дослідженні еволюції економічних систем на тривалих проміжках часу, тобто в моделях економічної динаміки з дискретним часом.

Нехай незалежна змінна x приймає натуральні значення $n, n+1, n+2, \ldots$. Позначимо $y_n = f(n); y_{n+1} = f(n+1); \ldots$. В економічних задачах як незалежна змінна n, як правило, виступає час t, а y_t – значення залежної змінної в момент часу t.

Різницевим рівнянням k-го **порядку** називається співвідношення виду

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}) = 0,$$

або

$$F(n, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}) = 0.$$

Розв'язком різницевого рівняння є послідовність, загальний член якої y_n при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.

Розв'язок $y_n(n, C_1, C_2, \ldots, C_k)$, який визначає загальний член послідовності як функцію аргументу n і містить k довільних сталих $C_1,\ C_2,\ \ldots, C_k$, називається ***загальним розв'язком різницевого рівняння***, а розв'язок $y_n(n, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_k^0)$, який отримується із загального при конкретних значеннях довільних сталих, називається ***частинним розв'язком різницевого рівняння.***

Розглянемо декілька простих задач, математичними моделями яких є різницеві рівняння.

Приклад. Нехай маємо геометричну прогресію: $1, u, u^2, u^3, \ldots$, де u – її знаменник.

Геометричну прогресію можна описати різницевим рівнянням:

$$y_n = u \cdot y_{n-1}, \quad y_0 = 1, \quad n \in N.$$

Таким чином, загальний член геометричної прогресії u^n є розв'язком найпростішого різницевого рівняння, де u – стале число (знаменник геометричної прогресії).

Нагадаємо, що $e^{\alpha x}$ – розв'язок аналогічного диференціального рівняння

$$y' = \alpha y; \ \frac{dy}{dx} = \alpha y; \ \frac{dy}{y} = \alpha dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \alpha \int dx; \ \ln|y| = \alpha x + C, \ \ y = e^{\alpha x} \text{ при } C = 0.$$

Аналогія між розв'язком лінійного різницевого рівняння та лінійного диференціального рівняння розповсюджується і на рівняння будь-якого порядку. Як правило, загальний розв'язок різницевого рівняння є лінійною комбінацією k геометричних прогресій, тоді як для диференціального рівняння – це лінійна комбінація експонент.

Якщо у диференціальному рівнянні k-го порядку маємо залежність між функцією $y(x)$ та її похідними $y', \ y'', \ ..., \ y^{(k)}$, то у різницевих рівняннях ця залежність задається відносно загального члена послідовності y_n та членів послідовності $y_{n+1}, \ y_{n+2}, \ ..., \ y_{n+k}$ або $y_{n-1}, \ y_{n-2}, \ ..., \ y_{n-k}$ і необхідно знайти формулу її загального члена y_n.

Приклад. Маємо арифметичну прогресію: $a, \ a+d, \ a+2d, \ ...$, де d – різниця прогресії.

Таку прогресію можна описати різницевим рівнянням першого порядку:

$$y_{n+1} = y_n + d, \quad y_0 = a,$$

або рівнянням другого порядку

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0.$$

Дійсно,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + d, \quad d = y_{n+1} - y_n,$$

тобто

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_{n+1} - y_n, \quad \text{або} \quad y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0.$$

Приклад. Нехай до банку внесена сума розміром X_0 під $p\,\%$ річних. Визначимо, яким буде розмір банківського рахунку через n років.

Застосуємо відому формулу складних відсотків:

$$X_n = X_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

або

$$X_n = X_{n-1}\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

яка є різницевим рівнянням першого порядку.

Лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду

$$a_k y_n + a_{k-1}y_{n-1} + a_{k-2}y_{n-2} + ... + a_0 y_{n-k} = f(n),$$

або

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + a_{k-2}y_{n+k-2} + ... + a_0 y_n = f(n),$$

де $a_0,\ a_1,\ ...,\ a_k$ – сталі коефіцієнти,

називається ***неоднорідним різницевим лінійним рівнянням*** k-го порядку ***зі сталими коефіцієнтами.***

Рівняння виду

$$a_k y_n + a_{k-1}y_{n-1} + a_{k-2}y_{n-2} + ... + a_0 y_{n-k} = 0,$$

або

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + a_{k-2}y_{n+k-2} + ... + a_0 y_n = 0,$$

тобто різницеві лінійні рівняння, у яких $f(n) = 0$, називаються ***різницевими лінійними однорідними рівняннями*** k-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Для різницевих рівнянь існують теореми, які аналогічні теоремам для відшукання розв'язку диференціальних рівнянь.

Теорема 1. Якщо однорідне різницеве рівняння має розв'язком послідовність $y_n^{(1)}$, то його розв'язком також буде послідовність

$$y_n^{(2)} = Cy_n^{(1)}, \text{ де } C \text{ – стала.}$$

Теорема 2. Якщо однорідне різницеве рівняння має розв'язком послідовності $y_n^{(1)}$ і $y_n^{(2)}$, то його розв'язком також буде послідовність

$$y_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Теорема 3. Якщо $\tilde{y}_n$ є частинним розв'язком неоднорідного різницевого рівняння, а $\overline{y}_n(n, C_1, C_2, ..., C_k)$ є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння, то загальним розв'язком неоднорідного рівняння буде послідовність

$$y_n = \overline{y}_n(n, C_1, C_2, ..., C_k) + \tilde{y}_n,$$

де $C_1,\ C_2,\ ..., C_k$ – довільні сталі.

Для доведення цих теорем потрібно підставити їх у відповідні різницеві рівняння.

Однорідні лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо однорідне лінійне різницеве рівняння ***першого*** порядку:

$$y_n - ay_{n-1} = 0, \text{ де } a - \text{стала.}$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді:

$$y_n = a^n.$$

Перевіримо, чи є ця послідовність розв'язком даного рівняння. Для цього підставимо вираз (30.10) у рівняння. Оскільки $y_{n-1} = a^{n-1}$, то рівняння набуває вигляду:

$$a^n - aa^{n-1} = a^n - a^n = 0,$$

тобто послідовність $y_n = a^n$ є розв'язком даного рівняння.

Тоді ***загальним розв'язком*** однорідного рівняння є послідовність

$$y_n = Ca^n,$$

де C – довільна стала, яку можна знайти, якщо задана початкова умова.

Приклад. Знайдемо за допомогою різницевого рівняння формулу складних відсотків, якщо суму X_0 покладено під p % річних.

Розмір рахунку у поточному році визначається за результатами попереднього року співвідношенням:

$$X_n = X_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Це однорідне різницеве рівняння, і його розв'язком буде

$$X_n = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

де за початковою умовою $C = X_0$.

Розглянемо метод розв’язання ***однорідних лінійних різницевих рівнянь довільного порядку*** . Будемо шукати його розв'язок у вигляді послідовності

$$y_n = Z^n,$$

де Z – стале число, яке підлягає визначенню.

Якщо підставити $y_n = Z^n$ в рівняння, то одержимо:

$$a_k Z^n + a_{k-1} Z^{n-1} + a_{k-2} Z^{n-2} ... + a_0 Z^{n-k} = 0,$$

або після скорочення на $Z^{n-k} \neq 0$

$$a_k Z^k + a_{k-1} Z^{k-1} + ... + a_0 = 0.$$

Отримане рівняння називається ***характеристичним рівнянням*** для даного різницевого. Аналогічно знаходиться характеристичне рівняння й у випадку лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Таким чином, задача відшукання розв’язку різницевого рівняння зводиться до розв'язання алгебраїчного рівняння k-го степеня відносно Z.

Щодо коренів характеристичного рівняння можливі такі випадки:

а) усі корені дійсні та різні;

б) корені дійсні, але серед них є кратні;

в) серед коренів є комплексно-спряжені.

Наприклад, якщо характеристичне рівняння має різні корені, то загальний розв'язок різницевого рівняння шукають у вигляді:

$$y_n = C_1 Z_1^n + C_2 Z_2^n + ... + C_k Z_k^n,$$

де $Z_1^n, Z_2^n, ..., Z_k^n$ – лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння.

Розглянемо ***однорідне*** різницеве рівняння другого порядку, а саме

$$y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n = 0,$$

де p та q – сталі коефіцієнти.

Його характеристичним рівнянням є квадратне рівняння:

$$Z^2 + pZ + q = 0$$

із дискримінантом $D = p^2 - 4q$. Корені цього рівняння мають вигляд:

$$Z_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Для відшукання загального розв'язку рівняння розглянемо наступні три випадки: $D > 0$, $D = 0$ та $D < 0$.

1. Корені характеристичного рівняння дійсні й різні ($D > 0$). У цьому випадку загальним розв'язком рівняння буде послідовність

$$y_n = C_1 Z_1^n + C_2 Z_2^n,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад. Знайдемо розв'язок однорідного різницевого рівняння:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння

$$Z^2 - 5Z + 6 = 0,$$

коренями якого є $Z_1 = 2,\quad Z_2 = 3$. Таким чином, загальним розв'язком різницевого рівняння буде послідовність:

$$y_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n.$$

2. Корені характеристичного рівняння дійсні й рівні ($D = 0$). Характеристичне рівняння має корені $Z_1 = Z_2 = Z$. Загальним розв'язком різницевого рівняння у цьому випадку буде послідовність виду

$$y_n = C_1 Z^n + C_2 n Z^n.$$

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок однорідного різницевого рівняння

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння $Z^2 - 6Z + 9 = 0$, корені якого рівні: $Z_1 = Z_2 = 3$.

Отже, загальним розв'язком різницевого рівняння є послідовність

$$y_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n .$$

Дійсно, $Z_1^n = 3^n$ є частинним розв'язком вихідного рівняння. Покажемо, що $Z_2^n = n3^n$ також є частинним розв'язком цього рівняння. Знайдемо:

$$y_{n+2} = (n+2)\cdot 3^{n+2}; \quad y_{n+1} = (n+1)\cdot 3^{n+1}.$$

Тепер підставимо ці вирази у вихідне рівняння, звідки дістанемо:

$$(n+2)\cdot 3^{n+2} - 6(n+1)\cdot 3^{n+1} + 9n\cdot 3^n = 3^n\left((n+2)\cdot 3^2 - 6(n+1)\cdot 3 + 9n\right) =$$

$$= 3^n(9n + 18 - 18n - 18 + 9n) \equiv 0,$$

отже, $Z_2^n = n3^n$ є частинним розв’язком даного різницевого рівняння.

3. Характеристичне рівняння має комплексно-спряжені корені ($D < 0$). У цьому випадку коренями характеристичного рівняння є $Z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Тоді загальний розв'язок різницевого рівняння можна подати у вигляді:

$$y_n = \rho^n(C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi),$$

де ρ – модуль комплексного числа, а φ – головне значення його аргументу:

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}, \ \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Доведення формули виходить за межі програми.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок різницевого рівняння

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0.$$

Його характеристичне рівняння має корені: $Z_{1,2} = 1 + i\sqrt{3} \quad (D < 0)$, де $\alpha = 1, \beta = \sqrt{3}$. Тоді загальним розв'язком рівняння є послідовність:

$$y_n = 2^n(C_1 \sin\frac{\pi}{3}n + C_2 \cos\frac{\pi}{3}n),$$

де $\rho = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, а кут $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$.

Однорідні різницеві рівняння з початковими умовами

Нагадаємо, що загальний розв'язок різницевого рівняння, в який входять довільні сталі $C_1,\ C_2,\ ...,C_k$, задає множину розв'язків різницевого рівняння, а для відшукання частинного розв'язку треба визначити довільні сталі із так званих початкових умов, яким повинна задовольнити послідовність при значеннях $n = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ k-1$, якщо різницеве рівняння має порядок k.

Початкові умови задають у вигляді співвідношень:

$$y_n = y_n^0 (n = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ k-1).$$

Приклад. Знайдемо частинні розв'язки різницевого рівняння

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0,$$

які задовольняють початкові умови $y_0 = 1,\ y_1 = 3$.

Спочатку визначимо загальний розв’язок заданого рівняння. Для цього складемо його характеристичне рівняння:

$$Z^2 - 3Z + 2 = 0.$$

Коренями отриманого рівняння є $Z_1 = 1,\ Z_2 = 2$, отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$y_n = C_1 + C_2 2^n.$$

Знайдемо сталі C_1 та C_2 із початкових умов:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ y_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Отже, частинним розв'язком рівняння є послідовність $y_n = 2^{n+1} - 1$.

Неоднорідні різницеві рівняння зі спеціальною правою частиною

Неоднорідне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + a_{k-2} y_{n+k-2} + ... + a_0 y_n = f(n)$$

має загальний розв'язок, який є сумою загального розв'язку відповідного однорідного різницевого рівняння $\overline{y}_n$ та частинного розв'язку заданого неоднорідного рівняння $\tilde{y}_n$. Отже, загальним розв'язком неоднорідного рівняння є послідов-ність:

$$y_n = \overline{y}_n + \tilde{y}_n.$$

Нагадаємо, що аналогічну форму має загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Розглянемо ***неоднорідні*** різницеві рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною:

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = f(n), \quad \text{якщо} \quad f(n) = P_m(n) \cdot b^n,$$

де $P_m(n)$ – поліном від n степеня m; p, q, b – дійсні сталі.

Частинний розв'язок неоднорідного різницевого рівняння шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y}_n = Q_m(n) \cdot n^l \cdot b^n,$$

де l – кратність числа b як коріня характеристичного рівняння;

$Q_m(n)$ – повний поліном m-го степеня від n з невідомими коефіцієнтами, значення яких знаходять за методом невизначених коефіцієнтів.

Для різницевого рівняння другого порядку виду

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = P_m(n) \cdot b^n$$

можливі такі випадки стосовно коренів характеристичного рівняння:

$$Z^2 + pZ + q = 0.$$

А. Стала b не є коренем характеристичного рівняння, тобто $Z_1 \neq b$, $Z_2 \neq b$. Тоді частинний розв'язок має вигляд:

$$\tilde{y}_n = Q_m(n) \cdot b^n.$$

Б. Стала b є одним із коренів характеристичного рівняння, тобто $Z_1 = b$, $Z_2 \neq b$. Тоді частинний розв'язок має вигляд:

$$\tilde{y}_n = n \cdot Q_m(n) \cdot b^n.$$

В. Стала b є кратним коренем характеристичного рівняння, тобто $Z_1 = Z_2 = b$. Тоді

$$\tilde{y}_n = n^2 \cdot Q_m(n) \cdot b^n.$$

Приклад Знайдемо загальний розв'язок різницевого рівняння:

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 3.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння:

$$Z^2 - 5Z + 6 = 0.$$

Звідси $Z_1 = 2; \quad Z_2 = 3.$

Загальним розв'язком однорідного різницевого рівняння є послідовність

$$\overline{y}_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n.$$

Розглянемо праву частину даного неоднорідного рівняння. Бачимо, що $P_m(n) = P_0(n) = 3$, а $b = 1$. Тобто частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y}_n = Q_0(n) = A,$$

де A – деяка стала, яку необхідно визначити (стала $b = 1$ не є коренем характеристичного рівняння). Підставимо тепер $\tilde{y}_n$ до вихідного рівняння. Отже,

$$\tilde{y}_{n+2} = A; \quad \tilde{y}_{n+1} = A; \quad \tilde{y}_n = A.$$

Для відшукання сталої A маємо рівняння: $A - 5A + 6A = 3$, звідси $A = \dfrac{3}{2}$.

Таким чином, загальним розв'язком вихідного різницевого рівняння є послідовність:

$$y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{3}{2}.$$

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок рівняння $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 2^n(n-2)$.

Оскільки його ліва частина співпадає з лівою частиною рівняння у попередньому прикладі, то загальний розв’язок однорідного рівняння нам вже відомий: $\overline{y}_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$.

Маємо $b = 2$, тобто значення сталої b співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$\tilde{y}_n = (An + B)\cdot n \cdot 2^n.$$

Визначимо коефіцієнти A і B, підставивши $\tilde{y}_n$ у вихідне різницеве рівняння.

Оскільки

$$\tilde{y}_{n+1} = \big(A(n+1) + B\big)\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1} = \Big(A(n+1)^2 + B(n+1)\Big)2^{n+1},$$

$$\tilde{y}_{n+2} = \big(A(n+2) + B\big)\cdot(n+2)\cdot 2^{n+2} = \Big(A(n+2)^2 + B(n+2)\Big)\cdot 2^{n+2},$$

то маємо рівняння відносно сталих A і B:

$$2^{n+2}\Big(A(n+2)^2 + B(n+2)\Big) - \Big(5A(n+1)^2 + 5B(n+1)\Big)\cdot 2^{n+1} +$$
$$+\,2^n\Big(An^2 + Bn\Big)6 = 2^n(n-2).$$

Скоротимо обидві частини на 2^n, розкриємо дужки та порівняємо коефіцієнти при однакових степенях n у лівій та правій частинах рівняння:

$$\begin{array}{r|l} n^2 & 4A - 10A + 6A = 0, \\ n & 16A + 4B - 20A - 10B + 6B = 1, \\ n^0 & 16A + 8B - 10A - 10B = -2. \end{array}$$

Для відшукання A і B дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4A = 1, \\ 3A - B = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4}; \\ B = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Отже, загальним розв'язком неоднорідного різницевого рівняння є послідовність

$$y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}n^2\right)\cdot 2^n.$$

Приклад. Розв'яжемо різницеве рівняння: $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n$.

Характеристичне рівняння для відповідного йому однорідного рівняння $Z^2 - 4Z + 4 = 0$ має рівні корені: $Z_1 = Z_2 = 2$, отже, загальним розв'язком однорідного рівняння є послідовність

$$\overline{y}_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n .$$

Права частина рівняння має вигляд: $P_m(n) = P_0(n) = 1$, а $b = 2$. Оскільки $b = 2$ є двократним коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$\tilde{y}_n = An^2 \cdot 2^n .$$

Знаходимо сталу A підстановкою $\tilde{y}_n$ до рівняння:

$$A(n+2)^2 \cdot 2^{n+2} - 4A(n+1)^2 \cdot 2^{n+1} + 4An^2 \cdot 2^n = 2^n .$$

Звідси маємо $A = \dfrac{1}{8}$.

Таким чином, загальним розв'язком рівняння є послідовність:

$$y_n = C_1 2^n + C_1 n 2^n + \frac{1}{8} n^2 2^n .$$

Системи лінійних різницевих рівнянь

Системою лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами k-го порядку називається сукупність k лінійних різницевих рівнянь першого порядку з k невідомими послідовностями $y_n^{(1)}$, $y_n^{(2)}$, ..., $y_n^{(k)}$:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} + a_{11} y_n^{(1)} + a_{12} y_n^{(2)} + \ldots + a_{1k} y_n^{(k)} = q_1(n); \\ y_{n+1}^{(2)} + a_{21} y_n^{(1)} + a_{22} y_n^{(2)} + \ldots + a_{2k} y_n^{(k)} = q_2(n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n+1}^{(k)} + a_{k1} y_n^{(1)} + a_{k2} y_n^{(2)} + \ldots + a_{kk} y_n^{(k)} = q_k(n), \end{cases}$$

де a_{ij} – сталі, які називаються коефіцієнтами системи;

$q_k(n)$ – вільні члени, що є функціями натурального аргументу n.

Якщо всі $q_i(n)=0\,(i=\overline{1,k})$, то система рівнянь називається ***однорідною***.

Порівнюючи систему різницевих рівнянь із системою диференціальних рівнянь, бачимо їх повну аналогію.

Загальним розв'язком системи називається сукупність послідов-ностей $y_n^{(1)},\ y_n^{(2)},\ ...,\ y_n^{(k)}$ від натурального аргументу n та k довільних сталих $C_1,\ C_2,\ ...,C_k$, тобто

$$\begin{cases} y_n^{(1)} = y_n^{(1)}(n, C_1, C_2, ..., C_k); \\ y_n^{(2)} = y_n^{(2)}(n, C_1, C_2, ..., C_k); \\ .... \\ y_n^{(k)} = y_n^{(k)}(n, C_1, C_2, ..., C_k), \end{cases}$$

що задовольняє систему при будь-яких значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_k$, та довільний розв’язок системи міститься в цій сукупності при деяких фіксованих значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_k$.

Задача з початковими умовами формулюється так: знайти такий розв'язок системи, що задовольняє умови:

$$y_0^{(1)} = b_1,\ y_0^{(2)} = b_2, ...,\ y_0^{(k)} = b_k.$$

Розв'язок системи можна знайти методом виключення, при цьому систему лінійних різницевих рівнянь k-го порядку буде зведено до одного лінійного різницевого рівняння k-го порядку.

Приклад. Розв'язати систему різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = & 5y_n^{(1)} + 4y_n^{(2)} \\ y_{n+1}^{(2)} = & 4y_n^{(1)} + 5y_n^{(2)} \end{cases}.$$

Для розв'язання застосуємо метод виключення. Підставимо замість n у перше рівняння $n+1$. Тоді матимемо: $y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 4y_{n+1}^{(2)}$. Ураховуючи друге рівняння, отримуємо:

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 4\left(4y_n^{(1)} + 5y_n^{(2)}\right) \quad \Rightarrow \quad y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 16y_n^{(1)} + 20y_n^{(2)}.$$

З першого рівняння системи

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{4}\left(y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)}\right),$$

тоді $y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} + 16y_n^{(1)} + 5\left(y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)}\right) \quad \Rightarrow \quad y_{n+2}^{(1)} - 10y_{n+1}^{(1)} + 9y_n^{(1)} = 0$.

Отримали однорідне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, характеристичним рівнянням якого є алгебраїчне рівняння:

$$Z^2 - 10Z + 9 = 0.$$

Корені цього рівняння дорівнюють: $Z_1 = 1; Z_2 = 9$. Звідси знаходимо загальний розв'язок:

$$y_n^{(1)} = C_1 + C_2 9^n,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Послідовність $y_n^{(2)}$ знаходимо наступним чином:

$$y_{n+1}^{(1)} = C_1 + C_2 9^{n+1}.$$

Тоді

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{4}\left(C_1 + 9C_2 9^n - 5C_1 - 5C_2 9^n\right) \quad \Rightarrow \quad y_n^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4C_2 9^n - 4C_1\right) = C_2 9^n - C_1.$$

Таким чином, загальним розв'язком вихідної системи є послідовності

$$\begin{aligned} y_n^{(1)} &= \quad C_1 + C_2 \cdot 9^n, \\ y_n^{(2)} &= -C_1 + C_2 \cdot 9^n. \end{aligned}$$

Приклад. Знайдемо розв'язок неоднорідної системи лінійних різницевих рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = & 5y_n^{(1)} - 3y_n^{(2)} + 2 \cdot 3^n, \\ y_{n+1}^{(2)} = & y_n^{(1)} + y_n^{(2)} - 5. \end{cases}$$

Запишемо перше рівняння системи у вигляді:

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_{n+1}^{(2)} + 2 \cdot 3^{n+1}.$$

Враховуючи друге рівняння, маємо

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3(y_n^{(1)} + y_n^{(2)} - 5) + 2 \cdot 3^{n+1},$$

або

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_n^{(1)} - 3y_n^{(2)} + 15 + 2 \cdot 3^{n+1}.$$

З першого рівняння системи отримуємо

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{3}\left(-y_{n+1}^{(1)} + 5y_n^{(1)} + 2 \cdot 3^n\right),$$

тоді:

$$y_{n+2}^{(1)} = 5y_{n+1}^{(1)} - 3y_n^{(1)} + y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)} - 2 \cdot 3^n + 15 + 2 \cdot 3^{n+1},$$

або

$$y_{n+2}^{(1)} = 6y_{n+1}^{(1)} - 8y_n^{(1)} + 4 \cdot 3^n + 15.$$

Таким чином, отримали неоднорідне різницеве рівняння другого порядку відносно $y_n^{(1)}$

$$y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 4 \cdot 3^n + 15.$$

Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, характеристичним рівнянням якого є $Z^2 - 6Z + 8 = 0$. Його корені $Z_1 = 2$; $Z_2 = 4$. Звідси загальним розв'язком однорідного рівняння є послідовність

$$\overline{y}_n^{(1)} = C_1 2^n + C_2 4^n.$$

Для визначення частинного розв'язку неоднорідного рівняння праву частину рівняння розглядаємо як суму двох спеціальних функцій.

Отже, маємо два випадки для визначення доданків, що складають частинний розв’язок:

1) $y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 4 \cdot 3^n$;

2) $y_{n+2}^{(1)} - 6y_{n+1}^{(1)} + 8y_n^{(1)} = 15$.

У першому випадку $f_1(n) = 4 \cdot 3^n$, $P_0(n) = 4$, а $b = 3$, тому шукаємо частинний розв'язок у вигляді $\tilde{y}_n^{(1)} = A \cdot 3^n$ ($b = 3$ не є коренем характеристичного рівняння) та знаходимо A шляхом підстановки $\tilde{y}_n^{(1)} = A \cdot 3^n$ у неоднорідне рівняння:

$$A \cdot 3^{n+2} - 6 \cdot A \cdot 3^{n+1} + 8 \cdot A \cdot 3^n = 4 \cdot 3^n,$$

або

$$9A - 18A + 8A = 4,$$

тобто $A = -4$. Отже, першим доданком частинного розв'язку неоднорідного рівняння є послідовність $\tilde{y}_n^{(1)} = -4 \cdot 3^n$.

У другому випадку $f_2(n) = P_0(n) = 15$, тому частинний розв'язок буде $\tilde{y}_n^{(1)} = B$. Підставивши його в рівняння, отримаємо, що $B = 5$. Отже, $\tilde{y}_n^{(1)} = 5$.

Звідси загальним розв'язком неоднорідного рівняння є послідовність

$$y_n^{(1)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 5.$$

Послідовність $y_n^{(2)}$ знайдемо, якщо використаємо перше рівняння вихідної системи різницевих рівнянь, а саме:

$$-3y_n^{(2)} = y_{n+1}^{(1)} - 5y_n^{(1)} - 2 \cdot 3^n,$$

або

$$-3y_n^{(2)} = C_1 \cdot 2^{n+1} + C_2 \cdot 4^{n+1} - 4 \cdot 3^{n+1} + 5 - 5 \cdot C_1 \cdot 2^n - 5 \cdot C_2 \cdot 4^n +$$
$$+20 \cdot 3^n - 25 - 2 \cdot 3^n = -3 \cdot C_1 \cdot 2^n - C_2 \cdot 4^n + 6 \cdot 3^n - 20.$$

Отже,
$$y_n^{(2)} = C_1 2^n + \frac{C_2}{3} 4^n - 2 \cdot 3^n + \frac{20}{3}.$$

Таким чином, загальним розв'язком даної неоднорідної системи рівнянь будуть послідовності

$$y_n^{(1)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n + 5,$$

$$y_n^{(2)} = C_1 2^n + \frac{C_2}{3} 4^n - 2 \cdot 3^n + \frac{20}{3}.$$

Приклади та вправи до розділу 7

7.1. Нехай функція граничних витрат має вигляд:
$y' = 55 + 0{,}06x$.
Знайти функцію витрат виробництва.
Розв'язання. Дане рівняння перепишемо так:

$$\frac{dy}{dx} = 55 + 0{,}06x \quad \Rightarrow \quad dy = (55 + 0{,}06x)dx.$$

Диференціали рівні, тоді інтеграли теж є рівними з точністю до константи. Отже,

$$\int dy = \int (55 + 0{,}06x)dx + C.$$

Тобто функція витрат має вигляд:

$$y = 55x + 0{,}03x^2 + C.$$

Довільну сталу C можна визначити, якщо задана початкова умова.
7.2. Нехай функція граничного прибутку має вигляд:
$R' = 40 - 0{,}08x$.
Знайти функцію прибутку R.
Розв'язання. Перетворимо вихідне рівняння:

$$\frac{dR}{dx} = 40 - 0{,}08x \quad \Rightarrow \quad dR = (40 - 0{,}08x)dx,$$

звідси

$$\int dR = \int (40 - 0{,}08x)dx + C \quad \Rightarrow \quad R = 40x - 0{,}04x^2 + C.$$

Зрозуміло, що при $x = 0$ прибуток дорівнює нулю, тому $C = 0$.
Отже, функція прибутку має вигляд:

$$R(x) = 40x - 0{,}04x^2.$$

7.3. Знайти ціну товару як функцію обсягу x, якщо ціна одиниці товару $p = 20$, а еластичність ціни має вигляд:

$$E_x(p) = \frac{p - 40}{p}.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу

$$E_x(p) = \frac{x}{p}\frac{dp}{dx},$$

маємо:

$$\frac{x}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{p - 40}{p}, \text{ або } \quad \frac{dp}{p - 40} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{dp}{p - 40} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|p - 40| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Звідси $p-40=C\cdot x$.
З початкової умови знаходимо значення сталої C:

$$20-40=C \quad \Rightarrow \quad C=-20.$$

Отже, ціна товару як функції обсягу така:

$$p=40-20x.$$

7.4. Знайти функцію попиту $x=x(p)$, де x – обсяг товару, p – його ціна, якщо відома ціна p при заданому обсязі товару, а еластичність попиту має вигляд:

$E_p(x)=\dfrac{x-50}{x}$, а $x(15)=20$.

Розв'язання. За означенням еластичності маємо:

$$E_p(x)=\frac{p}{x}\frac{dx}{dp}.$$

Отже, диференціальне рівняння має вигляд:

$$\frac{p}{x}\frac{dx}{dp}=\frac{x-50}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x-40}=\frac{dp}{p}.$$

Далі інтегруємо:

$$\int\frac{dx}{x-40}=\int\frac{dp}{p}+\ln|C|$$

і одержуємо

$$\ln|x-50|=\ln|p|+\ln|C| \quad \Rightarrow \quad x-50=pC.$$

Сталу C знаходимо з початкової умови:

$$20-50=15C \quad \Rightarrow \quad C=-2.$$

Отже, функція попиту має вигляд:

$$x=50-2p.$$

7.5. Знайти виробничу функцію, якщо відомо, що $y(1)=10$, а залежність еластичності виробничої функції від кількості вкладених коштів x визначається функцією:

$$E_x(y)=\frac{x^2+y^2}{y^2},$$

де y – обсяг виробництва (в одиницях вартості).

Розв'язання. Відомо, що за означенням еластичність виробничої функції визначається як

$$E_x(y)=\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}.$$

Отже, маємо диференціальне рівняння:

$$\frac{x^2+y^2}{y^2}=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{dy}{dx}.$$

Звідси отримуємо $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{dy}{dx}$, тобто однорідне рівняння.

Зробимо заміну змінної: $\frac{y}{x}=t$, або $y=xt$, тоді $y'=t+xt'$.

Після підстановки рівняння має такий вигляд:

$$\frac{1}{t}+t=t+xt'.$$

Таким чином, ми одержали рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{1}{t}=x\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad tdt=\frac{dx}{x}.$$

Далі інтегруємо

$$\int tdt=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|$$

і звідси отримуємо:

$$\frac{t^2}{2}=\ln|x|+\ln|C| \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2x^2}=\ln|Cx|,$$

або

$$y^2=2x^2\ln|C\cdot x| \Rightarrow y=\pm|x|\sqrt{2\ln|C\cdot x|}.$$

Оскільки $x>0$, $y>0$, то $y=x\sqrt{\ln(C\cdot x)^2}$.

Знайдемо значення сталої C із початкової умови: $10=\sqrt{\ln C^2}$. Підносимо до квадрата обидві частини і маємо: $100=\ln C^2$, звідки $C^2=e^{100}$.

Тоді

$$y=x\sqrt{\ln\left(e^{100}x^2\right)} \quad \Rightarrow \quad y=x\sqrt{\ln e^{100}+\ln x^2}.$$

Отже, маємо виробничу функцію: $y=x\sqrt{100+2\ln x}$.

7.6. Повні витрати виробництва y залежать від загального обсягу про-дукції x. Відомо, що граничні та повні витрати для усіх значень x задовольняють рівняння:

$$y'-2y+x=0.$$

Знайти функцію повних витрат, яка задовольняє початковій умові: $y(0)=0$.

Розв'язання. Для знаходження функції повних витрат y треба знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$y'-2y=-x,$$

яке є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Його розв'язок будемо шукати у вигляді: $y=u(x)v(x)$. Звідси $y'=u'v+uv'$, тоді отримаємо:

$$u'v+uv'-2uv=-x \quad \Rightarrow \quad u'v+u(v'-2v)=-x.$$

Далі розглядаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} v' - 2v = 0; \\ u'v = -x. \end{cases}$$

З першого рівняння цієї системи знаходимо функцію $v(x)$ як його частинний розв'язок:

$$\frac{dv}{dx} = 2v \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int dx.$$

Звідси $\ln|v| = 2x$, отже, $v = e^{2x}$.

Цей вираз підставляємо у друге рівняння системи:

$$u'e^{2x} = -x \quad \Rightarrow \quad du = -xe^{-2x}dx.$$

Змінні відокремлені, отже, можна здійснювати інтегрування:

$$\int du = -\int xe^{-2x}dx.$$

Застосувавши інтегрування частинами, маємо:

$$u = -\left(-x\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right) \Rightarrow u = \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

Тоді отримуємо загальний розв'язок рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + C\right)e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + C \cdot e^{2x}.$$

За початковою умовою знаходимо значення довільної сталої C:

$$0 = \frac{1}{4} + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{4}.$$

Тепер визначаємо частинний розв'язок:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}\left(2x - e^{2x} + 1\right).$$

Отже, функція повних витрат, що задовольняє початковій умові $y(0) = 0$, має вигляд:

$$y = \frac{1}{4}\left(2x - e^{2x} + 1\right).$$

7.7. Функції попиту x та пропозиції y залежно від рівноважної ціни p мають вигляд:

$$x = 40 - 3p - 5\frac{dp}{dt}, \quad y = 60 + p - 4\frac{dp}{dt}.$$

Знайти залежність рівноважної ціни p від часу, якщо $p = 5$ при $t = 0$.

Розв'язання. Якщо попит і пропозиція співпадають, то

$$40 - 3p - 5\frac{dp}{dt} = 60 + p - 4\frac{dp}{dt}.$$

Отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{dt}+4p+20=0 \qquad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dt}=-4(p+5).$$

Отже,

$$\frac{dp}{p+5}=-4dt.$$

Тоді

$$\int\frac{dp}{p+5}=-4\int dt+\ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|p+5|=-4t+\ln|C|,$$

або

$$\ln\left|\frac{p+5}{C}\right|=-4t \quad \Rightarrow \quad C\cdot e^{-4t}=p+5.$$

З початкової умови знайдемо C:

$$Ce^{0}=5+5 \quad \Rightarrow C=10.$$

Отже, $p+5=10e^{-4t}$, або $p=10e^{-4t}-5$.

Таким чином, залежність рівноважної ціни p від часу t має такий вигляд:

$$p=10e^{-4t}-5.$$

Зауважимо, що при $t\to\infty$ рівноважна ціна $p\to 5$.

7.8. Нехай попит та пропозиція на певний товар визначаються відповідно співвідношеннями

$$x(p)=13p'+3p-1, \qquad y(p)=3p'-2p+14,$$

де p– ціна за одиницю товару; p'– тенденція формування ціни.

У початковий момент часу ціна за одиницю товару складала 5 гр. од.

Знайти залежність рівноважної ціни від часу. Визначити, чи є рівноважна ціна стійкою.

Розв'язання. Виходячи з умови, що $x(p)=y(p)$, маємо

$$13p'+3p-1=3p'-2p+14 \quad \Rightarrow \quad 2p'+p-3=0.$$

Ми одержали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{-(p-3)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p-3}=-\frac{1}{2}dt,$$

звідки

$$\ln|p-3|=-\frac{t}{2}+\ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{p-3}{C}\right|=-\frac{t}{2},$$

або

$$p-3=C\cdot e^{-\frac{t}{2}}.$$

З початкової умови маємо $5-3=Ce^{0} \quad \Rightarrow \mathrm{C}=2$.

Тепер $p = 2e^{-\frac{t}{2}} + 3$. Рівноважна ціна є стійкою, бо $\lim\limits_{t\to\infty} p = 3$.

Отже, для рівноваги попиту та пропозиції необхідно, щоб ціна залежно від часу змінювалася за законом: $p = 2e^{-\frac{t}{2}} + 3$.

7.9. Чисельність населення деякого регіону задовольняє диференціальне рівняння $y'(t) = 0{,}05y\left(1 - 10^{-6}y\right)$, де час t вимірюється роками. У початковий момент часу населення складало 10 тисяч громадян. Визначити, через скільки років населення зросте в 10 разів.

Розв'язання. Знайдемо розв'язок рівняння:

$$y' = 0{,}05y\left(1 - 10^{-6}y\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{0{,}05y}{10^6}\left(10^6 - y\right),$$

звідки

$$\frac{dy}{y\left(10^6 - y\right)} = \frac{0{,}05}{10^6}dt.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{dy}{y\left(10^6 - y\right)} = \frac{0{,}05}{10^6}\int dt + \ln|C\ |.$$

Дріб $\dfrac{1}{y\left(10^6 - y\right)}$ надаємо у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{1}{y\left(10^6 - y\right)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{10^6 - y}.$$

Звідси маємо рівняння для визначення коефіцієнтів:

$$1 = A\left(10^6 - y\right) + By.$$

Отже, якщо $y = 0$, то $A = 10^{-6}$; якщо $y = 10^6$, то $B = 10^{-6}$.

Тоді:

$$\int \frac{dt}{y\left(10^6 - y\right)} = 10^{-6}\int \frac{dy}{y} + 10^{-6}\int \frac{dy}{10^6 - y} = 10^{-6}\ln|y| - 10^{-6}\ln\left|10^6 - y\right|.$$

Отже,

$$10^{-6}\ln|y| - 10^{-6}\ln\left|10^6 - y\right| = \frac{0{,}05}{10^6}t + \ln|C_1|,$$

або

$$\ln\left|\frac{y}{10^6 - y}\right| = 0{,}05t + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y}{10^6 - y}\right| = C \cdot e^{0{,}05t}.$$

Знайдемо C, використовуючи початкову умову (при $t = 0$ $y = 10^4$):

$$\frac{10^4}{10^6 - 10^4} = Ce^0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{99}.$$

Тоді маємо:

$$\frac{y}{10^6 - y} = \frac{1}{99}e^{0,05t} \quad \Rightarrow \quad 99y = 10^6 e^{0,05t} - ye^{0,05t},$$

звідки $$y = \frac{10^6 e^{0,05t}}{99 + e^{0,05t}}.$$

Тепер визначимо, через скільки років кількість населення зросте у 10 разів.

$$10^4 \cdot 10 = \frac{10^6 e^{0,05t}}{99 + e^{0,05t}}, \text{ або } 99 + e^{0,05t} = 10e^{0,05t}.$$

Звідси $e^{0,05t} = 11$, отже, $t = \dfrac{\ln 11}{0,05} \approx 47,96$ (років).

Таким чином, у даному регіоні кількість населення зросте в 10 разів приблизно через 48 років.

7.10. Відомо, що швидкість зростання загальних потреб населення p відносно відсотка прибутку x даної верстви населення описується функцією e^{-x}. Знайти функцію, що характеризує залежність загальних потреб від відсотка прибутку для будь-яких верст населення.

Розв'язання. За умовою задачі маємо диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = e^{-x}.$$

Це рівняння другого порядку, у якому відсутні функція p та її перша похідна p'.

Рівняння перепишемо так: $\dfrac{d(p')}{dx} = e^{-x}$, або $d(p') = e^{-x}dx$.

Інтегруємо обидві частини рівняння, і зліва отримаємо похідну першого порядку від функції p:

$$\frac{dp}{dx} = \int e^{-x}dx + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = -e^{-x} + C_1 \quad \Rightarrow \quad dp = \left(-e^{-x} + C_1\right)dx.$$

Інтегруючи вдруге, дістанемо:

$$p = e^{-x} + C_1 \cdot x + C_2.$$

Отже, ми визначили загальний розв'язок рівняння.

Оскільки без отримання доходів споживання неможливе, то маємо початкову умову: $p(0) = 0$.

Зрозуміло, що при відсутності прибутку, швидкість приросту потреб теж дорівнює нулю, тобто маємо ще одну початкову умову: $p'(0) = 0$.

Отже, для знаходження сталих C_1 і C_2 маємо дві початкові умови. Використовуємо їх:

$e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$, звідси $C_2 = -1$.

$-e^0 + C_1 = 0$, звідси $C_1 = 1$.

Підставляємо знайдені C_1 і C_2 у загальний розв'язок і отримуємо:

$p = e^{-x} + x - 1$.

Отже, залежність загальних потреб населення від відсотка прибутку описується функцією: $p = e^{-x} + x - 1$.

7.11. Нехай попит та пропозиція на товар визначаються відповідно співвідношеннями:

$x(t) = 3p'' - p' + p + 14, \quad y(t) = 4p'' + p' + 2p + 4,$

де p – ціна товару; p' – тенденція формування ціни; p'' – темпи зміни ціни.

Знайти залежність рівноважної ціни від часу, враховуючи початкові умови:

$p = 15$ при $t = 0$; $p' = 5$ при $t = 0$.

Розв'язання. За умовою $x(t) = y(t)$, тоді

$3p'' - p' + p + 14 = 4p'' + p' + 2p + 4$,

звідки

$p'' + 2p' + p = 10$.

Знаходимо розв'язок цього лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами: $p(t) = \overline{p} + \tilde{p}$, де $\overline{p}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння, $\tilde{p}$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$p'' + 2p' + p = 0$,

його характеристичне рівняння

$k^2 + 2k + 1 = 0$

має корені $k_1 = k_2 = -1$.

Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$\overline{p} = e^{-t}(C_1 + C_2 \cdot t)$.

Далі будемо шукати деякий частинний розв'язок $\tilde{p}$ вихідного неоднорідного рівняння у вигляді:

$\tilde{p} = A$.

Визначаємо похідні і підставляємо їх і саму функцію $\tilde{p}$ в задане рівняння:

$\tilde{p}' = 0; \ \tilde{p}'' = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 10$.

Отже, $p = e^{-t}(C_1 + C_2 t) + 10$.

Знаходимо C_1 і C_2, використовуючи початкові умови:

1) $p(0) = 15$: тоді $15 = e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) + 10$, звідси $C_1 = 5$;

2) $p'(0) = 5$: оскільки $p' = -e^{-t}(C_1 + C_2 t) + e^{-t} \cdot C_2$, то:

$5 = -e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 \cdot C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 10$.

Отже, залежність ціни від часу, враховуючи початкові умови, описується функцією:

$p(t)=e^{-t}(5+10t)+10$.

7.12. Нехай попит і пропозиція деякого товару на ринку описується відповідно рівняннями:

$x(t)=5-2p_t, \quad y(t)=3+4p_{t-1}$.

Знайти залежність ціни від часу, якщо $p_t=p_{t-1}=p_0$.

Розв'язання. Виходячи з умов відповідності попиту та пропозиції, маємо різницеве рівняння для відшукання рівноважної ціни у момент часу t:

$5-2p_t=3+4p_{t-1} \quad \Rightarrow \quad 2p_t+4p_{t-1}=2,$

або

$p_t+2p_{t-1}=1.$

При початковій умові $p_t=p_{t-1}=p_0$ маємо:

$p_0=\dfrac{1}{3}$ – це рівноважна ціна.

Знайдемо загальний розв'язок розглядуваного різницевого рівняння. Він є сумою загального розв'язку однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку неоднорідного:

$p=\overline{p}+\tilde{p}.$

Однорідному рівнянню $p_t+2p_{t-1}=0$ відповідає характеристичне:

$z+2=0 \quad \Rightarrow \quad z=-2$.

Тоді $\overline{p}=C\cdot(-2)^t$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння вже було знайдено: $\tilde{p}=\dfrac{1}{3}$.

Отже, маємо загальний розв'язок різницевого рівняння Хікса:

$p_t=C\cdot(-2)^t+\dfrac{1}{3}.$

Оскільки $\lim\limits_{t\to\infty}|p_t|=\infty$, звідси робимо висновок, що рівновага є нестійкою.

7.13. Знайти розв'язок різницевого рівняння Хікса:

$y_t-2,2y_{t-1}+1,25y_{t-2}=0,1.$

Розв'язання. Загальний розв'язок шукаємо як суму загального розв'язку однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку даного неоднорідного рівняння:

$p=\overline{p}+\tilde{p}.$

Частинний розв'язок рівняння беремо у вигляді:

$\tilde{p}=C$.

Підставляємо C у задане рівняння:

$C-2,2C+1,25C=0,1 \quad \Rightarrow \quad C=2$.

Отже, $\tilde{p}=2$.

Знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$y_t-2,2y_{t-1}+1,25y_{t-2}=0$.

Йому відповідає характеристичне рівняння:
$z^2-2,2z+1,25=0$,
яке має комплексно-спряжені корені
$z=1,1\pm\sqrt{1,21-1,25},\quad z=1,1\pm 0,2i.$
Отже,
$$\overline{p}=\left(\sqrt{1,1^2+(0,2)^2}\right)^t\left(C_1\cos\varphi t+C_2\sin\varphi t\right),$$
де $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{0,2}{1,1}=0,182..$

Таким чином, $p(t)=\left(\sqrt{1,25}\right)^t\left(C_1\cos 0,182t+C_2\sin 0,182t\right)+2.$

Розв'язати задачі

7.14. Функція граничного прибутку деякого підприємства має вигляд:
$R'(x)=40-0,08x-0,006x^2$.
Знайти функцію прибутку.
7.15. Знайти функцію попиту при початковій умові: $x=4$ при $p=10$. Відомо, що її еластичність стала і дорівнює $E_p(x)=-2$.
7.16. Відомо, що еластичність виробничої функції $y=f(x)$ відносно певного чинника x характеризується співвідношенням:
$$E_x(y)=\frac{2x^2-x}{x^2-x-1}.$$
Визначити виробничу функцію, якщо відомо, що її графік проходить через точку М (1; 2).
7.17. Повні витрати виробництва y є функцією від загального обсягу продукції x. Відомо, що граничні та повні витрати для усіх значень x задовольняють рівняння: $y'-4y+x=0$. Знайти функцію повних витрат, яка задовольняє початкову умову: $y(0)=0$.
7.18. Знайти функцію попиту, якщо її еластичність визначається співвідношенням $E_p(x)=\dfrac{x-300}{x}$, де 0< x<300; відомо, що x=12 при $p=36$.
7.19. Чисельність населення деякого робітничого селища задовольняє диференціальному рівнянню:
$y'(t)=0,1y\left(1-10^{-5}y\right)$,
де час t вимірюється у роках. У початковий момент чисельність населення складала 5 000 громадян. Визначити, через скільки років населення зросте у 5 разів.
7.20. Функції попиту та пропозиції, відповідно, мають вигляд:
$x(p)=80-4p+3p',\qquad y(p)=104-8p+p'.$

Знайти залежність рівноважної ціни від часу, якщо $p = 2$ при $t = 0$. Визначити, чи є рівноважна ціна стійкою.

7.21. Знайти залежність ціни *p* від часу *t*, якщо попит і пропозиція визначаються співвідношеннями

$x(t) = p'' - 4p' - p + 17, \quad y(t) = 2p'' + p' + 3p + 5,$

$p(0) = 3, \quad x(0) = 11, \quad x(t) = y(t).$

7.22. Знайти розв'язок різницевого рівняння Хікса:

$y(t) - 2,4y(t-1) + 1,28y(t-2) = 0,06$.

Проаналізувати поведінку загального розв'язку рівняння

ЛІТЕРАТУРА

1. *Авторський колектив (керівник Пономаренко В.С.)* Вища математика: підручник для студентів економічних напрямків підготовки.-Харків: Фоліо, 2014.- 669с.

2. *Барковський В.В., Барковська Н.В.* Вища математика. – К.: ЦНЛ, 2005. – 448с.

3. *Бугір М.К.* Математика для економістів. – К.: Академія, 2003. – 520с.

4. *Валеєв К.Г., Джалладова І.А.* Вища математика у 2-х ч. Ч.1/546с., Ч.2/451 с. – К.:КНЕУ, 2004.

5. *Грисенко М.В.* Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч.посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720с.

6. *Гуран І.Й., Гутік О.В.* Математика для економістів-міжнародників: Підручник. – К.: Знання, 2008. - 388с.

7. *Мацкул В.М.* Вища математика для економістів у 2-х ч. Ч.1/164с., Ч.2/163с.- Одеса, 2015.

8. *Gavdzinski V.N., Matskul V.N., Maltseva E.V.* Textbook on cource of higher mathematics for economists in 2 parts P.1/144 p., P.2/136 p.- Odessa: ONEU, 2013.

Додаток 1. Елементи математичної логіки

Висловлення

В математиці часто доводиться мати справу з різноманітними висловлюваннями, про які можна сказати істинні вони чи хибні. Їх називають *висловленнями* і позначають наступним чином:

$A \equiv \{\text{число } 80 \text{ ділиться на } 4\}$,

$B \equiv \{\text{число } 15 \text{ ділиться на } 8\}$,

$C \equiv \{\text{три менше п'яти}\}$,

$D \equiv \{\text{число } 2 \text{ є єдиним коренем рівняння } x^2 - 4 = 0\}$.

У висловленнях замість слів можна використовувати математичні знаки та символи, наприклад, $C \equiv \{3 < 5\}$.

Відзначимо, що кожне висловлення є реченням, але не кожне речення є висловленням.

Закон виключеного третього. ***Висловлення може бути або істинним або хибним.***

Закон суперечності. ***Жодне висловлення не може бути одночасно істинним та хибним.***

Отже, ***речення, про яке неможливо однозначно зробити висновок, істинне воно чи хибне, не є висловленням.***

У висловленнях ***A*** та ***C*** твердження вірні, такі висловлення називають ***істинними***. У висловленнях ***B*** та ***D*** твердження невірні, такі висловлення називають ***хибними***.

Речення:

1) число 0,000001 дуже мале;
2) x>2;
3) x+12=13

не є висловленнями, оскільки: перше не має точного смислу і неможливо встановити істинне воно, чи хибне (хтось вважає це число дуже малим, а хтось – ні); друге та третє містять літеру x і поки не буде вказано конкретне значення x, не можна точно сказати істинні вони чи хибні (при одних значеннях x вони будуть істинними, а при інших – хибними).

Не для кожного висловлення можна відразу зробити висновок про його істинність чи хибність. Закон виключеного третього вказує лише принципову можливість встановити істинність або хибність висловлювання. Для встановлення цього факту іноді потрібно багато часу та зусиль. Наприклад, речення $E \equiv \{\text{число } (27^{45} - 15^{32})^{76} \text{ є простим}\}$ буде висловленням, бо принципово можливо встановити істинне воно чи хибне.

Заперечення

Із будь-якого висловлення $\boldsymbol{A}$ можна отримати нове висловлення шляхом заперечення $\boldsymbol{A}$, тобто, стверджуючи, що висловлення $\boldsymbol{A}$ не виконується. Заперечення висловлення $\boldsymbol{A}$ позначають $\overline{\boldsymbol{A}}$ і читають «заперечення висловлення $\boldsymbol{A}$» або коротко «не $\boldsymbol{A}$».

Наприклад:

1) $A \equiv \{\text{число } 25 \text{ ділиться на } 7\}$, $\overline{A} \equiv \{\text{число } 25 \text{ не ділиться на } 7\}$;

2) $\boldsymbol{B \equiv \{3 > 5\}}$, $\boldsymbol{\overline{B} \equiv \{3 \le 5\}}$;

3) $\boldsymbol{C \equiv \{3 + 5 = 8\}}$, $\boldsymbol{\overline{C} \equiv \{3 + 5 \ne 8\}}$;

4) $D \equiv \{\text{число } 32 \text{ є простим}\}$, $\overline{D} \equiv \{\text{число } 32 \text{ не є простим}\}$.

Із наведених висловлень $\boldsymbol{\overline{A}, \overline{B}, C, \overline{D}}$ - істинні, а висловлення $\boldsymbol{A, B, \overline{C}, D}$ - хибні.

Отже, яким би не було висловлення $\boldsymbol{A}$, із двох висловлень $\boldsymbol{A}$ і $\overline{\boldsymbol{A}}$ одне буде істинним, а інше – хибним. Найпростіший прийом утворення заперечення – додати до присудка заперечну частку «не», наприклад, $A \equiv \{\text{число } 25 \text{ ділиться на } 7\}$, $\overline{A} \equiv \{\text{число } 25 \text{ не ділиться на } 7\}$. Але якщо вихідне висловлення містить перед присудком «не», то для утворення його заперечення достатньо відкинути частку «не». Наприклад, $D \equiv \{\text{число } 32 \text{ не є простим}\}$, $\overline{D} \equiv \{\text{число } 32 \text{ є простим}\}$.

Нехай $\boldsymbol{A}$ - довільне висловлення, тоді його заперечення $\overline{\boldsymbol{A}}$ також буде висловленням. Тому, можна розглядати і його заперечення – висловлення $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$, яке називають подвійним запереченням висловлення $\boldsymbol{A}$.

Закон заперечення заперечення. Подвійне заперечення $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$ істинне лише тоді, коли істинне висловлення $\boldsymbol{A}$. Якщо $\boldsymbol{A}$ хибне, тоді і $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$ також хибне.

Невизначені висловлення

Розглянемо $\boldsymbol{N = \{1, 2, \ldots\}}$ - множину натуральних чисел з елементами $\boldsymbol{n \in N}$. Розглянемо наступні речення:

$$A(n) \equiv \{\text{число } n \text{ ділиться на } 5\},\ B(n) \equiv \{n > 10\},$$

$$C(n) \equiv \{n - \text{просте число}\},\ D(n) \equiv \{(n-5)^2 = 10\}.$$

Вони не будуть висловленнями до тих пір, поки не задано число $\boldsymbol{n \in N}$. Але підставляючи в них замість $\boldsymbol{n}$ різні натуральні числа, будемо отримувати висловлення про натуральні числа. Наприклад, $A(5) \equiv \{\text{число } 5 \text{ ділиться на } 5\}$ - істинне висловлення, а

$A(13) \equiv \{\text{число } 13 \text{ ділиться на } 5\}$. Отже, речення, які містять змінну, можна назвати ***невизначеними висловленнями***. В математиці їх часто називають ***предикатами***.

Кожний із вищенаведених предикатів виражає деяку властивість натурального числа $\boldsymbol{n}$. Наприклад, $\boldsymbol{A(n)}$ виражає властивість ділитися на 5, $\boldsymbol{C(n)}$ - властивість бути простим числом. Але невизначені висловлення можна задавати на будь-якіщ множині.

Часто розглядаються невизначені висловлення з двома і більшою кількістю змінних. Наприклад, для натуральних $\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{m}$:

$\boldsymbol{A(n,m) \equiv \{n > m\}}$, $\boldsymbol{B(n,m) \equiv \{n + m = 10\}}$ - невизначені висловлення.

Про істинність або хибність цих тверджень можна казати лише коли задані конкретні значення $\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{m}$, наприклад:

$\boldsymbol{A(3,1) \equiv \{3 > 1\}}$ - істинне висловлення;

$\boldsymbol{A(1,3) \equiv \{1 > 3\}}$ - хибне висловлення;

$\boldsymbol{B(2,8) \equiv \{2 + 8 = 10\}}$ - істинне висловлення.

Знаки загальності та існування

Операція заперечення дозволяє із невизначеного висловлення $\boldsymbol{A(x)}$ отримати нове невизначене висловлення $\overline{\boldsymbol{A(x)}}$ - його заперечення.

Часто студентам важко сформулювати заперечення $\overline{\boldsymbol{A(x)}}$, якщо $\boldsymbol{A(x)}$ містить слова «усі», «будь-який», «довільний», «кожен», «хоча б один», «принаймні один», «знайдеться», «існує». Наприклад, якщо $C(n) \equiv \{\text{кожне просте число непарне}\}$, то висловлення $B(n) \equiv \{\text{кожне просте число парне}\}$ не буде запереченням до $\boldsymbol{C(n)}$. Запереченням до $\boldsymbol{C(n)}$ буде висловлення $\overline{C(n)} \equiv \{\text{не кожне просте число непарне}\}$ або $\overline{C(n)} \equiv \{\text{існує просте число, яке буде парним}\}$, або $\overline{C(n)} \equiv \{\text{хоча б одне просте число парне}\}$, причому, $\overline{\boldsymbol{C(n)}}$ - істинне, бо існує одне (і тільки одне) парне просте число 2.

Якщо висловлення $\boldsymbol{A(x)}$ починається словами «усі», «будь-який», «довільний», «кожен», то для отримання заперечення $\overline{\boldsymbol{A(x)}}$ треба або записати «не» перед вказаними словами, або записати (виключити) «не» після цих слів (але тоді ці слова треба замінити на «хоча б один», «принаймні один», «знайдеться», «існує»).

Має місце і зворотнє твердження.

Наприклад:

$A(n,m) \equiv \{\textit{кожне із чисел } n,m \textit{ ділиться на } 7\}$,

$\overline{A(n,m)} \equiv \{\textit{не кожне із чисел } n,m \textit{ ділиться на } 7\}$,

$\overline{A(n,m)} \equiv \{\textit{хоча б одне із чисел } n,m \textit{ не ділиться на } 7\}$.

Часто замість слів «для усіх», «для будь-якого», «для довільного», «для кожного» використовується символ загальності $\forall$, а замість слів «знайдеться», «існує» - символ існування $\exists$.

Нехай $\boldsymbol{A(x)}$ - деяке невизначене висловлення, $\boldsymbol{x \in M}$. Тоді запис $\boldsymbol{(\forall x \in M)A(x)}$ означає: для будь-якого $\boldsymbol{x}$ із множини $\boldsymbol{M}$ має місце $\boldsymbol{A(x)}$; а запис $\boldsymbol{(\exists x \in M)A(x)}$ означає: існує елемент $\boldsymbol{x}$ із множини $\boldsymbol{M}$, для якого має місце $\boldsymbol{A(x)}$. Відзначимо, що ці записи є висловленнями.

Необхідні та достатні умови

У більшості теорем виділяють умову і твердження, які є деякими невизначеними висловленнями. Розглянемо, наприклад, теорему: діагоналі ромба взаємно перпендикулярні. Умовою теореми буде: чотирикутник $\boldsymbol{ABCD}$ - ромб, а твердженням теореми: його діагоналі взаємно перпендикулярні. Якщо чотирикутник позначити через $\boldsymbol{Q}$, то умову теореми можна записати у вигляді:

$A(Q) \equiv \{\textit{чотирикутник } Q - \textit{ромб}\}$.

Твердження теореми:

$B(Q) \equiv \{\textit{діагоналі чотирикутника } Q \textit{ взаємно перпендикулярні}\}$.

Уся теорема може бути записана так:

$$\boldsymbol{(\forall Q)A(Q) \to B(Q)},$$

тобто, для будь-якого чотирикутника $\boldsymbol{Q}$ із висловлення $\boldsymbol{A(Q)}$ випливає $\boldsymbol{B(Q)}$. Іншими словами, якщо для $\boldsymbol{Q}$ висловлення $\boldsymbol{A(Q)}$ істинне, тоді висловлення $\boldsymbol{B(Q)}$ також істинне. Часто для скорочення записують $\boldsymbol{A \Rightarrow B}$ (або $\boldsymbol{A \to B}$).

Такий запис означає, що висловлення $\boldsymbol{A}$ є достатньою умовою для $\boldsymbol{B}$, а висловлення $\boldsymbol{B}$ є неохідною умовою для $\boldsymbol{A}$.

Обернена та протилежна теореми

Нехай $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ - деякі невизначені висловлення.

Теореми $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ та $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}$ називаються ***взаємнооберненими.***

Із двох взаємнообернених теорем кожна може бути вірною або невірною. Будь-яку з цих двох теорем можна назвати прямою, тоді інша теорема буде оберненою до прямої.

Якщо обидві теореми вірні, тоді цей факт записують так: $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$. У цьому випадку кожне висловлення є ***необхідною і достатньою умовою*** для іншого висловлення. Часто термін ***«умова»*** замінюється словом ***«ознака».*** Якщо у деякій теоремі $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ замінити і умову $\boldsymbol{A}$, і твердження $\boldsymbol{B}$ їх запереченнями, тоді одержимо нову теорему $\overline{\boldsymbol{A}} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$, яку називають ***протилежною до початкової.***

Виявляється, що теорема $\overline{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$, протилежна оберненій, вірна тоді і тільки тоді, коли вірна пряма теорема $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$. На цьому факті базується ***метод доведення «від супротивного»: замість потрібної теореми*** $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ ***проводять доведення теореми*** $\overline{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$.

Кон'юнкція та диз'юнкція

Кон'юнкція та диз'юнкція – це операції, які дозволяють із двох (або більшої кількості) висловлень отримувати нові висловлення.

Операція диз'юнкції позначається знаком $\vee$ (або $\cup$) і іноді називається ***«операцією або» («логічне додавання»).***

Запис $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$) означає: має місце хоча б одне із висловлень $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$. Диз'юнкція цих двох висловлень точніше читається так: «або $\boldsymbol{A}$, або $\boldsymbol{B}$, або $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ разом».

Якщо хоча б одне із висловлень $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ істинне, то їх диз'юнкція $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ також буде істинним висловленням. Якщо ж обидва висловлення хибні, то буде хибним і висловлення $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$.

Наприклад, розглянемо на множині усіх натуральних чисел $\boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$) висловлення:

$$A(n) \equiv \{\, n - \textit{складене число} \,\},\ B(n) \equiv \{ n - \textit{непарне число} \}.$$

Диз'юнкція цих двох висловлень $\boldsymbol{A(n)} \vee \boldsymbol{B(n)}$ - невизначене висловлення, яке буде істинним при $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{2}$ і хибним при $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{2}$. Дійсно:

якщо $\boldsymbol{n}$ - парне число, більше 2, то диз'юнкція $\boldsymbol{A(n)} \vee \boldsymbol{B(n)}$ буде істинним висловленням, бо тоді $\boldsymbol{n}$ - складене число і буде істинним висловлення $\boldsymbol{A(n)}$;

якщо $\boldsymbol{n}$ - непарне число, то $\boldsymbol{A(n)} \vee \boldsymbol{B(n)}$ буде істинним висловленням, бо тепер істинним є висловлення $\boldsymbol{B(n)}$;

і тільки при $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{2}$ (єдине просте парне число) обидва висловлення хибні.

Тому можна записати: $\boldsymbol{A(n) \vee B(n) \equiv C(n) \equiv \{n \neq 2\}}$.

Операція кон'юнкції («операція і», «логічний добуток») висловлень $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ позначається знаком $\wedge$ (або $\cap$), читається «$\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$» та означає, що мають місце висловлення $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ одночасно.

Висловлення $\boldsymbol{A \wedge B}$ ($\boldsymbol{A \cap B}$) буде істинним лише тоді, коли будуть істинними обидва висловлення $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$, і буде хибним в усіх інших випадках.

Наприклад, нехай $\boldsymbol{x \in K}$, де $\boldsymbol{K}$ - множина коштів інвесторів та власників для розвитку підприємства. Позначимо:

$A(x) \equiv \{x - \text{сума коштів, сплачених за обладнання}\}$,

$B(x) \equiv \{x - \text{кошти інвесторів}\}$.

Тоді кон'юнкція

$A(x) \wedge B(x) \equiv C(x) \equiv \{\text{обладнання сплачено за кошти інвесторів}\}$.

Додаток 2. Деякі поняття елементарної математики

У багатьох економічних ситуаціях, фінансових розрахунках необхідно виконувати поділ величин на декілька прямо або обернено пропорційних частин та знаходити певну кількість відсотків (процентів) числа. Розглянемо ці операції.

Означення. Величини A та B називають **прямо пропорційними**, якщо існує коефіцієнт пропорційності k такий, що виконується рівність

$$A = kB.$$

Правило. Для поділу числа X на частини, пропорційні числам A, B, C потрібно ввести коефіцієнт пропорційності k. Тоді шукані частини числа X будуть kA, kB, kC і $X = kA + kB + kC$. Із останнього рівняння можна визначити k і знайти шукані частини.

Приклад. Співвласники товариства з обмеженою відповідальністю вклали у статутний капітал ТОВ відповідно 14, 6 та 3 млн.грн. ТОВ отримало прибуток у розмірі 759 тис.грн. Необхідно розподілити прибуток між співвласниками ТОВ.

Розв'язування. Необхідно поділити число 759 (тис.грн) на частини пропорційні числам 14, 6, 3 (відповідно їх вкладу у статутний капітал). Нехай k - коефіцієнт пропорційності. Тоді шуканими частинами будуть $14k, 6k, 3k$. З рівняння $759 = 14k + 6k + 3k$ знаходимо $k = \frac{759}{23} = 33$. Таким чином, співвласники отримають відповідно: 33*14=462 (тис.грн), 33*6=198 (тис.грн) та 33*3=99 (тис.грн).

Означення. Величини A та B називаються **обернено пропорційними**, якщо існує таке k, що виконується рівність

$$B = \frac{k}{A}.$$

Правило. Для поділу числа X на частини, обернено пропорційні числам A, B, C потрібно ввести коефіцієнт пропорційності k. Тоді шукані частини числа X будуть $\frac{k}{A}, \frac{k}{B}, \frac{k}{C}$ і $X = \frac{k}{A} + \frac{k}{B} + \frac{k}{C}$. Із останнього рівняння можна визначити k і знайти шукані частини.

Приклад. Власник підприємства виділив 8800 грн на заохочення трьох працівників і вирішив розподілити ці кошти обернено пропорційно кількості втрачених робочих годин. Скільки коштів отримає кожен працівник, якщо перший з них втратив 3 години, другий 25/16 години, а третій – 5 годин?

Розв'язування. Необхідно поділити число 8800 (грн) на частини, обернено пропорційні числам 3, 25/16, 5. Нехай k - коефіцієнт пропорційності. Тоді шуканими частинами будуть $\frac{k}{3}, \frac{k}{\frac{25}{16}} = \frac{16k}{25}, \frac{k}{5}$. З рівняння $8800 = \frac{k}{3} + \frac{16k}{25} + \frac{k}{5}$ знаходимо $k = \frac{75 \cdot 8800}{88} = 7500$. Таким чином, працівник, який втратив 3 робочих години, отримає $\frac{7500}{3} = 2500$ (грн). Працівник, що втратив 25/16 робочих години, одержить $\frac{7500 \cdot 16}{25} = 4800$ (грн). Працівник, який втратив 5 робочих годин, отримає $\frac{7500}{5} = 1500$ (грн).

Означення. Відсотком (процентом) числа X називають одну соту ($\frac{1}{100}$) його частину. A відсотків числа X буде $\frac{X}{100} \cdot A$.

Приклад. Знайти:

1) 8% від 1250 грн. 2) 4,5% від 3,6 тонн. 3) 120% від 350.

Розв'язування.

1) $\frac{1250}{100} \cdot 8 = 100$ (грн); 2) $\frac{3600 \cdot 4{,}5}{100} = 169$ (кг); 3) $\frac{350}{100} \cdot 120 = 420$.

Приклад. Знайти число, 3% якого дорівнюють 36.

Розв'язування. Нехай X - шукане число. За умовою:

$$0{,}03X = 36 \Rightarrow X = \frac{36}{0{,}03} = 1200.$$

Приклад. Вкладник поклав деяку суму на депозитний рахунок під 10% річних. На скільки % зросте сума вкладника через два роки?

Розв'язування. Нехай X - початкова сума вкладу. Тоді через рік вона зросте на 10% і становитиме 100+10=110% від початкової, тобто, $1{,}1X$. На кінець другого року ця сума збільшиться на 10% і становитиме 100+10=110% від $1{,}1X$, тобто, $1{,}1 \cdot 1{,}1X = 1{,}21X$, що становить 121% від X. Отже, початкова сума X зросла на 21%.

Розв'язування деяких рівнянь та нерівностей.

Нагадаємо деякі основні поняття із шкільного курсу математики.

Два вирази від даних змінних називаються тотожно рівними, якщо їх значення рівні при будь-якій тій самій допустимій системі значень

змінних (якщо спеціально не обумовлюється, то ця система – ОДЗ (область допустимих значень) змінних).

Рівності, в яких ліва і права частини тотожно рівні вирази, називають тотожностями (правильні числові рівності також називають тотожностями).

Розв'язком рівняння (нерівності) з однією невідомою називають таке значення цієї невідомої із ОДЗ, яке при підстановці у рівняння (нерівність) перетворює його (її) в правильну числову рівність (нерівність). Розв'язки рівнянь часто називають його коренями.

Розв'язати рівняння (нерівність) – означає знайти множину всіх його (її) розв'язків (якщо ця множина порожня, то часто кажуть, що доводиться відсутність розв'язків).

Рівняння (нерівності) називаються еквівалентними або рівносильними, якщо їх множини розв'язків співпадають.

Рівняння А є наслідком рівняння В, якщо множина розв'язків рівняння А містить усі розв'язки рівняння В.

Багаторічний досвід показує, що багато студентів мають певні проблеми і припускаються помилок при розв'язуванні рівнянь та нерівностей. Проаналізуємо типові помилки, розбивши їх на умовні пункти.

А). *В першу чергу звернемо увагу на арифметичні помилки, оскільки, навіть при правильному виборі алгоритму розв'язання задачі, недбалість в обчисленнях, неуважність призводять до неправильного розв'язку задачі.*

Більшість таких помилок пов'язані з невмінням вибрати раціональний шлях розв'язання задачі, що ускладнює розрахунки і дуже часто збільшує ймовірність одержання неправильної відповіді.

<u>Приклад А.1.</u> Розв'язати рівняння

$$\sqrt{4x-8}-\sqrt{x-2}=5 .$$

Більшість при розв'язанні цього рівняння відразу намагаються позбутись ірраціональності, не знаходячи ОДЗ (область допустимих значень). Обидві частини вихідного рівняння двічі підносяться до квадрату, а потім розв'язується квадратне рівняння і, у кращому випадку, відсікається сторонній корінь. Якщо ж знайти ОДЗ: $x \geq 2$ (яка визначається умовами невід'ємності підкореневих виразів), то можна помітити, що $4x-8=4(x-2)$ і раціональніше провести на ОДЗ наступні перетворення:

$$\sqrt{4x-8}-\sqrt{x-2}=5 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}=5 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=5 .$$

Обидві частини останнього рівняння невід'ємні, тому, підносячи їх до квадрату, дістанемо еквівалентне рівняння:

$$x-2=25 \Leftrightarrow \quad x=27.$$

Наступні приклади демонструють переваги знаходження ОДЗ.

Це дозволяє інколи відразу вказати розв'язки або переконатись у відсутності коренів рівняння.

Приклад А.2. ОДЗ рівняння $\sqrt{x-2}+3x=6-\sqrt{2-x}$ містить єдине значення $x_0=2$. Перевірка встановлює, що $x_0=2$ - корінь рівняння.

Приклад А.3. Знайдемо ОДЗ рівняння

$\sqrt{3-x}+2\sqrt{x-7}=x+1$, яка визначається системою:

$$\begin{cases}3-x\ge 0\\ x-7\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3\\ x\ge 7\end{cases}.$$

Звідси випливає, що ОДЗ=$\varnothing$ і відразу робимо висновок, що рівняння не має розв'язків.

Знахождення ОДЗ допомогає уникнути помилок при розв'язуванні задач, які вимагають знання та розуміння деяких базових понять (наприклад, тотожності).

Приклад А.4. Знайти найменший цілий додатний корінь рівняння

$$\sqrt{x-2}+(x-1)^2-(x+1)^2=-4x+\sqrt{x-2}.$$

Якщо не знайти ОДЗ (яка визначається умовою $x\ge 2$) даного рівняння, то після взаємного знищення радикалів та подальших спрощень дістанемо рівняння – наслідок, яке перетворюється в тотожність (правильну числову рівність) $0=0$. Без урахування ОДЗ робиться хибний висновок, що розв'язками даного рівняння будуть будь-які значення $x\in R$, із яких найменшим цілим додатним значенням є $x_0=1$. Але ж, розв'язками цього рівняння будуть будь-які значення x із ОДЗ, тобто множина $[2;+\infty)$. Правильною відповіддю буде $x_0=2$.

Зауваження . Знаходження ОДЗ не потрібно сприймати як догму або універсальний рецепт від усіх "неприємностей" та труднощів при розв'язуванні, оскільки:

по-перше: інколи процес знаходження ОДЗ, який пов'язаний із розв'язуванням нерівностей та їх систем, може бути досить складним. В таких випадках при розв'язуванні рівнянь рекомендуємо обмежуватись лише записом умов, що визначають ОДЗ;

по-друге: відбір коренів рівняння за належністю до ОДЗ не гарантує, що всі отримані корені будуть коренями вихідного рівняння, оскільки в процесі розв'язування можливі нееквівалентні перетворення рівнянь.

Приклад А.5. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2+3x+17}=1+x.$$

Очевидно, що ОДЗ даного рівняння – всі дійсні числа. Піднесемо обидві частини до квадрату. Дістанемо рівняння-наслідок

$x^2+3x+17=1+2x+x^2$, корінь якого $x_0=-16$ належить ОДЗ вихідного рівняння, але є стороннім, оскільки при перевірці підстановкою у вихідне рівняння дістаємо неправильну числову рівність $\sqrt{225}=-15$. Отже, рівняння не має розв'язків. Приклад показує, що знайдена ОДЗ в деяких випадках не дозволяє виключати сторонні корені.

Відзначимо, що вірне розв'язання може взагалі не містити знаходження ОДЗ.

Досить часто при розв'язуванні задач (особливо тих, в яких з'являються модулі чисел або виразів) виникає необхідність порівняти деякі числа між собою.

<u>Приклад А.6</u>. Обчислити

$$\sqrt{156-90\sqrt{3}}+\sqrt{79+20\sqrt{3}}$$

При обчисленні даного виразу доцільно підкореневі вирази подати у вигляді квадратів двочленів із невизначеними коефіцієнтами:

$$156-90\sqrt{3}=(a-b\sqrt{3})^2=a^2+3b^2-2ab\sqrt{3},$$

$$79+20\sqrt{3}=(c+d\sqrt{3})^2=c^2+3d^2+2cd\sqrt{3}\ .$$

Невідомі коефіцієнти знайдемо із співвідношень

$$\begin{cases} ab=45 \\ a^2+3b^2=156 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} cd=10 \\ c^2+3d^2=79 \end{cases},$$

скориставшись розкладом чисел 45 і 10 на множники та підібравши розв'язки систем, наприклад: $\begin{cases} a=9 \\ b=5 \end{cases}$ і $\begin{cases} c=2 \\ d=5 \end{cases}$. Отже,

$$156-90\sqrt{3}=(9-5\sqrt{3})^2, \text{ а } 79+20\sqrt{3}=(2+5\sqrt{3})^2.$$

Після спрощень виникає потреба у розкритті знаків модуля:

$$\sqrt{156-90\sqrt{3}}+\sqrt{79+20\sqrt{3}}=\sqrt{(9-5\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2+5\sqrt{3})^2}=$$

$$=\left|9-5\sqrt{3}\right|+\left|2+5\sqrt{3}\right|.$$

Якщо знак числа $2+5\sqrt{3}$ визначити просто (сума додатних чисел є число додатне), то при визначенні знаку числа $9-5\sqrt{3}$ потрібно порівняти між собою числа 9 та $5\sqrt{3}$. Скористуємось властивістю, що для будь-яких $x, y\in R^+ : x>y \Leftrightarrow x^2>y^2$. Очевидно, що $9-5\sqrt{3}>0$, оскільки

$$9>5\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 81>25\cdot 3.$$

Остаточно:

$$\left|9-5\sqrt{3}\right|+\left|2+5\sqrt{3}\right| = 9-5\sqrt{3}+2+5\sqrt{3}=11 .$$

<u>Зауваження</u>. Дехто при визначенні знаку чисел або виразів, які містять радикали, використовує наближені значення коренів, що може призвести до помилок. Слід пам'ятати про різницю між грубою прикидкою та строгим доведенням.

Б). Досить часто прискорити розв'язування (а отже спростити і зменшити ймовірність помилок в обчисленнях) найпростіших рівнянь і нерівностей допомагає аналіз умов існування розв'язків таких задач.

<u>Приклад Б.1</u>. Розв'язати рівняння

$$2x^2+1+3\left|x-1\right|=0 .$$

Звичайно рівняння розв'язують шляхом розкриття модуля:

1) при $x-1<0$ $\left|x-1\right|=-(x-1)$, тому рівняння набуває вигляду:

$$2x^2-3x+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\varnothing$$, оскільки $D=9-32<0$.

2) при $x-1\geq 0$ $\left|x-1\right|= x-1$, і рівняння набуває вигляду:

$$2x^2+3x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=-2, x_2=1/2 \quad \Rightarrow \quad x\in\varnothing ,$$

оскільки

x_1, x_2 не задовольняють умову $x-1\geq 0$.

Таким чином, вихідне рівняння не має розв'язків.

Раціональніше проаналізувати ліву частину вихідного рівняння.

Очевидно, що $2x^2+1>0$, а $3\left|x-1\right|\geq 0$ при будь-яких значеннях x. Таким чином, ліва частина даного рівняння додатна при всіх значеннях x, тому відразу можна зробити висновок, що рівняння не має розв'язків.

<u>Приклад Б.2</u>. Розв'язати рівняння

$$\left|x+3\right|+\left|1-x\right|+\left|x+1\right|-x+5=0.$$

При розв'язуванні даного рівняння традиційним шляхом розкриття модулів потрібно розглядати чотири проміжки :

$$x\in(-\infty;-3)\cup[-3;-1)\cup[-1;1)\cup[1;+\infty),$$

а потім на кожному із цих проміжків розв'язувати рівняння без модулів.

Проте, якщо вихідне рівняння записати у вигляді :

$$\left|x+3\right|+\left|1-x\right|+\left|x+1\right|= x-5,$$

то можна зробити висновок, що воно має розв'язки лише при $x\geq 5$, оскільки ліва частина невід'ємна при будь-яких x. Таким чином, вихідне рівняння рівносильне системі :

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x+3-1+x+x+1=x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Отже, рівняння не має розв'язків.

В). Далеко не завжди студенти демонструють обізнаність у питаннях, пов`язаних з областю допустимих значень (ОДЗ) рівнянь і нерівностей. Перш за все, це відноситься до "ділення на нуль".

<u>Приклад В.1</u>. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності:

$$x^2-4x+\frac{2}{x-4}<5-\frac{2}{4-x}.$$

При розв`язуванні цієї нерівності дехто після взаємного знищення дробів $\frac{2}{x-4}$ і $-\frac{2}{4-x}$ розв`язує одержану квадратну нерівність $x^2-4x-5<0$, отримує множину розв'язків $(-1;5)$ і дає відповідь 4. При цьому забувають, що ОДЗ одержаної нерівності розширилась і для еквівалентності перетворень обов`язково потрібно додати обмеження $x-4\neq 0$, тобто

$$x^2-4x+\frac{2}{x-4}-5+\frac{2}{4-x}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5<0 \\ x-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\in(-1;5) \\ x\neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1;4)\cup(4;5).$$

Найбільший цілий розв'язок нерівності $x_0=3$.

Крім того, студенти не завжди правильно розуміють, що вираз $-x$ може приймати як від'ємні, так і невід'ємні значення в залежності від того, яких значень набуває x. Це досить часто приводить до непорозумінь при роботі з радикалами парного степеня.

<u>Приклад В.2</u>. Знайти найбільше ціле значення x із області визначення функції

$$y=\sqrt{-x}+\sqrt[3]{3x+1}.$$

Дехто, побачивши вираз $\sqrt{-x}$, поспішно робить висновок, що цей вираз не має сенсу, оскільки під коренем стоїть знак мінус. Проте правильним є висновок, що підкореневий вираз повинен приймати невід'ємні значення, тобто область визначення даної функції визначається умовою: $-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$ (зауважимо, що $\sqrt[3]{3x+1}$ визначений при будь-яких x). Звідси, $D(y)=(-\infty;0]$. Найбільшим цілим значенням x з області визначення функції є $x_0=0$.

При роботі з радикалами слід пам'ятати, що перетворення виразу $\left(\sqrt{F(x)}\right)^2$ (визначеного при умові $F(x) \geq 0$) у вираз $F(x)$, може призвести до розширення ОДЗ. Тому для еквівалентності перетворень необхідно додати умову $F(x) \geq 0$. Ще більш небезпечним є перетворення виразу $\sqrt{F(x)G(x)}$ у вираз $\sqrt{F(x)}\sqrt{G(x)}$, так як перший визначений при умові $F(x)G(x) \geq 0$, а другий - при більш жорсткій умові $\begin{cases} F(x) \geq 0 \\ G(x) \geq 0 \end{cases}$. Це перетворення призводить до звуження ОДЗ і можливої втрати розв'язків. Аналогічні помилки допускаються і при некоректному застосуванні наступних властивостей логарифмів:

1) $\log_a\left(f(x)g(x)\right) = \log_a f(x) + \log_a g(x)$;

2) $\log_a\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \log_a f(x) - \log_a g(x)$;

3) $\log_a\left(f(x)\right)^k = k\log_a f(x)$;

які справедливі при $a > 0, a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

4) $\log_a\left(f(x)\right)^k = k\log_a\left|f(x)\right|$, якщо k - парне число, а $a > 0, a \neq 1$, $f(x) \neq 0$.

<u>Приклад В.3</u>. Знайти суму коренів рівняння

$$\log_5 x^2 = 4.$$

Дехто записує наступне розв'язування:

$$\log_5 x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2\log_5 x = 4 \Rightarrow \log_5 x = 2 \Rightarrow x = 25.$$

А потім виникає питання: "Що давати у відповіді?"

Втрата одного із коренів рівняння сталась внаслідок неправильного застосування властивості 4) логарифма парного степеня. Це призвело до звуження ОДЗ (тобто, нееквівалентного перетворення). Вихідне рівняння визначене при всіх значеннях x окрім нуля, а рівняння $2\log_5 x = 4$ - тільки при $x > 0$.

Зауважимо, що у цьому випадку при правильному застосуванні властивості 4) логарифма дістанемо $\log_5 x^2 = 2\log_5|x|$.

Краще на ОДЗ (що визначається умовою $x \neq 0$) даного логарифмічного рівняння провести еквівалентні перетворення (наприклад, застосувавши означення логарифма):

$$\log_5 x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 5^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -25 \\ x_2 = 25 \end{array}\right.$$

Обидва корені належать ОДЗ. Відповідь: $x_1 + x_2 = 0$.

Г). Слабка обізнаність у питаннях еквівалентності перетворень рівнянь і нерівностей приводить або до появи сторонніх коренів, або до втрати коренів. Часто помилки такого роду зустрічаються при розв'язуванні раціональних, ірраціональних, тригонометричних і логарифмічних рівнянь. Ділення обох частин рівняння на спільний множник, що містить невідому, може призвести до втрати коренів. Зауважимо, що таке ділення можна виконувати лише у випадку, коли цей множник відмінний від нуля при будь-яких значеннях невідомої із ОДЗ. Без урахування ОДЗ множення обох частин рівняння на спільний знаменник, що містить невідому, піднесення до парного степеня, потенціювання може призвести до появи сторонніх коренів.

Потрібно чітко розмежовувати випадки, коли виконуються еквівалентні перетворення, і коли одне із співвідношень є наслідком іншого.

<u>Приклад Г.1</u>. Знайти менший корінь рівняння

$$5x(x-3) = 5(x-3).$$

Досить часто, побачивши у лівій та правій частинах рівняння однаковий множник $(x-3)$ і скоротивши на нього, дістають рівняння :

$$5x = 5.$$

Корінь цього рівняння $x_2 = 1$ буде меншим коренем вихідного квадратного рівняння. Але розв'язування хибне, оскільки втрачено більший корінь вихідного рівняння $x_1 = 3$, тому задача не розв'язана.

Для того, щоб уникнути помилок такого типу, потрібно ретельно аналізувати вираз, на який ми хочемо поділити обидві частини рівняння. Рекомендуємо рівняння приводити до вигляду $f(x) = 0$, а потім, розклавши ліву частину на множники, застосувати метод розщеплення.

Так, у ***<u>Прикладі Г.1</u>*** правильним буде розв'язок :

$$5x(x-3) - 5(x-3) = 0 \Leftrightarrow 5(x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$$

.

<u>Приклад Г.2</u>. Знайти додатний корінь рівняння

$$\log_3(x^2 + 4x - 5) = \log_3(3x + 7).$$

Часто, не знаходячи ОДЗ, проводять потенціювання і записують розв'язок наступним чином:

$$x^2+4x-5=3x+7 \Leftrightarrow x^2+x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=3 \end{array}\right.$$

і відразу дають відповідь: 3. Хоч відповідь формально вірна, проте, розв'язування хибне.

Дійсно, якщо знайти ОДЗ вихідного логарифмічного рівняння, то з'ясується, що $-4 \notin$ ОДЗ (цей факт можна з'ясувати підстановкою -4 до вихідного рівняння), тобто, корінь рівняння-наслідку $x_2=-4$ не є коренем вихідного рівняння.

Крім того, якщо при розв'язуванні рівнянь використовувались властивості 1)-4) логарифмів, то окрім з'ясування належності коренів останнього рівняння ОДЗ вихідного, потрібно перевірити чи є ці числа коренями вихідного рівняння.

Серйозні труднощі виникають при розв'язуванні нерівностей. Дуже часто неправильно знаходять ОДЗ нерівності (іноді просто забувають про це), або множать обидві частини нерівності на вираз, що містить невідому, без дослідження знаку цього виразу, що порушує рівносильність нерівностей.

Часті помилки при заміні нерівностей сукупністю систем більш простих нерівностей. При цьому або втрачають розв'язки, або одержують сторонні розв'язки.

Щоб запобігти помилок при розв'язуванні нерівностей, рекомендуємо користуватись так званим ***загальним методом***.

Нерівність спочатку приводиться до вигляду:

$f(x)<0$ (або $f(x)\le 0$, або $f(x)>0$, або $f(x)\ge 0$).

Потім потрібно:

1) знайти область визначення функції $D(f)$ (ОДЗ аргумента x);

2) знайти корені функції $f(x)$;

3) розбити $D(f)$ на інтервали, кінцями яких є кінці $D(f)$ і корені функції;

4) визначити знак функції на кожному проміжку, для чого достатньо знайти її знак в довільній точці цього проміжку;

5) в якості розв'язків вибрати проміжки, де знак функції співпав зі знаком нерівності.

Зауважимо, що у випадку, коли функція $f(x)$ є раціональною функцією, загальний метод називають ***методом інтервалів*** і він спрощується (оскільки пункт 4) - зайвий).

Неправильне розуміння ролі нулів функції іноді також призводить до помилок.

Приклад Г.3. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності: $|2x+6|(5x+10)\geq 0$.

Досить розповсюдженим при розв'язуванні такої нерівності є хибне твердження: "Оскільки модуль будь-якого числа є величина невід'ємна, то вихідна нерівність еквівалентна нерівності $5x+10\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$". Відповідь: -2. Але розв'язання хибне, оскільки втрачено розв'язок $x_0=-3$.

Застосуємо загальний метод ($f(x)=|2x+6|(5x+10)$).

1) $D(f)=R$;

2) розв'язуючи рівняння $|2x+6|(5x+10)=0$ знаходимо корені функції $x_1=-3$, $x_2=-2$, які задовольняють нерівність;

3),4) на $(-\infty;-3)$ $f(x)<0$, оскільки, наприклад, $f(-4)=-20$;

на $(-3;-2)$ $f(x)<0$, оскільки, $f(-2{,}5)=-2{,}5$;

на $(-2;+\infty)$ $f(x)>0$, оскільки. $f(0)=60$;

5) розв'язки вихідної нерівності: $\{-3\}\cup[-2;+\infty)$.

Найменший цілий розв'язок $x_0=-3$.

Приклад Г.4. Знайти найбільше ціле значення x, що задовольняє нерівність

$$\frac{8x-24}{x+8}>x.$$

Приведемо дану раціональну нерівність до вигляду $f(x)<0$ (якщо старші коефіцієнти у многочленів раціональної функції додатні, то і функція приймає додатні значення на крайньому правому проміжку із ОДЗ). Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів:

$$\frac{8x-24}{x+8}-x>0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-24}{x+8}>0 \Leftrightarrow \frac{x^2+24}{x+8}<0.$$

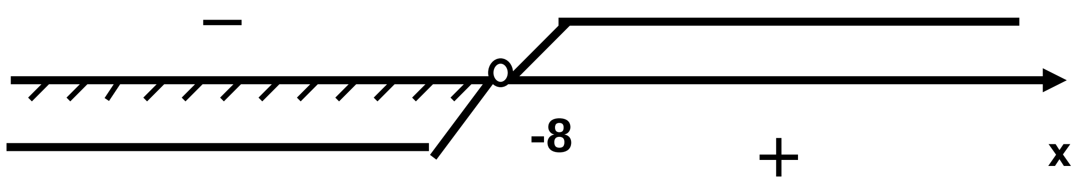
Розглянемо одержану функцію $f(x)=\dfrac{x^2+24}{x+8}$.

$D(f)=(-\infty;-8)\cup(-8;\infty)$ (визначається умовою $x+8\neq 0$).

Коренів функція не має, оскільки, очевидно, що $x^2+24\neq 0$.

Зауваження. Дехто через відсутність коренів робить хибний висновок, що нерівність розв'язків не має, тобто зупиняє розв'язування на пункті 2) методу інтервалів. Проте, ще обов'язково потрібно визначити знак функції на проміжках, що складають її $D(f)$, а потім вибрати проміжки, де знак функції співпаде зі знаком нерівності. Відмітимо, що при розв'язуванні нерівностей методом інтервалів використовують графічну ілюстрацію, як складову частину розв'язку.

Завершуючи розв'язування вихідної раціональної нерівності, дістаємо:



$x \in (-\infty; -8)$. Найбільший цілий розв'язок $x_0 = -9$.

Приклад Г.5 . Розв'язати нерівність $x^2 < \frac{27}{x}$. У відповіді записати найбільше ціле значення x, що задовольняє цю нерівність.

Дехто, домноживши обидві частини нерівності на x, записує:

$$x^2 < \frac{27}{x} \Rightarrow x^3 < 27 \Rightarrow x < 3.$$ Відповідь : 2.

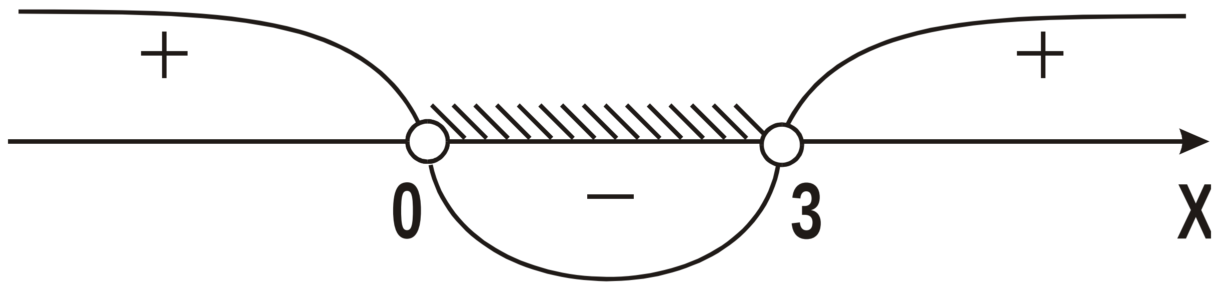
І хоч відповідь випадково “вгадано”, розв'язання нерівності невірне.

Приведемо нерівність до вигляду $f(x) < 0$ і застосуємо метод інтервалів:

$$x^2 < \frac{27}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{27}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 27}{x} < 0 .$$

Область визначення функції $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x}$: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Корінь функції $x_0 = 3$ не задовольняє нерівність.

Графічна ілюстрація



дає множину розв'язків: $(0;3)$. Найбільший цілий розв'язок нерівності $x_0 = 2$.

Додаток 3. Ряди

1. Основні поняття

Розглянемо числову послідовність $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$.

Означення. Символ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ називається **числовим рядом;** $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ – члени ряду, а a_n – загальний член ряду.

Зауваження. Цей вираз називається символом, тому що поняття “нескінченна сума чисел” не завжди має сенс.

Ряд вважається заданим, якщо відомий його загальний член $a_n = f(n)$, що виражає залежність членів ряду від номера n.

Приклад. Записати три перших члени ряду із загальним членом $a_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$.

Розв’язування. Для того щоб знайти члени ряду при заданому загальному члені цього ряду a_n, потрібно:

1. Для знаходження a_1 у виразі для a_n покласти $n=1$, тоді $a_1 = \dfrac{1+1}{2\cdot 1+3} = \dfrac{2}{5}$.

2. Для знаходження a_2 у виразі для a_n покласти $n=2$, тоді $a_2 = \dfrac{3}{7}$.

3. Для знаходження a_3 у виразі для a_n покласти $n=3$, тоді $a_3 = \dfrac{4}{9}$.

Таким чином, ряд має вигляд: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} + \ldots + \dfrac{n+1}{2n+3} + \ldots$

Означення. Сума n перших членів ряду $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ називається **n-ою частковою сумою ряду.**

За означенням: $S_1 = a_1$;

$$S_2 = a_1 + a_2;$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Розглянемо послідовність часткових сум $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$.

Означення. Якщо послідовність часткових сум ряду має скінченну границю

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд називається **збіжним**. При цьому S називається сумою цього ряду.

Якщо скінченої границі послідовності часткових сум не існує, то ряд називається **розбіжним** і тоді він суми не має.

Приклад. Ряд $1+1+1+...+1+...$ розбігається, оскільки послідовність часткових сум

$S_1 = 1;\ S_2 = 1+1 = 2;\ ...;\ S_n = n;$

не має скінченої границі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

Приклад. Ряд $1-1+1-1+...+(-1)^{n-1}+...$ є розбіжним, оскільки послідовність часткових сум $S_1 = 1;\ S_2 = 0;\ S_3 = 1;\ S_4 = 0;...$ границі не має.

Приклад. Чи збігається ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$?

Розв'язування. Оскільки

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1-\frac{1}{2};$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = 1-\frac{1}{3};$$

$$S_3 = 1-\frac{1}{4};$$

… … … … … … …

$$S_n = 1-\frac{1}{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

то даний ряд є збіжним, причому сума цього ряду $S = 1$.

2. Гармонічний та узагальнений гармонічний ряд

Означення. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ називається **гармонічним рядом.** Цей ряд є розбіжний.

Означення. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ називається **узагальненим гармонічним рядом.** Якщо $\alpha > 1$, то цей ряд збіжний. Якщо $\alpha \le 1$, то цей ряд розбіжний.

Наприклад: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ – збіжний $(\alpha = 3 > 1)$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ – розбіжний $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$.

3. Ряд геометричної прогресії

Означення. Рядом геометричної прогресії називається ряд виду:

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \qquad (a = const \neq 0)$$

Членами геометричного ряду є члени геометричної прогресії, тому при $|q| < 1$ ряд збігається і його сума $S = \frac{a}{1-q}$, а при $|q| \geq 1$ ряд розбігається.

4. Найпростіші операції над рядами

Теорема 1. Збіжність (розбіжність) числового ряду не порушується, якщо всі його члени помножити на число, відмінне від нуля.

Теорема 2. Якщо ряди

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ...$$

збігаються та суми їх відповідно дорівнюють u та v, а k - дійсне число, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ і $\sum_{n=1}^{\infty}(ku_n)$ також збігаються і їх суми відповідно дорівнюють $u \pm v$ та ku.

Теорема 3. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ збігається, то збігається також будь-який його залишок, і навпаки, якщо збігається будь-який залишок ряду, то збігається і сам ряд (для числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ залишком називається ряд $a_{k+1} + a_{k+2} + ...$, який отримується з початкового ряду відкиданням перших k членів).

5. Необхідна умова збіжності рядів

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ збігається, то

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доведення.

Дано: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ є збіжним рядом.

Довести: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Оскільки ряд збіжний, то послідовність часткових сум має границю S, тобто існує $\lim_{n\to\infty} S_n = S$; $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$.

Розглянемо $S_n - S_{n-1} = a_n$. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Зауваження. Нагадаємо, що якщо $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то це не означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Так, наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається (узагальнений гармонічний ряд $\alpha = 2 > 1$), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається (гармонічний ряд), але в обох випадках $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Наслідок (достатня умова розбіжності ряду). **Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не виконується необхідна умова збіжності (тобто, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ або не існує), то цей ряд є розбіжним.**

Приклади.

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{3n^2+8}$ розбігається, оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{3n^2+8} = \frac{1}{3} \neq 0$.
2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^8+2}{8n^3+3}$ розбігається, оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7n^8+2}{8n^3+3} = \infty$ (не існує).
3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n$ розбігається, оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 4^n = \infty$ (не існує).

Необхідна умова збіжності ряду не є достатньою. Отже, крім необхідної умови збіжності ряду, треба розглядати і достатні умови збіжності ряду. Про це буде йти мова далі.

5. Достатні умови збіжності рядів з додатними членами

Означення. Рядом з додатними членами називається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, де $a_n > 0 \ \forall n$.

Ознака порівняння рядів з додатними членами

Означення. Якщо для двох рядів з додатними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad \textbf{(I)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \qquad \textbf{(II)}$$

для всіх n виконується нерівність $a_n \ge b_n$, то ряд (I) називається **мажорантним** відносно ряду (II), а ряд (II) **мінорантним** відносно ряду (I).

Теорема (ознака порівняння). Для двох рядів із додатними членами:

1) зі збіжності мажорантного ряду випливає збіжність мінорантного ряду;

2) із розбіжності мінорантного ряду випливає розбіжність мажорантного ряду.

На практиці звичайно користуються ознакою порівняння у граничній формі.

Теорема (ознака порівняння в граничній формі). **Нехай для двох рядів з додатними членами** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **та** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **існує границя** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ $\left(0 < k < \infty\right)$**. Тоді ці ряди або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.**

Зауваження. Якщо загальний член досліджуваного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є раціональною функцією $a_n = \frac{R_m(n)}{Q_p(n)}$, де $R_m(n)$ і $Q_p(n)$ – многочлени відповідно m-ої та p-ої степені від n, то в якості загального члену еталонного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (який застосовується в ознакі порівняння) вибирають

$$b_n = \frac{n^m}{n^p}.$$

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^5+4n}{3n^7+8n^3+1}$.

Розв'язування. Для заданого ряду $a_n = \frac{2n^5+4n}{3n^7+8n^3+1}$ $\left(a_n > 0 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$.

Використовуємо ознаку порівняння у граничній формі. Враховуючи зауваження, вибираємо у якості еталону ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ із загальним членом

$$b_n = \frac{n^5}{n^7} = \frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – збігається (узагальнений гармонічний ряд, у якого $\alpha = 2 > 1$).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5+4n}{3n^7+8n^3+1} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{2}{3} \qquad \left(k = \frac{2}{3},\ 0 < k < \infty\right).$$

За ознакою порівняння в граничній формі ряди вихідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^5+4n}{3n^7+8n^3+1}$ збігається одночасно із еталонним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n+8}$.

Розв'язування. Загальний член ряду $a_n = \frac{3}{5n+8}$, $\left(a_n > 0 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$.

Використовуємо ознаку порівняння у граничній формі. Враховуючи зауваження, вибираємо у якості еталону ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ із загальним членом $b_n = \frac{1}{n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбігається як гармонічний ряд.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5n+8} \cdot \frac{n}{1} = \frac{3}{5}, \qquad \left(k = \frac{3}{5};\ 0 < k < \infty \right).$$

За ознакою порівняння в граничній формі ряди вихідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n+8}$ розбігається одночасно із еталонним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{7n^3+3n}}$.

Розв'язування. Загальний член ряду $a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{7n^3+3n}}$,

$$\left(a_n > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right).$$

Використовуємо ознаку порівняння у граничній формі. Враховуючи зауваження, вибираємо у якості еталону ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ із загальним членом $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{5}}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{5}}}$ розбігається як узагальнений гармонічний ряд $\left(\alpha = \frac{3}{5} < 1 \right)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{7n^3+3n}} \cdot \frac{n^{\frac{3}{5}}}{1} = \frac{1}{\sqrt[5]{7}}, \qquad \left(k = \frac{1}{\sqrt[5]{7}};\ 0 < k < \infty \right).$$

За ознакою порівняння в граничній формі ряди вихідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{7n^3+3n}}$ розбігається одночасно із еталонним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{5}}}$.

6. Ознака Даламбера збіжності ряду з додатними членами.

Теорема. Нехай для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$. Тоді: якщо $d<1$, то ряд збігається; якщо $d>1$, то ряд розбігається; якщо $d=1$, то питання про збіжність ряду залишається відкритим.

Зауваження. Ознаку Даламбера рекомендується використовувати, якщо загальний член ряду містить факторіал $\left(n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\right)$, або показникову функцію $\left(a^n;\, a>0, a\neq 1\right)$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{5^n}$.

Розв'язування. Загальний член ряду $a_n=\frac{n+3}{5^n}$ $\left(a_n>0\right)$ містить показникову функцію 5^n, тому використовуємо ознаку Даламбера. Випишемо $a_{n+1}=\frac{n+1+3}{5^{n+1}}=\frac{n+4}{5^n\cdot 5}$.

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{5^n\cdot 5}\cdot\frac{5^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{5n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{5}<1.$$

За ознакою Даламбера даний числовий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$.

Розв'язування. Загальний член ряду $a_n=\frac{2n+1}{n!}$ $\left(a_n>0\right)$ містить факторіал $n!$, тому використовуємо ознаку Даламбера.

$$a_{n+1}=\frac{2\left(n+1\right)+1}{\left(n+1\right)!}=\frac{2n+3}{n!\left(n+1\right)}.$$

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n!\left(n+1\right)}\cdot\frac{n!}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}=0<1.$$

За ознакою Даламбера даний числовий ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n$.

Розв'язування. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n$ розбігається, оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 8^n = \infty$ (не існує).

Ознака Коші збіжності ряду з додатними членами.

Теорема. Нехай для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$. Тоді: якщо $k < 1$, то ряд збігається; якщо $k > 1$, то ряд розбігається; якщо $k = 1$, то питання про збіжність ряду залишається відкритим.

Зауваження. Ознаку Коші є сенс використовувати, якщо загальний член досліджуваного ряду є n-им степенем деякого виразу.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+8}{7n-5}\right)^n$.

Розв'язування. Загальний член ряду $a_n = \left(\frac{3n+8}{7n-5}\right)^n$ є n-им степенем деякого виразу, тому використовуємо ознаку Коші:

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+8}{7n-5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+8}{7n-5} = \frac{3}{7} < 1.$$

За ознакою Коші даний числовий ряд збігається.

7. Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніца

Означення. Знакопочережним рядом називається ряд вигляду:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$$

(або $-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$), де $a_n > 0 \ \forall n$.

Для з'ясування питання про збіжність таких рядів використовується теорема Лейбніца.

Теорема Лейбніца. Якщо члени знакопочережного ряду $a_n > 0$ задовольняють умовам: 1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то цей ряд збігається і його сума знаходиться в інтервалі $(0; a_1)$, тобто $0 < S < a_1$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Розв'язування. Випишемо цей ряд у розгорнутому вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots.$$

Даний ряд є знакопочережним. Використовуємо теорему Лейбніца. Оскільки: 1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\frac{1}{5}>\ldots$; 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то за ознакою Лейбніца цей ряд збіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n+1)}{5n+1}$.

Розв'язування. Випишемо даний ряд у розгорнутому вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(2n+1)}{5n+1}=-\frac{3}{6}+\frac{5}{11}-\frac{7}{16}+\frac{9}{21}-\frac{11}{26}+\ldots.$$

Даний ряд є знакопочережним. Використовуємо теорему Лейбніца. Оскільки $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+1}=\frac{2}{5}\neq 0$, то цей ряд є розбіжним.

8. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність

Означення. Знакозмінним називається ряд, у якого є нескінченне число членів як одного, так і іншого знака.

Наприклад:

$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$ – знакозмінний ряд;

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$ – знакопочережний ряд;

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$ – не є знакозмінним рядом.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ з довільними членами a_n називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд, складений з абсолютних величин його членів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots.$$

Означення. Знакозмінний ряд називається **умовно збіжним**, якщо сам ряд збігається, а ряд із модулів членів цього ряду розбігається.

Приклад. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots$ збігається абсолютно, оскільки збігається ряд, складений із модулів його членів:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(узагальнений гармонічний ряд $\alpha = 2 > 1$).

Приклад. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ збігається за теоремою Лейбніца, оскільки: 1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \ldots$; 2) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. Але ряд, складений із модулів його членів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

розбігається як гармонічний ряд. Таким чином, даний числовий ряд є умовно збіжним.

Зауваження. В арифметиці відоме правило: від перестановки доданків сума не змінюється. Ряд теж є сумою доданків, але цих доданків безліч, тому відносно рядів є дві теореми.

Теорема. Сума абсолютно збіжного ряду не змінюється від перестановки членів цього ряду.

Теорема Рімана. Перестановкою членів умовно збіжного ряду можна одержати ряд, що має будь-яку наперед задану суму, і навіть розбіжний ряд.

9. Степеневі ряди. Область збіжності степеневого ряду. Теорема Абеля

Означення. Ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

членами якого є степеневі функції, називається **степеневим;** числа c_0, c_1, c_2, c_3, …, c_n, … – **коефіцієнтами степеневого ряду**, які є членами деякої числової послідовності.

Означення. Областю збіжності степеневого ряду називається множина значень x, для яких ряд збігається (тобто кожний числовий ряд, який отримується при цих значеннях x є збіжним).

Очевидно, що точка $x_0 = 0$ завжди належить області збіжності степеневого ряду.

Структура області збіжності степеневого ряду встановлюється за допомогою теореми Абеля.

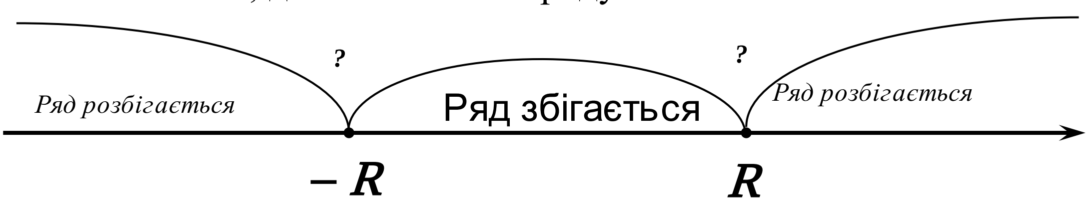
Теорема Абеля.

1. Якщо степеневий ряд збігається при значенні $x = x_1 \neq 0$, то він збігається (причому абсолютно) при всіх x таких, що $|x| < |x_0|$.
2. Якщо степеневий ряд розбігається при значенні $x = x_2$, то він розбігається при всіх x таких, що $|x| > |x_2|$.

Означення. Проміжок $(-R; R)$, всередині якого степеневий ряд збігається абсолютно, а поза яким розбігається, називається **інтервалом збіжності**, а R – **радіусом збіжності** степеневого ряду, який обчислюється за формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Таким чином, для степеневого ряду маємо:



Зауваження.

1. Якщо $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \infty$, то ряд збігається на $(-\infty; \infty)$, тобто, його областю збіжності є вся числова вісь.

2. Якщо $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=0$, то ряд збігається тільки в точці $x_0=0$ тобто, його область збіжності – єдина точка $x_0=0$.

Означення. Областю збіжності степеневого ряду буде його інтервал збіжності $(-R;\,R)$ з доповненням до нього точок $x=R$ і $x=-R$, у залежності від того, як поводиться ряд у цих точках.

Приклад. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

Розв'язування. Для даного степеневого ряду коефіцієнти

$$c_n=\frac{1}{n!},\qquad c_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)n!}.$$

Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)n!}{1}\right|=\infty.$$

Областю збіжності степеневого ряду є $(-\infty;\,\infty)$.

Приклад. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\cdot x^n$.

Розв'язування. Для даного степеневого ряду коефіцієнти

$$c_n=n!,\qquad c_{n+1}=(n+1)!=(n+1)n!.$$

Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)n!}\right|=0.$$

Таким чином, область збіжності заданого ряду складається з однієї точки $x_0=0$.

Приклад. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^3}$.

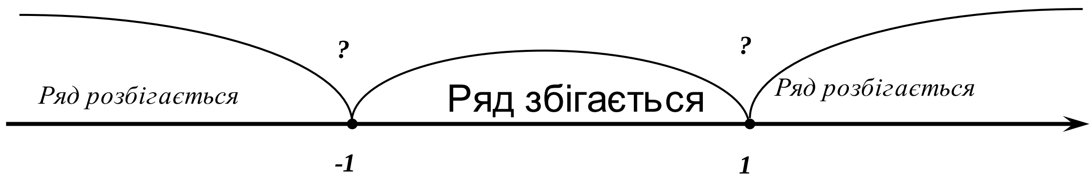
Розв'язування. Для даного степеневого ряду коефіцієнти

$$c_n=\frac{1}{n^3},\qquad c_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^3}.$$

Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n+1)^3}{1}\right|=1.$$

Таким чином, маємо інтервал збіжності:



З'ясуємо питання про збіжність ряду в точках $x_1=-1$ та $x_2=1$.

При $x_1=-1$, отримаємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}=-\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\ldots$$

Даний ряд є знакопочережним. Ряд із модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ збігається як узагальнений гармонічний ($\alpha=3>1$). Тому в точці $x_1=-1$ степеневий ряд збігається абсолютно.

При $x_2=1$ отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, який збігається як узагальнений гармонічний ряд ($\alpha=3>1$).

Областю збіжності степеневого ряду є $[-1;1]$.

Приклад. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{n}}$.

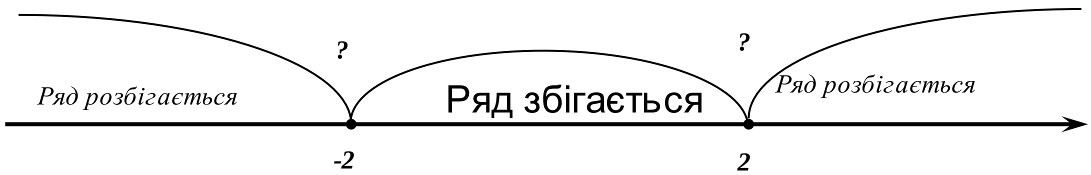
Розв'язування. Для даного степеневого ряду коефіцієнти

$$c_n=\frac{1}{2^n\sqrt{n}},\qquad c_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{2^n\cdot 2\sqrt{n+1}}.$$

Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n\sqrt{n}}\cdot\frac{2^n\cdot 2\cdot\sqrt{n+1}}{1}\right|=2.$$

Таким чином, маємо інтервал збіжності:



З'ясуємо питання про збіжність ряду в точках $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$.

При $x_1 = -2$, отримаємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n \sqrt{n}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots$$

Даний ряд є знакопочережним. Ряд із модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ розбігається як узагальнений гармонічний ($\alpha = \frac{1}{2} \le 1$), тому використовуємо теорему Лейбніца.

Оскільки: **1.** $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \frac{1}{\sqrt{5}} > \ldots$. **2.** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, то цей знакопочережний ряд збіжний.

При $x_2 = 2$ дістаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, який розбігається як узагальнений гармонічний ряд.

Областю збіжності степеневого ряду є $[-2; 2)$.

Приклад. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3 + 1}$.

Розв'язування. Для даного степеневого ряду коефіцієнти

$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 + 1}, \qquad c_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^3 + 1}.$$

Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 + 1} \cdot \frac{(n+1)^3 + 1}{(-1)^n} \right| = 1.$$

Таким чином, маємо інтервал збіжності:

З'ясуємо питання про збіжність ряду в точках $x_1 = -1$ та $x_2 = 1$.

При $x_1 = -1$, отримаємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n^3+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{28} - \frac{1}{65} - \dots$$

Цей ряд є рядом з від'ємними членами. Ряд із модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{2n-1}}{n^3+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ порівняємо із еталонним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ який збігається як узагальнений гармонічний ($\alpha = 3 > 1$).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} \cdot \frac{n^3}{1} = 1 \quad (k = 1, \quad 0 < k < \infty).$$

За ознакою порівняння в граничній формі числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ збігається.

Тому в точці $x_1 = -1$ степеневий ряд збігається абсолютно.

При $x_2 = 1$, отримаємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{28} - \frac{1}{65} - \dots$$

Даний ряд є знакопочережний. Ряд із модулів членів даного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^3+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$$ збігається абсолютно (див. вище).

Областю збіжності степеневого ряду є $[-1;\, 1]$.

Для помітok