Многовиди Калабі-Яу та голоморфно-проективні перетворення.

Е. В. Черевко, О. Є. Чепурна

ОНЕУ, Одеса, Україна

cherevko@usa.com, chepurna67@gmail.com

Келерові многовиди використовуються вже досить довгий час для побудови суперсиметричних сігма-моделей, зокрема відомої моделі, Веса-Зуміно [6]. Метрика g келерового многовиду фігурує у лагранжиані суперсиметричної взаємодії:

$$L = \frac{1}{2} g_{i\hat{j}} D\Phi^i \overline{D}\Phi^{\hat{j}},$$

де

$$\Phi^i(x, \theta) = \phi^i(x) + \overline{\theta}\psi^i(x) + \overline{\theta}\theta F^i(x)$$

– деяке суперполе. Також, у теорії струн використовуються компактні келерові многовиди, так звані *многовиди Калабі-Яу*. Найчастіше їх визначають, як компактні Келерові многовиди $\mathcal{K}^{2m}$, кривина Річі яких дорівнює нулю [1]:

$$R_{ij} = 0, \qquad i, j = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Тут ми вважаємо $n = 2m$ є дійсною розмірністю многовиду, а m – комплексною. У цій роботі ми розглянемо можливість застосувати до многовидів Калабі-Яу голоморфно-проективні вдображення. Дамо деякі необхідні означення.

Нехай, (M^{2m}, g, J) – довільний майже комплексний многовид. Причому, g є римановою метрикою цього многовиду, а J – його майже комплексною структурою. Крива L простору M^{2m} в якому існує напівсиметрична майже комплексна зв'язність, що є заданою параметричними рівняннями $x^i = x^i(t)$, та відповідає диференціальним рівнянням [5, c. 258]:

$$\frac{d^2x^h}{dt^2} + \Gamma^h_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \alpha(t)\frac{dx^h}{dt} + \beta(t)J^h_i\frac{dx^i}{dt}, \tag{2}$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – деякі функції, а Γ^h_{jk} – коефіцієнти майже комплексної зв'язності, має назву *аналітично-планарної*, або, *голоморфно-планарної* кривої.

Означення 1. Дифеоморфізм $f : M^{2m} \longrightarrow \overline{M}^{2m}$ зветься *голоморфно-проективним відображенням*, якщо у результаті дії f усі голоморфно-планарні криві M^{2m} переходять у голоморфно-планарні криві $\overline{M}^{2m}$.

Фактично, голоморфно-проективне відображення – це співвідповідність двох напівсиметричних майже комплексних зв'язностей. Якщо вони є симетричними, то:

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \delta^k_i\psi_j + \delta^k_j\psi_i - \psi_t J^t_i J^k_j - \psi_t J^t_j J^k_i,$$

де ψ_i – деякий, визначений на M^{2m} ковектор. Γ^k_{ij} та $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ – коефіцієнти зв'язностей відповідно многовидів M^{2m} та $\overline{M}^{2m}$. Оскільки метрики на обох многовидах є келеровими, то ці зв'язності будемо вважати зв'язностями Леві-Чівіта. Тензори Річчі цих многовидів пов'язані таким чином:

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} + (2m+2)\psi_{ij}, \tag{3}$$

де
$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i\psi_j + \psi_t J_i^t \psi_s J_j^s, \tag{4}$$
Комою $'',''$ або символом $''\nabla''$, в залежності від зручності ми позначатимемо коваріантну похідну у зв'язності Леві-Чівіта келерової метрики g_{ij} многовиду (M^{2m}).

Тепер, нехай $f : \mathcal{CY}^{2m} \longrightarrow \overline{\mathcal{CY}}^{2m}$ є голоморфно-проєктивним відображенням многовидів Калабі-Яу $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ та $(\overline{\mathcal{CY}}^{2m}, \overline{g}, J)$. Тоді, внаслідок (1) є та (3) з (4) маємо, що
$$\psi_{i,j} - \psi_i\psi_j + \psi_t J_i^t \psi_s J_j^s = 0. \tag{5}$$
Тепер, згорнемо (5) з $J_k^i J_l^j$. враховуючи властивості афінора J, маємо
$$\psi_{i,j} J_k^i J_l^j - \psi_i\psi_j J_k^i J_l^j + \psi_k\psi_l = 0.$$
або
$$\psi_{t,s} J_i^t J_j^s - \psi_t\psi_s J_i^t J_j^s + \psi_i\psi_j = 0. \tag{6}$$
Якщо додати (5) та (6), отримаємо:
$$\psi_{t,s} J_i^t J_j^s + \psi_{i,j} = 0. \tag{7}$$
Згорнемо (7) з тензором g^{ij}, що є матрицею зворотньою до матриці g^{ij} метричного тензору многовиду $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$. Внаслідок того, що ця метрика є ермітовою, тобто
$$g^{ij} = g^{ts} J_i^t J_j^s,$$
маємо, що
$$g^{ij}\psi_{i,j} = 0. \tag{8}$$
З іншого боку, обидві зв'язності, як Γ_{ij}^k так і $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ є зв'язностями Леві-Чівіта, отже тензори Річчі R_{ij}, $\overline{R}_{ij}$. Отже з (3) та (4) випливатиме, що
$$\psi_{i,j} - \psi_{i,j} = 0. \tag{9}$$
Ковектор ψ_i задовільняє (8) та (9), отже, він є гармонічним [5, с. 28]. В силу компактності $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ та (1) можна зробити висновок, що вектор ψ_i є коваріантно сталим([5, с. 29]):
$$\psi_{i,j} = 0.$$
Отже, звідси випливає, що (5) можна записати у вигляді:
$$-\psi_i\psi_j + \psi_t J_i^t \psi_s J_j^s = 0. \tag{10}$$
Згорнемо (10) з контраваріантним вектором $\psi^i = \psi_k g^{ik}$. Внаслідок того, що
$$\psi^k \psi_t J_k^t = 0,$$
отримуємо
$$-||\psi||^2 \psi_j = 0, \tag{11}$$
де $||\psi||^2 = \psi_k g^{ik} \psi_i$. Оскільки метрика на многовиді $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ є рімановою, (11) означатиме, що вектор ψ_i є нульовим. Отже, ми отримали теорему.

Теорема 1. *Між двома многовидами Калабі-Яу* $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ *та* $(\overline{\mathcal{CY}}^{2m}, \overline{g}, J)$ *неможливо навіть локально встановити нетривіальне голоморфно проективне відображення.*

Нехай на майже комплексному многовиді M^n, на якому задано напівсиметричну J-зв'язність, існує векторне поле ξ, таке, що перетворення

$$\overline{x}^h = x^h + \epsilon \xi^h(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{12}$$

для малих значень ϵ відображує будь-яку аналітично-планарну криву у аналітично-планарну криву. Тоді, перетворення (12) матиме назву *інфінітезимального голоморфно-проективного перетворення*. Враховуючи (2), маємо [5, с. 267]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi \Big(\frac{d^2x^h}{dt^2} + \Gamma^h_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} - \alpha(t) \frac{dx^h}{dt} - \beta(t) J^h_i \frac{dx^i}{dt} \Big) \\ = \gamma(t) \frac{dx^h}{dt} + \delta(t) J^h_i \frac{dx^i}{dt} \end{aligned} \tag{13}$$

уздовж будь-якої аналітично-планарної кривої, де $\gamma(t)$ та $\delta(t)$ – деякі функції параметру t. Символом $\mathfrak{L}_\xi$ ми позначаємо похідну Лі(Lie derivative) геометричних об'єктів. Зокрема, похідна Лі тензора $\mathfrak{L}_\xi T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ типу (p, q) уздовж векторного поля ξ в координатах має вигляд [2, с. 196]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\xi T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q, s} \xi^s + T^{i_1 \ldots i_p}_{k j_2 \ldots j_q} \xi^k{}_{,j_1} + \ldots + T^{i_1 \ldots i_p}_{k j_k \ldots j_q} \xi^k{}_{,j_1} - \\ - T^{l i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \xi^{i_1}{}_{,l} - T^{i_1 i_2 \ldots l}_{j_1 \ldots j_q} \xi^{i_p}{}_{,l}. \end{aligned} \tag{14}$$

Похідна Лі об'єкту зв'язності, матиме вигляд:

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma^h_{ij} = \rho_j \delta^h_i + \rho_i \delta^h_j - \rho_t J^t_i J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_i + \theta_j \delta^h_i + \theta_t J^t_i J^h_j, \tag{15}$$

де ρ та θ – є певними ковекторними полями. Вектор ξ має назву *H-проективного вектору*. Якщо ж J-зв'язність є симетричною, то (15) прийме вигляд [4]:

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma^h_{ij} = \rho_j \delta^h_i + \rho_i \delta^h_j - \rho_t J^t_i J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_i. \tag{16}$$

Кажуть, що ковектор ρ є *асоційованим ковектором* до вектору ξ. Крім симетричності J-зв'язності, вимагатимемо збереження при перетвореннях майже комплексної структури, а саме

$$\mathfrak{L}_\xi J^i_j = \xi^k \partial_k J^i_j - J^\alpha_j \partial_\alpha \xi^i + J^i_\alpha \partial_j \xi^\alpha = 0.$$

Оскільки ми розглядатемо лише симетричні J-зв'язності, частинні похідні можна замінити коваріантними у будь якій симетричній зв'язності:

$$\mathfrak{L}_\xi J^i_j = \xi^k \nabla_k J^i_j - J^\alpha_j \nabla_\alpha \xi^i + J^i_\alpha \nabla_j \xi^\alpha = 0.$$

Для довільного келерового многовиду $(\mathcal{K}^{2m}, g, J)$ у зв'язності Леві-Чівіта келерової метрики, рівняння інфінітезимальних перетворень, що зберігатимуть комплексну структуру, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} &1) \xi_{i,j} = \xi_{ij}; \\ &2) \rho_{,i} = \rho_i; \\ &3) \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J^t_j J_{ik} - \rho_t J^t_k J_{ji}; \\ &4) \rho_{i,j} = \frac{1}{n+2} \mathfrak{L}_\xi R_{ij}; \\ &5) \mathfrak{L}_\xi J^i_j = \xi^k \nabla_k J^i_j - J^\alpha_j \nabla_\alpha \xi^i + J^i_\alpha \nabla_j \xi^\alpha = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Тепер, нехай досліджуваний многовид є многовидом Калабі-Яу $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$. Внаслідок компактності можна зробити висновок, що голоморфно-проективний вектор ξ є контраваріантним аналітичним вектором, внаслідок теореми наведеної у [4], [5, с. 280]. Вектор ξ має назву голоморфно-проективного, якщо він є розв'язком рівнянь $(17_1$-$17_4)$. Вектор, для якого виконується (17_5) ми звемо контраваріантним аналітичним вектором. Враховуючи це, а також, беручі до уваги (1), отримуємо, що на многовиді Калабі-Яу $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$, система рівнянь інфінітезимальних перетворень, що зберігатимуть комплексну структуру (17) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &1)\xi_{i,j} = \xi_{ij};\\ &2)\rho_{,i} = \rho_i;\\ &3)\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J^t_j J_{ik} - \rho_t J^t_k J_{ji};\\ &4)\rho_{i,j} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Отже, асоційований вектор ρ_i є коварінтно сталим. Тепрер, якщо ми згорнемо (17_3) з g^{jk}, ми отримаємо, що

$$g^{jk}\nabla_j\nabla_k\xi_i = \xi_\alpha R^\alpha_i,$$

де $R^l_i = g^{lj}R_{ij}$. Вураховуючи (1), маємо:

$$g^{jk}\nabla_j\nabla_k\xi_i = 0. \tag{19}$$

Для довільного компактного многовиду M^n та довільного векторного поля ξ^i на ньому, є справедливою формула ([5, с. 26]):

$$\int\limits_{M^n} \big((g^{jk}\nabla_j\nabla_k\xi_i + \xi_\alpha R^\alpha_i)\xi^i + \frac{1}{2}(\nabla^i\xi^j - \nabla^j\xi^i)(\nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i) + (\nabla^i\xi_i)^2\big)d\sigma = 0. \tag{20}$$

Тут $d\sigma$ є об'ємним елементом $d\sigma = \sqrt{|g|}dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^n$ многовиду M^n, причому $|g| = \det(g_{ij})$. Для многовиду Калабі-Яу $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ (20) прийме вигляд

$$\int\limits_{\mathcal{CY}^{2m}} \big(\xi^i g^{jk}\nabla_j\nabla_k\xi_i + \frac{1}{2}(\nabla^i\xi^j - \nabla^j\xi^i)(\nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i) + (\nabla^i\xi_i)^2\big)d\sigma = 0.$$

Враховуючи (19), отримуємо:

$$\int\limits_{\mathcal{CY}^{2m}} \big(\frac{1}{2}(\nabla^i\xi^j - \nabla^j\xi^i)(\nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i) + (\nabla^i\xi_i)^2\big)d\sigma = 0. \tag{21}$$

З (21) випливає, що у випадку додатньо визначеної метрики g_{ij} вектор ξ має бути гармонічним:

$$\nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i = 0, \qquad \nabla^i\xi_i = 0.$$

Існує теорема, згідно з якою ([5, с. 29]) коваріантна похідна гармонічного вектору є тотожно рівною нулю:

$$\nabla_i\xi_j = 0. \tag{22}$$

З (22) випливає, що вектор ξ є не тільки гармонічним, але і кілінговим:

$$\nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i = 0. \tag{23}$$

Рівняння (23) означає, що вектор ξ породжує однопараметричну групу ізометрії, отже ми отримали таку теорему:

Теорема 2. *Многовид Калабі-Яу* $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ *не дозволяє існування нетривіальних голоморфно-проективних перетворень.*

Отримані нами теореми носять характер "no-go".

[1] *Dine M.* Supersymmetry and String Theory. Beyond the Standard Model /*M. Dine* – Cambridge University Press – 2007, 515p.

[2] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения / *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко*- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 760 с.

[3] *Mikeš J., Vanžurovà A., Hinterleitner I.* Geodesic mappings and some generalizations. /*J. Mikeš* –Olomouc: Palacky University Press, 2009, 304p.

[4] *Tachibana S. Ishihara S.* On infinitesimal holomorphically projective transformations in kahlerian manifolds./*S. Tachibana S. Ishihara*- Tohoku Math. J. (2) 12 (1960), no. 1, 77–101.

[5] *Yano K.* Differential geometry on complex and almost complex spaces /*K. Yano*–New York: Pergamon Press Book – 1965, 326p.

[6] *Zumino B.* Supersymmetry and Kahler Manifolds, /*B. Zumino* //– Phys. Lett. 87B, 203-206 p.