

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



В.М. Шинкаренко, Є.В. Орлов, Л.В. Шинкаренко

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ
У ЗОВНІШНІЙ ЕКОНОМІЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Навчальний посібник

Одеса 2024

УДК 330.47:339.9.012.24(075.8)

Ш 62

*Рекомендовано Вченою Радою Одеського
національного економічного університету
(протокол № 5 від 05 березня 2024 року)*

Рецензенти:

Євтухов В.М., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології ОНУ імені І.І. Мечникова

Ломачинська І.А., доктор економічних наук, доцент, завідувачка кафедри економіки та підприємництва ОНУ імені І.І. Мечникова

Беспалов В.М., кандидат економічних наук, доцент, декан факультету міжнародної економіки Одеського національного економічного університету

Ш62 В.М. Шинкаренко, Є.В. Орлов, Л.В. Шинкаренко

Економіко-математичне моделювання в зовнішній економічній діяльності.

Навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл. - Одеса, ОНЕУ, 2024.– 208 с.

Навчальний посібник написаний відповідно до програми курсу «Економіко-математичні методи та моделі у зовнішньоекономічній діяльності» для бакалаврів спеціальності 292 «Міжнародні економічні відносини» та охоплює розділ «Оптимізаційні методи та моделі у ЗЕД». У посібнику подано матеріал, який дає можливість отримати необхідні знання та навички щодо використання інструментарію математичних методів при розв'язуванні конкретних прикладних задач зовнішньоекономічної діяльності. Наведений матеріал у повній мірі описує сучасний стан математичного апарату, що застосовується в ЗЕД, а саме методи математичного програмування. У посібник включено завдання для самостійної роботи, зокрема і англійською мовою, розв'язок яких сприяє набуттю навичок з використання іноземної мови та розумінню європейської системи навчання. Також наведено авторські здобутки та наукові розробки авторів, що раніше в повній мірі не було висвітлено у науковій та методичній літературі.

© **В.М. Шинкаренко**
Є.В. Орлов
Л.В. Шинкаренко
2024

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Розділ 1. Оптимізаційні методи та моделі у ЗЕД	
Тема 1.1. Поняття про лінійне програмування.....	9
Тема 1.2. Постановка та основні властивості задач лінійного програмування.....	11
Тема 1.3. Приклади побудови математичних моделей економічних процесів.....	21
Тема 1.4. Графоаналітичний метод розв’язування задач лінійного програмування....	44
Тема 1.5. Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування.....	67
Тема 1.6. Метод штучного базису (М-метод) розв’язування задач лінійного програмування.....	86
Тема 1.7. Цілочисельний розв’язок. Методи відсікання. Метод Гоморі. Метод гілок та границь.....	97
Тема 1.8. Двоїстість у лінійному програмуванні. Пари двоїстих задач лінійного програмування. Економічний зміст двоїстих оцінок.....	105
Тема 1.9. Розв’язання задачі планування випуску продукції з використанням надбудови «Solver» електронних таблиць Excel.....	117
Тема 1.10. Транспортна задача (ТЗ). Метод потенціалів. Застосування ТЗ в моделюванні економічних процесів.....	127
Тема 1.11. Розв’язання ТЗ з використанням надбудови «Solver» електронних таблиць Excel.....	139
Тема 1.12. Елементи нелінійного програмування	158
Тема 1.13. Застосування оптимізаційних методів для вирішення реальних задач планування ЗЕД.....	169
Список літератури.....	201

ВСТУП

Європейський вектор розвитку України надає великі можливості бізнесу для здійснення зовнішньоекономічної діяльності (ЗЕД). Серед головних причин і чинників, що спонукають до поглиблення участі економіки України в міжнародному господарюванні, можна назвати переорієнтування з пострадянського економічного співробітництва на європейське та досить високу частку експорту у формуванні ВВП.

Діяльність на міжнародному ринку має великі переваги, проте пов'язана з різними факторами ризику. Захищеність закордонних активів та мінімізація наслідків кризових явищ зумовлюють виявлення причин допущення помилок і втрат, пошук наявних резервів та розроблення заходів для подальшого покращення здійснення зовнішньоекономічної діяльності компанії, підприємства, держави. Підґрунтям для таких заходів є економіко-математичне моделювання у ЗЕД. Саме математичне моделювання показує, як застосовувати набуті математичні знання до вирішення конкретних виробничих ситуацій у ЗЕД, головною метою якого є антикризове, стабільне функціонування відповідних закордонних та національних інституцій при будь-яких змінах навколишнього фінансового та ринкового середовища.

Основна мета викладання дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі у зовнішньоекономічній діяльності» є формування у студентів навичок проведення наукових досліджень у галузі зовнішньо-економічної діяльності із застосуванням сучасних комп'ютерних технологій, включаючи спеціалізовані пакети прикладних програм.

Завдання навчальної дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі у зовнішньоекономічній діяльності»:

- вивчення основ теорії оптимізації та прийняття рішень в зовнішньоекономічній діяльності;

- засвоєння методичних підходів щодо статистичного аналізу та застосування регресійних, економетричних методів обґрунтування й підготовки рішень у зовнішньо-економічній діяльності;

- оволодіння навичками самостійного застосування апарату, комп'ютерної техніки та сучасного програмного забезпечення під час проведення економічного та фінансового аналізу у сфері зовнішньо-економічній діяльності.;

Вивчення навчальної дисципліни передбачає формування та розвиток у студентів компетентностей:

загальних:

ЗК3. Здатність навчатися та бути сучасно навченим

ЗК7. Навички використання інформаційних та комунікаційних технологій.

ЗК8. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК12. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

Спеціальних (фахових, предметних):

СК3. Здатність виявляти особливості функціонування середовища міжнародних економічних відносин та моделей економічного розвитку.

СК5. Здатність здійснювати комплексний аналіз та моніторинг кон'юнктури світових ринків, оцінювати зміни міжнародного середовища та вміти адаптуватися до них.

СК9. Здатність до діагностики стану досліджень міжнародних економічних відносин та світового господарства у міждисциплінарному поєднанні із політичними, юридичними, природничими науками.

СК11. Здатність проводити дослідження економічних явищ та процесів у міжнародній сфері з урахуванням причинно-наслідкових та просторово-часових зв'язків.

Результати навчання даної дисципліни деталізують такі програмні результати навчання:

РН 3. Використовувати сучасні інформаційні та комунікаційні технології, програмні пакети загального і спеціального призначення.

РН 7. Застосовувати набуті теоретичні знання для розв'язання практичних завдань та змістовно інтерпретувати отримані результати.

РН 10. Ідентифікувати та виокремлювати особливості функціонування суб'єктів міжнародних відносин та моделей їх економічного розвитку.

РН 12. Здійснювати комплексний аналіз складних економічних систем, зіставляти та порівнювати їх складові, оцінювати й аргументувати оцінки результативності їх функціонування.

РН 24. Обґрунтовувати вибір і застосовувати інформаційно-аналітичний інструментарій, економіко-статистичні методи обчислення, складні техніки аналізу та методи моніторингу кон'юнктури світових ринків.

Курс «Економіко-математичні методи та моделі у зовнішньоекономічній діяльності» складається із трьох розділів згідно математичному апарату, що застосовується для дослідження економічних об'єктів .

Перший розділ «Оптимізаційні методи та моделі у ЗЕД» охоплює основні методи лінійного та нелінійного програмування. До нього входять наступні теми:

1. Поняття про лінійне програмування.
2. Постановка та основні властивості задач лінійного програмування.
3. Приклади побудови математичних моделей економічних процесів.
4. Графоаналітичний метод розв'язування задач лінійного програмування.
5. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.

Двоїстість у лінійному програмуванні. Застосування MS Excel.

6. Транспортна задача та її інтерпретації.
7. Елементи нелінійного програмування.
8. Застосування оптимізаційних методів для вирішення реальних задач планування ЗЕД.

Другий розділ «Економетричне моделювання у ЗЕД» допомагає зрозуміти загальні принципи побудови економетричних моделей та їх застосування для вирішення виробничих задач в діяльності підприємств на зовнішньому ринку. До розділу включено наступні теми:

1. Лінійна регресійна модель та її характеристики.
2. Нелінійна парна регресія.
3. Множинна регресія та її характеристики.
4. Виробнича функція у ЗЕД.
5. Економетричні моделі динаміки, методи прогнозування та аналізу часових рядів.
6. Прикладні економетричні моделі ЗЕД.

Третій розділ «Економіко-математичне моделювання» присвячено принципам та методиці побудови математичних моделей в ЗЕД. До розділу входять наступні теми:

1. Балансовий метод в міжнародній торгівлі.
2. Модель Солоу.
3. Моделювання ЗЕД в умовах ризику та невизначеності.
4. Багатовимірне ранжування та рейтингове оцінювання в ЗЕД.
5. Кластерний аналіз в зовнішньоекономічній діяльності.

Навчальний посібник написаний відповідно до програми курсу «Економіко-математичні методи та моделі у зовнішньоекономічній діяльності» для бакалаврів спеціальності 292 «Міжнародні економічні відносини» та охоплює перший розділ «Оптимізаційні методи та моделі у ЗЕД».

У посібнику подано матеріал, який дає можливість читачеві отримати необхідні знання та навички щодо використання інструментарію математичних методів при розв'язуванні конкретних прикладних задач зовнішньоекономічної діяльності. Наведений матеріал досить повно описує сучасний стан математичного апарату, що застосовується в ЗЕД, а саме методи математичного програмування.

Навчальний посібник підготував авторський колектив у складі доцентів кафедри Статистики та математичних методів в економіці Одеського національного економічного університету Шинкаренка В.М., Орлова Є.В. та доцента кафедри Менеджменту Міжнародного гуманітарного університету Шинкаренко Л.В.

У посібник, окрім теоретичного матеріалу, прикладів застосування математичних методів у ЗЕД, включено завдання для самостійної роботи, зокрема і англійською мовою, розв'язок яких сприяє набуттю навичок з використання іноземної мови та розумінню європейської системи навчання. Також наведено авторські здобутки та наукові розробки викладачів Одеського національного економічного університету, що раніше в повній мірі не було висвітлено у науковій та методичній літературі.

Щиро вдячні рецензентам за прискіпливий розгляд рукопису і надання низки корисних зауважень, що сприяли покращенню змісту посібника.

Виражаємо щиру подяку колективу кафедри Статистики та математичних методів в економіці Одеського національного економічного університету за ряд зауважень та побажань під час обговорювання підручника на методичному семінарі та засіданнях кафедри а також членам навчально-методичної ради університету за прискіпливе ознайомлення з посібником.

Будемо щиро вдячними за відгуки та пропозиції щодо вдосконалення структури і змісту посібника, які можна надсилати на електронну адресу: stat@oneu.ukr.education

РОЗДІЛ 1. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ У ЗЕД

Тема 1.1. Поняття про лінійне програмування

Лінійне програмування як окремий розділ прикладної математики було сформовано всередині ХХ сторіччя на підґрунті праць видатного вченого, лауреата Нобелівської премії Л. В. Канторовича. Наприкінці 40-х років вийшла в світ низка праць дослідника, найбільш відома з яких «Математичні методи організації та планування виробництва». В роботах вченого за допомогою математичного методу допустимих множників було вирішено економічні задачі про оптимальне завантаження виробничих потужностей, розкрою матеріалу з мінімальними залишками, розподілу вантажу за видами транспорту тощо. Академік Л. В. Канторович є засновником теорії лінійного програмування, він вперше ввів терміни «оптимальний план», «оптимальний розподіл», виявив широке коло економічних проблем, розв'язання яких потребує математичних методів.

Термін «лінійне програмування» був введений у 1949 році математиком Дж. Данцигом, який запропонував чіткий алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування, що має назву «симплексний метод».

Лінійне програмування набуло широкого розвитку у зв'язку з тим, що було встановлено низку задач у галузі планування та управління, вирішення яких приводе до лінійного програмування. Задачі лінійного програмування знайшли використання у багатьох прикладних економічних дослідженнях, зокрема у міжнародних економічних відносинах (баланс міжнародної торгівлі, логістичні задачі міжнародних перевезень, оптимальне завантаження складських приміщень, задачі, пов'язані з теорією ігор тощо).

Важливим чинником у розширенні сфер застосування лінійного програмування став стрімкий розвиток комп'ютерної техніки та сучасних інформаційних технологій. Опанування методами вирішення прикладних задач оптимізації стало необхідним атрибутом для компетентного фахівця у галузі управління та адміністрування. Для

розв'язування оптимізаційних задач розроблено могутній арсенал комп'ютерних технологій, які дають можливість досліднику не занурюватись у складні ітераційні процедури методів оптимізації, а зосередитись на аналізі виробничої проблеми та шляхах її вирішення.

Зазначимо, що курс «Оптимізаційні методи та моделі» викладається окремою дисципліною у багатьох вітчизняних та закордонних вишах для студентів економічного профілю. Наведемо означення лінійного програмування, що сформульовано професором Віденського університету Андреа Сейдлом у його підручнику з курсу «Оптимізаційні методи та моделі»: 1) математичні функції в моделі є лінійними; 2) для розв'язку задачі складається певний алгоритм дій, тобто програма дій (не обов'язково комп'ютерна програма). Означення лінійного програмування англійською мовою наведено на Рисунку 1.1.

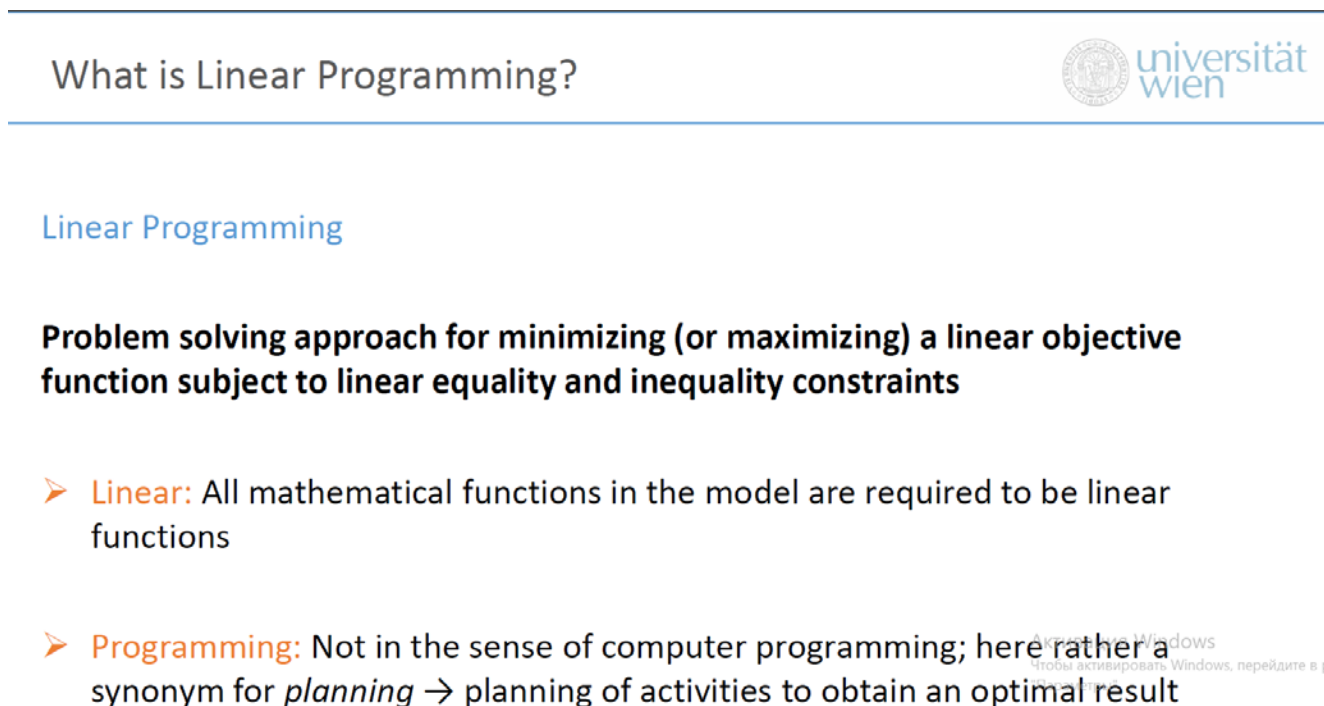


Рис. 1.1. Означення лінійного програмування згідно підручника
Андреа Сейдла [47] (Віденський університет)

План (допустимий розв'язок), в якому цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення, називається **оптимальним планом** задачі лінійного програмування.

Запишемо задачу лінійного програмування у векторній формі:

$$\begin{aligned} F = \bar{C} \cdot \bar{X} \quad \max (\min) \\ x_1 \bar{A}_1 + x_2 \bar{A}_2 + \dots + x_n \bar{A}_n = \bar{B}, \\ \bar{X} \geq 0. \end{aligned}$$

де $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n -вимірний вектор змінних, $\bar{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – n -вимірний вектор, координатами якого є коефіцієнти цільової функції,

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \bar{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} - m\text{-вимірні вектори, координатами яких}$$

є коефіцієнти біля змінних у системі основних обмежень,

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - m\text{-вимірний вектор, координатами якого є праві частини у системі}$$

основних обмежень.

Допустимий розв'язок задачі лінійного програмування називається **опорним**, якщо система векторів $\vec{A}_j$, які входять до системи основних обмежень біля додатних змінних x_j є лінійно незалежною.

Наведемо основні теореми загальної теорії лінійного програмування, що стосуються властивостей розв'язків ЗЛП.

Теорема 2.1. Область допустимих розв'язків задачі лінійного програмування (множина планів ЗЛП) є опуклою множиною. Кожний опорний допустимий розв'язок задачі лінійного програмування відповідає кутовій точці множини планів.

Теорема 2.2. Якщо область допустимих розв’язків задачі лінійного програмування є замкнутою та обмеженою, то оптимальний план задачі існує і співпадає принаймні з одним із опорних допустимих розв’язків.

Теорема 2.3. Якщо область допустимих розв’язків задачі лінійного програмування є необмеженою, то оптимальний план задачі існує і співпадає принаймні з одним із опорних допустимих розв’язків тільки у тому випадку, коли цільова функція обмежена зверху для задач на максимум та знизу для задач на мінімум.

Теорема 2.4. Якщо оптимальний план задачі лінійного програмування співпадає з декількома опорними допустимими розв’язками, то задача має безліч розв’язків, які є опуклою лінійною комбінацією опорних розв’язків.

Розглянемо більш детально властивості точкових множин, що знадобляться в подальшому для формування та розв’язку задач.

Точка $A \in E^m$ є *опуклою лінійною комбінацією* (ОЛК) точок $A_1, \dots, A_k \in E^m$ якщо існують числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ такі, що $\alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ а також виконується рівність

$$\vec{A} = \alpha_1 \vec{A}_1 + \dots + \alpha_k \vec{A}_k.$$

Відрізком $[A; B]$ називається об’єднання усіх можливих ОЛК точок A та B . Точка множини називається внутрішньою, якщо в деякому її околі містяться тільки точки даної множини. Точка множини називається граничною, якщо у бідь-якому її околі містяться як точки, які належать даній множині, так і точки, що не належать цієї множині. Точка множини називається кутовою, якщо вона не є внутрішньою для жодного відрізка, який цілком належить даній множині.

Множина називається випуклою, якщо вона разом з бідь-якими двома своїми точками містить весь відрізок, який поєднує ці точки. Множина називається замкнутою, якщо вона включає всі свої граничні точки. Множина називається обмеженою, якщо існує круг радіуса кінцевої довжини з центром у будь-якій точці

цієї множини, який повністю містить у собі дану множину; у протилежному випадку множина називається необмеженою.

Опуклим багатокутником називається опукла замкнена обмежена множина, яка має кінцеву кількість кутових точок. Опуклою оболонкою точок називається об'єднання всіх можливих ОЛК цих точок.

Приклад 2.1. Показати, що точка $A(0; -3)$ є ОЛК точок $A_1(-3; 0)$ та $A_2(6; -9)$.

Розв'язування. Для того, щоб точка A була ОЛК точок A_1 та A_2 потрібно, щоб існували такі числа α_1, α_2 , що $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ та виконувалася векторна рівність

$$\vec{A} = \alpha_1 \vec{A}_1 + \dots + \alpha_k \vec{A}_k.$$

Цю векторну рівність можна записати в наступному вигляді

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Із цієї рівності можна отримати два рівняння для відповідних компонент, які повинні виконуватися сумісно:

$$\begin{cases} 0 = (-3) \cdot \alpha_1 + 6 \cdot \alpha_2 \\ -3 = 0 \cdot \alpha_1 + (-9) \cdot \alpha_2 \end{cases}$$

Розв'язкам даної системи будуть наступні значення $\alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{2}{3}$. Тому що обидва значення невід'ємні та їх сума дорівнює одиниці, то за визначенням точка A є ОЛК точок A_1 та A_2 .

Приклад 2.2. Визначити, чи буде точка $A(2; 1)$ ОЛК точок $A_1(-2; -2), A_2(1; 5)$ та $A_3(6; -2)$.

Розв'язування. Напишемо векторну рівність

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

разом з умовою $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} (-2) \cdot \alpha_1 + \alpha_2 + 6 \cdot \alpha_3 = 2 \\ (-2) \cdot \alpha_1 + 5 \cdot \alpha_2 - 2 \cdot \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему за допомогою правила Крамера. Визначник системи дорівнює $\Delta = -56$, а визначники відповідних невідомих дорівнюють:

$\Delta_{\alpha_1} = -13$, $\Delta_{\alpha_2} = -24$, $\Delta_{\alpha_3} = -19$. Скориставшись правилом Крамера, отримаємо

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta} = \frac{13}{56}, \alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta} = \frac{24}{56}, \alpha_3 = \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta} = \frac{19}{56}.$$

Оскільки отримані значення величин α_i невід'ємні, можна зробити висновок, що точка A є ОЛК точок A_1, A_2 та A_3 .

Приклад 2.3. Визначити, чи буде точка $B(5; 3)$ ОЛК точок $A_1(-2; -2), A_2(1; 5)$ та $A_3(6; -2)$.

Розв'язування. Напишемо векторну рівність

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

разом з умовою $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} (-2) \cdot \alpha_1 + \alpha_2 + 6 \cdot \alpha_3 = 5 \\ (-2) \cdot \alpha_1 + 5 \cdot \alpha_2 - 2 \cdot \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему за допомогою правила Крамера. Визначник системи дорівнює $\Delta = -56$, а визначники відповідних невідомих дорівнюють:

$\Delta_{\alpha_1} = -18$, $\Delta_{\alpha_2} = -40$, $\Delta_{\alpha_3} = -34$.

Скориставшись правилом Крамера, отримаємо

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta} = -\frac{18}{56}, \alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta} = \frac{40}{56}, \alpha_3 = \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta} = \frac{34}{56}.$$

Оскільки серед отриманих значень величин α_i є від'ємне, можна зробити висновок, що точка A не є ОЛК точок A_1, A_2 та A_3 .

Наступне твердження дозволить в подальшому розв'язувати системи нерівностей.

Множиною розв'язів нерівності з двома змінними

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

є одна з двох півплощин, на які уся площина поділяється прямою

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, включаючи цю пряму, а інша півплощина з тією ж прямою є множиною розв'язки нерівності $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$.

Приклад 2.4. Побудувати множину розв'язків нерівності:

а) $3x_1 - 4x_2 + 12 \leq 0$; б) $3x_1 - 2x_2 \geq 0$.

Розв'язування. Множиною розв'язків буде півплощина.

а) Побудуємо границю півплощини – пряму $3x_1 - 4x_2 + 12 = 0$, для чого знаходимо точки її перетину з осями координат $A(-4; 0)$ та $B(0; 3)$ (рис 2.1.).

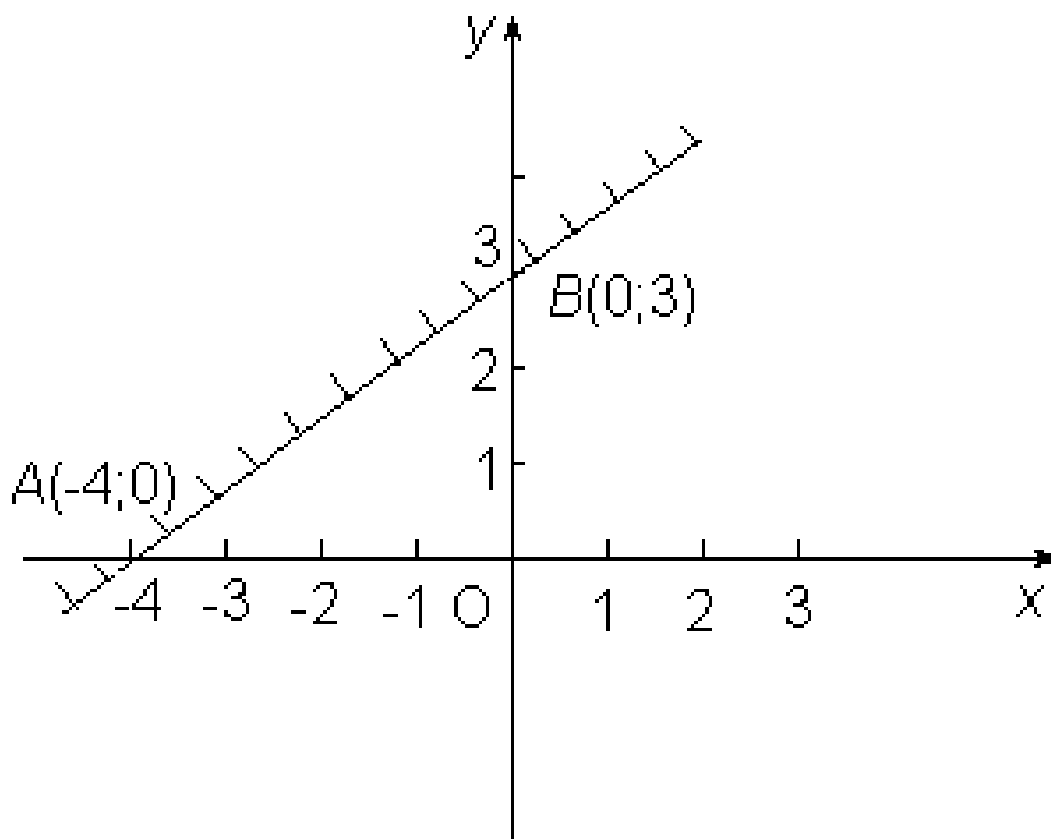


Рис. 2.1. Множина розв'язків нерівності $3x_1 - 4x_2 + 12 \leq 0$

Для визначення шуканої півплощини (верхньої або нижньої) рекомендується задати довільну контрольну точку, не лежачу на її границі – побудованій прямій. Якщо нерівність виконується в контрольній точці, то вона виконується і в усіх точках півплощини, що містить контрольну точку, і не виконується в усіх точках іншої півплощини. І навпаки, в разі невиконання нерівності в контрольній точці, вона не виконується в усіх точках півплощини, що містить контрольну точку і виконується в усіх точках іншої півплощини.

В якості контрольної точки зручно взяти початок координат $O(0;0)$, який не належить побудованій прямій. Координати точки O не задовольняють нерівності $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12 \leq 0$, отже, розв'язкам даної нерівності є нижня півплощина, яка не містить контрольну точку O . Шукана півплощина виділена штриховкою.

б) Побудуємо границю півплощини – пряму лінію, рівнянням якої є $3x_1 - 2x_2 = 0$. Однією з цих точок є початок координат (Рис. 2.2.), а іншу точку беремо на прямій довільно, наприклад $A(2; 3)$.

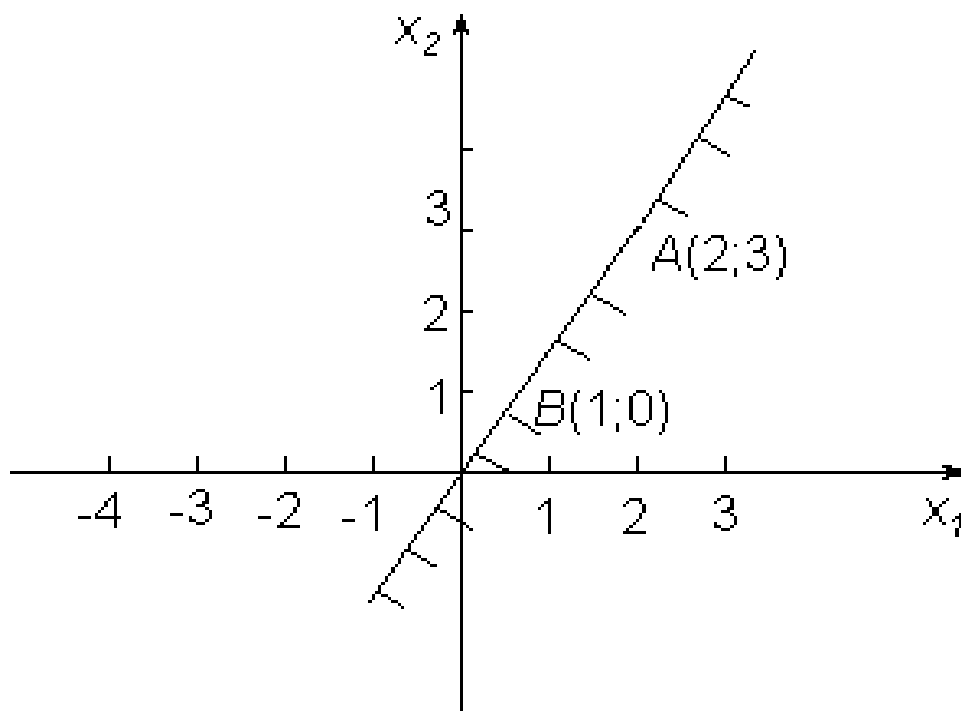


Рис. 2.2. Множина розв'язків нерівності $3x_1 - 2x_2 \geq 0$

За контрольну візьмемо, наприклад точку $B(1; 0)$. Саму „легку” точку $O(0; 0)$ у даному випадку в якості контрольної вибирати не слід, оскільки вона лежить на побудованій прямій. Оскільки координати контрольної точки $B(1; 0)$ задовольняють нерівності, тобто $3 - 2 \cdot 0 \geq 0$, то розв’язкам даної нерівності є нижня (права) півплощина що містить цю точку.

Приклад 1.5. Побудувати множину розв’язків системи нерівностей

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \leq 20, & (I) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, & (II) \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, & (III) \\ x_1 \geq 0, & (IV) \\ 0 \leq x_2 \leq 6 & (V, VI). \end{cases}$$

та вказати кутові точки.

Розв’язування. Для побудови шуканої множини розв’язків системи нерівностей будемо послідовно множини розв’язків кожної нерівності аналогічно тому, як це робилося в попередньому завданні. Рекомендуємо після знаходження кожної півплощини і виділення її відповідним штрихуванням знаходити послідовно їх перетин: спочатку півплощини розвозів перших двох нерівностей (багатокутної області **GFD** на Рис. 2.3),

$$-5x_1 + 4x_2 \leq 20, (I)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24, (II)$$

потім перших трьох нерівностей (трикутника **GFD**),

$$x_1 - 3x_2 \leq 3, (III)$$

потім – четвертої нерівності (чотирикутник **HAFD**)

$$x_1 \geq 0, (IV)$$

далі п’ятої нерівності (п’ятикутник **OAFDE**)

$$x_2 \leq 6 (V)$$

і, нарешті, усі шість нерівностей – опуклого багатокутника **OABCDE**.

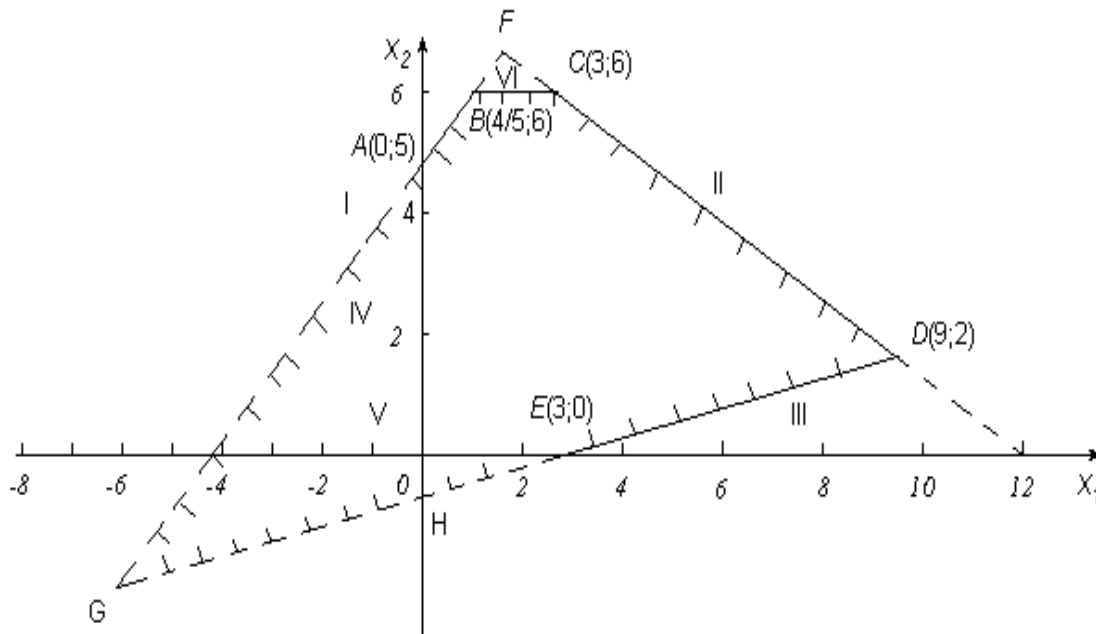


Рис. 2.3. Множина розв'язків системи нерівностей прикладу 1.5.

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти ОЛК точок $A_1(2; 5)$, $A_2(5; 3)$, $A_3(6; 1)$, $A_4(3; 2)$ якщо $\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 0,3$, $\alpha_3 = 0,4$, $\alpha_4 = 0,2$ та перевірити графічно чи належить отримана точка чотирикутнику $A_1A_2A_3A_4$.
2. Скласти ОЛК точок $A_1(0; 3)$, $A_2(2; 1)$, $A_3(3; 7)$, $A_4(6; 2)$ якщо $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 0,1$, $\alpha_3 = 0,3$, $\alpha_4 = 0,4$ і перевірити графічно чи належить отримана точка чотирикутнику $A_1A_2A_3A_4$.
3. З'ясувати, чи є кожна із наступних точок $B(4; 4)$, $C(3; 5)$, $D(5; 3)$ ОЛК точок $A_1(2; 2)$, $A_2(4; 6)$, $A_3(8; 4)$, і якщо так, то визначити коефіцієнти ОЛК $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
4. З'ясувати, чи є кожна із наступних точок $B(1; 4)$, $C(3; 2)$, $D(2; 3)$ ОЛК точок $A_1(0; 1)$, $A_2(2; 5)$, $A_3(6; 3)$, і якщо так, то визначити коефіцієнти ОЛК $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

5. Розв'язати графічно системи нерівностей і виділити властивості відповідних множин точок:

$$\text{a) } \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 3x_2 \geq 12 \end{cases}; \text{ б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \end{cases}; \text{ в) } \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}.$$

6. Розв'язати графічно системи нерівностей і визначити координати кутових точок отриманих багатокутників:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}; \text{ б) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 11 \\ -2x_1 + 5x_2 \geq 13 \\ 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

7. Записати наступні задачі лінійного програмування у векторній формі:

$$\text{a) } z = 5x_1 + 7x_2 \text{ (max)} \quad \text{б) } z = -2x_1 + x_2 \text{ (min)}$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 10 \\ 2x_1 - 5x_2 \geq 11 \\ 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

8. Записати наступні задачі лінійного програмування у векторній формі:

$$\text{a) } z = x_1 + 7x_2 + 3x_3 \text{ (max)} \quad \text{б) } z = 5x_1 - x_2 + 7x_3 \text{ (min)}$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 8x_3 \geq 10 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 8 \\ x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 20 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq 21 \\ 2x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}.$$

Тема 1.3. Приклади побудови математичних моделей економічних процесів

Задача визначення оптимального плану виробництва (раціонального використання ресурсів): для деякої виробничої системи (фірми, підприємства, галузі) необхідно визначити план (обсяг) випуску n видів продукції $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ за умови найкращого способу використання її наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяні m ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне оснащення, складські приміщення тощо. Відомі загальні запаси ресурсів b_i ($i = \overline{1, m}$), норми витрат i -го ресурсу на виробництво одиниці j -ої продукції a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) та прибуток з одиниці j -ої реалізованої продукції c_j ($j = \overline{1, n}$).

Критерій оптимальності: максимум прибутку.

Позначимо через $x_1, x_2, \dots, x_n$ обсяги виробництва відповідно першого, другого та інших. видів продукції.

Оскільки на одиницю продукції 1-го виду витрачається a_{11} ресурсу першого виду, то на виробництво першого виду продукції обсягом x_1 необхідно витратити $a_{11} \cdot x_1$ цього ресурсу. На другий вид продукції обсягом x_2 витрати першого ресурсу дорівнюватимуть $a_{12} \cdot x_2$ і т.д. На виробництво всіх видів продукції буде використано такий обсяг першого ресурсу:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n.$$

Ця величина має не перевищувати наявного обсягу першого ресурсу b_1 . Отже, обмеження щодо використання першого ресурсу матиме вигляд:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1.$$

Аналогічно записують обмеження стосовно використання всіх інших виробничих ресурсів. Прибуток від реалізації виготовленої продукції всіх видів становитиме:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Загалом лінійна економіко-математична модель даної задачі матиме вигляд:

за умов

Приклад 3.1. Для продажу на міжнародному ринку підприємство випускає три фарби: фасадну, для внутрішніх робіт вологостійку та для внутрішніх робіт йну. Для виробництва використовуються три види інгредієнтів. Відомі питомі ти інгредієнтів на виробництво 1 банки фарби кожного виду, складські запаси дієнтів та прибуток, що отримується від продажу 1 банки фарби.

Питомі витрати, запаси інгредієнтів та прибуток від продажу

Інгредієнти	Норми витрат i -го інгредієнту на виготовлення j -го виду продукції			Запаси інгредієнтів
	фасадна	звичайна	вологостійка	
1	9	5	6	600
2	4	5	6	400
3	3	4	5	800
Прибуток	20	18	22	

22

Розв'язання. Позначимо через x_1, x_2, x_3 – запланований випуск фарби фасадної, звичайної та вологостійкої відповідно (банок); z – запланований загальний прибуток (Євро). Прибуток підприємства потрібно максимізувати, при цьому витрати кожного виду інгредієнтів не повинні перевищувати наявний запас.

Математична модель задачі набуває вигляду:

$$\begin{aligned} z &= 20x_1 + 18x_2 + 22x_3 && \textbf{(max)} \\ \begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 600; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 400; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 800; \end{cases} \\ x_i &\geq 0; \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Складемо двоїсту задачу, яка полягає у мінімізації вартості ресурсів. Позначимо через y_1, y_2, y_3 – заплановану вартість (виробничу або тіньову ціну) одиниці інгредієнтів 1, 2 та 3 виду відповідно (Євро); f – загальна вартість ресурсів (Євро).

Математична модель двоїстої задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} z &= 600y_1 + 400y_2 + 800y_3 && \textbf{(min)} \\ \begin{cases} 9y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 20; \\ 5y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 18; \\ 6y_1 + 6y_2 + 5y_3 \geq 22; \end{cases} \\ y_i &\geq 0; \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Приклад 3.2. Із залізничного вокзалу до сусідньої країни щоденно відповідальною особою формуються пасажирські та швидкі потяги. Кількість пасажирів у вагонах різного класу та наявний парк вагонів на залізничній станції вокзалу наведено у таблиці 3.2.

Побудуйте математичну модель задачі, на підґрунті якої можливо знайти таке співвідношення між числом пасажирських та швидких потягів, щоб число пасажирів, які щодня відправляються із залізничного вокзалу до іншої країни, досягло максимальної кількості.

Вихідні дані прикладу 3.2.

Характеристики парка вагонів	Тип вагона				
	Багажний	Поштовий	Плацкартний	Купейний	Люкс
Місткість вагонів, осіб	–	–	58	40	32
Наявний парк вагонів, шт.	12	8	80	72	24
Кількість вагонів у потягу, шт.					
Пасажирський	1	–	8	6	1
Швидкий	1	1	5	4	3

Побудуйте математичну модель задачі, на підґрунті якої можливо знайти таке співвідношення між числом пасажирських та швидких потягів, щоб число пасажирів, які щодня відправлялися, досягло максимуму.

Розв'язання. Позначимо через x_1 – заплановану щоденну кількість пасажирських потягів, за x_2 – плановану щоденну кількість швидких потягів; z – запланована щоденна кількість пасажирів. Оскільки кількість пасажирів потрібно максимізувати, а кількість вагонів кожного класу у потягах не повинна перевищувати наявний парк, то математична модель задачі набуває вигляду:

$$z = (8 \cdot 58 + 6 \cdot 40 + 1 \cdot 32) \cdot x_1 + (5 \cdot 58 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 32) \cdot x_2 \quad (\max)$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 \leq 12; \\ 0x_1 + 1x_2 \leq 8; \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 81; \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 70; \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 24; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

Зауваження. Звернемо увагу, що змінні в побудованій ЗЛП набувають лише цілих значень. Такі задачі називають задачами цілочисельного програмування.

Задача про дієту (або про суміш): деякий раціон складається з n видів продуктів. Відомі вартості одиниці кожного продукту – c_j ($j = \overline{1, n}$), кількість

необхідних організму поживних речовин m та потреба в кожній i -ій речовині – b_i ($i = \overline{1, m}$). В одиниці j -го продукту міститься a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) поживної речовини i . Необхідно знайти оптимальний раціон $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності – мінімальна вартість раціону.

Позначимо через $x_1, x_2, \dots, x_n$ – кількість відповідного j -го виду продукту ($j = \overline{1, n}$). Система обмежень описуватиме забезпечення в раціоні кожної поживної речовини не нижче зазначеного рівня b_i ($i = \overline{1, m}$). Економіко-математична модель матиме вигляд:

[illegible]

Аналогічно як у виробничій задачі, економіко-математична модель задачі про «дієту» (або про суміш) також може описувати інші економічні процеси. По суті цей тип задач дає змогу знаходити оптимальне поєднання деякого набору компонент в одне ціле, причому таке поєднання має задовольняти певні умови.

Приклад 3.3. Для підтримки нормальної життєдіяльності людини щоденно необхідно вживати 118 г білків, 56 г жирів, 500 г вуглеводів, 8 г мінеральних солів. Кількість поживних речовин, що містяться в 1 кг наявних у магазині продуктів харчування, їх вартість наведено у таблиці 3.3.

Необхідно скласти добовий раціон, що вміщує не менше добової потреби людини у необхідних поживних речовинах та такий, що забезпечує мінімальну загальну вартість продуктів.

Вихідні дані прикладу 3.3

Поживні речовини	Кількість поживних речовин в 1 кг продуктів C_{ij}							Норми добової потреби, г
	м'ясо	риба	молоко	масло	сир	круп а	картопл я	
Білки, г	180	190	30	70	260	130	21	118
Жири, г	20	3	40	865	310	30	2	56
Вуглеводи, г	0	0	50	6	20	650	200	500
Мінеральні солі, г	9	10	7	12	60	20	70	8
Вартість 1 кг продукту, Євро.	19	10	2,8	34	29	5,6	1	
Кількість продукту в раціоні, г	x_1 -?	x_2 -?	x_3 -?	x_4 -?	x_5 -?	x_6 -?	x_7 -?	

Розв'язання. Економіко-математичну модель задачі можливо сформулювати наступним чином: знайти оптимальну кількість продуктів харчування, що потрібно закуповувати у магазині $(x_1, x_2, \dots, x_7)$, що мають мінімальну загальну вартість та забезпечать норми добової потреби по кожній із поживних речовин.

$$f = 19x_1 + 10x_2 + 2,8x_3 + 34x_4 + 29x_5 + 5,6x_6 + x_7 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 180x_1 + 190x_2 + 30x_3 + 70x_4 + 260x_5 + 130x_6 + 21x_7 \geq 118; \\ 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 865x_4 + 310x_5 + 30x_6 + 2x_7 \geq 56; \\ 50x_3 + 6x_4 + 20x_5 + 650x_6 + 200x_7 \geq 500; \\ 9x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 12x_4 + 60x_5 + 20x_6 + 70x_7 \geq 8; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Зауваження. Побудована економіко-математична модель в реальному середовищі ускладняється низкою додаткових обмежень, таких як несумісність або взаємне заміщення деяких продуктів, смакові вподобання тощо. У наукових дослідженнях зустрічаються постановки задачі складання раціону з урахуванням оптових цін. Зрозуміло, що реальна задача про дієту може мати досить велику кількість обмежень.

Транспортна задача (ТЗ) – одна з поширених задач лінійного програмування.

Її мета – розробка найбільш раціональних шляхів і способів транспортування вантажів, усунення надмірно дальніх, зустрічних, повторних перевезень. Це скорочує час просування вантажів, зменшує витрати підприємств, пов'язані із здійсненням процесів постачання сировиною, матеріалами, паливом, обладнанням і т.д. В загальному випадку транспортну модель можна застосовувати для опису ситуацій, пов'язаних з управлінням запасами, управлінням руху капіталів, складанням розкладів, призначення персоналу та ін.

Економічна постановка ТЗ за критерієм вартості.

Нехай є m пунктів $A_1, A_2, \dots, A_m$ виробництва однорідної продукції, причому обсяг виробництва у пункті A_i дорівнює a_i одиниць $i = (\overline{1, m})$. Вироблена продукція споживається в пунктах $B_1, B_2, \dots, B_n$, а попит на неї в пункті B_j складає b_j одиниць $(j = \overline{1, n})$. Відомі тарифи (вартості) c_{ij} перевезень одиниці продукції з пункту A_i в пункт B_j , які можна навести у вигляді матриці

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Транспортні витрати прямо пропорційні обсягам перевезень. Скласти план доставки продукції з пунктів виробництва в пункти споживання, який, по-можливості, задовольняє всі потреби і не допускає затоварення, а також забезпечує мінімальні сумарні транспортні витрати.

Математична модель ТЗ.

Позначимо через x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – плановані обсяги перевезень від i -го постачальника до j -го споживача, їх можна представити у вигляді матриці

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Функція z визначає сумарні транспортні витрати. Математичну модель транспортної задачі, в залежності від обсягів пропозиції та попиту, за допомогою знаків підсумовування записано у таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Математична модель ТЗ.

Співвідношення між сумарною пропозицією і сумарним попитом	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$	$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$	$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$
Цільова функція	$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (\min)$		
Система основних обмежень	$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i,$ $(i = \overline{1, m})$ $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j,$ $(j = \overline{1, n})$	$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i,$ $(i = \overline{1, m})$ $\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j,$ $(j = \overline{1, n})$	$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i,$ $(i = \overline{1, m})$ $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j,$ $(j = \overline{1, n})$
Додаткові обмеження	$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$		

Математична модель ТЗ у разі рівності сумарного попиту і сумарної пропозиції в матричній формі запису має вигляд:

$$z = C \cdot X^T \quad (\min)$$

$$M \cdot X = D$$

$$X \geq 0,$$

$$\text{де } C = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mn}),$$

$$X^T = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}),$$

$$D^T = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n),$$

$$M = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_n \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_n \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_n \right) \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}} \right\} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$$

Двоїста задача має вигляд

$$f = V \cdot D \quad (\max)$$

$$M^T \cdot V^T \leq C^T,$$

де $V = (u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Приклад 3.4. Складемо математичну модель ТЗ з трьома пунктами виробництва продукції A_1, A_2, A_3 , пропозиції яких відповідно дорівнюють: $a_1 = 200$, $a_2 = 300$, $a_3 = 220$. Пункти B_1, B_2, B_3, B_4 , відчують потребу в даній продукції відповідно в обсягах: $b_1 = 180$, $b_2 = 160$, $b_3 = 170$, $b_4 = 210$.

Матриця тарифів перевезень має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 15 & 13 \\ 15 & 10 & 17 & 17 \\ 16 & 11 & 33 & 18 \end{pmatrix}.$$

Умову транспортної задачі зручно записати у вигляді таблиці 3.5.

Таблиця 3.5

Умова задачі перевезення продукції (ТЗ).

Пункти виробництва	Пункти споживання продукції				Пропозиція
	1	2	3	4	
1	18	16	15	13	200
2	15	10	17	17	300
3	16	11	33	18	220
Потреба	180	160	170	210	

Розв'язання. Сумарна пропозиція дорівнює сумарному попиту:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 200 + 300 + 220 = 720;$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 180 + 160 + 170 + 210 = 720,$$

отже, ТЗ є закритою.

Математична модель ТЗ в розгорнутій формі запису має вигляд:

$$\begin{aligned} z = & 18x_{11} + 16x_{12} + 15x_{13} + 13x_{14} + \\ & + 15x_{21} + 10x_{22} + 17x_{23} + 17x_{24} + \quad (\min) \\ & + 16x_{31} + 11x_{32} + 33x_{33} + 18x_{34} \\ & \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 220, \end{cases} \\ & \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 180, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 160, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 210, \end{cases} \\ & x_j \geq 0, \quad (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}). \end{aligned}$$

Алгоритм і методи розв'язання ТЗ можуть бути використані при розв'язанні деяких економічних завдань, що не мають нічого спільного з транспортуванням продукції. У цьому випадку величини тарифів c_{ij} , пропозиції постачальників і попит споживачів мають різний зміст в залежності від конкретної економічної задачі. Наведемо приклад такої задачі.

Приклад 3.5. На підприємстві є три групи верстатів, кожна з яких може виконувати п'ять операцій по обробці деталей (операції можуть виконуватися в будь-якому порядку). Максимальний час роботи кожної групи верстатів, відповідно 100, 250, 180 годин. Кожна операція повинна виконуватися відповідно 100, 120, 70, 110, 130 годин. Визначити, скільки часу і на яку операцію потрібно використовувати

кожну групу верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Продуктивність кожної групи верстатів на кожну операцію задана матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 1 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_{ij} ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,5}$) – планований час виконання i -ою групою верстатів j -ої операції, z – сумарне число оброблених деталей. Тоді:

$$\begin{aligned} z = & 3x_{11} + 5x_{12} + 11x_{13} + 10x_{14} + 5x_{15} + \\ & + 5x_{21} + 10x_{22} + 15x_{23} + 3x_{24} + 2x_{25} + \quad (\max) \\ & + 4x_{31} + 8x_{32} + 6x_{33} + 12x_{34} + 10x_{35} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 250, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 180, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 130, \end{cases}$$

x_{ij} – невід'ємні цілі ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,5}$).

Завдання для самостійної роботи

1. Цех випускає вироби двох видів: вали і втулки. На виробництво одного валу робітник витрачає 3 год., однієї втулки – 2 год. Від реалізації одного валу підприємство одержує прибуток 800 тис. грн., а від реалізації однієї втулки – 600 тис. грн. Цех має випускати не менше 100 валів і 200 втулок. Скільки валів і втулок треба випустити, щоб одержати найбільший прибуток, якщо фонд робочого часу цеху становить 900 людино-годин ?

2. Торгове підприємство для продажу товарів трьох видів використовує такі ресурси: час і площа торгових залів. Витрати ресурсів на продаж однієї партії товарів кожного виду наведені в табл. 3.6. Прибуток, одержаний від реалізації однієї партії товарів I виду, становить 500 млн. грн., II виду – 800 млн. грн., а III виду – 600 млн.

грн. Визначити оптимальну структуру товарообороту, яка забезпечить максимальний прибуток.

Таблиця 3.6

Вихідні дані задачі 2.

Ресурси	Вид			Запаси ресурсів
	I	II	III	
Час, людино-години	0,5	0,7	0,6	370
Площа, м ²	0,1	0,3	0,2	90

3. Із урахуванням попиту взуттєвий магазин передбачив на плановий період продаж шкіряного взуття не менше як на 140 млн. грн., іншого взуття – не менше як на 140 млн. грн. Знаючи рівень прибутку і залишку від реалізації цих товарів (див. табл.3.7), скласти план продажу з мінімальною сумою залишку за умови, що товарооборот магазину буде не меншим 200 млн. грн., а сума прибутку – не меншою 2,5 млн. грн.

Таблиця 3.7

Вихідні дані задачі 3.

Показники	Шкіряне взуття	Інше
Прибуток, %	1	2
Залишок, %	6	5

4. Підприємство випускає три види виробів. Місячна програма випуску становить 200 виробів першого виду, 1800 – другого, 1500 – третього. Для випуску виробів використовують матеріали, щомісячні витрати яких не можуть перевищувати 61000 кг. На один виріб першого виду витрачається 8 кг матеріалу, другого – 10 кг, третього – 11 кг. Оптова ціна одного виробу першого виду 700 тис. грн., другого і третього – відповідно 1000 і 900 тис. грн. Визначити оптимальний план випуску виробів, який забезпечує підприємству максимум виторгу.

5. Меблева фабрика виготовляє столи, стільці, бюро й книжкові шафи, використовуючи два різних види дощок, причому фабрика має 500 м дощок першого виду і 1000 м дощок другого. Крім того, задано трудові ресурси 800 людино-годин.

У табл. 3.8 наведено нормативи витрат кожного виду ресурсів на виготовлення одного виробу і прибуток на один виріб.

За цими вихідними даними розв'язати задачу. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток.

Таблиця 3.8

Вихідні дані задачі 5.

Ресурси	Витрати на один виріб			
	Столи	Стільці	Бюро	Книжкові шафи
Дощки першого виду, м	5	1	4	12
Дощки другого виду, м	2	3	9	1
Трудові ресурси, людино-години	3	2	5	10
Прибуток на один виріб, грн.	12	5	15	10

6. Розв'язати задачу 5 за таких додаткових умов на асортимент: фабрика виготовляє столів – не менше 40, стільців – не менше 130, бюро – не менше 30 і книжкових шаф – не більше 10.

7. Торгова організація планує реалізацію за двома товарними групами. Фонди за цими товарами складають відповідно 60 і 16 тис. грн. Рівень витрат, пов'язаних із зберіганням товарів першої групи – 2%, другої – 1%, рівні прибутку становлять відповідно 3 і 2%. Граничне допустимі витрати, пов'язані із збереженням товарів, становлять 1,4 тис. грн. Із урахуванням закупівлі товарів поза виділеними фондами скласти план товарообороту, при якому торгова організація одержить максимальний прибуток.

8. Для перевезення вантажу використовують машини типів А і Б. Вантажопідйомність машин кожного типу – 3 т. За один рейс машина А витрачає 1,5

кг мастильних матеріалів і 50 л бензину, а машина Б – відповідно 2 кг і 30 л. На базі є 35 кг мастильних матеріалів і 900 л бензину. Витрати на експлуатацію машини А становлять 8 тис. грн., Б – 5 тис. грн. Треба перевезти 60 т вантажу. Скільки потрібно використати машин типів А і Б, щоб експлуатаційні витрати були мінімальними?

9. На базі є прут довжиною 3,6 м. Підприємству треба виготовити з нього заготовки довжиною 1,35, 1,00 і 0,70 м відповідно 5000, 7200 і 8000 шт. Яку кількість прутів треба використати і яким способом треба нарізати заготовки, щоб відходи були мінімальними?

10. Арматурний цех заводу залізобетонних виробів одержує прут довжиною 7 м. У табл. 3.9 задано виробничу програму. Скласти раціональний план розкрою вихідного матеріалу з найменшими відходами.

Таблиця 3.9

Вихідні дані задачі 10.

Номер заготовки	Довжина заготовки, м	Кількість,шт.
1	3,2	200
2	2,8	400
3	2,1	600
4	1,2	500

11. Нафтопереробний завод одержує чотири напівфабрикати: 400 тис. л алкілату, 250 тис. л крекінг-бензину, 350 тис. л бензину прямої перегонки і 100 тис. л ізопентолу.

В результаті змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюються три сорти авіаційного бензину: марки А – 2:3:5:2; В – 3:1:2:1 і С – 2:2:1:3 відповідно. Вартість 1 тис. л вказаних сортів бензину: А – 4200 грн., В – 100 грн., С – 150 грн. Визначити план змішування компонентів, при якому досягається мінімальна вартість всієї продукції, а також оптимальний план змішування за умови максимального використання компонентів.

12. Будівельна ділянка кар'єру має екскаватори чотирьох типів, які повинні виконувати чотири види земляних робіт. Продуктивність машин різного типу за кожним видом роботи наведено в табл. 3.10.

Таблиця 3.10

Вихідні дані задачі 12.

	Вид робіт			
	1	2	3	4
1	1,2	0,9	1,0	1,4
2	0,6	0,8	0,2	1,0
3	1,0	0,6	0,6	1,2
4	0,5	0,6	0,1	0,7

Розділити екскаватори за видами робіт, забезпечивши максимальну продуктивність будівельної ділянки. Вказати способи розв'язування задачі.

13. На трьох групах обладнання необхідно виготовити вироби чотирьох видів. Встановлено план: виробів типу А треба виготовити 2000 шт., Б – 1000 шт., В – 200 шт., Г – 250 шт. Дані про собівартість кожного виробу наведено в табл. 3.11. Скласти, план завантаження обладнання, при якому мінімізуються витрати на виконання виробничої програми.

Таблиця 3.11

Вихідні дані задачі 13.

Обладнання	Собівартість одного виробу, грн.				Час на виготовлення одного виробу, хв.				Фонд часу, хв.
	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г	
I	1,5	2,4	0,9	1,4	4	8	2,5	4,0	35000
II	1,8	1,2	1,0	1,7	2,5	2	1,5	2,0	16000
III	2,7	5,4	6,0	5,6	3,5	1,5	1,0	1,2	22000

14. На трьох групах обладнання необхідно виготовити вироби чотирьох видів. Встановлено план: виробів типу А треба виготовити 2500 шт., Б – 1000 шт., В – 200 шт., Г – 200 шт. Вихідні дані подано в табл. 3.12.

Таблиця 3.12

Вихідні дані задачі 14.

Обладнання	Собівартість одного виробу, грн.				Час на виготовлення одного виробу, хв.				Фонд часу, хв.
	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г	
I	1,0	2,4	1,0	1,4	4	7,5	2,0	4,0	40000
II	1,8	1,2	1,0	1,7	2,5	2	1,5	2,0	16000
III	3,0	5,4	6,0	5,6	4,0	1,5	1,0	1,2	25000

Скласти план завантаження обладнання, який мінімізує витрати на виконання виробничої програми.

15. На взаємозамінних верстатах п'яти типів, які мають різну продуктивність, обробляють вироби п'яти типів. Продуктивність верстатів при обробці різних виробів і собівартість обробки наведені в табл. 3.13.

Плановий фонд часу роботи верстатів становить відповідно 25, 30, 5, 20 і 8 год. Скласти оптимальний варіант завантаження обладнання, який забезпечує мінімальні витрати на виконання програми.

Таблиця 3.13

Вихідні дані задачі 15.

Виріб	План	Продуктивність верстатів					Собівартість виробів				
		I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
1	325	15	10	25	20	–	3,5	4,0	3,0	3,5	–
2	400	24	16	40	–	48	2,2	2,5	2,0	–	1,6
3	465	9	–	15	12	18	3,4	–	2,7	4,0	5,6
4	200	6	4	10	8	–	5,0	4,0	0,9	3,5	–
5	150	–	12	30	24	36	–	4,2	2,5	4,7	6,1

16. У заводській лабораторії створюється антифрикційний сплав (олов'янистий-бабіт), який має містити: олова – не менше 15%, сурми – не менше 15%, свинцю – майже 70%.

Є чотири сплави, процентний склад і ціни на які наведено в табл. 3.14.

Розрахувати кількість елементів для сплаву кожного виду, необхідну для 1 кг суміші, яка б забезпечила мінімальні витрати.

Таблиця 3.14

Вихідні дані задачі 16.

Елементи	Сплав			
	1	2	3	4
Олово	12	20	12	20
Сурма	12	18	18	14
Свинець	76	62	70	66
Ціна за 1 кг, грн.	3,5	5,2	4,0	4,6

17. Виробнича дільниця одержала замовлення на виготовлення 7 видів виробів. Вироби обробляють на взаємозамінних верстатах чотирьох типів, які мають різну продуктивність. Вихідні дані наведено в табл. 3.15.

Плановий фонд часу роботи верстатів становить відповідно 48,5; 47,5; 80,0 і 45,0 год. Знайти оптимальний варіант розподілу замовлень між верстатами, який забезпечує максимальну рентабельність підприємства.

Таблиця 3.15

Вихідні дані задачі 17.

Виріб	План	Продуктивність верстатів				Собівартість виробів			
		I	II	III	IV	I	II	III	IV
А	300	80	25	15	10	3,5	3,4	4,0	5,0
Б	450	36	45	27	18	2,2	2,0	2,5	3,5
В	560	16	20	12	8	4,4	2,7	4,1	3,5
Г	150	-	15	-	-	-	0,9	-	-
Д	570	24	30	18	12	5,0	4,0	4,4	3,5
Е	600	12	15	8	-	4,0	3,5	4,2	-
Є	910	56	70	42	28	3,5	2,5	3,0	4,0

18. Підприємство одержує труби довжиною 2,6 м. Із них треба виготовити 30 заготовок довжиною 1 м, 20 заготовок довжиною 0,5 м, 25 заготовок довжиною 0,8 м. Визначити раціональний спосіб розкрою труб на заготовки.

19. Підприємство одержує труби довжиною 3,4 м, із яких виготовляють 400 заготовок довжиною 1 м, 300 заготовок довжиною 0,6 м, 200 заготовок довжиною 0,9 м. Визначити раціональні способи розкрою труб на заготовки.

20. У заводській лабораторії створюється антифрикційна суміш, яка має містити 25% олова, 15% сурми і 60% свинцю. Для її створення використовують чотири сплави, вихідні дані про які наведено в табл. 3.16.

Таблиця 3.16

Вихідні дані задачі 20.

Елемент	Вміст елементів у сплавах, %			
	1	2	3	4
Олово	12	20	12	20
Сурма	12	18	18	14
Свинець	76	62	70	65
Ціна 1 кг сплаву (Євро)	5	4	3	5

Розрахувати кількість сплаву кожного виду, необхідну для одержання 1 кг суміші мінімальної вартості.

21. Скласти математичну модель попередньої задачі, якщо суміш містить 20% олова, 30% сурми і 50% свинцю.

22. Підприємству задано план випуску продукції V_1 і V_2 та час роботи обладнання двох типів A_1 і A_2 . Скласти математичну модель оптимального графіка роботи обладнання, при якому собівартість випущеної продукції буде мінімальною за умови виконання плану. Вихідні дані наведено в табл.3.17.

Таблиця 3.17

Вихідні дані задачі 22.

Вид обладнання	Випуск продукції за одиницю часу		Вартість роботи за одиницю часу		Фонд робочого часу
	B_1	B_2	B_1	B_2	
A_1	2	2	1	5	175
A_2	3	1	2	1	160
План випуску продукції	950	1200			

23. Скласти математичну модель попередньої задачі за даними, наведеними в табл. 3.18.

Таблиця 3.18

Вихідні дані задачі 23.

Вид обладнання	Випуск продукції за одиницю часу		Вартість роботи за одиницю часу		Фонд робочого часу
	B_1	B_2	B_1	B_2	
A_1	2	3	2	3	9
A_2	7	5	4	15	2
План випуску продукції	1500	1300			

24. До добового раціону входять два продукти харчування P_1 і P_2 , причому продукту P_1 не більше 200 од. Вартість одиниці продукту P_1 становить 2 Євро? Вміст поживних речовин А і В у продуктах наведено у табл. 3.19.

Таблиця 3.19

Вихідні дані задачі 24.

Поживні речовини	Мінімальна норма споживання	Вміст поживних речовин в одиниці продукту	
		P_1	P_2
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2

Визначити оптимальний раціон мінімальної вартості.

Додаткові завдання для самостійної роботи

1. Скласти математичну модель задачі раціонального використання ресурсів за наступною умовою.

Example: Production Problem



	Product A	Product B	Available
Raw material I	1	3	24
Raw material II	1	1	10
Raw material III	2	1	18
Revenue	100	200	

2. Скласти математичну модель задачі раціонального використання ресурсів за наступною умовою.

A ship can carry a weight of up to 1500 t. Every ton of each product type has a certain space requirement, the maximum possible loading volume is 5000 m³. How many tons of each type of products should be transported such that the profit is maximized? See the following table for relevant data.

	Product 1	Product 1	Product 1
Space requirements (in m ³ /t)	6	4	8
Profit (in €/t)	120	100	150

Formulate an LP model such that total profits are maximized. Solve the problem using the Simplex algorithm. What is the optimal solution?

3. Скласти математичну модель транспортної задачі за умовою, наведеною у таблиці.

Incapacitated Warehouse Location Problem: A firm has to decide about where to open a warehouse from which it can deliver its products to its customers. There are three possible locations and five customers. The demand (in number of items) for each customers is

customer 1	customer 2	customer 3	customer 4	customer 5
10	30	40	20	50

The transportation costs per item from warehouse $i, i = 1, \dots, 3$, to customer $j, j = 1, \dots, 5$ are given by

	customer 1	customer 2	customer 3	customer 4	customer 5
warehouse 1	2	3	3	4	2,5
warehouse 2	2,5	1	1,5	5	4
warehouse 3	4	3,5	2	2,5	2,5

The fixed costs for opening a warehouse at the different locations are

warehouse 1	warehouse 2	warehouse 3
95	120	150

The objective is to minimize costs.

4. Скласти математичну модель задачі раціонального використання ресурсів за наступною умовою.

You are in urgent need of a new apartment in Vienna. The real estate agent offers you different apartments, the set of apartments is given by A and you need to decide which of these apartments to rent. You want to keep costs as low as possible, but you also have some requirements for the apartment you rent.

- If you rent apartment i , the monthly rent you pay is C_i , €, $i \in A$.
- The number of rooms of apartment i is given by r_i , $i \in A$. The apartment you rent must have at least two rooms.
- On a conventional workday, you first go to the university from your apartment and in the evening you return to the apartment from your workplace. The travelling time (in minutes) from apartment i to the university is t_i^U , $i \in A$, the travelling time from the workplace to apartment i is t_i^W , $i \in A$. You do not want to travel for more than one hour in total each day with respect to these two trips.
- The apartment must have a balcony or access to a garden (or both). The exogenously given parameter which tells you whether apartment i has a balcony is denoted by b_i , $i \in A$, where $b_i = 1$ if apartment i has a balcony and $b_i = 0$ if the

apartment does not have one. The parameter which tells you whether apartment i has garden access is given by g_i , $i \in A$, where $g_i = 1$ if the apartment has garden access.

- The walking distance from apartment i to the next park is d_i minutes, $i \in A$.

A. If the apartment you rent does not have garden access, the walking distance to the next park has to be less than 10 minutes.

Formulate a LP model to minimize costs.

5. Скласти математичну модель задачі раціонального використання ресурсів за наступною умовою.

A firm needs to decide on whether to produce 2 products. If it produces product 1, fixed costs of 500 Euros occur, no matter how many units of product 1 are produced. If it produces product 2, fixed costs of 400 Euros occur.

One unit of product 1 requires 2 hours of machine I and 5 hours of machine II. One unit of product 2 requires 3 hours of machine I and 1 hour of machine II. In total, 400 hours of machine I are available and 440 hours of machine II.

If the firm produces less or equal than 20 units of product 1, then the profit per unit is 50 Euros for one unit of product 1. If the firm produces more than 20, but less or equal than 50 units of product 1, the profit per unit is 40 Euros. If the firm produces more than 50 units of product 1, the profit per unit is 30 Euros.

Concerning product 2, the profit per unit for the first 50 units is 20 Euros. For the next fifty units (51-100), the profit per unit is 10 Euros for every additional unit. For any unit of product 2 above 100 units, the profit per unit is 5 Euros.

Formulate the problem as LP model.

6. Скласти математичну модель транспортної задачі за наступною умовою.

Assume that the COVID-pandemic is over, travelling is possible again and you are working as a tour organizer. In particular, you are organizing bus tours to 6 different destinations. There are five different bus types. You need to decide how many buses of each type you want to rent for traveling to each location. You want to minimize the rental costs

which differ with respect to the tour location you rent the bus type for (because of different durations and traveling distances and insurance policies). Each bus type has a limited number of seats. You only have ten bus drivers, so in total you can only rent up to 10 buses.

Formulate the LP model first and then solve the problem.

For the decision variables, you need to create an array (a matrix) that tells you how many buses of each type you rent for each destination.)

Destination	Balaton	Bavaria	East Frisia	Moldova	Provence	Tuscany	
Min. number of seats needed	50	50	40	30	60	80	
Bus type / Costs							Seats per bus
1	250	300	800	700	1200	1100	20
2	350	250	600	900	1500	1300	30
3	450	300	350	800	1800	1600	40
4	250	200	360	750	1300	1500	25
5	400	500	350	850	1400	1500	40

Тема 1.4. Графоаналітичний метод розв'язування задач лінійного програмування

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких багатовимірних задач, застосовують графоаналітичний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях ЗЛП. Обмежене використання графоаналітичного методу зумовлене складністю побудови множини планів у тривимірному просторі, а графічне зображення для задач із кількістю змінних більше трьох взагалі неможливе.

Розглянемо задачу лінійного програмування

$$\begin{aligned} F &= c_1x_1 + c_2x_2 \quad \max (\min) \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq (\geq)(=)b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq (\geq)(=)b_2; \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Алгоритм розв'язування задач лінійного програмування графоаналітичним методом складається із наступних етапів:

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в основних обмеженнях задачі нерівностей на відповідні рівняння (у випадку системи обмежень у вигляді нерівностей).
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо перетин півплощин у першому квадранту системи координат x_1Ox_2 , аналізуємо множину планів ЗЛП, знаходимо всі кутові точки многокутника розв'язків (необмеженої області) ЗЛП.
4. Знаходимо значення цільової функції у кожній кутовій точці або будуємо вектор-градієнт $\vec{N} = (c_1; c_2)$, який задає напрям зростання цільової функції.
5. Будуємо лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, яка перпендикулярна до вектора-градієнта $\vec{N} = (c_1; c_2)$.
6. Рухаючи лінію рівня в напрямку вектора-градієнта для пошуку **max** та в протилежному напрямку для пошуку **min** цільової функції, знаходимо опорну лінію.

Вона перетинає множину планів принаймні в одній кутовій точці, її координати є оптимальним розв'язком ЗЛП.

7. Визначаємо координати отриманої точки і обчислюємо екстремальне значення цільової функції.

Згідно теорії лінійного програмування, при розв'язуванні ЗЛП графоаналітичним методом можливі наступні випадки:

1. Цільова функція набуває екстремального значення в єдиній кутовій точці множини планів, координати якої є розв'язком ЗЛП.

2. Цільова функція набуває екстремального значення в будь-якій точці відрізка або променю. Тоді ЗЛП має безліч розв'язків, які належать цьому відрізку або променю.

3. Задача лінійного програмування не має розв'язків у двох випадках: коли система обмежень несумісна та цільова функція на множині планів необмежена згори.

Приклад 4.1. Знайти екстремум лінійної функції

$$z = -2x_1 + 4x_2 \rightarrow extr$$

при умовах-обмеженнях:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо на площині $x_1 O x_2$ многокутник розв'язків. Для цього в нерівностях системи обмежень і умовах невід'ємності змінних знаки нерівностей замінимо на знаки точних рівнянь.

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 = 12, & (l_1) \\ -x_1 + 2x_2 = 5, & (l_2) \\ x_1 + x_2 = 1, & (l_3) \\ x_1 = 0, & (l_4) \\ x_2 = 0. & (l_5) \end{cases}$$

Побудувавши прямі $(l_1) - (l_5)$, знайдемо відповідні півплощини та їх перетин (Рис. 4.1.).

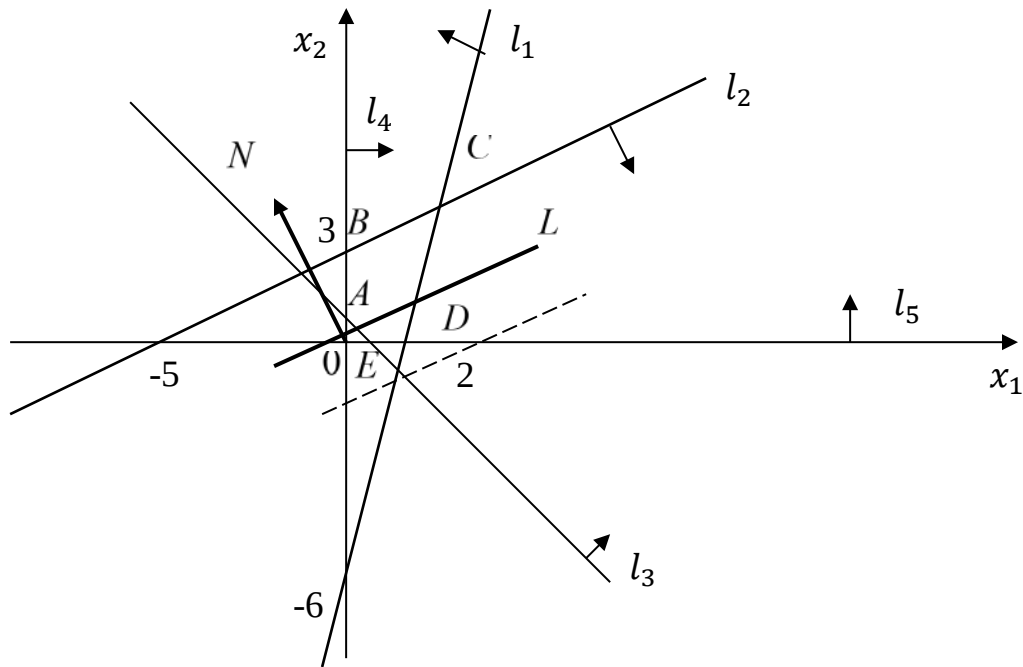


Рис. 4.1. Побудова множини планів ЗЛП прикладу 4.1.

Напрямок стрілок від кожної граничної прямої визначається шляхом безпосередньої підстановки у відповідну нерівність координат довільно обраної, так званої *контрольної точки*, наприклад $(0; 0)$, і при виконанні даної нерівності спрямовуємо стрілки в бік контрольної точки, в протилежному випадку – навпаки.

Многокутником розв'язків задачі є п'ятикутник $ABCDE$, координати точок якого задовольняють умову невід'ємності змінних і нерівності системи обмежень задачі.

Для знаходження точок екстремуму побудуємо вектор $\vec{N} = (-2; 4)$ і лінію рівня цільової функції L , яка перпендикулярна вектору $\vec{N}$ і перетинає п'ятикутник $ABCDE$. Рухаючи пряму L в напрямку вектора $\vec{N}$, знайдемо точку C , в якій лінія рівня L приймає положення опорної прямої. Отже, в точці C цільова функція має максимальне

значення. Так як точка C отримана в результаті перетину прямих (l_1) і (l_2) , то її координати задовольняють рівнянням цих прямих:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$x_1 = 3,4; \quad x_2 = 4,2,$$

звідки знайдемо максимальне значення цільової функції:

$$z_{max} = -2 \cdot 3,4 + 4 \cdot 4,2 = 10.$$

За умовою задачі лінії рівня цільової функції паралельні прямій (l_2) , так як коефіцієнти при змінних x_1 та x_2 пропорційні: $\frac{-2}{-1} = \frac{4}{2} = 2$.

Отже, лінія рівня L прийме положення опорної прямої в точках B , C і в будь-якій точці відрізка BC , в яких цільова функція f приймає одне і те саме максимальне значення. Для визначення координат точки B розв'яжемо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 5, \\ x_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 2,5. \end{cases}$$

Максимальне значення цільової функції в точці B дорівнює:

$$z_{max} = -2 \cdot 0 + 4 \cdot 2,5 = 10.$$

Запишемо множину оптимальних розв'язків як опуклу комбінацію кутових точок B і C :

$$\begin{aligned} x_1^* &= \alpha \cdot x_1^{(B)} + (1 - \alpha) \cdot x_1^{(C)}; \\ x_2^* &= \alpha \cdot x_2^{(B)} + (1 - \alpha) \cdot x_2^{(C)}; \quad \text{де } 0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

Підставивши координати кутових точок, отримаємо:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \alpha \cdot 3,4 + (1 - \alpha) \cdot 0 = 3,4\alpha; \\ x_2^* &= \alpha \cdot 4,2 + (1 - \alpha) \cdot 2,5 = 2,5 + 1,7\alpha. \end{aligned}$$

Тоді $x_{opt} = (3,4\alpha; 2,5 + 1,7\alpha)$, де $0 \leq \alpha \leq 1$.

Підставляючи довільні значення α від 0 до 1, отримаємо координати множини точок відрізка BC , в кожній з яких цільова функція приймає максимальне значення, що дорівнює 10.

Для знаходження мінімального значення цільової функції задачі переміщуємо лінію рівня L в напрямку, протилежному вектору $\vec{N}$. Лінія рівня L займе положення опорної прямої в вершині D , де $x_1 = 2$; $x_2 = 0$, а мінімальне значення цільової функції дорівнює:

$$z_{\min} = -2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = -4.$$

Зауваження. Множину допустимих розв'язків (планів ЗЛП) можливо побудувати за допомогою електронних таблиць MS Excel. На рисунку 4.2. показано побудову множини планів ЗЛП прикладу 1.6 за допомогою MS Excel.

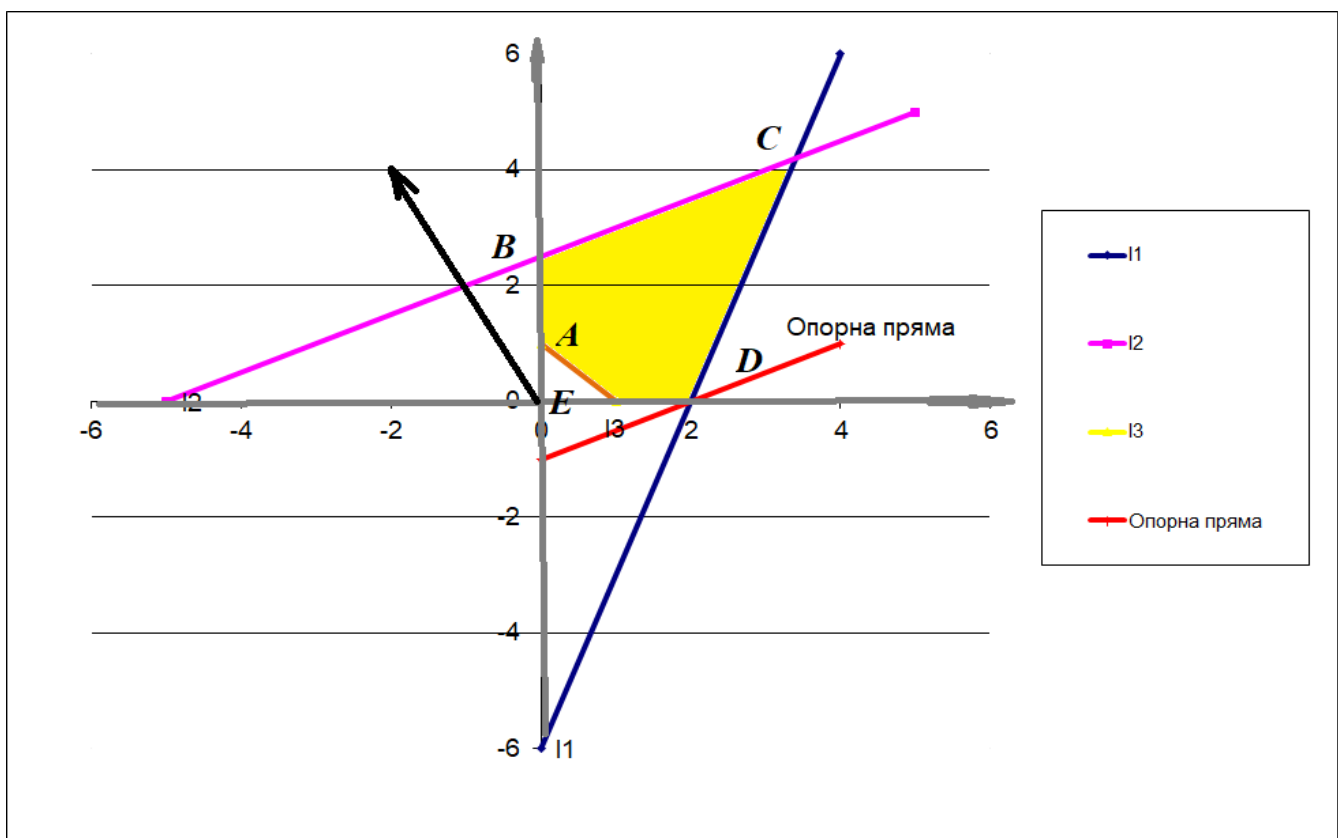


Рис. 4.2. Побудова множини планів ЗЛП прикладу 4.1 за допомогою MS Excel.

Приклад 4.2. Для невеликої птахоферми необхідно розрахувати оптимальний кормовий раціон на 1000 курчат, яких відгодовують з 4 до 8 тижневого віку. За 4 тижні кожне курча споживає не менше 480 г суміші. Крім цього, кормовий раціон курчат повинен відповідати певним вимогам поживності, а саме готова суміш повинна мати не менше 20% білка і не більше 5% клітковини. Вміст поживних речовин в 1 кг кормів та їх вартість наведено у таблиці. Визначити масу кожного з двох кормів, що утворюють кормову суміш мінімальної вартості, одночасно забезпечує вимогам загальної маси кормової суміші та поживності.

Корм	Вміст поживних речовин в 1 кг корму, %		Вартість 1 кг корму, гр. од.
	Білок	Клітковина	
Зерно	10	2	0,4
Соеві боби	50	8	0,9

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_1, x_2 – запланована вага покупки зерна та соєвих бобів (кг), z – загальна вартість кормової суміші (гр. од.).

Цільова функція (загальна вартість кормів):

$$z = 0,4 \cdot x_1 + 0,9 \cdot x_2 \quad (\min)$$

Система основних обмежень для всіх курчат:

$$\text{за масою суміші (кг)} \quad 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 480;$$

$$\text{за змістом білка в суміші (кг)} \quad 0,1 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 \geq 0,2 \cdot (x_1 + x_2);$$

$$\text{за змістом клітковини в суміші (кг)} \quad 0,02 \cdot x_1 + 0,08 \cdot x_2 \leq 0,05 \cdot (x_1 + x_2).$$

$$\text{Додаткове обмеження} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Приводимо отриману задачу лінійного програмування до вигляду

$$z = 0,4 \cdot x_1 + 0,9 \cdot x_2 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geq 480; \\ -0,1 \cdot x_1 + 0,3 \cdot x_2 \geq 0; \\ -0,03 \cdot x_1 + 0,03 \cdot x_2 \leq 0; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'яжемо ЗЛП графоаналітичним методом. Для цього побудуємо прямі

$L_1: 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 480$, яка проходить через точки $(0; 480)$ та $(480; 0)$;

$L_2: -0,1 \cdot x_1 + 0,3 \cdot x_2 = 0$, яка проходить через точки $(0; 0)$ та $(600; 200)$;

$L_3: -0,03 \cdot x_1 + 0,03 \cdot x_2 = 0$, яка проходить через точки $(0; 0)$ та $(600; 600)$.

Визначаємо півплощини та знаходимо перетин півплощин у першому квадранту системи координат x_1 , отримуємо множину планів ЗЛП – необмежену замкнену множину з двома кутовими точками (Рисунок 4.3).

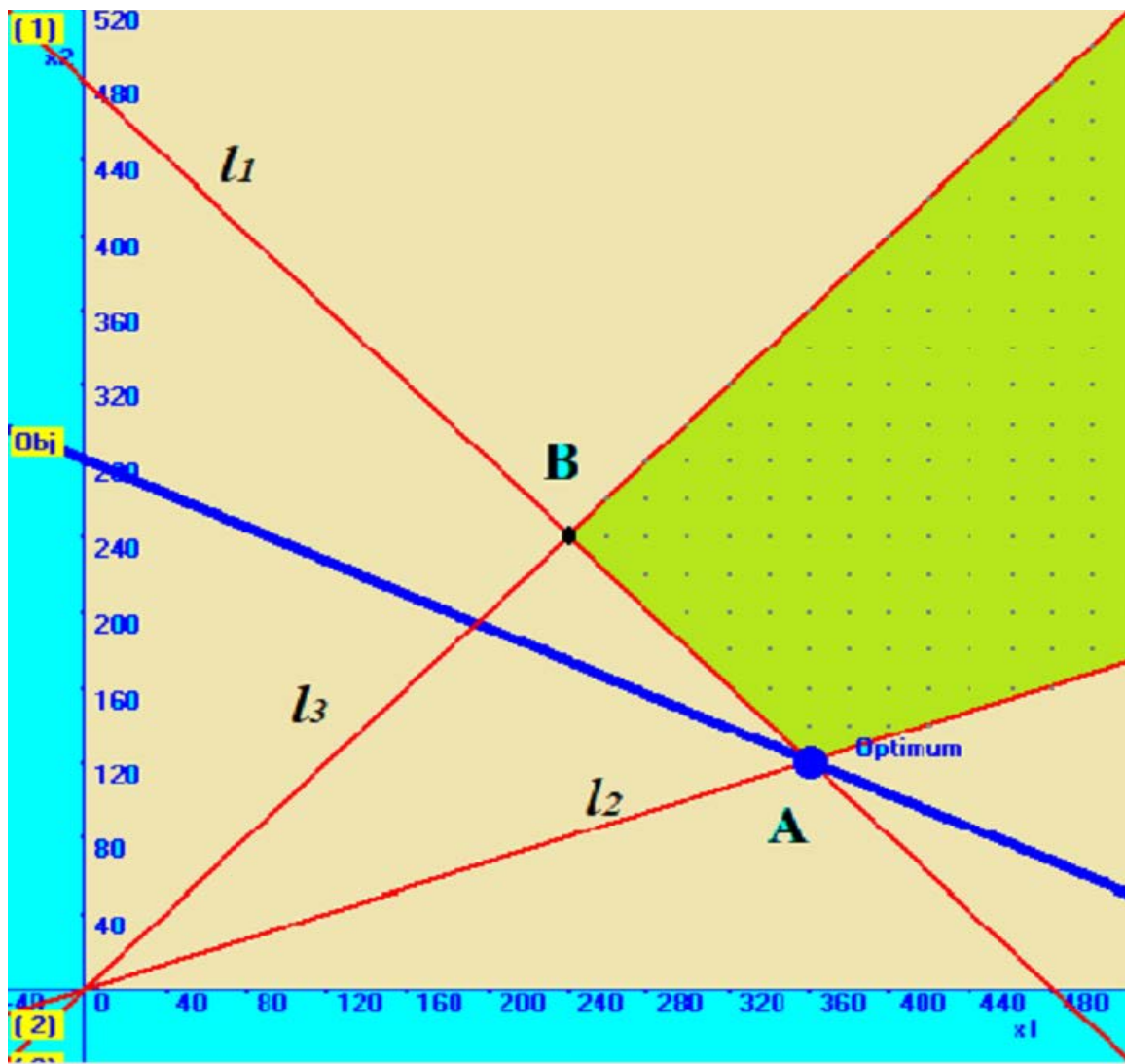


Рис. 4.3. Розв'язання прикладу 4.2 графоаналітичним методом.

Зауваження. Множину допустимих розв'язків (планів ЗЛП) можливо побудувати за допомогою електронних таблиць MS Excel. На рисунку 4.4 показано побудову множини планів ЗЛП прикладу 4.2 за допомогою MS Excel.

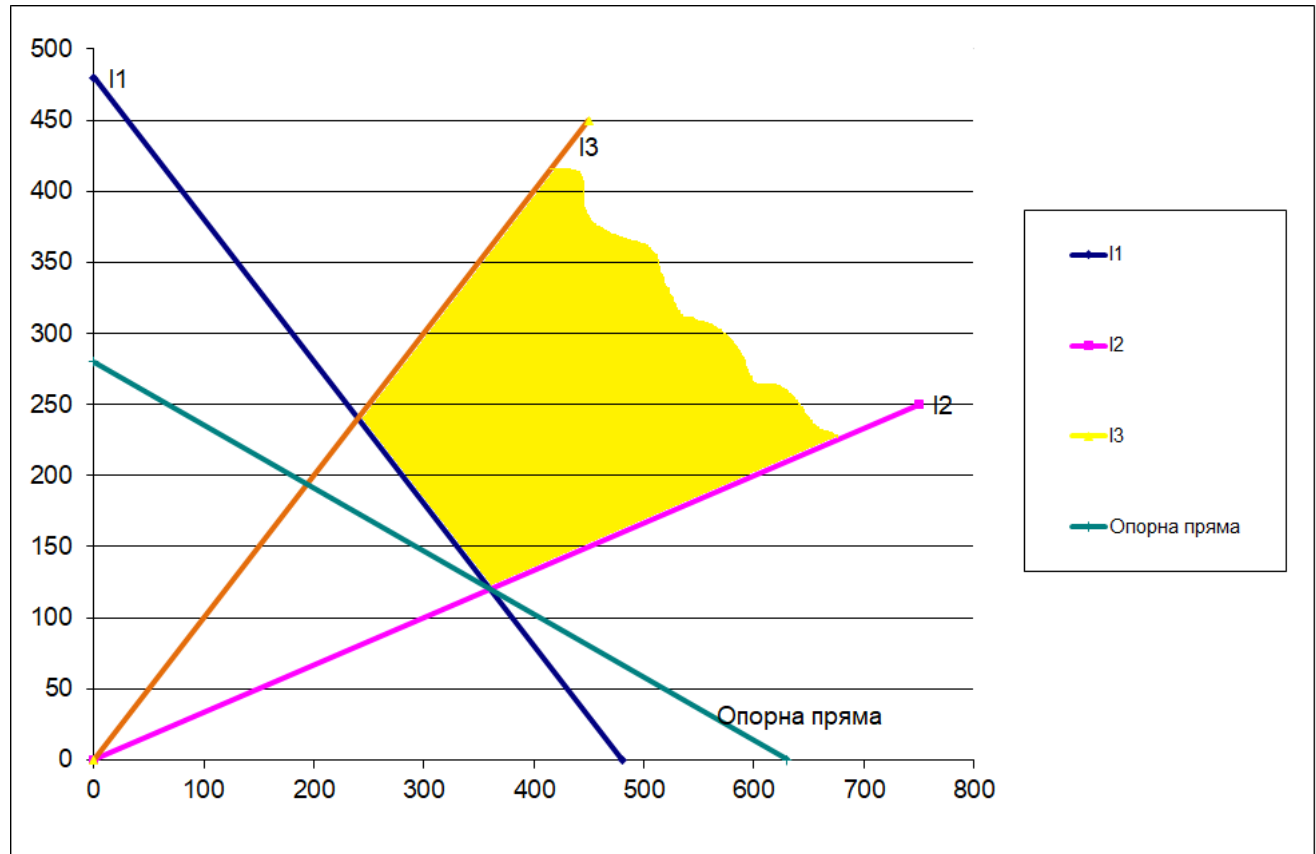


Рис. 4.4. Побудова множини планів ЗЛП прикладу 4.2 за допомогою MS Excel.

Будуємо вектор $50 \cdot \vec{N} = (200; 450)$, який задає напрям зростання цільової функції. Будуємо лінію рівня $0,4 \cdot x_1 + 0,9 \cdot x_2 = 360$, яка перпендикулярна до вектора-градієнта $\vec{N} = (0,4; 0,9)$. Рухаючи лінію рівня в протилежному напрямку вектора-градієнта, знаходимо опорну лінію. Вона перетинає множину планів в кутовій точці A , що є перетином прямих L_1 та L_2 . Знаходимо координати точки A із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 480; \\ -0,1 \cdot x_1 + 0,3 \cdot x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь методом оберненої матриці, отримаємо координати точки $A(360; 120)$. ЗЛП має єдиний розв'язок:

$$x_{1onm} = 360, x_{2onm} = 120; z_{min} = 252.$$

Таким чином, для утворення кормової суміші мінімальної вартості, що одночасно задовольняє вимогам загальної маси кормової суміші та поживності, птахофермі слід купити 360 кг зерна та 120 кг соєвих бобів. При цьому мінімальна вартість кормів складе 252 гр. од.

Задачу також можливо розв'язати за допомогою програми «**TORA**». Активуємо програму «**TORA**». Вікно активації програми наведено на рисунку 4.5.



Рис. 4.5. Вікно активації програми «TORA».

Натиснувши клавішу «**Klick Heare**», переходимо до загального меню. У загальному меню обираємо команду «**Linear Programing**». Вікно головного меню наведено на рисунку 4.6.

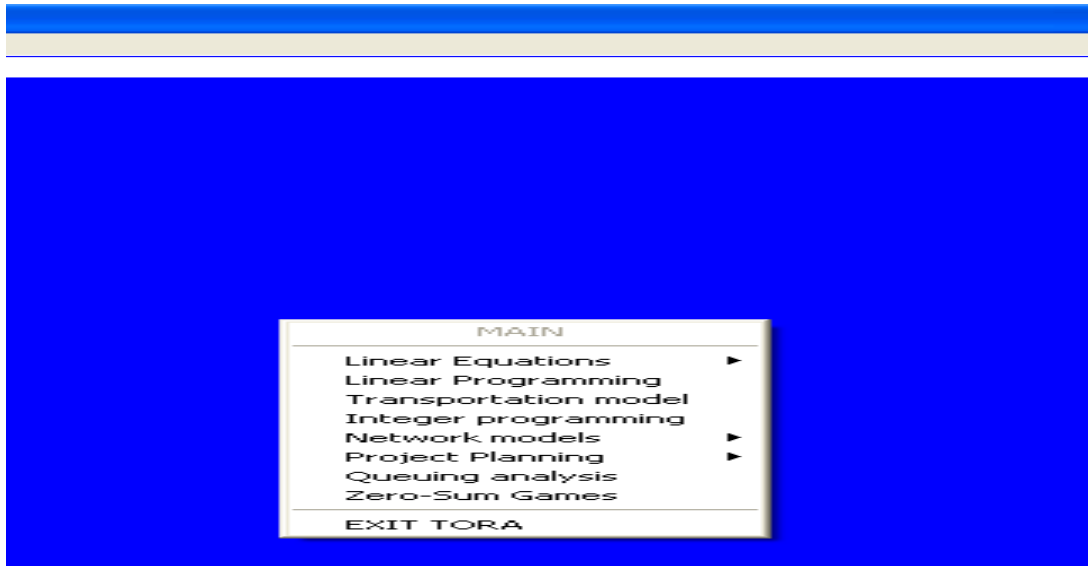


Рис. 4.6. Вікно головного меню програми «TORA».

Обираємо вигляд десятинного дробу для змінних, а саме кількість цифр до та після коми. Можливо обрати початкові умови, а саме 5 цифр до коми та дві цифри після коми. Вікно вибору виду невідомих наведено на рисунку 4.7.

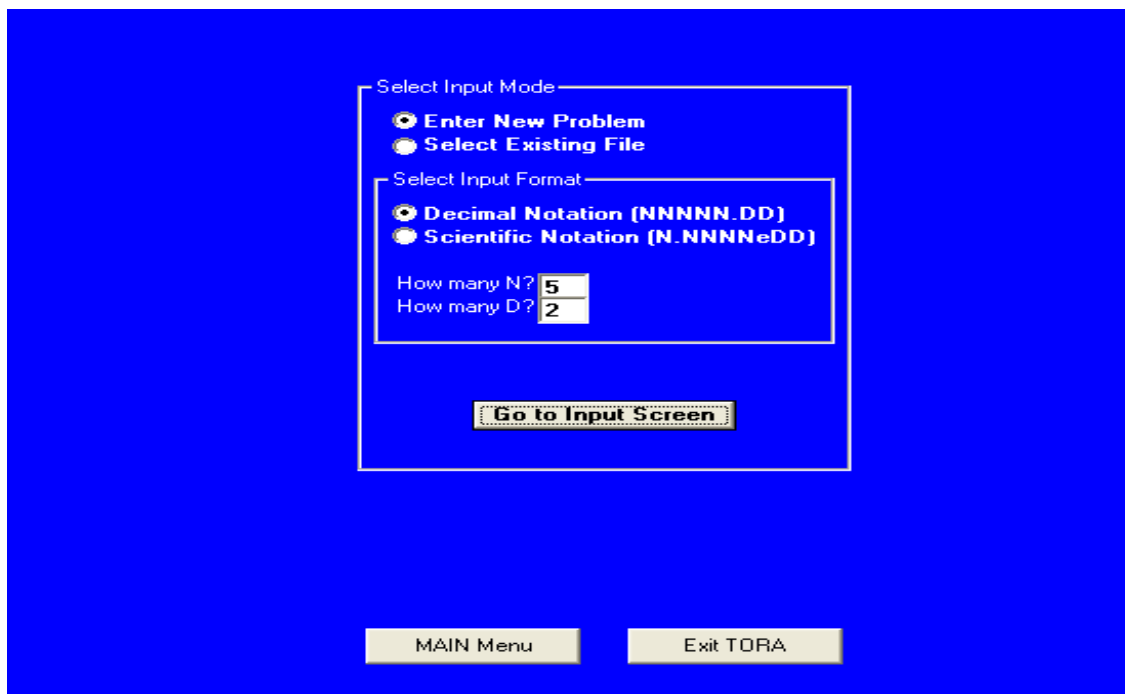


Рис. 4.7. Вікно вибору виду параметрів невідомих програми «TORA».

Обираємо параметри задачі лінійного програмування: кількість змінних – 2, кількість основних обмежень – 3 (Рис 4.8.).

Problem Title:

Nbr. of Variables:

No. of Constraints:

Enter value then press RETURN or TAB to initialize input grid

Рис. 4.8. Вікно вибору виду кількості невідомих програми «TORA».

Вводимо дані задачі. Вікно вводу даних наведено на рисунку 4.9.

INPUT GRID - LINEAR PROGRAMMING

	x1	x2	Enter <, >, or =	R.H.S.
Var. Name				
Maximize	4,00	9,00		
Constr 1	1,00	1,00	>=	480,00
Constr 2	-1,00	3,00	>=	0,00
Constr 3	-3,00	3,00	<=	0,00
Lower Bound	0,00	0,00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n			

Рис 4.9. Вікно вводу даних програми «TORA».

Зауважимо, що коефіцієнти цільової функції збільшено у 10 разів, таким чином отримали цілі значення коефіцієнтів. Входимо до підменю, обираємо команди «**Solve Problem**» та «**Grafical**». Вікно підменю вибору методу розв’язання задачі наведено на рисунку 4.10.

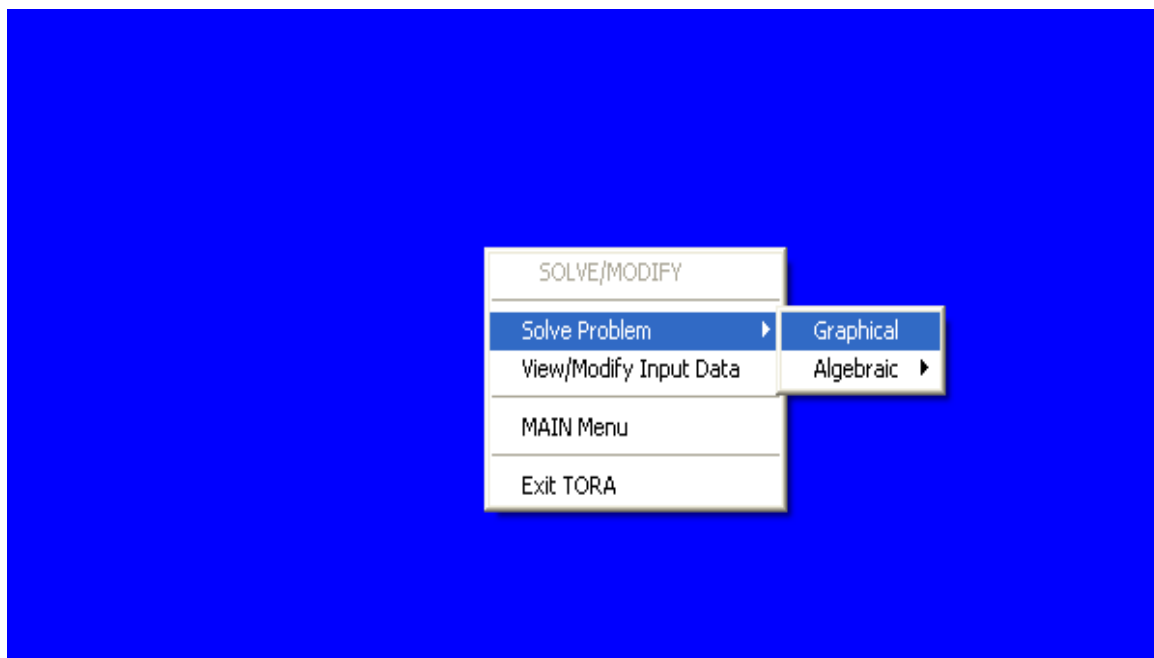


Рис. 4.10. Вікно підменю вибору методу розв’язання програми «TORA».

Отримуємо розв’язок ЗЛП. Вікно, в якому побудовано множину планів та вказано розв’язок задачі наведено на рисунку 4.11. На рисунку позначено координати оптимальної точки $A(360; 120)$. ЗЛП має єдиний розв’язок:

$$x_{1onm} = 360, x_{2onm} = 120; z_{min} = 252.$$

Таким чином, отримали результат для вихідної задачі: для утворення кормової суміші мінімальної вартості, що одночасно задовольняє вимогам загальної маси кормової суміші та поживності, птахофермі слід купити 360 кг зерна та 120 кг соєвих бобів. При цьому мінімальна вартість кормів складе 252 гр. од.

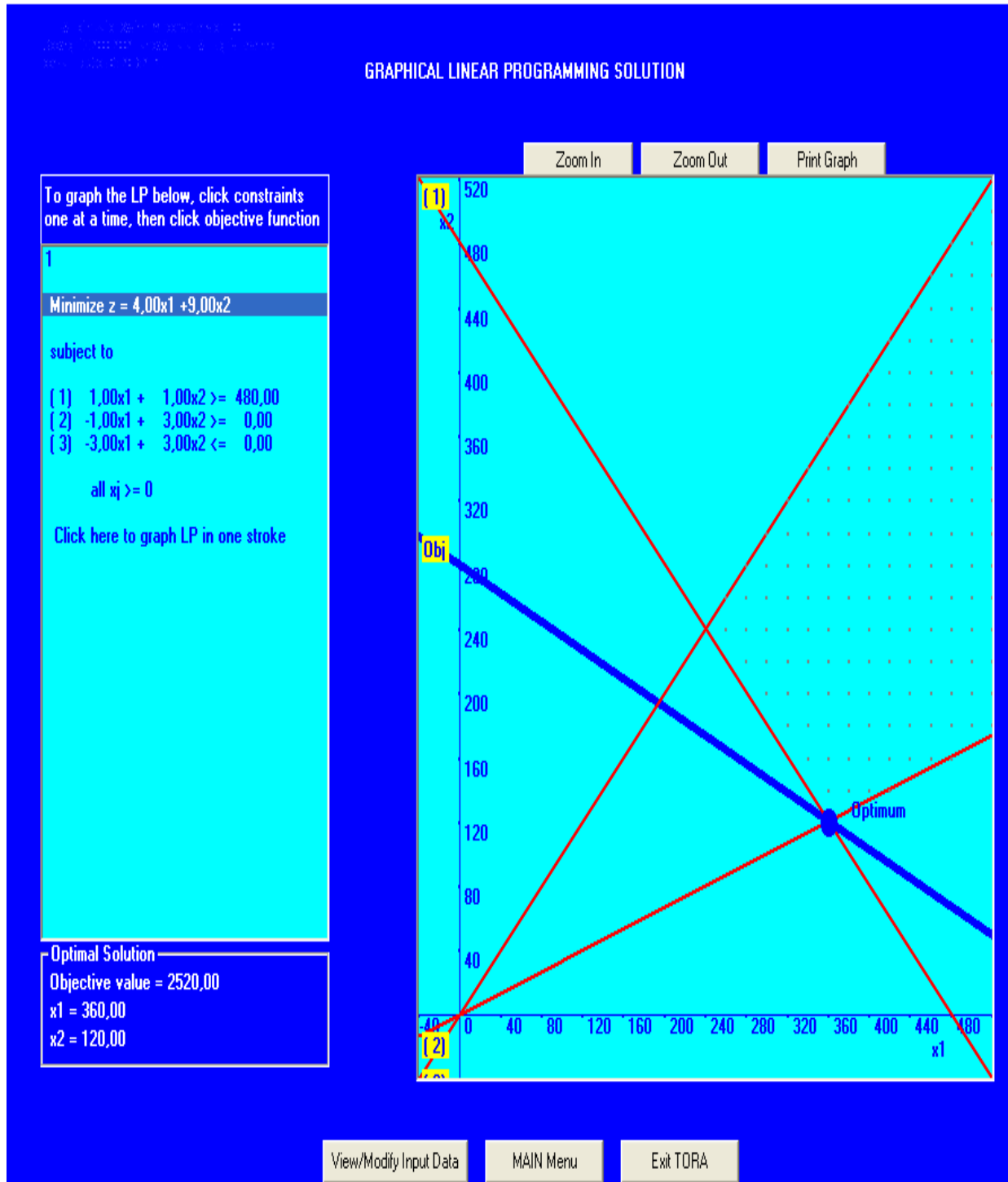


Рис. 4.11. Вікно побудови множини планів та розв'язку задачі програми «TORA».

Приклад 4.3. Скласти математичну модель задачі знаходження оптимального плану, тобто плану виробництва виробів із наявних матеріалів, що забезпечує максимальний прибуток за даними рисунка 4.12. Розв’язати задачу графоаналітичним методом.

Example: Production Problem



	Product A	Product B	Available
Raw material I	1	3	24
Raw material II	1	1	10
Raw material III	2	1	18
Revenue	100	200	

Рис. 4.12. Задача оптимального випуску продукції

Розв’язання. Позначимо через x_1, x_2 — запланований випуск продукції виду А та В відповідно; z — запланований загальний прибуток. Прибуток потрібно максимізувати, а витрати кожного виду матеріалів не повинен перевищувати наявний запас. Математична модель задачі набуває вигляду:

$$z = 100x_1 + 200x_2 \quad (\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 24; \\ x_1 + x_2 \leq 10; \\ 2x_1 + x_2 \leq 18; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0; \quad i = 1, 2.$$

Розв’яжемо ЗЛП графоаналітичним методом. Для цього побудуємо прямі

$L_1: 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 24$, яка проходить через точки (0; 8) та (24; 0);

$L_2: 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 10$, яка проходить через точки (10; 0) та (0; 10);

$L_3: 2 \cdot x_1 + x_2 = 18$, яка проходить через точки (9; 0) та (0; 18).

Example: Production Problem – Graphical Solution

$$Z = 100x_1 + 200x_2$$

→ $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{Z}{200}$ gives a line with profit Z

subject to

$$\max 100x_1 + 200x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Consider value of the objective at the corners of the feasible region

Optimal solution:

$$x_1^* = 3, x_2^* = 7$$

$$Z^* = 1700$$

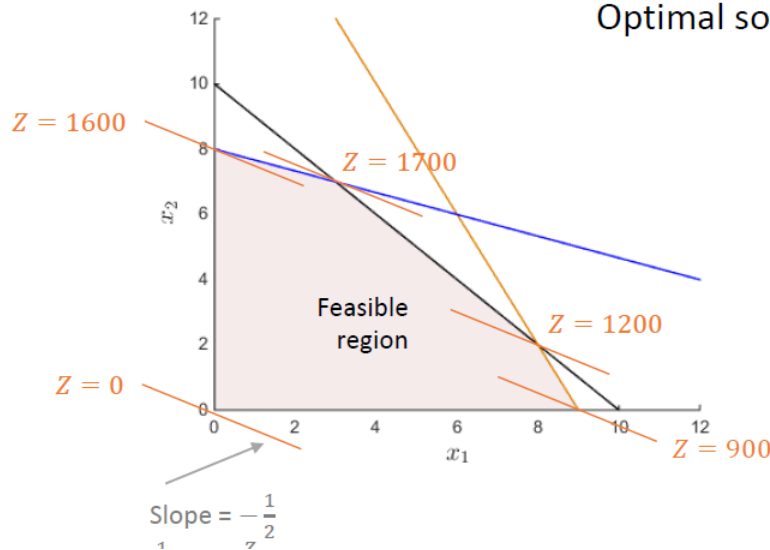


Рис. 4.13. Розв'язування задачі оптимального випуску продукції графоаналітичним методом

Множиною допустимих розв'язків (планів ЗЛП) є п'ятикутник, зображений на рисунку 4.13. Також на рисунку показано перетин лінії рівня з множиною допустимих розв'язків у кожній кутовій точці (вершині), а також значення цільової функції у кожній кутовій точці. Оптимальний план задачі

$$x_1 = 3; x_2 = 7; z_{max} = 1700$$

показує, що для отримання максимального прибутку 1700 Євро, потрібно випускати 3 одиниці продукції А та 7 одиниць продукції В.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачі графоаналітичним методом.

$$\begin{aligned} 1. \quad & z = 5x_1 + 3x_2 \quad (\max) \\ & \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10; \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \quad (\max) \\ & \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 24; \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & z = 2x_1 - 3x_2 \quad (\min) \\ & \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10; \\ -2x_1 + 2x_2 \geq -4; \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 4; \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & z = 5x_1 + x_2 \quad (\min) \\ & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6; \\ x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ -2x_1 + x_2 \geq 2; \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & z = 4x_1 - x_3 + 6 \quad (\max) \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 3; \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \\ & x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \quad (\min) \\ & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6; \\ x_1 - 2x_2 \leq 2; \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -5; \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad & z = x_1 - 2x_2 \quad (\min) \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_1 - x_2 \leq 3; \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad & z = -6x_1 + 4x_2 \quad (\min) \\ & \begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \leq 30; \\ -3x_1 + 8x_2 \geq -24; \\ 2x_1 + x_2 \geq 8; \end{cases} \\ & 3 \leq x_1 \leq 10, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \quad (\max) \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3; \\ x_1 - 3x_2 \leq 6; \\ x_1 - 2x_2 \geq -4; \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad & z = 10x_1 + 6x_2 \quad (\max) \\ & \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -5; \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21; \\ 8x_1 + 3x_2 \leq 24; \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \quad & z = x_1 - 2 \quad (\max) \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4; \\ x_1 - x_2 \leq 2; \\ -2x_1 + x_2 \leq 4; \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \quad & z = -3x_1 + 4x_2 \quad (\min) \\ & \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12; \\ -2x_1 + 7x_2 \geq -14; \\ 3x_1 - x_2 \geq 0; \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{13.} \quad z = -2x_1 + x_2 + 6 \quad (\mathbf{max}) \\
 & \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \geq -4; \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 35; \\ 2x_1 - x_2 = 2; \end{cases} \\
 & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{14.} \quad z = 4x_1 + 9x_2 \quad (\mathbf{min}) \\
 & \begin{cases} 2x_1 - 3 \leq 6; \\ 4x_1 - x_2 \leq 0; \\ x_1 - x_2 \geq -3; \end{cases} \\
 & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{15.} \quad z = 6x_1 + 6x_2 \quad (\mathbf{min}) \\
 & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3; \\ -6x_1 + 4x_2 \leq 12; \\ x_1 - x_2 \leq 5; \end{cases} \\
 & \quad \quad \quad x_1 \geq 2, \quad x_2 \geq 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{16.} \quad z = x_1 - 2x_2 \quad (\mathbf{max}) \\
 & \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_5 = 3; \end{cases} \\
 & \quad \quad \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \\
 & \quad \quad \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Варіанти лабораторних робіт за темою

«Розв'язання ЗЛП графоаналітичним методом»

Виробнича фірма спеціалізується на виготовленні двох видів продукції *A* та *B*. Продукція виготовляється на конвеєрних лініях № 1 та № 2. Тривалість обробки кожного виду продукції на відповідній лінії та прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду вказано у таблиці. Маркетингові дослідження ринку збуту показують, що тижневий попит на продукцію *A* не перевищує попиту на продукцію *B* більше, ніж на 30 одиниць, а продаж продукції *B* не перевищує 80 одиниць на тиждень. Скласти математичну модель задачі знаходження оптимального плану, тобто плану виробництва продукції, що забезпечує максимальний прибуток. Розв'язати задачу графоаналітичним методом. Дати економічне тлумачення отриманого розв'язку.

Варіант 1.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	40
№2	12	26	36
Прибуток, гр. од.	59	39	

Варіант 2.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	46
№2	12	26	40
Прибуток, гр. од.	58	38	

Варіант 3.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	42
№2	12	26	36
Прибуток, гр. од.	57	37	

Варіант 4.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	44
№2	12	26	38
Прибуток, гр. од.	56	36	

Варіант 5.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	36
№2	12	26	32
Прибуток, гр. од.	55	35	

Варіант 6.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	38
№2	12	26	34
Прибуток, гр. од.	54	34	

Варіант 7.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	42
№2	12	26	38
Прибуток, гр. од.	53	33	

Варіант 8.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	46
№2	12	26	40
Прибуток, гр. од.	52	32	

Варіант 9.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	30
№2	12	26	26
Прибуток, гр. од.	51	31	

Варіант 10.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	34
№2	12	26	30
Прибуток, гр. од.	50	30	

Варіант 11.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	44
№2	12	26	38
Прибуток, гр. од.	49	39	

Варіант 12.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	36
№2	12	26	30
Прибуток, гр. од.	48	38	

Варіант 13.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	42
№2	12	26	36
Прибуток, гр. од.	47	37	

Варіант 14.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	44
№2	12	26	34
Прибуток, гр. од.	46	36	

Варіант 15.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	34
№2	12	26	26
Прибуток, гр. од.	45	35	

Варіант 16.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	38
№2	12	26	34
Прибуток, гр. од.	44	24	

Варіант 17.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	30
№2	12	26	26
Прибуток, гр. од.	43	23	

Варіант 18.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	42
№2	12	26	36
Прибуток, гр. од.	42	21	

Варіант 19.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	40
№2	12	26	38
Прибуток, гр. од.	60	40	

Варіант 20.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	42
№2	12	26	36
Прибуток, гр. од.	50	30	

Варіант 21.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	44
№2	12	26	38
Прибуток, гр. од.	55	35	

Варіант 22.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	44
№2	12	26	34
Прибуток, гр. од.	50	30	

Варіант 23.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	38
№2	12	26	34
Прибуток, гр. од.	53	33	

Варіант 24.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	42
№2	12	26	36
Прибуток, гр. од.	55	35	

Варіант 25.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	38
№2	12	26	34
Прибуток, гр. од.	60	38	

Варіант 26.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	42
№2	12	26	36
Прибуток, гр. од.	58	35	

Варіант 27.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	38
№2	12	26	36
Прибуток, гр. од.	58	39	

Варіант 28.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	42
№2	12	26	34
Прибуток, гр. од.	55	30	

Варіант 29.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	40
№2	12	26	36
Прибуток, гр. од.	59	39	

Варіант 30.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	46
№2	12	26	40
Прибуток, гр. од.	58	38	

Варіант 31.

Конвеєрна лінія	Тривалість обробки продукції, хв.		Ресурс робочого часу конвеєрних ліній, год. на тиждень
	<i>A</i>	<i>B</i>	
№1	30	15	42
№2	12	26	36
Прибуток, гр. од.	57	37	

Тема 1.5. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.

Для розв'язування задач лінійного програмування запропоновано багато різних алгоритмів. Найбільш ефективним серед них є алгоритм, відомий під назвою *симплексний метод*, або *метод послідовного покращення плану*.

Вперше симплексний метод було запропоновано американським ученим Дж. Данцигом у 1949 р., проте, ще у 1939 р. ідеї методу було представлено радянським математиком Л. В. Канторовичем.

Наслідком із властивостей розв'язків задачі лінійного програмування є наступне твердження: оптимальний розв'язок задачі має знаходитись в одній із кутових точок многогранника допустимих розв'язків. Тому найпростіший спосіб відшукування оптимального плану потребує перебору всіх кутових точок (можливих допустимих планів ЗЛП).

Симплексний метод – це ітераційний процес, який починається з одного опорного розв'язку (кутової точки множини планів) і в пошуках оптимального варіанта рухається вздовж кутових точок множини допустимих розв'язків доти, доки не досягне оптимального значення, зокрема по кутових точках многокутника розв'язків, отриманого графоаналітичним методом.

У тих випадках, коли модель містить m рівнянь в основній системі обмежень, для побудови пробних розв'язків використовується m змінних, що приймають деякі додатні значення при нульових значеннях інших змінних. Спочатку припустимо, що розв'язок існує, причому оптимальне значення цільової функції є скінченним. У цьому випадку обчислювальна процедура може бути подана в наступній послідовності.

1. Обираємо m змінних, що задають допустимий пробний розв'язок, і виключаємо ці змінні з цільової функції.

2. Перевіримо, чи не можна за рахунок однієї зі змінних, прирівняної спочатку до нуля, покращити значення цільової функції, надаючи їй відмінні від нуля додатні значення. Якщо це можливо, перейдемо до третього пункту, інакше припинимо обчислення.

3. Знайдемо граничне значення змінної, за допомогою якої можна поліпшити значення цільової функції. Збільшення значення цієї змінної допустимо до тих пір, поки одна із m змінних, що увійшли в пробний розв'язок, не обернеться на нуль. Виключимо з виразу для цільової функції щойно згадану змінну і введемо в пробний розв'язок ту змінну, за рахунок якої результат може бути покращений.

4. Розв'яжемо систему m рівнянь відносно змінної, що увійшла до нового пробного розв'язку. Виключимо цю змінну з виразу для цільової функції. Повернемось до другого пункту.

Важливо відзначити, що запропонований алгоритм дійсно призводить до оптимального розв'язку для будь-якої моделі лінійного програмування за скінченне число ітерацій, якщо система обмежень задачі сумісна та оптимальне значення цільової функції скінченне.

Симплексний метод заснований на послідовному переході від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого, при цьому значення цільової функції поліпшується. Розглянемо алгоритм симплексного методу на прикладі задачі раціонального використання ресурсів.

Підприємство виготовляє n видів продукції, витрачаючи на це m видів сировини, запаси якої відомі b_i ($i = \overline{1, m}$). Прибуток, отриманий від реалізації одиниці кожного виду продукції c_j ($j = \overline{1, n}$). Нормативи витрат сировини на виготовлення одиниці продукції складають a_{ij} .

Необхідно скласти такий план випуску продукції, за якого прибуток від її реалізації буде максимальним.

Математичну модель задачі запишемо наступним чином.

Визначити план $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, який задовольняє обмеженням

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

і забезпечує максимальне значення цільової функції

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max.$$

Алгоритм симплексного методу складається з наступних етапів.

1. Складання початкового опорного плану.

Систему обмежень задачі, що розглядається, задано у вигляді нерівностей змісту " $\leq$ ", праві частини яких $b_i \geq 0$. Перейдемо від системи нерівностей до системи рівнянь шляхом введення додаткових додатних змінних, кожна з яких визначає об'єм відповідного ресурсу, що не використовується. Вектори-стовпці при цих змінних мають вигляд одиничних векторів і утворюють базис, а відповідні їм змінні називають **базисними**:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

де x_{n+i} – базисні змінні, $(i = \overline{1, m})$, x_j – вільні змінні, $(j = \overline{1, n})$.

Розв'яжемо цю систему відносно базисних змінних:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i = \overline{1, m}),$$

а функцію цілі перепишемо у вигляді рівняння

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n - 0 \cdot x_{n+1} - 0 \cdot x_{n+2} - \dots - 0 \cdot x_{n+m} = 0.$$

Додаткові змінні увійшли до виразу цільової функції з нульовими коефіцієнтами, оскільки ресурси, що не використовуються, не дають прибутку.

Зауваження 5.1. В деякій літературі систему, подану у вигляді рівнянь, називають стандартною формою запису ЗЛП. На рисунку 5.1 показано зв'язок між формами запису задачі лінійного програмування.

As (intuitively) seen in the last class, all forms of the LP are equivalent:

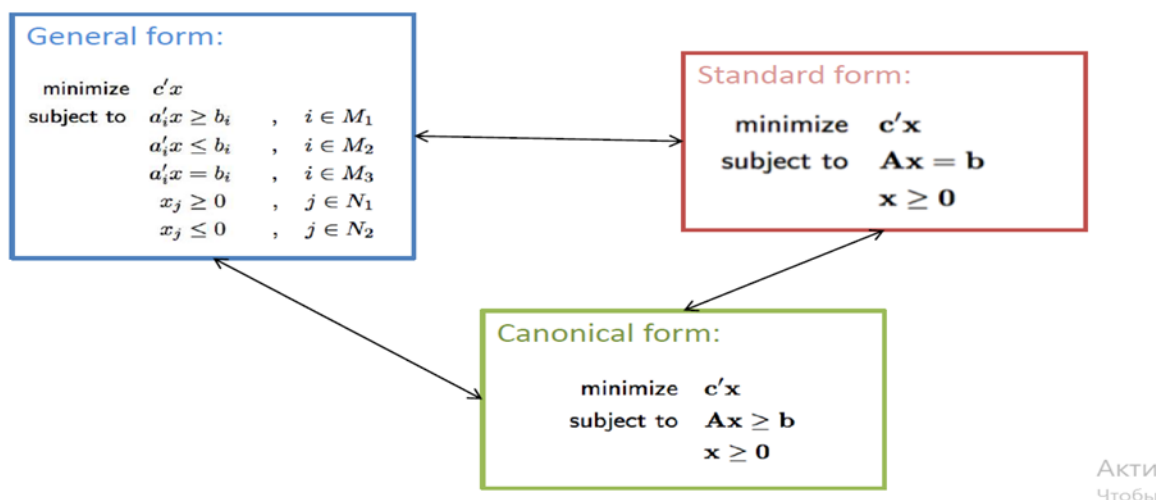


Рис. 5.1. Зв'язок між формами запису задачі лінійного програмування.

Вважаючи, що основні змінні $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, отримаємо початковий опорний план $X_0 = (0; 0; \dots; 0; b_1; b_2; \dots; b_m)$, і значення цільової функції $z_0 = 0$, яке відповідає цьому плану. Це є відображенням реального стану речей, тому що продукція не виробляється, ресурси не використовуються, реалізації і прибутку немає, в зв'язку із відсутністю продукції.

Реалізація симплексного методу під час розв'язування задач лінійного програмування здійснюється за допомогою симплексних таблиць. У таблиці виписані відповідні вектори $\bar{A}_j$ та $\bar{B}$. Вектор $\bar{B}$ складений із вільних членів системи основних обмежень. Серед відповідних векторів є m векторів, що утворюють базис. Їх записують у стовпчик «Б». Як бачимо, вважаючи вільні змінні рівними нулю, з таблиці можна отримати початковий опорний план задачі.

У таблиці також записуються коефіцієнти при змінних цільової функції (перший рядок), коефіцієнти при базисних змінних цільової функції (стовпець C_B). Рядок $z_j - c_j$ називається *індексним* або *рядком оцінок*. У ньому розташовані оцінки векторів, які розраховуються так: знаходять суму добутків компонент вектору на елементи стовпця C_B і віднімають від отриманого числа коефіцієнт при відповідній змінній цільової функції. Ці числа показують, на скільки зміниться значення цільової функції, якщо відповідна змінна збільшиться на одиницю.

Оцінка вектору $\bar{B}$ — число, яке стоїть на перетині індексного рядка і колонки $\bar{B}$, показує значення цільової функції плану, записаного в даній таблиці. Воно знаходиться як сума добутків елементів стовпця C_B на компоненти вектору $\bar{B}$.

Оцінки векторів використовують для перевірки оптимальності плану.

2. Перевірка плану оптимальність.

Якщо всі коефіцієнти індексного рядка симплексної таблиці під час розв'язання задачі на максимум невід'ємні (≥ 0), то план є оптимальним. Якщо знайдеться хоча б один коефіцієнт індексного рядка менший за нуль, то план неоптимальний і його можна покращити. В цьому випадку переходимо до наступного етапу алгоритму.

3. Визначення ключового стовпця та рядка.

З від'ємних коефіцієнтів індексного рядка обираємо той, який дозволяє максимально змінити значення цільової функції. Він і визначає ключовий стовець, який показує, яка змінна на наступній ітерації перейде з вільних до базисних і який вектор увійде до базису.

Потім елементи стовпця вільних членів симплексної таблиці ділимо на додатні елементи ключового стовпця. Результати заносимо в окремий стовець Θ . Рядок симплексної таблиці, що відповідає мінімальному значенню Θ , є ключовим. Він визначає вектор, який на наступній ітерації вийде із базису.

Елемент симплексної таблиці, що знаходиться на перетині ключового стовпця та рядка, називають **ключовим** і деяким чином його виділяють (колом, окремим кольором, прямокутником тощо).

4. Побудова нового опорного плану.

Перехід до нового плану здійснюється внаслідок перерахунку симплексної таблиці методом Жордана-Гауса. Спочатку замінимо вектори у базисі, тобто, замість $\bar{A}_i$ у базис увійде $\bar{A}_j$, що відповідає ключовому стовпцю.

Розділимо всі елементи ключового рядка попередньої симплексної таблиці на ключовий елемент і результати ділення запишемо в рядок наступної симплексної таблиці, що відповідає введеному в базис вектору $\bar{A}_j$. В результаті цього, на місці ключового елемента в наступній симплексної таблиці будемо мати 1, а в інших комірках j -го стовпця, включаючи комірку стовпця індексного рядка, запишемо нулі. Інші нові елементи нового плану знаходимо за правилом прямокутника:

$$HE = CTE - \frac{A \cdot B}{KE},$$

де CTE – елемент старого плану, KE – ключовий елемент, A і B – елементи старого плану, що утворюють прямокутник з елементами CTE і KE .

Потім повертаємося до другого етапу алгоритму – перевірки нового плану оптимальності.

Зауваження 5.2. При розв’язанні задачі лінійного програмування на мінімум цільової функції ознакою оптимальності плану є недодатні значення всіх коефіцієнтів індексного рядка симплексної таблиці.

Зауваження 5.3. Якщо в ключовому стовпці всі коефіцієнти $a_{ij} \leq 0$, то функція цілі необмежена на множині допустимих планів, тобто $z \rightarrow \infty$ і задача не має розв’язку (у разі дослідження z на **max**).

Зауваження 5.4. Якщо в стовпці Θ симплексної таблиці містяться два або кілька однакових найменших значень, то новий опорний план буде виродженим (одна або

кілька базисних змінних дорівнюватимуть нулю). Вироджені плани можуть спричинити зациклювання, тобто, до багаторазового повторення процесу обчислень, який не дозволяє отримати оптимальний план. З метою унеможливлення цього для вибору ключового рядка використовують **метод Креко**, який полягає в наступному. Елементи рядків, які мають однакові найменші Θ_i , діляться на передбачувані ключові елементи, а результати заносяться додаткові рядки. В якості ключового рядку обирається той, у якому раніше зустрінеться найменша частка під час читання таблиці зліва направо стовпцями. Наприклад, таблиця, що містить три рівні значення $\Theta_i = 2$, має такий вигляд:

Б	$\bar{B}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$	$\bar{A}_7$	Θ
$\bar{A}_4$	4	2	3	6	1	0	0	2	$4 : 2 = 2$
$\bar{A}_5$	8	4	8	1	0	1	0	4	$8 : 4 = 2$
$\bar{A}_6$	10	5	12	-1	0	0	1	5	$10 : 5 = 2$

Припустимо, що ключовим стовпцем є $\bar{A}_7$, який вводиться в новий план. Тоді ключовим елементом може бути: 2, 4 або 5. Дотримуючись вказаного правила, отримуємо таблицю:

$\bar{B}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$	$\bar{A}_7$
2	1	1,5	3	0,5	0	0	1
2	1	2	0,25	0	0,25	0	1
2	1	2,4	-0,2	0,2	0	0,2	1

Порівнюємо послідовно зліва направо отримані частки по стовпцям. У першому та другому стовпці всі частки однакові, а в третьому стовпці найменша частка 1,5 у першому рядку, отже, цей рядок і буде ключовим з ключовим елементом 2.

Зауваження 5.5. Якщо в оптимальний план увійшла додаткова змінна x_{n+i} , то при реалізації такого плану є невикористані ресурси i -го виду, отриманого в стовпці вільних членів симплексної таблиці.

Зауваження 5.6. Якщо в індексному рядку симплексної таблиці оптимального плану знаходиться нуль, що належить вектору, який не увійшов до базису, а в стовпці, що містить цей нуль, є хоча б один додатний елемент, то задача має безліч оптимальних планів. Вектор, який відповідає вказаному стовпцю, можна ввести в базис, виконавши відповідні етапи алгоритму. В результаті буде отримано другий оптимальний план з іншим набором базисних змінних.

Приклад 5.1. Розв'язати ЗЛП симплексним методом:

$$Z = -3x_1 + x_2 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язування. Зведемо ЗЛП до канонічного вигляду, переходячи від нерівностей до рівнянь та вводячи додаткові невід'ємні змінні, які увійдуть в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами:

$$Z = -3x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Тому що кількість рівнянь дорівнює трьом, вектори, які відповідають змінним задані у трьох вимірному просторі та дорівнюють:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектори $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ складають базис. Тому відповідні їм змінні x_3, x_4, x_5 є базисними, а змінні x_1 та x_2 відповідно вільними. Для того, щоб отримати початковий опорний план потрібно вільні змінні прирівняти до нуля, а значення базисних отримати з системи рівнянь:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 3, x_5 = 2.$$

Таким чином, початковий опорний план має вигляд:

$$X_0 = (0; 0; 4; 3; 2).$$

Перехід до наступних (більш кращих) планів зручно проводити за допомогою симплексних таблиць.

Б	C_B	$\vec{A}_0$	-3	1	0	0	0	θ
			$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	
$\vec{A}_3$	0	4	1	-2	1	0	0	4
$\vec{A}_4$	0	3	3	-1	0	1	0	1
$\vec{A}_5$	0	2	0	1	0	0	1	—
$Z_j - C_j$		0	3	-1	0	0	0	

Нижній рядок $Z_j - C_j$ називається індексним рядком або рядком оцінок. В його комірках містяться оцінки векторів, кожен з яких можна знайти наступним чином: знаходять суму додатків компонент вектору на елементи стовпця C_B та віднімають з отриманого значення коефіцієнт при відповідній змінній у цільовій функції. Оцінка вектору показує на скільки зменшиться значення цільової функції, якщо відповідна змінна зростає на одиницю.

Наприклад:

$$Z_1 - C_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 - (-3) = 3,$$

$$Z_2 - C_2 = 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 - 1 = -1.$$

Оцінка вектору $\vec{A}_0$ показує значення цільової функції даного плану. Вона знаходиться як сума додатків елементів стовпця C_B на компоненти вектору $\vec{A}_0$. У даному випадку $Z(X_0) = 0$. Оцінки векторів використовують для перевірки плану на оптимальність.

Якщо маємо задачу на пошук мінімуму, то в рядку оцінок із додатних чисел вибираємо максимальне; якщо задача на пошук максимуму, то в рядку оцінок із від'ємних чисел вибираємо мінімальне. У боковому стовпці в обох випадках вибирається із додатних мінімальний. Для того, щоб опорний не вироджений план

ЗЛП був оптимальним, необхідно і достатньо щоб оцінки векторів були невід’ємними у випадку пошуку максимуму, та недодатними у випадку пошуку мінімуму. В задачах максимізації: якщо існує вектор, оцінка якого від’ємна, а всі його компоненти недодатні, то ЗЛП розв’язків не має, цільова функція необмежена зверху. В задачах мінімізації: якщо існує вектор, оцінка якого додатна, а усі його компоненти недодатні, то ЗЛП розв’язків не має, цільова функція необмежена знизу.

Даний план не є оптимальним, тому що існує додатна оцінка вектору $\vec{A}_1$. Найдемо елементи стовпця θ поділивши елементи стовпця $\vec{A}_0$ на відповідні їм елементи ключового стовпця $\vec{A}_1$, $\theta = (4; 1)$. Найменшим значенням є 1, яка відповідає ключовому рядку $\vec{A}_4$, тому з базису виводиться вектор $\vec{A}_4$ і на його місце вводиться вектор $\vec{A}_1$. Елемент, який стоїть на перетині ключового рядка та ключового стовпця будемо називати ключовим елементом.

Алгоритм перерахунку елементів симплексної таблиці: 1) елементи ключового рядка діляться на ключовий елемент; 2) елементи ключового стовпця, крім ключового елемента, замінюються нулями; 3) інші елементи таблиці перераховуються за правилом прямокутника.

Після перерахунків отримаємо наступну таблицю.

Б	C _Б	$\vec{A}_0$	-3	1	0	0	0	θ
			$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	
$\vec{A}_3$	0	3	0	-5/3	1	-1/3	0	
$\vec{A}_1$	-3	1	1	-1/3	0	1/3	0	
$\vec{A}_5$	0	2	0	1	0	0	1	
$Z_j - C_j$		-3	0	0	0	-1	0	

В поданій таблиці отримано план $X_1 = (1; 0; 3; 0; 2)$, значення цільової функції $Z(X_1) = -3$. Цей план є оптимальним, тому що оцінки всіх векторів недодатні. Таким чином, $Z_{min} = -3$, $X_{opt} = (1; 0; 3; 0; 2)$. Дана ЗЛП має безліч розв’язків, тому що вектор $\vec{A}_2$ не входить в базис, а його оцінка дорівнює нулю.

Приклад 5.2. Розв'язати ЗЛП симплексним методом:

$$Z = -3x_1 + 2x_2 \quad (max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язування. Зведемо ЗЛП до канонічного вигляду, переходячи від нерівностей до рівнянь та вводячи додаткові невід'ємні змінні, які увійдуть в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами:

$$Z = -3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \quad (max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 & + x_4 = 6 \\ x_1 & + x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Тому що кількість рівнянь дорівнює трьом, вектори, які відповідають змінним задані у трьох вимірному просторі та дорівнюють:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектори $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ складають базис. Тому відповідні їм змінні x_3, x_4, x_5 є базисними, а змінні x_1 та x_2 відповідно вільними. Для того, щоб отримати початковий опорний план потрібно вільні змінні прирівняти до нуля, а значення базисних отримати з системи рівнянь:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 6, x_5 = 6.$$

Таким чином, початковий опорний план має вигляд:

$$X_0 = (0; 0; 2; 6; 6).$$

Перехід до наступних (більш кращих) планів зручно проводити за допомогою симплексних таблиць. Даний план не є оптимальним, тому що існує додатна оцінка вектору $\vec{A}_2$. Знайдемо елементи стовпця θ поділивши елементи стовпця $\vec{A}_0$ на

відповідні їм елементи ключового стовпця $\vec{A}_2$, $\theta = (3)$. Єдиним значенням є 3, яке відповідає ключовому рядку $\vec{A}_4$, тому з базису виводиться вектор $\vec{A}_4$ і на його місце вводиться вектор $\vec{A}_2$.

Б	C _Б	$\vec{A}_0$	-3	2	0	0	0	θ
			$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	
$\vec{A}_3$	0	2	2	-1	1	0	0	—
$\vec{A}_4$	0	6	-3	2	0	1	0	3
$\vec{A}_5$	0	6	1	0	0	0	1	—
$Z_j - C_j$		0	3	-2	0	0	0	

Після перерахунків отримаємо наступну таблицю.

	C _Б	$\vec{A}_0$	-3	2	0	0	0	θ
			$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	
$\vec{A}_3$	0	5	1/2	0	1	1/2	0	
$\vec{A}_2$	2	3	-3/2	1	0	1/2	0	
$\vec{A}_5$	0	8	1	0	0	0	1	
$Z_j - C_j$		6	0	0	0	1	0	

В поданій таблиці отримано план $X_1 = (0; 3; 5; 0; 6)$, значення цільової функції $Z(X_1) = 6$. Цей план є оптимальним, тому що оцінки всіх векторів невід'ємні. Таким чином, $Z_{\min} = 6$, $X_{\text{опт}} = (0; 3; 5; 0; 6)$. Дана ЗЛП має безліч розв'язків, тому що вектор $\vec{A}_1$ не входить в базис, а його оцінка дорівнює нулю.

Приклад 5.3.

Підприємство випускає три види продукції: A, B, C , використовуючи при цьому три види ресурсів: R_1, R_2, R_3 . Відомі питомі витрати ресурсів, їх запаси та прибуток, що отримується від реалізації одиниці продукції. Зазначені дані розміщені у таблиці.

Необхідно визначити, яку кількість продукції відповідного виду має виготовити підприємство з наявних ресурсів, щоб, реалізувавши виготовлену продукцію, отримати максимальний прибуток.

Ресурси	A	B	C	Запас
R_1	4	4	5	200
R_2	9	15	5	400
R_3	5	6	6	260
Прибуток	12	9	14	

Розв'язання.

Запишемо математичну модель задачі. Визначимо план $X = (x_1, x_2, x_3)$, який задовольняє умовам

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 200; \\ 9x_1 + 15x_2 + 5x_3 \leq 400; \\ 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \leq 260; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

та забезпечує максимальне значення цільової функції

$$z = 12x_1 + 9x_2 + 14x_3 \quad (\max).$$

Для побудови початкового опорного плану систему нерівностей зведемо до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних x_4, x_5, x_6 :

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 200; \\ 9x_1 + 15x_2 + 5x_3 + x_5 = 400; \\ 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 + x_6 = 260. \end{cases}$$

Очевидно, що змінні x_4, x_5, x_6 в цій системі є базисними, x_1, x_2, x_3 — вільними.

Слід зазначити, що зміст змінних x_4, x_5 та x_6 — невикористані ресурси виду R_1, R_2 та R_3 відповідно і тому ці змінні увійдуть у вираз цільової функції з нульовими коефіцієнтами:

$$z = 12x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \quad (\max).$$

Вважаючи, що вільні змінні $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, отримаємо початковий опорний план $X_0 = (0; 0; 0; 200; 400; 260)$, $z_0 = 0$, в якому базисні змінні $x_4 = 200, x_5 = 400, x_6 = 260$. Отже, продукція не виготовляється і не реалізується, ресурси не використовуються, а прибуток дорівнює нулю. Отриманий початковий опорний план напишемо до симплексної таблиці.

C_B	B	$\bar{B}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$	Θ_1	Θ_2	Θ_3
			12	9	14	0	0	0			
0	$\bar{A}_4$	200	4	4	5	1	0	0	50	50	40
0	$\bar{A}_5$	400	9	15	5	0	1	0	$400/9$	$80/3$	80
0	$\bar{A}_6$	260	5	6	6	0	0	1	52	$130/3$	$130/3$
$z_j - c_j$	0		-12	-9	-14	0	0	0	$-1600/3$	-240	-560

Початковий опорний план не є оптимальним, оскільки індексний рядок містить від'ємні коефіцієнти: $-12, -9, -14$.

Враховуючи економічний зміст елементів індексного рядка, в якості ключового стовпця обираємо стовпець $\bar{A}_3$, а потім, за найменшим елементом стовпця Θ_3 , за ключовий рядок – перший рядок.

Ключовий елемент дорівнює 5 і знаходиться на перетині ключового стовпця та ключового рядка та виділено в таблиці.

Формуємо наступну симплексну таблицю. Замість вектору $\bar{A}_4$ в базис увійде вектор $\bar{A}_3$. Перший рядок у цій таблиці отримано в результаті ділення всіх елементів першого рядка першої симплексної таблиці на ключовий елемент $KE = 5$. На місці ключового елемента у другій таблиці отримуємо 1. У решті клітин стовпця $\bar{A}_3$ другої таблиці записуємо нулі. Стовпці $\bar{A}_5$ і $\bar{A}_6$ переносяться до другої симплексної таблиці без зміни, оскільки вони залишилися у базисі.

Таким чином, у другій симплексної таблиці заповнені перший рядок і стовпці $\bar{A}_3$, $\bar{A}_5$ та $\bar{A}_6$. Всі інші елементи другої симплексної таблиці, включаючи елементи індексного рядка, визначаються за правилом прямокутника. Для цього обираємо з першої таблиці чотири числа, які розташовані у вершинах прямокутника та завжди включають ключовий елемент $KE = 5$. У другій вершині по діагоналі знаходиться старе значення елемента, наприклад, значення цільової функції $z_0 = 0 = CE$, яке вказує на місце розташування нового елемента HE в другій симплексній таблиці. Третій елемент $A = 200$ і четвертий елемент $B = -14$ завершують побудову

прямокутника в двох вершинах, яких не вистачає, і розташованих по іншій діагоналі.

Значення нового елемента в другій симплексній таблиці знаходимо з виразу:

$$HE = CE - \frac{A \cdot B}{KE} = 0 - \frac{200 \cdot (-14)}{5} = 560.$$

Елементи другого рядку визначаються аналогічно:

$$400 - \frac{200 \cdot 5}{5} = 200; \quad 9 - \frac{4 \cdot 5}{5} = 5; \quad 15 - \frac{4 \cdot 5}{5} = 11; \quad 0 - \frac{5 \cdot 1}{5} = -1.$$

Аналогічно проводяться розрахунки за всіма рядками таблиці, включно з індексним.

C_B	B	$\bar{B}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$	Θ_1
			12	9	14	0	0	0	
14	$\bar{A}_3$	40	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	50
0	$\bar{A}_5$	200	5	11	0	-1	1	0	40
0	$\bar{A}_6$	20	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	0	1	100
$z_j - c_j$		560	$-\frac{4}{5}$	$\frac{11}{5}$	0	$\frac{14}{5}$	0	0	-32

Контроль. З другої симплексної таблиці можна виписати план розглянутої задачі $X_1 = (0; 0; 40; 0; 200; 200)$ та значення цільової функції на ньому $z_1 = 560$.

Отриманий план є неоптимальним, оскільки в індексному рядку знаходиться від'ємний коефіцієнт: $-\frac{4}{5}$.

На третій ітерації (третя симплексна таблиця) отримуємо план, який є оптимальним, оскільки всі коефіцієнти в індексному рядку ≥ 0 .

C_B	B	$\bar{B}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$
			12	9	14	0	0	0
14	$\bar{A}_3$	8	0	$-\frac{24}{25}$	1	$\frac{9}{25}$	$-\frac{4}{25}$	0
12	$\bar{A}_1$	40	1	$\frac{11}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
0	$\bar{A}_6$	12	0	$\frac{19}{25}$	0	$-\frac{29}{25}$	$-\frac{1}{25}$	1
$z_j - c_j$		592	0	$\frac{99}{25}$	0	$\frac{66}{25}$	$\frac{4}{25}$	0

Оптимальний план можна записати так:

$$X_{opt} = (40; 0; 8; 0; 0; 12), \quad z_{max} = 592.$$

Отже, підприємство для отримання максимального прибутку у розмірі 592 грошових одиниці повинно з наявних ресурсів виготовити і реалізувати 40 одиниць продукції виду A та 8 одиниць продукції виду C , а продукцію виду B зовсім не виробляти. При цьому ресурси R_1 і R_2 будуть використані повністю, а ресурс R_3 залишиться в кількості 12 одиниць.

В індексному рядку останньої симплексної таблиці небазисні стовпці мають ненульові оцінки, тому отриманий оптимальний план є єдиним.

Приклад 4.4.

Розв'язати задачу лінійного програмування

$$z = 4x_1 + 5x_2 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10; \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 40; \\ x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання.

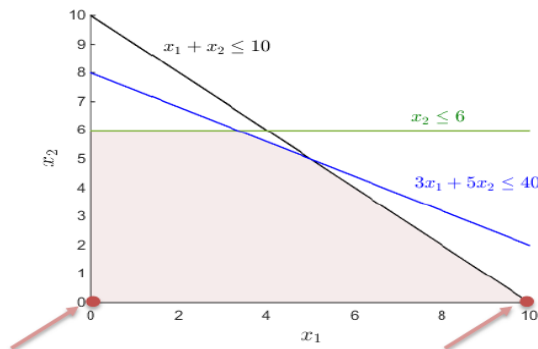
Вирішення ЗЛП наведено на рисунках 5.2 та 5.3. Звернемо увагу, що ЗЛП вирішена двома методами: симплексним та графоаналітичним. Наочно можливо спостерігати зв'язок між кутовою точкою множини допустимих розв'язків та опорним планом ЗЛП у симплексній таблиці.

Зауважимо, що симплексні таблиці мають вигляд у деякій мірі відмінний від запропонованого у попередній задачі. Проте загальна схема розв'язання (визначення базису та опорного плану, перехід від одної таблиці до іншої тощо) залишається незмінною.

Оптимальний план (розв'язок) задачі лінійного програмування можна записати наступним чином:

$$X_{opt} = (5; 5; 0; 0; 1), \quad z_{max} = 45.$$

Which variable should we select to enter the basis?



- The one which improves the objective value the most?

Consider now the problem in tabular form and select x_1 instead of x_2 to enter the basis in the first iteration of the simplex algorithm:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	1	0	0	10
3	5	0	1	0	40
0	1	0	0	1	6
-4	-5	0	0	0	0

$$\rightarrow x_1 = \min\{10, 40/3\}$$

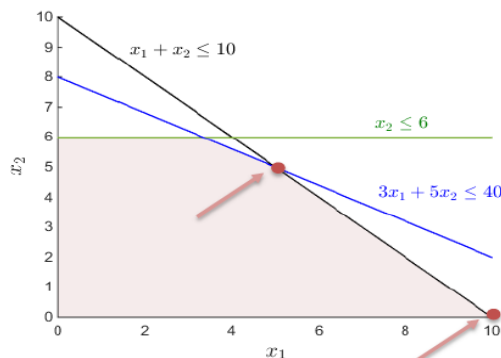
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	1	0	0	10
0	2	-3	1	0	10
0	1	0	0	1	6
0	-1	4	0	0	40

Eliminate x_1 : subtract 3 times row 1

Eliminate x_1 : add 4 times row 1

Рис. 5.2. Перша та друга симплексні таблиці розв'язку ЗЛП.

Leaving basic variable? Minimum ratio test:
pick out each coefficient in pivot column > 0



$$x_2 = \min\left\{\frac{10}{1}, \frac{10}{2}, \frac{6}{1}\right\}$$

Divide pivot row by two.

Subtract or add pivot row such that coefficient related to new basic variable becomes zero.

Pivot column

Pivot row

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	1	0	0	10
0	2	-3	1	0	10
0	1	0	0	1	6
0	-1	4	0	0	40

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	5
0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	5
0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1
0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	45

Рис. 5.3. Друга та третя симплексні таблиці розв'язку ЗЛП.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати симплексним методом наступні задачі лінійного програмування:

$$1. \quad \begin{aligned} Z &= -2x_1 + 6x_2 \text{ (min)} \\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 - x_2 + 2x_3 \text{ (max)} \\ \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -12 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 18 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} Z &= 5x_1 + x_2 \text{ (min)} \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 - x_2 + 2x_3 \text{ (max)} \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_3 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} Z &= 6x_1 + 5x_2 \text{ (max)} \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} Z &= -x_1 + 2x_2 \text{ (min)} \\ \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 + 5x_2 \text{ (max)} \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$8. \quad \begin{aligned} Z &= -2x_1 + 6x_2 \text{ (min)} \\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$9. \quad \begin{aligned} Z &= -x_1 + 3x_2 - x_3 \text{ (min)} \\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 16 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$10. \quad \begin{aligned} Z &= x_1 - 2x_2 - x_3 \text{ (min)} \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$11. \quad \begin{aligned} Z &= -x_1 + 5x_2 \text{ (min)} \\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$12. \quad \begin{aligned} Z &= 5x_1 - 2x_2 + x_3 \text{ (max)} \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 18 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Підприємство випускає три види продукції A, B, C , використовуючи при цьому три види ресурсів R_1, R_2, R_3 . Відомі нормативні витрати ресурсів, їх запаси та прибуток, що отримується від реалізації одиниці продукції.

Скласти математичну модель задачі знаходження оптимального плану, тобто плану виробництва продукції із наявних ресурсів, що забезпечує максимальний прибуток. Розв'язати її симплексним методом. Дати економічне тлумачення отриманого розв'язку.

13.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	4	6	6	240
R_2	3	4	2	150
R_3	2	3	4	180
<i>Прибуток</i>	8	9	10	

14.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	7	6	9	560
R_2	5	5	8	440
R_3	6	6	4	360
<i>Прибуток</i>	12	11	14	

15.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	9	6	5	600
R_2	3	4	7	420
R_3	4	8	6	380
<i>Прибуток</i>	8	9	12	

16.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	7	8	5	560
R_2	4	3	4	380
R_3	6	5	4	440
<i>Прибуток</i>	12	13	16	

17.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	4	7	8	400
R_2	4	6	2	300
R_3	8	5	8	440
<i>Прибуток</i>	10	7	12	

18.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	4	5	8	420
R_2	8	8	6	720
R_3	4	6	3	200
<i>Прибуток</i>	21	18	20	

19.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	3	8	5	200
R_2	7	15	7	420
R_3	4	5	10	500
<i>Прибуток</i>	10	14	15	

20.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	7	5	8	500
R_2	6	6	5	600
R_3	4	5	3	300
<i>Прибуток</i>	9	8	10	

Тема 1.6. Метод штучного базису (М-метод) розв'язування задач лінійного програмування

Симплексний метод вирішення задач базується на введенні додаткових змінних, що дозволяють утворювати базис. Наявність базису є необхідною умовою під час вирішення задач симплексним методом.

Якщо ж обмеження задачі задані у вигляді нерівностей виду $\geq$ чи рівнянь

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \text{та (або)}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i,$$

то неможливо відразу отримати початковий базисний розв'язок, якщо матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих системах обмежень, не дозволяє утворювати одиничну матрицю. Причому рівняння відображають жорсткі умови обмежень за ресурсами, які не допускають жодних відхилень. Для дотримання рівнянь вводяться штучні змінні x_{n+i} , що дорівнюють нулю. Вектори штучних змінних утворюють необхідну для розв'язання одиничну матрицю (базис). Такий базис називається **штучним**, а метод розв'язання називається **методом штучного базису**. Причому штучні змінні не мають відношення до змісту поставленої задачі, проте дозволяють побудувати стартову точку, а процес оптимізації змушує ці змінні приймати нульові значення і забезпечити допустимість оптимального розв'язку.

Розглянемо приклади постановок таких задач.

Перетворення обмежень, заданих у вигляді рівнянь, розглянемо на прикладі:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 25; \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 29; \\ 4x_2 + 2x_3 = 31. \end{cases}$$

У систему рівнянь вводимо штучні змінні x_4, x_5, x_6 з коефіцієнтами, рівними одиниці, що дозволяють утворити штучний базис:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 25; \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 29; \\ 4x_2 + 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 = 31. \end{cases}$$

Також виконується умова невід'ємності невідомих $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1,6}$).

Цільова функція має вигляд:

при розв'язанні задачі на максимум –

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 - M \cdot x_4 - M \cdot x_5 - M \cdot x_6 \quad (\text{max});$$

при розв'язанні задачі на мінімум –

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + M \cdot x_4 + M \cdot x_5 + M \cdot x_6 \quad (\text{min}).$$

За використання штучних змінних, що вводяться в цільову функцію, накладається так званий "штраф" величиною M , дуже велике додатне число, яке зазвичай не задається ($M \rightarrow \infty$).

Перетворення обмежень у вигляді нерівностей виду $\geq$ розглянемо на прикладі:

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 30; \\ 4x_2 + x_3 \geq 12; \\ 11x_1 + 10x_3 \geq 41. \end{cases}$$

Для отримання системи рівнянь вводимо додаткові змінні x_4, x_5, x_6 :

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 30; \\ 4x_2 + x_3 - x_5 = 12; \\ 11x_1 + 10x_3 - x_6 = 41. \end{cases}$$

Оскільки в цій системі рівнянь відсутня базис, то вводимо до неї штучні змінні x_7, x_8, x_9 з коефіцієнтами, рівними $+1$, які утворюють штучний базис

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 1 \cdot x_4 - 0 \cdot x_5 - 0 \cdot x_6 + 1 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 + 0 \cdot x_9 = 30; \\ 4x_2 + x_3 - 0 \cdot x_4 - 1 \cdot x_5 - 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 + 0 \cdot x_9 = 12; \\ 11x_1 + 0 \cdot x_2 + 10x_3 - 0 \cdot x_4 - 0 \cdot x_5 - 1 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 + 0 \cdot x_9 = 41. \end{cases}$$

Цільова функція має вигляд:

при розв'язанні задачі на максимум –

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 - M \cdot x_7 - M \cdot x_8 - M \cdot x_9 \quad (\text{max});$$

при розв'язанні задачі на мінімум –

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + M \cdot x_7 + M \cdot x_8 + M \cdot x_9 \quad (\text{min}).$$

Також виконується умова невід'ємності невідомих $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1,9}$).

Перетворення різнорідних обмежень, що є сумішшю рівнянь і нерівностей різного виду, полягає в утворенні базису розв'язку шляхом одночасного введення додаткових і штучних змінних.

Приклад 6.1. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом (методом штучного базису).

Визначити мінімальне значення цільової функції

$$z = x_1 + 3x_2 \quad (\min)$$

при наступних мішаних умовах-обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3; \\ 4x_1 + 8x_2 \geq 8; \\ x_1 + 2x_2 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язування. Напишемо систему обмежень у вигляді рівнянь, для чого введемо додаткові змінні x_3 та x_4 , в результаті чого отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 3; \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 & = 8; \\ x_1 + 2x_2 & + x_4 = 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0.$$

Тепер введемо штучні змінні x_5 та x_6 в перше і друге рівняння:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 29; \\ 4x_1 + 8x_2 - 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 = 8; \\ x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,6})$$

Цільова функція набуде вигляду:

$$z = x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + M \cdot x_5 + M \cdot x_6 \quad (\min).$$

Застосуємо до отриманої задачі симплексний метод, реалізацію якого здійснимо за допомогою симплексних таблиць. Оскільки вирішується задача на мінімум, то ключовим стовпцем в першій симплексній таблиці буде $\overline{A_2}$, а всі інші перетворення

проводяться за стандартною схемою до тих пір, поки в індексному рядку не вийдуть лише недодатні числа (≤ 0), а в оптимальному розв'язку повинні бути відсутні додатні значення штучних змінних x_5 і x_6 .

C_B	B	$\bar{B}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_6$	Θ_1	Θ_2
			1	3	0	0	M	M		
M	$\bar{A}_5$	3	2	1	0	0	1	0	$3/2$	3
M	$\bar{A}_6$	8	4	8	-1	0	0	1	2	1
0	$\bar{A}_4$	5	1	2	0	1	0	0	5	$5/2$
$z_j - c_j$		$11M$	$11M - 1$	$9M - 3$	$-M$	0	0	0	$9M - 3/2$	$9M - 3$
M	$\bar{A}_5$	2	$3/2$	0	$1/8$	0	1	$-1/8$	$4/3$	16
3	$\bar{A}_2$	1	$1/2$	1	$-1/8$	0	0	$1/8$	2	-
0	$\bar{A}_4$	3	0	0	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$-1/4$	-	12
$z_j - c_j$		$2M + 3$	$\frac{3M + 1}{2}$	0	$\frac{M - 6}{8}$	0	0	$\frac{6 - 9M}{8}$	$2M + \frac{2}{3}$	$\frac{3M - 18}{2}$
1	$\bar{A}_1$	$4/3$	1	0	$1/12$	0	$2/3$	$-1/12$		
3	$\bar{A}_2$	$1/3$	0	1	$-1/6$	0	$-1/3$	$1/6$		
0	$\bar{A}_4$	3	0	0	$1/4$	1	0	$-1/4$		
$z_j - c_j$		$2\frac{1}{3}$	0	0	$-5/12$	0	$\frac{-3M - 1}{3}$	$\frac{5 - 12M}{12}$		

Оптимальному плану відповідає точка з координатами

$$x_1 = 4/3 \text{ та } x_2 = 1/3, \quad z_{\min} = 2\frac{1}{3}.$$

Слід зазначити, що цю задачу можна розв'язати за допомогою графоаналітичного методу.

Приклад 6.2. Розв'язати ЗЛП М-методом:

$$Z = 8x_1 + 9x_2 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язування. Зведемо ЗЛП до канонічного вигляду, переходячи від нерівностей до рівнянь та вводячи додаткові невід'ємні змінні, які увійдуть в цільову функцію с нульовими коефіцієнтами:

$$Z = 8x_1 + 9x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_6 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + x_3 & = 5 \\ x_1 + x_2 - x_4 & = 1 \\ x_1 - 4x_2 & + x_6 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

Якщо x_1 та x_2 – вільні змінні, то $x_4 = -1$. Але нас цікавлять тільки додатні значення змінних, тому необхідно у другому рівнянні ввести додаткову змінну x_5 . В результаті прийдемо до наступної форми ЗЛП:

$$Z^M = 8x_1 + 9x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + M \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + x_3 & = 5 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 - 4x_2 & + x_6 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

Тому що кількість рівнянь дорівнює 3, то вектори, відповідні до змінних задані у трьохвимірному просторі і дорівнюють:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектори $\vec{A}_3, \vec{A}_5, \vec{A}_6$ складають базис. Початковий опорний план має вигляд:

$$X_0 = (0; 0; 5; 0; 1; 4).$$

Побудуємо першу симплексну таблицю:

Б	С _Б	$\vec{A}_0$	8	9	0	0	M	0	θ_1
			$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	$\vec{A}_6$	
$\vec{A}_3$	0	5	-5	1	1	0	0	0	–
$\vec{A}_5$	M	1	1	1	0	-1	1	0	1
$\vec{A}_6$	0	4	1	-4	0	0	0	1	4
$Z_j - C_j$	M	M-8	M-9	0	0	-M	0	0	

Даний план не є оптимальним, тому що існують додатні оцінки векторів $\vec{A}_1$ та $\vec{A}_2$. Тому що оцінка вектору $\vec{A}_1$ більше, то знайдем елементи θ_1 , які відповідають даному стовпцю: $\theta_1 = (1; 4)$. Меншим значенням є 1, яке відповідає ключовому рядку $\vec{A}_5$, отже з базису виводиться вектор $\vec{A}_5$ і на його місце вводиться вектор $\vec{A}_1$. Слід зазначити, що виведення з базису вектору $\vec{A}_5$ відповідає потребі виводити штучні вектори. У супротивному випадку можна було вибрати стовпець $\vec{A}_2$ або $\vec{A}_4$.

Після перерахунку отримаємо наступну таблицю:

Б	C _Б	$\vec{A}_0$	8	9	0	0	М	0	θ
			$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	$\vec{A}_6$	
$\vec{A}_3$	0	10	0	6	1	-5	5	0	
$\vec{A}_1$	8	1	1	1	0	-1	1	0	
$\vec{A}_6$	0	3	0	-5	0	1	-1	1	
$Z_j - C_j$		8	0	0	0	-8	8-М	0	

В даній таблиці отриманий план $X_1^M = (1; 0; 10; 0; 0; 3)$, значення цільової функції $Z(X_1^M) = 8$. Цей план є оптимальним, тому що оцінки усіх векторів недодатні. Штучна змінна x_5 приймає нульове значення, що і було потрібно. У відповіді прийнято не записувати нульове значення штучної змінної, тому ми його відкинемо. Таким чином, $Z_{min} = 8, X_{opt} = (1; 0; 10; 0; 3)$. Дана ЗЛП має безліч розв'язків, тому що вектор $\vec{A}_2$ не входить до базису, а його оцінка дорівнює нулю.

Приклад 6.3. Розв'язати ЗЛП М-методом:

$$Z = x_1 + 3x_2 \quad (max)$$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язування. Зведемо ЗЛП до канонічного вигляду, переходячи від нерівностей до рівнянь та вводячи додаткові невід'ємні змінні, які увійдуть в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами та додаткові штучні змінні з коефіцієнтом $(-M)$:

$$Z^M = x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - M \cdot x_5 \quad (max)$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + x_3 & = 5 \\ x_1 + 3x_2 & + x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + & x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Тому що кількість рівнянь дорівнює 3, то вектори, відповідні до змінних задані у трьохвимірному просторі і дорівнюють:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектори $\vec{A}_3, \vec{A}_5, \vec{A}_4$ складають базис. Початковий опорний план має вигляд:

$$X_0 = (0; 0; 5; 3; 3).$$

Побудуємо першу симплексну таблицю:

Б	C _Б	$\vec{A}_0$	1	3	0	0	-M	θ_2
			$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	
$\vec{A}_3$	0	5	-5	1	1	0	0	5
$\vec{A}_5$	-M	3	1	3	0	0	1	1
$\vec{A}_4$	0	3	1	-1	0	1	0	—
$Z_j - C_j$	-3M	-M-1	-3M-3	0	0	0	0	

Даний план не є оптимальним, тому що існують додатні оцінки векторів $\vec{A}_1$ та $\vec{A}_2$. Тому що оцінка вектору $\vec{A}_1$ менше, то знайдем елементи θ_2 , які відповідають даному стовпцю: $\theta_2 = (5; 1)$. Меншим значенням є 1, яке відповідає ключовому рядку $\vec{A}_5$, отже з базису виводиться вектор $\vec{A}_5$ і на його місце вводиться вектор $\vec{A}_2$. Слід зазначити, що виведення з базису вектору $\vec{A}_5$ відповідає потребі виводити штучні вектори. У супротивному випадку можна було вибрати стовпець $\vec{A}_1$.

Після перерахунку отримаємо наступну таблицю:

Б	C _Б	$\vec{A}_0$	1	3	0	0	-M	θ_2
			$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	
$\vec{A}_3$	0	4	-16/3	0	1	0	-1/3	
$\vec{A}_2$	3	1	1/3	1	0	0	1/3	
$\vec{A}_4$	0	4	4/3	0	0	1	1/3	—
$Z_j - C_j$		3	0	0	0	0	M + 1	

В даній таблиці отриманий план $X_1^M = (0; 1; 4; 4; 0)$, значення цільової функції $Z(X_1^M) = 3$. Цей план є оптимальним, тому що оцінки усіх векторів невід'ємні. Штучна змінна x_5 приймає нульове значення, що і було потрібно. Таким чином, $Z_{min} = 3, X_{opt} = (0; 1; 4; 4; 0)$. Дана ЗЛП має безліч розв'язків, тому що вектор $\vec{A}_1$ не входить до базису, а його оцінка дорівнює нулю.

Приклад 6.4. Розв'язати ЗЛП М-методом:

$$Z = 5x_1 + 5x_2 + 3 \quad (min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -3x_1 + 4x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язування. Розглянемо дану задачу, не враховуючи доданку 3 у цільовій функції, тому що значення цієї константи на оптимальний план не вплине. Зведемо ЗЛП до канонічного вигляду, переходячи від нерівностей до рівнянь та вводячи додаткові та штучні змінні (третю нерівність помножимо на -1):

$$Z^M = 5x_1 + 5x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + M \cdot x_6 \quad (min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

Тому що кількість рівнянь дорівнює 3, то вектори, відповідні до змінних задані у трьохвимірному просторі і дорівнюють:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектори $\vec{A}_6, \vec{A}_4, \vec{A}_5$ складають базис. Початковий опорний план має вигляд:

$$X_0 = (0; 0; 1; 4; 5).$$

Побудуємо першу симплексну таблицю:

Б	C _Б	$\vec{A}_0$	8	9	0	0	0	М	θ_1	θ_2
			$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	$\vec{A}_6$		
$\vec{A}_6$	М	1	2	2	-1	0	0	1	1/2	1/2
$\vec{A}_4$	0	4	-2	1	0	1	0	0	—	4
$\vec{A}_5$	0	12	3	-4	0	0	1	0	4	—
$Z_j - C_j$	М		2М-5	2М-5	-М	0	0	0		

Даний план не є оптимальним, тому що існують додатні оцінки векторів $\vec{A}_1$ та $\vec{A}_2$. Тому що ці оцінки рівні, то знайдемо значення стовпця θ для обох цих векторів. Як можна побачити з таблиці обидва найменших значення θ вказують, що потрібно виводити за базису вектор $\vec{A}_6$. Такий вибір відповідає ідеї М-методу тому що вектор $\vec{A}_6$ відповідає штучній змінній, яку потрібно зробити вільною.

Після перерахунку отримаємо наступну таблицю:

Б	C _Б	$\vec{A}_0$	8	9	0	0	М	0	θ
			$\vec{A}_1$	$\vec{A}_2$	$\vec{A}_3$	$\vec{A}_4$	$\vec{A}_5$	$\vec{A}_6$	
$\vec{A}_1$	5	1/2	1	1	-1/2	0	0	1/2	
$\vec{A}_4$	0	5	0	3	-1	1	0	1	
$\vec{A}_5$	0	21/2	0	-7	-3/2	0	1	-3/2	
$Z_j - C_j$		5/2	0	0	-5/2	0	0	5/2 - М	

В даній таблиці отриманий план $X_1^M = \left(\frac{1}{2}; 0; 0; 5; \frac{21}{2}; 0\right)$, значення цільової функції $Z(X_1^M) = 2,5$. Цей план є оптимальним, тому що оцінки усіх векторів

неодотні. Штучна змінна x_6 приймає нульове значення, що і було потрібно. Таким чином, $Z_{min} = 2,5 + 3 = 5,5$, $X_{opt} = (\frac{1}{2}; 0; 0; 5; \frac{21}{2}; 0)$. Дана ЗЛП має безліч розв'язків, тому що вектор $\vec{A}_2$ не входить до базису, а його оцінка дорівнює нулю.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачі М- методом.

$$1. \quad \begin{aligned} Z &= 6x_1 - 7x_2 \quad (\max) \\ \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + x_2 \leq 5 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 \quad (\max) \\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 + 3x_2 \quad (\min) \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} Z &= -x_1 + 2x_2 \quad (\min) \\ \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 + 5x_2 \quad (\max) \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} Z &= -2x_1 + 6x_2 \quad (\min) \\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{aligned} Z &= 6x_1 + 5x_2 - x_3 \quad (\max) \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 24 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 36 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$8. \quad \begin{aligned} Z &= 2x_1 + x_2 + 5x_3 \quad (\min) \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \geq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$9. \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \text{ (max)} \\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 7 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$10. \quad \begin{aligned} Z &= -3x_1 + x_2 + 2x_3 \text{ (max)} \\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 7 \\ -x_1 + 3x_3 &\leq 2 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 4 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$11. \quad \begin{aligned} Z &= -x_1 + 3x_2 - x_3 \text{ (min)} \\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &\leq 16 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\leq 10 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$12. \quad \begin{aligned} Z &= x_1 - 2x_2 - x_3 \text{ (min)} \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 &\leq 3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$13. \quad \begin{aligned} Z &= 8x_1 - 9x_2 \text{ (max)} \\ \begin{cases} -2x_1 + 6x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + 2x_2 &\geq 8 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$14. \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 + 3x_2 \text{ (max)} \\ \begin{cases} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$15. \quad \begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 \text{ (min)} \\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$16. \quad \begin{aligned} Z &= -2x_1 + 4x_2 \text{ (min)} \\ \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ -2x_1 + 4x_2 &\geq -4 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$17. \quad \begin{aligned} Z &= 5x_1 + 7x_2 \text{ (max)} \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ -4x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 6 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$18. \quad \begin{aligned} Z &= -x_1 + 3x_2 \text{ (min)} \\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 - 4x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 - x_2 &\geq -4 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$19. \quad \begin{aligned} Z &= 6x_1 + 10x_2 \text{ (max)} \\ \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 &\geq 12 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 6 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$20. \quad \begin{aligned} Z &= -2x_1 + 6x_2 \text{ (min)} \\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 &\geq 15 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - x_2 &\geq -4 \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Тема 1.7. Цілочисельний розв'язок. Методи відсікання.

Метод Гоморі. Метод гілок та границь.

Значна частина завдань виробничої діяльності потребує цілочисельного розв'язку. До них відносяться задачі, у яких змінні величини означають кількість одиниць неподільної продукції, наприклад, кількість верстатів при завантаженні обладнання, розкрій матеріалів, кількість виготовлених одиниць продукції, розподіл транспортних засобів по рейсах, продаж автомобілів, розподіл літаків по авіалініях та ін. Лінійні задачі, розв'язки яких має бути отримано у цілих числах, називають *задачами цілочисельного програмування*.

Задача цілочисельного програмування формується так само, як і задача лінійного програмування, але включає додаткову вимогу, що полягає в тому, що значення змінних повинні бути цілими невід'ємними числами, наприклад $x_1 = 30$ верстатів, $x_2 = 16$ літаків, $x_3 = 7$ осіб.

Методи цілочисельної оптимізації можна поділити на три основні групи: а) методи відсікання; б) комбіновані методи; в) наближені методи. Розглянемо один із методів відсікання – метод Гоморі.

Сутність методів відсікання полягає в тому, що спочатку задача розв'язується без умови цілочисельності. Якщо отриманий оптимальний план цілочисельний, то задачу розв'язано. В іншому випадку до обмежень задачі додається нове обмеження, що має такі властивості:

- а) воно має бути лінійним;
- б) має відсікати знайдений оптимальний нецілочисельний план;
- в) не повинно відсікати жодного цілочисельного плану.

Додаткове обмеження, що має зазначені властивості, називається *правильним відсіканням*.

Алгоритм Гоморі, заснований на симплексному методі, має простий спосіб побудови правильного відсікання та містить наступні етапи.

1. Задача лінійного програмування розв'язується без урахування умови цілочисельності симплексним або двоїстим симплексним методом. Якщо всі елементи оптимального плану – цілі числа, то розв'язання задачі закінчується для цілочисельного програмування.

2. Якщо серед елементів оптимального розв'язку є нецілі числа, необхідно вибрати елемент з найбільшою дробовою частиною і скласти додаткове обмеження (перетин), яке відсікає нецілочисельні розв'язки.

Додаткове обмеження виписується у разі, коли значення базисної змінної в оптимальному плані $x_i = b_i$ – дробове число. Тоді деякі елементи a_{ij} в i -му рядку симплексної таблиці також дробові числа. Позначимо через $[b_i]$ та $[a_{ij}]$ цілі частини чисел b_i та a_{ij} , тобто. найбільші цілі числа, що не перевищують b_i і a_{ij} . Величини дробових частин q_i і q_{ij} визначаються як різниці наступним чином: $q_i = b_i - [b_i]$; $q_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}]$ і є додатними числами.

Тоді нерівність $q_i - q_{i1}x_1 - q_{i2}x_2 - \dots - q_{in}x_n \leq 0$, сформована за i -им рядком симплексної таблиці, має всі властивості правильного відсікання.

3. Нерівність перетворюється на рівняння шляхом введення додаткової невід'ємної змінної і входить у оптимальну симплексну таблицю.

4. Отримана розширена задача розв'язується двоїстим симплексним методом. Якщо новий оптимальний план буде цілочисельним, то задача розв'язана. В іншому випадку необхідно повернутися до 2-го етапу алгоритму.

Якщо в процесі розв'язування в симплексній таблиці з'явиться рівняння з нецілим вільним членом b_i і цілими коефіцієнтами a_{ij} , то ця задача не має цілочисельного оптимального розв'язку.

Приклад 7.1. Маркетингові дослідження вказали на необхідність освоєння випуску нової продукції. Тому на підприємстві вирішено встановити нове технологічне обладнання на площі у 20 м², що звільнилася. На придбання обладнання двох видів виділено 6 млн. грн. Комплект першого виду обладнання вартістю 1 млн.

грн. встановлюється на площі 5 м^2 та дозволяє збільшити дохід підприємства на 8 млн. грн. Комплект другого виду обладнання займає площу 2 м^2 та забезпечує збільшення доходу підприємства на 5 млн. грн. Визначити, скільки технологічного устаткування кожного виду слід закупити, щоб забезпечити максимальне збільшення доходу підприємства від продажу продукції, що випускається новим устаткуванням.

Розв’язання. Позначимо через x_1 та x_2 кількість комплектів технологічного обладнання відповідно першого та другого видів, через z – прибуток підприємства від продажу продукції, виготовленої новим обладнанням. Тоді математична модель задачі має вигляд:

$$z = 8x_1 + 5x_2 \quad (\text{max}),$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20; \\ x_1 + x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 \text{ та } x_2 - \text{цілі числа.}$$

Зведемо задачу до канонічного вигляду, для чого введемо додаткові невід’ємні змінні x_3 , x_4 та розв’яжемо її симплексним методом.

C_B	B	$\bar{B}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	θ_1	θ_2
			8	5	0	0		
0	$\bar{A}_3$	20	5	2	1	0	4	10
0	$\bar{A}_4$	6	1	1	0	1	6	6
$z_j - c_j$		0	-8	-5	0	0	-32	-30
8	A_1	4	1	$2/5$	$1/5$	0		10
0	A_4	2	0	$3/5$	$-1/5$	1		$10/3$
$z_j - c_j$		32	0	$-9/5$	$8/5$	0		$-18/3$
8	A_1	$8/3$	1	0	$1/3$	$-2/3$		
5	A_2	$10/3$	0	1	$-1/3$	$5/3$		
$z_j - c_j$		$114/3$	0	0	1	3		

На третій ітерації отримано оптимальний план завдання без урахування умови цілочисельності

$$X^* = \left(\frac{8}{3}; \frac{10}{3}\right), \text{ оскільки } x_1 = \frac{8}{3}; \quad x_2 = \frac{10}{3}.$$

Зауваження. Задачу можливо розв'язати графоаналітичним методом. На рисунку 7.1 побудована множина допустимих планів задачі (багатокутник розв'язків ЗЛП) та позначена кутова точка, в якій цільова функція досягає максимуму.

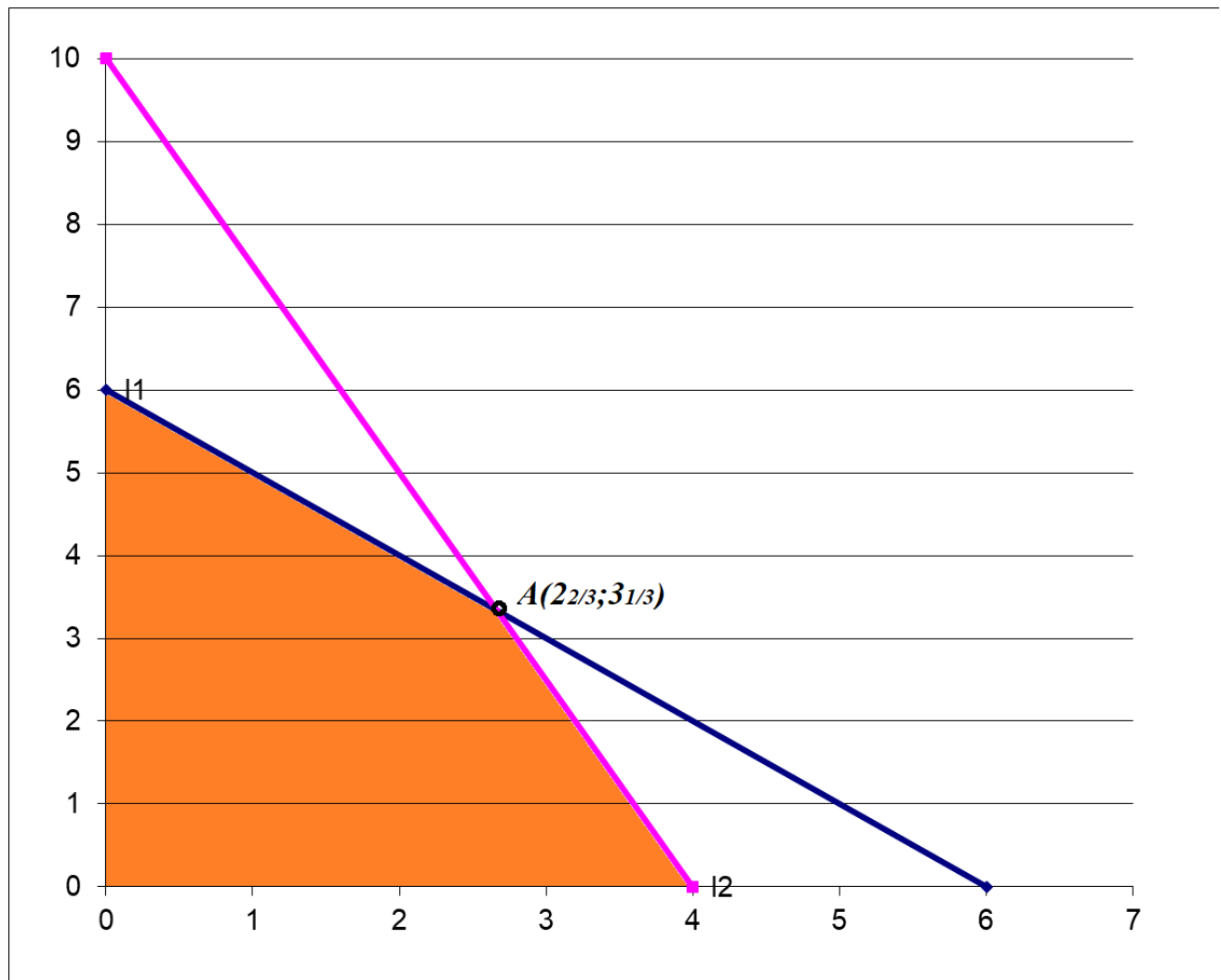


Рис. 7.1. Множина допустимих планів (багатокутник розв'язків ЗЛП).

Застосуємо алгоритм Гоморі, для чого побудуємо правильне відсікання. За першим рівнянням зі змінною x_1 , що отримала нецілочисельне значення в оптимальному плані з найбільшою дробовою частиною $\left(\frac{8}{3}\right)$, складаємо додаткове обмеження:

$$q_1 - q_{11}x_1 - q_{12}x_2 - q_{13}x_3 - q_{14}x_4 \leq 0;$$

$$q_1 = b_1 - [b_1] = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3};$$

$$q_{11} = a_{11} - [a_{11}] = 1 - 1 = 0;$$

$$q_{12} = a_{12} - [a_{12}] = 0 - 0 = 0;$$

$$q_{13} = a_{13} - [a_{13}] = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3};$$

$$q_{14} = a_{14} - [a_{14}] = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

Додаткове обмеження має вигляд:

$$-\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \leq 0.$$

Перетворимо отриману нерівність на рівняння:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + x_5 = 0,$$

коефіцієнти якого введемо додатковим рядком в оптимальну симплексну таблицю, яка записана вище. Тоді отримаємо:

C_B	B	$\bar{B}$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_5$
			8	5	0	0	0
8	$\bar{A}_1$	$\frac{8}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
5	$\bar{A}_2$	$\frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0
0	$\bar{A}_5$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
$z_j - c_j$		$\frac{114}{3}$	0	0	1	3	0
8	$\bar{A}_1$	2	1	0	0	-1	1
5	$\bar{A}_2$	4	0	1	0	2	-1
0	$\bar{A}_3$	2	0	0	1	1	-3
$z_j - c_j$		36	0	0	0	2	3

Застосовуючи алгоритм двоїстого симплексного методу (ключовим рядком є третій з від'ємним значенням базисної змінної, а ключовим стовпцем – стовпець $\bar{A}_3$ з

найменшим за абсолютною величиною значенням частки від ділення коефіцієнтів індексного рядка на від'ємні коефіцієнти ключового рядка), проводимо одну ітерацію, в результаті якої отримаємо оптимальний цілочисельний розв'язок:

$$X_{opt} = (2; 4; 2; 0); \quad z_{max} = 36.$$

Таким чином, підприємству необхідно встановити два комплекти обладнання першого виду та чотири комплекти другого виду. Це дозволить максимально збільшити прибуток підприємства.

Слід зазначити, що 2 м² площі залишаються невикористаними, а гроші, виділені на придбання обладнання, будуть повністю витрачені.

Для розв'язування задачі графоаналітичним методом застосуємо метод «гілок та границь», для чого введемо додаткові обмеження на змінні. Задача фактично розділяється на три задачі, а багатокутник допустимих розв'язків (множина планів ЗЛП) на три багатокутники (рисунок 7.2).

Запишемо відповідні обмеження трьох задач, враховуючи цілочисельність змінних:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20; \\ x_1 + x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 \text{ та } x_2 - \text{цілі числа.}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20; \\ x_1 + x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$0 \leq x_1 \leq 2; \quad 0 \leq x_2 \leq 3, \quad x_1 \text{ та } x_2 - \text{цілі числа.}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20; \\ x_1 + x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 3; \quad 0 \leq x_2 \leq 3, \quad x_1 \text{ та } x_2 - \text{цілі числа.}$$

На першій множині цільова функція досягає максимального значення 36 у точці (2;4). На другій множині цільова функція досягає максимального значення 33 у точці (2;3). На третій множині цільова функція досягає максимального значення 34 у точці (3;2).

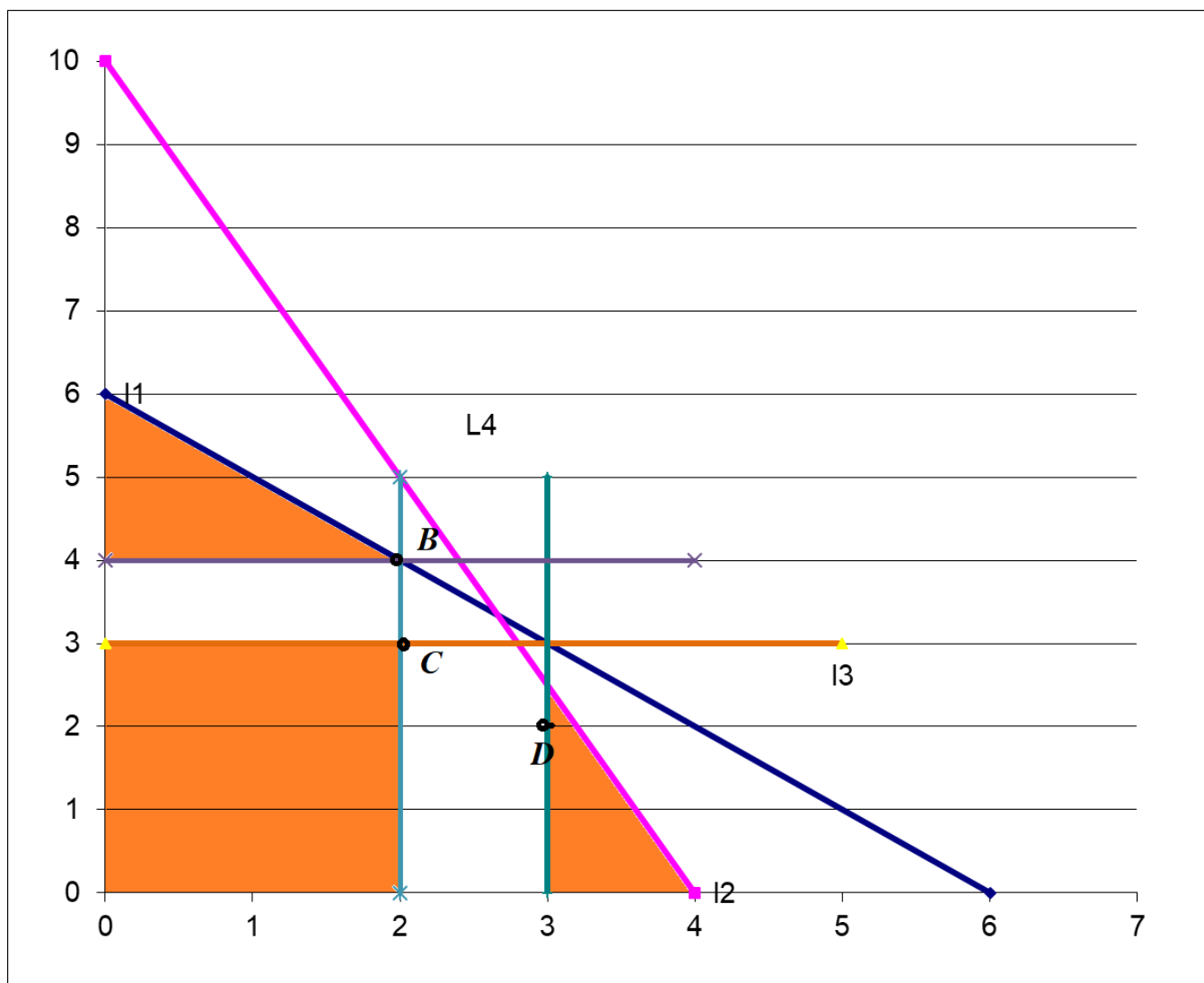


Рис. 7.2. Множина допустимих планів задачі цілочисельного програмування.

Порівнявши максимальні значення цільової функції на кожній із трьох множин, отримаємо оптимальний цілочисельний розв'язок:

$$X_{opt} = (2; 4); \quad z_{max} = 36.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Меблева фабрика виготовляє столи, стільці, бюро й книжкові шафи, використовуючи два різних види дошок, причому фабрика має 500 м дошок першого виду і 1000 м дошок другого. Крім того, задано трудові ресурси 800 людино-годин.

У таблиці наведено нормативи витрат кожного виду ресурсів на виготовлення одного виробу і прибуток на один виріб.

За цими вихідними даними (Таблиця 7.1) розв'язати задачу. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток.

Таблиця 7.1

Вихідні дані задачі 1.

Ресурси	Витрати на один виріб			
	Столи	Стільці	Бюро	Книжкові шафи
Дошки першого виду, м	5	1	4	12
Дошки другого виду, м	2	3	9	1
Трудові ресурси, людино-години	3	2	5	10
Прибуток на один виріб, грн.	12	5	15	10

2. Цех випускає вироби двох видів: вали і втулки. На виробництво одного валу робітник витрачає 3 год., однієї втулки – 2 год. Від реалізації одного валу підприємство одержує прибуток 800 тис. грн., а від реалізації однієї втулки – 600 тис. грн. Цех має випускати не менше 100 валів і 200 втулок. Скільки валів і втулок треба випустити, щоб одержати найбільший прибуток, якщо фонд робочого часу цеху становить 900 людино-годин ?

3. Для перевезення вантажу використовують машини типів А і Б. Вантажопідйомність машин кожного типу – 3 т. За один рейс машина А витрачає 1,5 кг мастильних матеріалів і 50 л бензину, а машина Б – відповідно 2 кг і 30 л. На базі є 35 кг мастильних матеріалів і 900 л бензину. Витрати на експлуатацію машини А становлять 8 тис. грн., Б – 5 тис. грн. Треба перевезти 60 т вантажу. Скільки потрібно використати машин типів А і Б, щоб експлуатаційні витрати були мінімальними?

Тема 1.8. Двоїстість у лінійному програмуванні. Пари двоїстих задач лінійного програмування. Економічний зміст двоїстих оцінок.

Будь-якій задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність іншу задачу, сформульовану за стандартними правилами таким чином, що в ході розв'язання однієї з них розв'язується й інша задача. Ця пара названа *двоїстою* (сполученою) *парою задач*. У кожній такій парі є *пряма* і *двоїста* задачі, причому, якщо прямою вважати двоїсту, то їй відповідає перша.

Duality



Why study duality theory?

Understanding duality theory provides *new insights* into Linear Programming (and Mathematical Programming / Optimization in general)

Duality theory leads to another algorithm for Linear Programming (*Dual-Simplex*)

Duality theory enables us to understand the *Primal-Dual algorithm*, which is behind many efficient algorithms for network-flow problems

Duality theory enables us to understand *Column Generation*, an important tool to solve very large LPs

Рис. 8.1. Обґрунтування потреби у вивченні теорії двоїстості

Виникає питання: «Навіщо потрібно вивчати теорію двоїстості?». Відповідь сформульована на рис 8.1.: розуміння теорії двоїстості дає нове розуміння лінійного програмування (і математичне програмування і оптимізації в цілому); теорія двоїстості веде до іншого алгоритму лінійного програмування (подвійного симплекс-методу); теорія двоїстості дозволяє нам зрозуміти первинно-подвійний алгоритм,

який є ефективним алгоритмом для проблем мережевого потоку; теорія двоїстості дозволяє нам зрозуміти генерацію стовпців, що є важливим інструментом для розв'язування ЗЛП дуже великого розміру.

Побудова двоїстої задачі

Розглянемо узагальнене формулювання двоїстої задачі лінійного програмування, яка може бути застосована до будь-якої форми подання прямої задачі і ґрунтується на наступних правилах.

1. Число змінних у двоїстої задачі дорівнює числу основних обмежень у прямій задачі.

2. Матриця коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі утворюється із матриці коефіцієнтів основної системи обмежень прямої задачі шляхом транспонування.

3. Система основних обмежень двоїстої задачі записується у вигляді нерівностей протилежного сенсу нерівностям системи основних обмежень прямої задачі (тобто нерівність $\geq$ змінюється на нерівність $\leq$ і навпаки).

4. Вільними членами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти функції цілі прямої задачі.

5. Двоїста задача вирішується на мінімум, якщо цільова функція прямої задачі задається на максимум, і навпаки.

6. Коефіцієнтами функції цілі двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

7. Якщо змінна прямої задачі $x_j \geq 0$, то j -та умова системи обмежень двоїстої задачі є нерівністю, якщо x_j – будь-яке число, то j -та умова двоїстої задачі являє собою рівняння.

8. Якщо i -те співвідношення прямої задачі є нерівністю, то відповідна оцінка i -го ресурсу – змінна $y_i \geq 0$, якщо i -те співвідношення являє собою рівняння, то змінна двоїстої задачі y_i – будь-яке число.

Приклад 8.1. В якості прикладу побудови двоїстої задачі для даної прямої задачі розглянемо задачу раціонального використання ресурсів, яка має вигляд:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (\mathbf{max}),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Необхідно знайти план випуску продукції $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з наявних ресурсів b_i і нормативів витрат сировини на виготовлення продукції, після реалізації якої підприємство отримає максимальний прибуток.

Випишемо тепер для цієї задачі двоїсту згідно з розглянутими вище правилами складання двоїстих задач.

$$f = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (\mathbf{min})$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

Тут необхідно визначити двоїсту оцінку одиниці кожного виду ресурсів $y_i (i = \overline{1, m})$, щоб при заданих обсягах ресурсів b_i , прибутку c_j , нормах витрат ресурсів a_{ij} мінімізувати оцінку всіх ресурсів підприємства, витрачених на випуск виробленої продукції.

На рисунку 8.2 наведено постановку прямої та двоїстої задач раціонального використання ресурсів у загальному вигляді.

Система обмежень двоїстої задачі демонструє, що двоїста оцінка всіх ресурсів, витрачених на випуск одиниці продукції j -го виду, має бути не менше прибутку, одержуваного при реалізації одиниці продукції j -го виду.

□ original (**primal**) problem

$$\begin{aligned} Z_P = & \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad \forall i = 1 \dots m \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j = 1 \dots n \end{aligned}$$

□ corresponding **dual** problem

$$\begin{aligned} Z_D = & \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \rightarrow \min \\ \text{s.t. } & \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i \geq c_j \quad \forall j = 1 \dots n \\ & y_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots m \end{aligned}$$

Рис. 8.2. Постановка прямої та двоїстої задач раціонального використання ресурсів

Розв'язок прямої задачі дає оптимальні обсяги випуску продукції підприємством, а розв'язок двоїстої – оптимальну систему двоїстих оцінок ресурсів, які використовуються для виготовлення виробленої продукції.

Теореми двоїстості

Кожна з пари двоїстих задач може бути розв'язана самостійно. Однак, при визначенні оптимального плану однієї із задач, знаходиться розв'язок іншої.

Якщо $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ – оптимальний план прямої задачі, а $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ – оптимальний план розв'язання двоїстої задачі, то

$$z_{\max} = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = f_{\min}, \quad (*)$$

тобто максимально можливий прибуток від реалізації виробленої продукції, який може бути отриманий за наявних запасів ресурсів, дорівнює двоїстій оцінці цих ресурсів. Це твердження відоме під назвою *першої теореми двоїстості*.

Оптимальний план прямої задачі можна записати у вигляді:

$$X^* = A^{-1} \cdot B,$$

де A^{-1} — обернена матриця до матриці, складеної з компонентів векторів, що увійшли в оптимальний базис. Підставимо оптимальний план прямої задачі у вираз (*):

$$C_{\bar{b}} \cdot A^{-1} \cdot B = Y^* \cdot B,$$

де $C_{\bar{b}}$ — матриця коефіцієнтів базисних векторів, що увійшли в оптимальний базис. Звідси оптимальний план двоїстої задачі дорівнює:

$$Y^* = C_{\bar{b}} \cdot A^{-1}. \quad (**)$$

Таким чином, якщо знайти оптимальний план прямої задачі, то, використовуючи вираз (**), можна отримати оптимальний план двоїстої задачі. Компонентами цього плану є елементи останньої симплексної таблиці (що містить оптимальний план прямої задачі), що знаходяться на перетині індексного рядка та векторів, які утворювали базис у першій симплексній таблиці.

Вочевидь, існує відповідність між змінними прямої та двоїстої задач.

Змінні прямої задачі	<i>основні</i> $x_1, x_2, \dots, x_n$	<i>додаткові</i> $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$
Змінні двоїстої задачі	<i>додаткові</i> $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$	<i>основні</i> $y_1, y_2, \dots, y_m$

Згідно відповідним парам змінних з розв'язку прямої задачі можна отримати розв'язок двоїстої, не вирішуючи її, і, навпаки, з розв'язку двоїстої задачі — розв'язок прямої.

Для оптимальних планів X^* та Y^* пари двоїстих задач необхідно і достатньо, щоб вони задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) \cdot y_i^* = 0 & (i = \overline{1, m}), \\ \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) \cdot x_j^* = 0 & (j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Друга теорема двоїстості, математично записана вище системою рівнянь, може бути інтерпретована в такий спосіб. Якщо оптимальному плані деякий i -ий

ресурс використано не в повному обсязі, то відповідна оцінка i -ого ресурсу $y_i^* = 0$, тобто якщо

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_i.$$

Отже, додатну двоїсту оцінку y_i^* мають лише ті види ресурсів, які повністю використовуються в оптимальному плані, тобто

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_i.$$

Друга частина рівнянь системи, що розглядається свідчить про те, що реалізації в оптимальному плані підлягають лише ті види продукції $x_j^* > 0$, для яких оцінка витрачених на їх виробництво ресурсів дорівнює прибутку від їх продажу, тобто, якщо

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* = c_j.$$

Недоцільно реалізовувати ті види продукції, для яких

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* > c_j.$$

В цьому випадку в оптимальному плані обсяг реалізації цієї продукції $x_j^* = 0$.

Приклад 8.2. Складемо двоїсту задачу до прямої задачі планування випуску продукції, яку розв'язано симплексним методом (Приклад 5.3, стор. 78 - 82).

Пряма задача

$$z = 12x_1 + 9x_2 + 14x_3 \quad (\max)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 200; \\ 9x_1 + 15x_2 + 5x_3 \leq 400; \\ 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \leq 260; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$$

Двоїста задача

$$f = 200y_1 + 400y_2 + 260y_3 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 9y_2 + 5y_3 \geq 12; \\ 4y_1 + 15y_2 + 6y_3 \geq 9; \\ 5y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 14; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,3})$$

Ці задачі утворюють симетричну пару двоїстих задач. Розв'язок прямої задачі дає оптимальний план випуску продукції, а розв'язок двоїстої – оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються для її виготовлення.

Розв'язання прямої задачі отримано симплексним методом. Оптимальний план випуску продукції:

$$X^* = (40; 0; 8; 0; 0; 12), \quad z_{max} = 592 \text{ грош. од.}$$

Використовуючи останню ітерацію прямої задачі (третя симплексна таблиця), знайдемо оптимальний план двоїстої задачі.

З першої теореми двоїстості випливає, що $Y^* = C_{\bar{6}} \cdot A^{-1}$. Складемо матрицю A з компонентів векторів, що входять в оптимальний базис:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначивши якимось способом матрицю A^{-1} (наприклад, за допомогою алгебраїчних доповнень), отримаємо:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/25 & -4/25 & 0 \\ -1/25 & 1/5 & 0 \\ -29/25 & -1/25 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як видно з третьої симплексної таблиці (стор. 81), елементи оберненої матриці A^{-1} розташовані в базових стовпцях першої симплексної таблиці $\overline{A}_4, \overline{A}_5, \overline{A}_6$.

Тоді

$$Y^* = C_{\bar{6}} \cdot A^{-1} = (14 \quad 12 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 9/25 & -4/25 & 0 \\ -1/25 & 1/5 & 0 \\ -29/25 & -1/25 & 1 \end{pmatrix} = (66/25 \quad 4/25 \quad 0).$$

Це і є оптимальний план двоїстої задачі. При цьому $f_{min} = 592$ грош. од.

Підставимо оптимальний план прямої задачі до системи обмежень математичної моделі планування випуску продукції

$$4 \cdot 40 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 8 = 200,$$

$$9 \cdot 40 + 15 \cdot 0 + 5 \cdot 8 = 400,$$

$$5 \cdot 40 + 6 \cdot 0 + 6 \cdot 8 < 260.$$

Перше та друге обмеження прямої задачі виконуються як рівності. Це означає, що ресурси першого та другого видів повністю використовуються в оптимальному плані, є дефіцитними та їх оцінки відповідно до другої теореми теорії двоїстості відмінні від нуля ($y_1^* > 0, y_2^* > 0$).

Третє обмеження виконується як строга нерівність, тобто ресурс третього виду використано не в повному обсязі, залишок його в оптимальному плані $x_6^* = 12$. Отже ресурс третього виду перестав бути дефіцитним і його оцінка в оптимальному плані двоїстої задачі $y_3 = 0$.

Таким чином, додатну двоїсту оцінку мають ті види ресурсів, які повністю використовуються в оптимальному плані. Тому двоїсті оцінки визначають дефіцитність ресурсів.

При підстановці оптимальних двоїстих оцінок в систему обмежень двоїстої задачі отримаємо:

$$\begin{cases} 4 \cdot 66/25 + 4 \cdot 4/25 + 5 \cdot 0 = 12; \\ 5 \cdot 66/25 + 15 \cdot 4/25 + 6 \cdot 0 > 9; \\ 5 \cdot 66/25 + 5 \cdot 4/25 + 6 \cdot 0 = 14. \end{cases}$$

Перше та третє обмеження двоїстої задачі виконуються як рівності. Це означає, що двоїсті оцінки ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції першого і третього видів, точно дорівнюють прибутку, який одержують від реалізації одиниці відповідного виду продукції. Це означає, що реалізовувати ці види продукції економічно доцільно і тому їхнє виготовлення передбачено оптимальним планом прямої задачі ($x_1^* > 0, x_3^* > 0$). Друге обмеження двоїстої задачі виконується як строга нерівність. Це означає, що двоїсті оцінки ресурсів, що використовуються для виробництва одиниці виробленої продукції другого виду вище прибутку, одержуваної

від реалізації одиниці виробленої продукції цього виду. Отже, виготовляти продукцію другого виду не вигідно і оптимальному плані прямої задачі $x_2^* = 0$.

Розмір двоїстої оцінки показує: на скільки зросте значення цільової функції зі збільшенням дефіцитного ресурсу на одиницю. Наприклад, збільшення першого виду ресурсу на одиницю призведе до отримання нового оптимального плану, в якому прибуток зросте на 2,64 грош. од. і стане рівною

$$592 + 2,64 = 594,64 \text{ грош. од.}$$

При цьому коефіцієнти оптимальної (третьої) симплексної таблиці стовпця $\overline{A_4}$ показують, що зазначене збільшення прибутку досягається за рахунок збільшення виробництва третього виду продукції на величину $9/25$ одиниці, зменшення обсягу виробництва першого виду продукції на величину $1/5$ одиниці і зменшення залишку ресурсу третього виду на $29/25$ одиниці.

У той самий час введення у виробництво продукції другого виду (що не увійшла в оптимальний план) зменшує прибуток підприємства. Якщо $x_2^* = 1$, то

$$z = z_{max} - 99/25 = 588,04 \text{ грош. од.}$$

При цьому коефіцієнти оптимальної (третьої) симплексної таблиці стовпця $\overline{A_2}$ показують, що зазначене зменшення прибутку відбувається за рахунок зменшення обсягу виробництва продукції третього виду на величину $24/25$ одиниці, збільшення виробництва першого виду на величину $11/5$ одиниці та вивільнення ресурсу третього виду на $19/25$ одиниці.

Таким чином, двоїсті оцінки пов'язані з оптимальним планом прямої задачі. Будь-яка зміна вихідних даних прямої задачі впливає на її оптимальний план і на систему двоїстих оцінок. У свою чергу двоїсті оцінки є інструментом аналізу та прийняття правильних рішень в умовах мінливих виробничих ситуацій.

Аналіз стійкості двоїстих оцінок

В оптимальному розв'язку двоїстої задачі значення y_i^* дорівнюють частинним похідним лінійної функції $f_{min}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ за відповідними аргументами, тобто

$$\frac{\partial f_{min}}{\partial b_i} = y_i^* \quad (i = \overline{1, m}).$$

Теорема про двоїсті оцінки дозволяє визначити приріст цільової функції при малих змінах вільних членів Δb_i системи обмежень:

$$\Delta f_{min} = \sum_{i=1}^m y_i^* \cdot \Delta b_i,$$

де $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ – оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

З останнього співвідношення випливає, що двоїсті оцінки ресурсів показують, на скільки грошових одиниць змінюється прибуток від реалізації продукції при зміні запасу відповідного ресурсу на одну одиницю. Таким чином, теорія двоїстості дозволяє провести економічний аналіз пари двоїстих задач, зокрема, визначити дефіцитність ресурсів, сировини, продукції. Найбільшій умовній оцінці відповідає найбільш дефіцитний ресурс. Для того i -го недефіцитного ресурсу двоїста оцінка $y_i^* = 0$.

За допомогою двоїстої оцінки можна визначити рівень впливу обмежень на значення цільової функції.

Отже, якщо отримано оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, можна провести аналіз стійкості двоїстих оцінок щодо змін b_i , тобто проаналізувати стійкість оптимального плану щодо змін вільних членів системи лінійних рівнянь, оцінити ступінь впливу зміни b_i на значення цільової функції та визначити найбільш доцільний варіант змін b_i .

Отже, інтерес представляє визначення інтервалів стійкості (незмінності) двоїстих оцінок стосовно можливих змін запасів ресурсів кожного виду $(b_i + \Delta b_i)$. При цьому умова стійкості двоїстих оцінок задачі виходить із виразу

$$X' = X^* + \Delta X = A^{-1} \cdot (B + \Delta B),$$

у якому компоненти вектору X' повинні бути невід'ємними, тобто $x_j \geq 0$. На цій підставі для задачі, розв'язання якої наведено на стор. 78 – 82, можна записати такий вираз:

$$\begin{bmatrix} 9/25 & -4/25 & 0 \\ -1/25 & 1/5 & 0 \\ -29/25 & -1/25 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 + \Delta b_1 \\ 400 + \Delta b_2 \\ 260 + \Delta b_3 \end{bmatrix}.$$

Звідки отримуємо умову стійкості:

$$\begin{cases} 200 + 9\Delta b_1 - 4\Delta b_2 \geq 0, \\ 200 - \Delta b_1 + \Delta b_2 \geq 0, \\ 300 - 29\Delta b_1 - \Delta b_2 + 25\Delta b_3 \geq 0. \end{cases}$$

Потім послідовно знаходимо інтервали стійкості:

$$\begin{aligned} \Delta b_1 \neq 0, \Delta b_2 = \Delta b_3 = 0, \quad & \frac{-200}{9} \leq \Delta b_1 \leq \frac{300}{29}, \quad \frac{1600}{9} \leq b_1 + \Delta b_1 \leq \frac{5500}{29}, \\ \Delta b_2 \neq 0, \Delta b_1 = \Delta b_3 = 0, \quad & -200 \leq \Delta b_2 \leq 50, \quad 200 \leq b_2 + \Delta b_2 \leq 450, \\ \Delta b_3 \neq 0, \Delta b_1 = \Delta b_2 = 0, \quad & -12 \leq \Delta b_3, \quad 248 \leq b_3 + \Delta b_3. \end{aligned}$$

Складемо варіанти плану з урахуванням змін вихідних даних моделі.

Нехай підприємство додатково придбало 10 одиниць першого виду ресурсу з огляду на дефіцитність цього виду ресурсу, можна стверджувати, що прибуток підприємства збільшиться на величину $10 \cdot 66/25 = 26,4$ грош. од.

C_B	B	$\bar{B}$	$\overline{A_4}(K_C)$	Добуток K_C на $\Delta b_1 = 10$	Розрахунок варіанта плану
14	$\overline{A_3}$	8	$9/25$	$18/5$	11,6
12	$\overline{A_1}$	40	$-1/5$	-2	38
0	$\overline{A_6}$	12	$-29/25$	$-58/5$	$2/5$
$z_j - c_j$		592	$66/25$	$132/5$	618,4

Оскільки другий вид ресурсу дефіцитний і $y_2^* = 4/25$, то прибуток підприємства має зменшитися на величину $50 \cdot 4/25 = 8$ грош. од. Що й сталося.

Внаслідок зменшення дефіцитного ресурсу скоротилося виробництво продукції першого виду та збільшилося – третього виду, залишок третього виду ресурсу зріс, прибуток підприємства скоротився.

Таким чином, аналог стійкості двоїстих оцінок дозволяє побудувати безліч варіантів оптимальних рішень з урахуванням змін вихідних умов моделі. Якщо ці зміни виходять за межі граничних значень, то порушується отримана система двоїстих оцінок і виникає необхідність повторного вирішення задачі в нових умовах. В цьому випадку представляє цікавість використання задач параметричного програмування.

Тема 1.9. Розв'язання задачі планування випуску продукції (ПВП)

з використанням надбудови «Solver» електронних таблиць Excel

Розглянемо задачу планування випуску продукції, яку розв'язано симплексним методом (Приклад 5.3, стор. 78 - 82) та побудовано двоїсту до неї у прикладі 8.2.

Пряма задача

$$z = 12x_1 + 9x_2 + 14x_3 \quad (\max)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 200; \\ 9x_1 + 15x_2 + 5x_3 \leq 400; \\ 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \leq 260; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3})$$

Двоїста задача

$$f = 200y_1 + 400y_2 + 260y_3 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 9y_2 + 5y_3 \geq 12; \\ 4y_1 + 15y_2 + 6y_3 \geq 9; \\ 5y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 14; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,3})$$

Розв'яжемо цю задачу за допомогою надбудови «**Solver**» електронних таблиць Excel. Структуру робочого аркуша «**Задача ПВП**», представлено в таблиці.

Діапазон комірок	Призначення	Примітки
G9	Загальний прибуток, який слід максимізувати	Значення розраховується за формулою: =МУМНОЖ(С3:Е3;G5:G7) Для створення формули слід натиснути кнопку « Вставка функцій » і вибрати категорію « Математичні »
C5:E7	Матриця витрат на виробництво	Матриця витрат на виробництво задана в постановці завдання
K5:K7	Запаси ресурсів	Запаси ресурсів задані в постановці завдання
C3:E3	Прибуток від продажу відповідного виду продукції	Прибуток від продажу відповідного виду продукції задано в постановці завдання
I5:I7	Витрати кожного виду ресурсів	Розраховуються за формулами: B12= МУМНОЖ(С5:Е7;G5:G7)
G5:G7	Змінні дані – обсяги виробництва продукції кожного виду	Спочатку задаємо цим коміркам нульові значення

Робочий аркуш «**Задача ПВП**» з введеними початковими даними наведено на Рисунок 9.1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2												
3			12	9	14							
4												
5			4	4	5		0		0		200	
6			9	15	5		0		0		400	
7			5	6	6		0		0		260	
8												
9							0					
10												
11												
12												
13												

Рис. 9.1. Робочий аркуш «**Задача ПВП**» з початковими даними

Після введення початкових даних, командами «Сервіс», «Пошук розв’язку» викликаємо порожнє діалогове вікно «Пошук розв’язку». Заповнюємо його наступним чином. У полі «Встановити цільову комірку» задаємо комірку **G9**, в якій знаходиться максимум цільової функції. У полі «Змінюючи комірки» задаємо комірки **G5:G7**, в яких знаходяться обсяги виробництва продукції кожного виду. У полі «Обмеження» слід ввести $I5:I7 \leq K5:K7$, тобто витрати кожного виду ресурсів не перевищують їх запаси (система обмежень задачі). Для цього натискаємо кнопку «Додати». При натисканні відкриється діалогове вікно «Додавання обмеження», в якому вводимо обмеження задачі. Діалогове вікно «Пошук розв’язку» з введеними параметрами задачі планування випуску продукції (ПВП) представлені на рисунку 9.2.

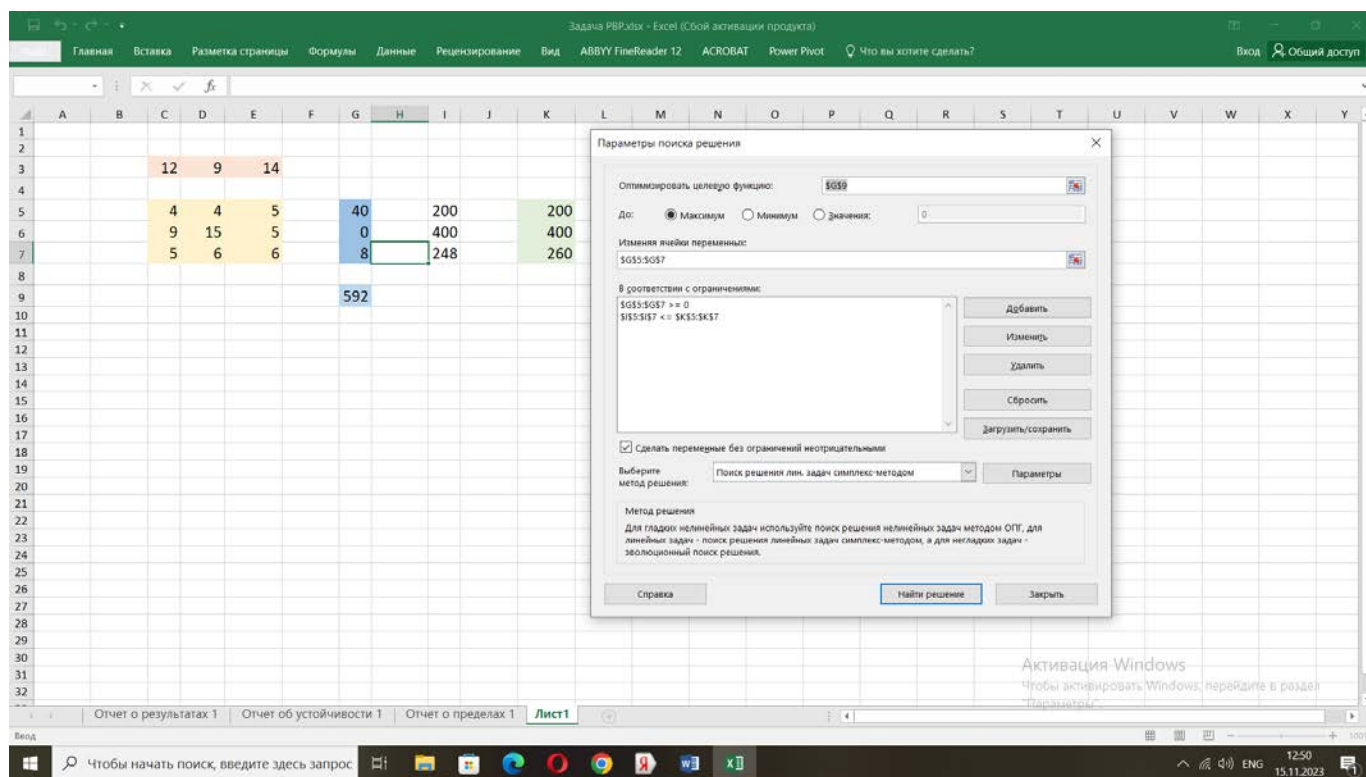


Рис. 9.2. Діалогове вікно «Пошук розв'язку» з введеними параметрами задачі планування випуску продукції

Далі перевіряємо параметри роботи «**Пошук розв'язку**», для цього слід натиснути клацанням миші в діалоговому вікні кнопку «**Параметри**». З'явиться діалогове вікно «**Параметри пошуку розв'язку**». Особливу увагу звернемо на те, що розв'язується задача лінійного програмування, тому слід виділити це у діалоговому вікні, поставивши прапорець у полі «**Лінійна модель**». Інші параметри можна прийняти за замовчуванням. Для розв'язання задачі клацанням миші активізуємо кнопку «**Виконати**» в діалоговому вікні «**Пошук розв'язку**». Після цього з'явиться діалогове вікно «**Результати пошуку розв'язку**». У ньому буде зазначено, чи знайдено оптимальний розв'язок. Якщо розв'язок отримано, то слід виділити команду «**Зберегти знайдений розв'язок**», тоді він буде відображений на вихідному робочому аркуші. На рисунку 9.3 представлено робочий лист з результатом розв'язання задачі. Оптимальний план вказаний в комірках **G5:G7**.

$$X_{opt} = (40; 0; 8).$$

H7												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2												
3			12	9	14							
4												
5			4	4	5		40		200		200	
6			9	15	5		0		400		400	
7			5	6	6		8		248		260	
8												
9							592					
10												
11												
12												

Рис. 9.3. Робочий аркуш «Задача ПВП» з результатом розв’язання задачі

Сумарний прибуток від реалізації продукції при такому плані виробництва буде максимальним і складе 592 гр. од. (комірка **G9**).

Крім цього, для детального аналізу надбудова «Пошук розв’язку» електронних таблиць **Excel** створює звіти за результатами пошуку оптимального розв’язку. Для створення звітів за результатами пошуку слід у діалоговому вікні «**Результати пошуку розв’язку**» вказати необхідний тип звіту: «**Результати**», «**Стійкість**», «**Границі**». На рисунках 9.4, 9.5 та 9.6 представлені всі три можливих типи звіту, що формуються.

Зазначимо, що в звіті «**Стійкість**», в колонці «**Тіньова ціна**» надано значення розв’язку двоїстої задачі

$$Y_{opt} = (2,64; 0,16; 0).$$

Комірка цільової функції (max)

Комірка	Вихідне значення	Результат
\$G\$9	0	592

Комірки змінних

Комірка	Вихідне значення	Результат
\$G\$5	0	40
\$G\$6	0	0
\$G\$7	0	8

Обмеження

Комірка	Значення комірки	Формула	Стан	Допуск
\$I\$5	200	\$I\$5<=\$K\$5	Привязка	0
\$I\$6	400	\$I\$6<=\$K\$6	Привязка	0
\$I\$7	248	\$I\$7<=\$K\$7	Без привязки	12
\$G\$5	40	\$G\$5>=0	Без привязки	40
\$G\$6	0	\$G\$6>=0	Привязка	0
\$G\$7	8	\$G\$7>=0	Без привязки	8

Рис. 9.4. Звіт «Результати» розв'язку «Задача ПВП»

5						
6	Комірки змінних					
7		Кінцеве	Приведена	Цільова функція	Допустиме	Допустиме
8	Комірка	Значення	Вартість	Коефіцієнт	Збільшення	Зменшення
9	\$G\$5	40	0	12	13,2	0,8
10	\$G\$6	0	-3,96	9	3,96	1E+30
11	\$G\$7	8	0	14	1	7,333333333
12						
13	Обмеження					
14		Кінцеве	Тінь	Обмеження	Допустиме	Допустиме
15	Комірка	Значення	Ціна	Права сторона	Збільшення	Зменшення
16	\$I\$5	200	2,64	200	10,34482759	22,22222222
17	\$I\$6	400	0,16	400	50	200
18	\$I\$7	248	0	260	1E+30	12
19						

Рис. 9.5. Звіт «Стійкість» розв'язку «Задача ПВП»

Також у цьому звіті наведено інтервали стійкості для двоїстих оцінок та коефіцієнтів цільової функції вихідної задачі (прибутку від реалізації продукції кожного виду)

$$\frac{-200}{9} \approx -22,22 \leq \Delta b_1 \leq \frac{300}{29} \approx 10,34 ,$$

$$-200 \leq \Delta b_2 \leq 50,$$

$$-12 \leq \Delta b_3.$$

$$-0,8 \leq \Delta c_1 \leq 13,2 ,$$

$$0 \leq \Delta c_2 \leq 3,96,$$

$$-7,33 \leq \Delta c_3 \leq 1.$$

4					
5					
6		Цільова функція			
7		Комірка	Значення		
8		\$G\$9	592		
9					
10					
11		Змінна		Нижня	Цільова функція
12		Комірка	Значення	Границя	Результат
13		\$G\$5	40	0	112
14		\$G\$6	0	0	592
15		\$G\$7	8	0	480
16					
17					

	Верхня	Цільова функція
	Границя	Результат
	40	592
	0	592
	8	592

Рис. 9.5. Звіт «Границі» розв'язку «Задача ПВП»

Слід зазначити, що розв'язування задач лінійного програмування за допомогою електронних таблиць **Excel** є досить зручним способом, що дозволяє уникнути громіздких обчислень та зосередитись на економічному сенсі задачі.

Варіанти лабораторних робіт за темою «Задача раціонального використання ресурсів»

Підприємство випускає три види продукції A, B, C , використовуючи при цьому три види ресурсів R_1, R_2, R_3 . Відомі нормативні витрати ресурсів, їх запаси та прибуток, що отримується від реалізації одиниці продукції.

Скласти математичну модель задачі знаходження оптимального плану, тобто плану виробництва продукції із наявних ресурсів, що забезпечує максимальний

прибуток. Побудувати математичну модель задачі, двоїстої до наданої. Розв'язати кожену задачу. Дати економічне тлумачення отриманих розв'язків.

Варіант 1.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	4	9	5	350
R_2	2	5	2	160
R_3	2	4	6	180
<i>Прибуток</i>	10	11	15	

Варіант 2.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	6	9	3	400
R_2	4	8	4	320
R_3	5	7	3	320
<i>Прибуток</i>	13	15	11	

Варіант 3.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	14	17	18	940
R_2	12	23	18	780
R_3	16	19	16	880
<i>Прибуток</i>	27	28	31	

Варіант 4.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	5	4	3	400
R_2	4	4	7	480
R_3	5	9	5	960
<i>Прибуток</i>	15	14	13	

Варіант 5.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	3	10	5	100
R_2	7	12	7	210
R_3	4	5	9	140
<i>Прибуток</i>	12	15	18	

Варіант 6.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	6	5	4	300
R_2	2	7	5	800
R_3	2	4	8	320
<i>Прибуток</i>	10	8	9	

Варіант 7.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	2	8	8	200
R_2	6	8	4	300
R_3	4	6	3	320
<i>Прибуток</i>	7	8	9	

Варіант 8.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	7	5	8	600
R_2	6	6	7	500
R_3	4	5	3	300
<i>Прибуток</i>	10	9	11	

Варіант 9.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	9	5	6	600
R_2	4	5	6	400
R_3	3	4	5	800
<i>Прибуток</i>	20	18	22	

Варіант 10.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	8	9	10	600
R_2	6	8	4	430
R_3	8	7	8	560
<i>Прибуток</i>	15	16	18	

Варіант 11.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	5	4	15	90
R_2	5	8	12	150
R_3	8	6	15	150
<i>Прибуток</i>	12	14	15	

Варіант 12.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	8	8	10	400
R_2	9	15	5	400
R_3	10	12	12	520
<i>Прибуток</i>	12	9	14	

Варіант 13.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	4	10	5	400
R_2	2	5	2	150
R_3	2	4	4	160
<i>Прибуток</i>	11	12	15	

Варіант 14.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	7	10	4	360
R_2	8	10	5	400
R_3	9	5	10	420
<i>Прибуток</i>	12	14	11	

Варіант 15.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	7	8	9	500
R_2	6	12	8	440
R_3	8	9	8	480
<i>Прибуток</i>	14	15	16	

Варіант 16.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	6	5	4	600
R_2	5	5	8	620
R_3	3	7	3	860
<i>Прибуток</i>	16	15	14	

Варіант 17.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	5	8	6	120
R_2	6	14	6	280
R_3	5	4	10	180
<i>Прибуток</i>	14	16	18	

Варіант 18.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	10	4	5	420
R_2	3	8	6	760
R_3	5	6	8	240
<i>Прибуток</i>	14	12	13	

Варіант 19.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	4	6	6	240
R_2	3	4	2	150
R_3	2	3	4	180
<i>Прибуток</i>	8	9	10	

Варіант 20.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	7	6	9	560
R_2	5	5	8	440
R_3	6	6	4	360
<i>Прибуток</i>	12	11	14	

Варіант 21.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	9	6	5	600
R_2	3	4	7	420
R_3	4	8	6	380
<i>Прибуток</i>	8	9	12	

Варіант 22.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	7	8	5	560
R_2	4	3	4	380
R_3	6	5	4	440
<i>Прибуток</i>	12	13	16	

Варіант 23.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	4	7	8	400
R_2	4	6	2	300
R_3	8	5	8	440
<i>Прибуток</i>	10	7	12	

Варіант 24.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	4	5	8	420
R_2	8	8	6	720
R_3	4	6	3	200
<i>Прибуток</i>	21	18	20	

Варіант 25.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	3	8	5	200
R_2	7	15	7	420
R_3	4	5	10	500
<i>Прибуток</i>	10	14	15	

Варіант 26.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	7	5	8	500
R_2	6	6	5	600
R_3	4	5	3	300
<i>Прибуток</i>	9	8	10	

Варіант 27.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	3	5	4	420
R_2	5	4	6	660
R_3	6	9	4	540
<i>Прибуток</i>	10	9	11	

Варіант 28.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	7	3	6	540
R_2	6	7	6	600
R_3	4	5	3	270
<i>Прибуток</i>	8	7	9	

Варіант 28.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	4	9	5	350
R_2	2	5	2	160
R_3	2	4	6	180
<i>Прибуток</i>	10	11	15	

Варіант 29.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	6	9	3	400
R_2	4	8	4	320
R_3	5	7	3	320
<i>Прибуток</i>	13	15	11	

Варіант 30.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	14	17	18	940
R_2	12	23	18	780
R_3	16	19	16	880
<i>Прибуток</i>	27	28	31	

Варіант 31.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	5	4	3	400
R_2	4	4	7	480
R_3	5	9	5	960
<i>Прибуток</i>	15	14	13	

Варіант 32.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	3	10	5	100
R_2	7	12	7	210
R_3	4	5	9	140
<i>Прибуток</i>	12	15	18	

Варіант 33.

<i>Ресурси</i>	A	B	C	<i>Запаси</i>
R_1	6	5	4	300
R_2	2	7	5	800
R_3	2	4	8	320
<i>Прибуток</i>	10	8	9	

Тема 1.10. Транспортна задача (ТЗ). Метод потенціалів. Застосування ТЗ в моделюванні економічних процесів

Розглянемо транспортну задачу, в якій критерієм оптимальності є мінімальність транспортних витрат на перевезення вантажів (приклади побудови транспортних задач наведено на сторінках 26 – 30).

Розглянемо застосування методу потенціалів. Цей метод використовується при розв'язанні транспортної задачі, суть якої полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлення $A_1, A_2, \dots, A_m$ до n пунктів споживання $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Економіко-математична модель такого завдання містить системи лінійних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n})$$
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m})$$

умову невід'ємності змінних $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) і цільову функцію

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Слід вважати, що:

1. Будь-який невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь, що визначається матрицею $X = (x_{ij})$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) називається **допустимим планом транспортної задачі**.
2. Ранг матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих системи основних обмежень задачі, на одиницю менше числа рівнянь, тобто дорівнює $(m + n - 1)$. Отже, число

лінійно незалежних рівнянь дорівнює $(m + n - 1)$ і вони визначають вектора, що увійшли до базису, а відповідні їм $(m + n - 1)$ змінних будуть базисними.

3. Допустимий план транспортної задачі, що має не більше, ніж $(m + n - 1)$ відмінних від нуля величин x_{ij} , називається **опорним**.

4. Якщо в опорному плані число відмінних від нуля компонентів точно дорівнює $(m + n - 1)$, то план є **невиродженим**, якщо менше, то план є **виродженим**.

5. План, при якому цільова функція набуває свого мінімального значення, називається **оптимальним планом транспортної задачі**.

6. Для розв'язання транспортної задачі необхідно і достатньо, щоб сумарні запаси вантажу в пунктах відправлення дорівнювали сумі заявок пунктів призначення:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

7. Модель транспортної задачі, що задовольняє цю умову, називається **закритою**.

Якщо зазначена умова не виконується, то модель називається **відкритою**.

У разі перевищення запасу над заявками

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j,$$

вводиться фіктивний $(n + 1)$ пункт призначення з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

та відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{in+1} = 0$ ($i = \overline{1, m}$).

Якщо виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j,$$

вводиться фіктивний $(m + 1)$ пункт відправлення, запаси вантажу якого дорівнюють

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

і відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+1 j} = 0$ ($j = \overline{1, n}$).

8. **Найкращим елементом** матриці тарифів C називається найменший тариф, якщо розв'язується задача на мінімум, найбільший тариф – якщо розв'язується задача на максимум цільової функції.

Розглянемо один із методів побудови початкового опорного плану – метод найменших тарифів.

Алгоритм побудови початкового опорного плану методом найменших тарифів складається з наступних етапів:

а) серед тарифів визначається найменший;

б) клітина з обраним тарифом заповнюється величиною, що дорівнює максимально можливому обсягу вантажу з урахуванням обмежень по рядку та стовпцю. При цьому весь вантаж вивозиться від відповідного постачальника, або повністю задовольняється заявка споживача. Якщо одночасно весь вантаж вивозиться від деякого постачальника і повністю задовольняється заявка споживача, що розглядається, то в клітину з найменшим тарифом, що належить рядку або стовпцю, які містять згаданого постачальника або споживача, вводять нуль;

в) з тарифів, що залишилися, знову знаходиться найкращий (найменший), і процес триває доти, доки не буде розподілено весь вантаж.

Якщо модель транспортної задачі відкрита і введені фіктивний постачальник або споживач, то розподіл здійснюється спочатку для дійсних постачальників та споживачів, і в останню чергу нерозподілений вантаж надсилається від фіктивного постачальника або до фіктивного споживача.

9. Далі одержаний план перевіряється на оптимальність. Для цього використовується метод потенціалів, суть якого полягає у наступному.

План $X = (x_{ij})$ транспортної задачі буде *оптимальним*, якщо існує система $(m + n)$ чисел u_i, v_j , які називаються *потенціалами постачальників і споживачів* відповідно, що задовольняє умовам:

$$\begin{cases} u_i + v_j = c_{ij}, & \text{для заповнених клітин.} \\ u_i + v_j \leq c_{ij} & \text{для вільних клітин.} \end{cases}$$

Потенціали u_i та v_j позначають оплату за перевезення одиниці вантажу в пунктах споживання (постачальниками) та призначення (споживачами) відповідно, тому їх сума дорівнює транспортному тарифу $u_i + v_j = c_{ij}$.

Введемо так зване перевищення клітини таблиці

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Тоді *ознаку оптимальності* опорного плану транспортної задачі, що досліджується на мінімум, можна сформулювати наступним чином.

Якщо $\Delta_{ij} = 0$ для заповнених клітин і $\Delta_{ij} \leq 0$ у вільних клітинах, то план, що розглядається є оптимальним.

Алгоритм оцінки оптимальності плану транспортної задачі методом потенціалів містить наступні етапи.

- 1) Побудова початкового плану.
- 2) Визначення значення цільової функції шляхом підсумовування добутків тарифів на обсяг запланованого до перевезення вантажу по всіх заповнених клітинах таблиці.
- 3) Перевірка умови оптимальності. Визначаються потенціали u_i та v_j . Для кожної заповненої клітини таблиці записується рівняння $u_i + v_j = c_{ij}$. Виходить система $(m + n - 1)$ рівнянь із $(m + n)$ змінними.

Оскільки число змінних більше числа рівнянь ($m + n > m + n - 1$), то система є невизначеною і має безліч розв'язків. Тому одному з невідомих потенціалів u_i та v_j задають довільне значення, наприклад, для простоти обчислень вважають $u_1 = 0$. Тоді решта потенціалів визначається з наведених рівнянь.

У транспортну таблицю додаються додатковий рядок та стовпець, куди заносяться потенціали.

Визначаються перевищення вільних клітин Δ_{ij} .

Якщо всі $\Delta_{ij} \leq 0$ (розв'язується задача на мінімум цільової функції) для вільних клітин, то оптимальний план знайдено. Якщо хоча б одне перевищення вільної клітини $\Delta_{ij} \geq 0$ (розв'язується задача на мінімум цільової функції), то план не є оптимальним, його можна покращити, здійснивши перерозподіл вантажу.

4) Побудова нового опорного плану. З усіх додатних перевищень вільних клітин обирається найбільша (якщо розв'язується задача на мінімум). Клітину, якій відповідає найбільше перевищення, слід заповнити, тобто, направити вантаж. Заповнюючи обрану клітину, необхідно змінити обсяги поставок, записаних у ряді інших заповнених і пов'язаних із клітиною, що заповнюється так званим *циклом*.

Циклом, або **прямокутним контуром**, у таблиці транспортної задачі називається ламана лінія, вершини якої розташовані в заповнених клітинах таблиці, а ланки – вздовж рядків та стовпців, причому в кожній вершині циклу зустрічаються рівно дві ланки, одна з яких знаходиться у рядку, інша – у стовпці. Якщо ламана лінія, що утворює цикл, перетинається, то точки перетину не є вершинами. Для кожної вільної клітини таблиці можна побудувати єдиний цикл.

Вершинам циклу, починаючи від вершини, що знаходиться у вільній клітці, присвоюємо по черзі знаки "+" та "-".

З обсягів вантажу, що стоять у мінусових клітинах, обираємо найменший. Перерозподіляємо його за циклом, додаючи до відповідних обсягів вантажу, що стоять у плюсових клітинах і віднімаючи з обсягів, що стоять у мінусових клітинах таблиці. В результаті клітина, яка раніше була вільною, стає заповненою, а одна із заповнених клітин циклу стає вільною.

Отриманий новий опорний план перевіряється на оптимальність, тобто, повертаємось до третього етапу алгоритму.

Примітки.

1. Якщо в мінусових клітинах циклу знаходяться два (або кілька) однакових мінімальних значення x_{ij} , то при перерозподілі обсягів вантажу звільняється тільки одна клітина (з найбільшим тарифом c_{ij}), а в інших клітинах проставляються нулі. Таким чином, у знову отриманому опорному плані число зайнятих клітин буде дорівнювати $(m + n - 1)$.

2. Якщо в оптимальному плані транспортної задачі перевищення вільної клітини дорівнює нулю ($\Delta_{ij} = 0$), то задача має безліч оптимальних планів. Для клітини з нульовим перевищенням можна побудувати цикл та перерозподілити вантаж. В результаті отриманий оптимальний план матиме таке ж значення цільової функції.

3. Значення цільової функції кожної ітерації можна розраховувати так:

$$z_k = z_{k-1} - \gamma \cdot \Delta_{ij} \quad (\text{задача розв'язується на мінімум}),$$

де γ – величина об'єму вантажу, що переміщується по циклу;

Δ_{ij} – перевищення вільної клітини, в яку прямує вантаж під час переходу до нового плану;

z_k – значення цільової функції на k -тій ітерації;

z_{k-1} – значення цільової функції на попередній ітерації.

Приклад 9.1. На три бази A_1, A_2, A_3 надійшов однорідний та поділений вантаж у кількостях, відповідно рівних 39, 36, 38 од. Цей вантаж потрібно перевезти до трьох магазинів B_1, B_2, B_3 у кількостях відповідно 27, 35, 33 од. Вартість доставки одиниці вантажу з кожного пункту відправлення до відповідних пунктів призначення задана матрицею тарифів (гр. од. за од. вантажу):

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Потрібно скласти план перевезень вантажу з мінімальними транспортними витратами.

Розв'язання. 1. Перевіримо необхідну та достатню умову збалансованості задачі:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 113, \quad \sum_{j=1}^3 b_j = 95.$$

Як бачимо, сумарні запаси вантажу на базах перевищують сумарну потребу пунктів призначення. Отже, модель вихідної транспортної задачі є відкритою.

Щоб отримати закриту модель, введемо додатковий (фіктивний пункт призначення B_ϕ з потребою вантажу, що дорівнює 18 од. ($113 - 95$). Тарифи перевезення одиниці вантажу з баз A_1, A_2, A_3 до B_ϕ вважаємо рівними нулю.

Занесемо дані до таблиці перевезень.

B		B_1	B_2	B_3	B_ϕ	U_i
A		27	35	33	18	
A_1	39	8	10 21	7	0 18	0
A_2	36	1 27	5 +	3 - 9	0	- 4
A_3	38	7	8 14	5 24 +	0	- 2
V_j		5	10	7	0	

Використовуючи метод найменшої вартості, побудуємо початковий опорний план транспортної задачі.

Серед тарифів із усієї таблиці найменшим є $c_{21} = 1$, тому в клітину $A_2 B_1$ направляємо максимально можливу кількість вантажу. Воно дорівнює $\min(36, 27) = 27$. Тоді $x_{21} = 27$ і з бази A_2 не вивезено вантаж у кількості 9 од., а потреба магазину B_1 задовільнена повністю. Стовпець таблиці B_1 виходить із розгляду.

З тарифів таблиці, що залишилися, найменшим є $c_{23} = 3$. Тому в клітину $A_2 B_3$ направляємо максимально можливу кількість вантажу, що дорівнює $\min(9, 33) = 9$. Тоді рядок A_2 виходить із розгляду, оскільки з бази A_2 вивезено весь вантаж, а потреба третього магазину не задоволена на 24 од. З тарифів, що залишилися, найкращий $c_{22} = 5$ і $c_{33} = 5$. Але c_{22} належить до другого рядка A_2 , а він вийшов з розгляду. У клітину $A_3 B_3$ направляємо кількість вантажу, що дорівнює $\min(38, 24) = 24$. При цьому потреба третього магазину задоволена, а з третьої бази не вивезено 14 од. вантажу. Третій стовпець виходить B_3 із розгляду. З тарифів, що залишилися, найкращими є $c_{31} = 5$ і $c_{13} = 7$, які відповідно належать стовпцям B_1 і B_3 , що вийшли з розгляду. Аналогічно, тариф $c_{11} = 8$ належить стовпцю B_1 і тому найкращим тепер буде $c_{32} = 8$.

У клітину $A_3 B_2$ направляємо вантаж у кількості 14 од., що залишався на базі A_3 . Рядок A_3 виходить з розгляду. Залишився один тариф $c_{12} = 10$. У клітину $A_1 B_2$ спрямовуємо вантаж у кількості $\min(35, 21) = 21$ од., оскільки потреба вивезеними 18 од. $(39 - 21)$ вантажу. Спрямуємо їх фіктивному споживачеві, тобто від A_1 18 одиниць вантажу в клітину $A_1 B_\phi$: $x_{1\phi} = 18$.

В результаті отримано початковий опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 21 & 0 \\ 27 & 0 & 9 \\ 0 & 14 & 24 \end{pmatrix},$$

який є допустимим, оскільки потреби всіх магазинів задоволені, а вантажі з баз по можливості вивезли.

2. Підрахуємо кількість заповнених клітин таблиці перевезень, їх 6 і має бути $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. Отже, опорний план є не виродженим.

3. Визначаємо значення цільової функції початкового опорного плану:

$$z_0 = 10 \cdot 21 + 1 \cdot 27 + 3 \cdot 9 + 8 \cdot 14 + 5 \cdot 24 = 496 \text{ грош. од.}$$

4. Перевіримо оптимальність одержаного плану. Знайдемо потенціали u_i та v_j по заповненим клітинам перевезень, у яких $u_i + v_j = c_{ij}$ (перевищення $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} = 0$), вважаючи, що $u_1 = 0$. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_1 + v_\phi = 0, \\ u_1 + v_2 = 10, \\ u_2 + v_1 = 1, \\ u_2 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_2 = 8, \\ u_3 + v_3 = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_\phi = 0, \\ v_2 = 10, \\ u_2 = -4, \\ v_1 = 5, \\ u_3 = -2, \\ v_3 = 7. \end{cases}$$

Занесемо знайдені значення потенціалів в таблицю перевезень та обчислимо перевищення вільних клітин:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 0 + 5 - 8 < 0; & \Delta_{13} &= 0 + 7 - 7 = 0; & \Delta_{22} &= -4 + 10 - 5 = 1 > 0; \\ \Delta_{31} &= -2 + 5 - 7 < 0; & \Delta_{2\phi} &= -4 + 0 - 0 < 0; & \Delta_{3\phi} &= -2 + 0 - 0 < 0. \end{aligned}$$

Початковий опорний план X_0 не є оптимальним, оскільки $\Delta_{22} > 0$, тому переходимо до його покращення.

5. Обираємо вільну клітину з максимальним додатним перевищенням (у нашому прикладі лише одна вільна клітина має додатне перевищення $\Delta_{22} = 1$). Для цієї клітини A_2B_2 збудуємо цикл перерозподілу вантажу. Для цього в клітинку A_2B_2 поставимо знак «+», а в інших вершинах многокутника знаки «-», «+», «-», що чергуються. Цикл наведено у таблиці перевезень.

A		B ₁	B ₂	B ₃	B _φ	U _i
		27	35	33	18	
A ₁	39	8	21	7	18	10
A ₂	36	27	9		0	5
A ₃	38	7	5	33	0	8
V _j		- 4	0	- 3	- 10	

З чисел x_{ij} , які стоять у мінусових клітинах, обираємо найменше, тобто $\gamma = \min(9, 14) = 9$. Додаємо 9 до обсягів вантажів, що стоять у плюсових клітинах, і віднімаємо 9 з x_{ij} , що стоять у мінусових клітинах. В результаті отримаємо новий опорний план.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 21 & 0 \\ 27 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 33 \end{pmatrix}.$$

6. Визначимо значення цільової функції

$$z_1 = z_0 - \gamma \cdot \Delta_{22} = 496 - 9 = 487 \text{ гр. од.}$$

7. Перевіряємо оптимальність плану X_1 методом потенціалів, для цього знаходимо потенціали u_i, v_j по заповнених клітинах таблиці, де $u_i + v_j = c_{ij}$, вважаючи, що $v_2 = 0$:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 10, \\ v_2 = 0, \\ u_2 + v_2 = 5, \\ u_3 + v_2 = 8, \\ u_2 + v_1 = 1, \\ u_3 + v_3 = 5, \\ u_1 + v_\phi = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0, \\ u_1 = 10, \\ u_2 = 5, \\ u_3 = 8, \\ v_1 = -4, \\ v_\phi = 10, \\ v_3 = -3. \end{cases}$$

Далі розраховуємо перевищення вільних клітин:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 10 - 4 - 8 < 0; & \Delta_{13} &= 10 - 3 - 7 = 0; & \Delta_{23} &= 5 - 3 - 3 < 0; \\ \Delta_{2\phi} &= 5 - 10 - 0 < 0; & \Delta_{31} &= 8 - 4 - 7 < 0; & \Delta_{3\phi} &= 8 - 10 - 0 < 0. \end{aligned}$$

Оскільки всі перевищення вільних клітин є недодатними, то план X_1 є оптимальним, але не єдиним. Останнє випливає з того, що клітина A_1B_3 має нульове перевищення і для неї можна побудувати цикл перерозподілу $A_1B_3 \rightarrow A_3B_3 \rightarrow A_3B_2 \rightarrow A_1B_2 \rightarrow A_1B_3$, який дозволяє встановити альтернативний оптимальний план

$$X_{\text{опт}}^{\text{альт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 21 \\ 27 & 9 & 0 \\ 0 & 26 & 12 \end{pmatrix}.$$

Значення цільової функції при цьому плані $z = 7 \cdot 21 + 1 \cdot 27 + 5 \cdot 9 + 8 \cdot 26 + 5 \cdot 12 = 487$ грош. од., тобто співпадає із значенням z_1 , яке є мінімальним.

Аналіз плану. З першої бази необхідно направити 21 од. вантажу до третього магазину, з другої бази направити 27 од. та 9 од. у перший та другий магазини відповідно, а вантаж із третьої бази слід вивозити до другого та третього магазинів у кількості 26 та 12 од. відповідно. При цьому на першій базі залишиться 18 од. вантажу. Загальна вартість перевезень буде мінімальною і становитиме 487 гр. од.

Застосування ТЗ в моделюванні економічних процесів

Алгоритм і методи розв'язку ТЗ можуть бути використані при розв'язанні деяких економічних задач, що не мають нічого спільного з транспортуванням продукції. У цьому випадку величини тарифів c_{ij} , пропозиції постачальників і попит споживачів мають різний зміст в залежності від конкретної економічної задачі. До таких завдань можна віднести:

- *оптимальне закріплення за верстатами операцій по обробці деталей.* У них c_{ij} є таким економічним показником, як продуктивність. Задача дозволяє визначити, скільки часу і на якій операції повинен використовуватися кожен з верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей.

- *оптимальні призначення або проблема вибору.* Є m механізмів, які можуть виконувати n різних робіт з продуктивністю c_{ij} . Задача дозволяє визначити, який механізм на яку роботу треба призначити, щоб досягти максимальної продуктивності.

- *оптимальні призначення або проблема вибору в іншій постановці.* Є m робочих бригад, які можуть виконувати n різних робіт. Відома вартість роботи i -го виду, що виконуються j -ою бригадою – c_{ij} . Задача дозволяє визначити призначення бригад на роботи, щоб домогтися мінімальної оплати праці.

- *задача про скорочення виробництва з урахуванням сумарних витрат на виготовлення і транспортування продукції;*

- *задача комівояжера.* Відома відстань між містами. Комівояжер повинен прокласти маршрут таким чином, щоб відвідати кожне місто один раз і мінімізувати загальний шлях.

Завдання для самостійної роботи

Нехай є m пунктів $A_1, A_2, \dots, A_m$ виробництва однорідної продукції, причому обсяг виробництва у пункті A_i дорівнює a_i одиниць ($i = \overline{1, m}$). Вироблена продукція споживається в пунктах $B_1, B_2, \dots, B_n$, а попит на неї в пункті B_j складає b_j одиниць ($j = \overline{1, n}$). Відомі матриця тарифів (вартості) перевезень одиниці продукції з пунктів виробництва в пункти споживання C , причому транспортні витрати прямо пропорційні обсягам перевезень. Скласти план доставки продукції з пунктів виробництва в пункти споживання, який, по-можливості, задовольняє всі потреби і не допускає затоварення, а також забезпечує мінімальні сумарні транспортні витрати.

1.	$a_1 = 300$ $a_2 = 90$ $a_3 = 200$	$b_1 = 150$ $b_2 = 190$ $b_3 = 200$	$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 11 & 10 & 12 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
2.	$a_1 = 180$ $a_2 = 60$ $a_3 = 170$	$b_1 = 100$ $b_2 = 150$ $b_3 = 50$	$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 11 & 12 & 10 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
3.	$a_1 = 120$ $a_2 = 130$ $a_3 = 190$	$b_1 = 110$ $b_2 = 150$ $b_3 = 120$	$C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 10 \\ 11 & 9 & 10 \\ 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
4.	$a_1 = 300$ $a_2 = 200$ $a_3 = 120$	$b_1 = 220$ $b_2 = 190$ $b_3 = 230$	$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 10 & 12 & 9 \\ 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
5.	$a_1 = 220$ $a_2 = 180$ $a_3 = 130$	$b_1 = 100$ $b_2 = 190$ $b_3 = 230$	$C = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 10 \\ 10 & 11 & 9 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
6.	$a_1 = 230$ $a_2 = 190$ $a_3 = 100$	$b_1 = 130$ $b_2 = 180$ $b_3 = 210$	$C = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 8 & 10 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
7.	$a_1 = 180$ $a_2 = 190$ $a_3 = 230$	$b_1 = 200$ $b_2 = 280$ $b_3 = 330$	$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 9 & 10 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Тема 1.11. Розв'язання ТЗ з використанням надбудови

«Solver» електронних таблиць Excel

Розглянемо задачу з трьома пунктами виробництва продукції A_1, A_2, A_3 , пропозиції яких відповідно дорівнюють: $a_1 = 200, a_2 = 300, a_3 = 220$. Пункти B_1, B_2, B_3, B_4 , відчують потребу в даній продукції відповідно в обсягах: $b_1 = 180, b_2 = 160, b_3 = 170, b_4 = 210$.

Матриця тарифів перевезень має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 15 & 13 \\ 15 & 10 & 17 & 17 \\ 16 & 11 & 33 & 18 \end{pmatrix}.$$

Сумарна пропозиція дорівнює сумарному попиту:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 200 + 300 + 220 = 720,$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 180 + 160 + 170 + 210 = 720,$$

отже, ТЗ є закритою.

Математична модель ТЗ в розгорнутій формі запису має вигляд:

$$z = 18x_{11} + 16x_{12} + 15x_{13} + 13x_{14} + 15x_{21} + 10x_{22} + 17x_{23} + 17x_{24} + 16x_{31} + 11x_{32} + 33x_{33} + 18x_{34} \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 220; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 180, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 160, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 210, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}).$$

Існують різні методи розв’язання транспортної задачі. Розв’яжемо цю задачу за допомогою надбудови «Пошук рішення» електронних таблиць **Excel**. Структуру робочого аркуша «Транспортна задача», представлено в таблиці.

Діапазон комірок	Призначення	Примітки
B14	Загальна вартість перевезень, яку слід мінімізувати	Значення розраховується за формулою: =СУММАПРОИЗВ(B3:E5;B8:E10)
B3:E5	Тарифи перевезень	Матриця тарифів задана в постановці завдання
F3:F5	Пропозиції постачальників	Пропозиції задані в постановці завдання
B6:E6	Попити пунктів призначення	Попити задані в постановці завдання
B12:E12	Обсяги перевезень до споживачів	Розраховуються за формулами: B12=СУММ(B8:B10); C12=СУММ(C8:C10); D12=СУММ(D8:D10); E12=СУММ(E8:E10)
F8:F10	Обсяги продукції, вивезеної від постачальників	Розраховуються за формулами: F8=СУММ(B8:E8); F9=СУММ(B9:E9); F10=СУММ(B10:E10)
B8:E10	Змінні дані – обсяги перевезень від споживачів до постачальників	Спочатку задаємо цим коміткам нульові значення

Робочий аркуш «Транспортна задача» з введеними початковими даними наведено на Рисунку 11.1.

	A	B	C	D	E	F
1		Транспортна задача				
2		1 споживач	2 споживач	3 споживач	4 споживач	Пропозиція
3	1 постачальник	18	16	15	13	200
4	2 постачальник	15	10	17	17	300
5	3 постачальник	16	11	33	18	220
6	Попит	180	160	170	210	
7						
8		0	0	0	0	0
9		0	0	0	0	0
10		0	0	0	0	0
11						
12		0	0	0	0	
13						
14	Вартість	0				
15						
16						

Рис 11.1. Робочий аркуш «Транспортна задача» з початковими даними

Після введення початкових даних, командами «Сервіс», «Пошук рішення» викликаємо порожнє діалогове вікно «Пошук рішення». Заповнюємо його наступним чином:

1. У полі «Встановити цільову комірку» задаємо комірку **B14**, в якій знаходиться мінімум цільової функції.
2. У полі «Змінюючи комірки» задаємо комірки **B8:E10**, в яких знаходяться обсяги перевезень.
3. У полі «Обмеження» слід ввести систему обмежень ТЗ. Для цього натискаємо кнопку «Добавити». При натисканні відкриється діалогове вікно «Добавлення обмеження», в якому вводимо обмеження задачі.

Діалогове вікно «Пошук рішення» з введеними параметрами моделі транспортної задачі представлені на рисунку 11.2.

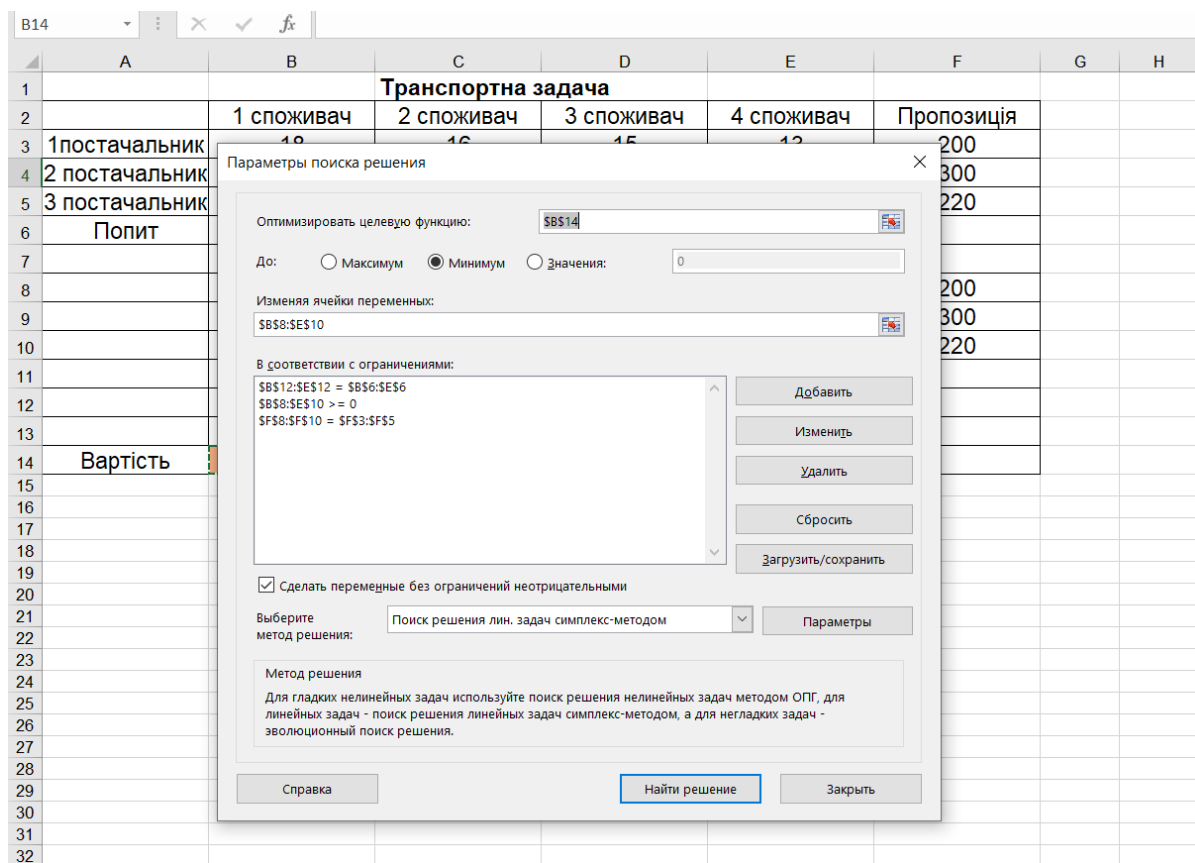


Рис 11.2. Діалогове вікно «Пошук рішення» з введеними параметрами моделі транспортної задачі

Далі перевіряємо параметри роботи **«Пошук рішення»**: для цього слід натиснути клацанням миші в діалоговому вікні кнопку **«Параметри»**. З'явиться діалогове вікно **«Параметри пошуку рішення»**. Особливу увагу звернемо на те, що розв'язується задача лінійного програмування, тому слід виділити це у діалоговому вікні, поставивши прапорець у полі **«Лінійна модель»**. Інші параметри можна прийняти за замовчуванням.

Для розв'язання задачі клацанням миші активізуємо кнопку **«Виконати»** в діалоговому вікні **«Пошук рішення»**. Після цього з'явиться діалогове вікно **«Результати пошуку рішення»**. У ньому буде зазначено, чи знайдено оптимальний розв'язок. Якщо розв'язок отримано, то слід виділити команду **«Зберегти знайдений розв'язок»**, тоді він буде відображений на вихідному робочому аркуші. На Рисунку

11.3 представлено робочий лист з результатом розв’язання задачі. Оптимальний план вказаний в комірках **B8:E10**.

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 130 & 0 & 170 & 0 \\ 50 & 160 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

	A	B	C	D	E	F
1		Транспортна задача				
2		1 споживач	2 споживач	3 споживач	4 споживач	Пропозиція
3	1 постачальник	18	16	15	13	200
4	2 постачальник	15	10	17	17	300
5	3 постачальник	16	11	33	18	220
6	Попит	180	160	170	210	
7						
8		0	0	0	200	200
9		130	0	170	0	300
10		50	160	0	10	220
11						
12		180	160	170	210	
13						
14	Вартість	10180				
15						

Рис 11.3. Робочий аркуш «Транспортна задача» з розв’язком задачі

Сумарні транспортні витрати при такому плані перевезень будуть мінімальні і складуть 10180 гр. од. (комірка **B14**).

Крім цього, для детального аналізу надбудова «Пошук рішення» електронних таблиць **Excel** створює звіти за результатами пошуку оптимального розв’язку. Для створення звітів за результатами пошуку слід у діалоговому вікні «Результати пошуку рішення» вказати необхідний тип звіту: «Результати», «Стійкість», «Границі». На рисунках 11.4, 11.5, 11.6 представлені всі три можливих типи звіту.

M19									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
4									
5									
6									
7		Цільова комірка (Мінімум)							
8		Комірка	Назва	Вихідні значення	Результат				
9		\$B\$14	Стоимость 1 потребитель	0	10180				
10									
11		Комірки, що змінюються							
12		Комірка	Назва	Вихідні значення	Результат				
13		\$B\$8	1 потребитель	0	0				
14		\$C\$8	2 потребитель	0	0				
15		\$D\$8	3 потребитель	0	0				
16		\$E\$8	4 потребитель	0	200				
17		\$B\$9	1 потребитель	0	130				
18		\$C\$9	2 потребитель	0	0				
19		\$D\$9	3 потребитель	0	170				
20		\$E\$9	4 потребитель	0	0				
21		\$B\$10	1 потребитель	0	50				
22		\$C\$10	2 потребитель	0	160				
23		\$D\$10	3 потребитель	0	0				
24		\$E\$10	4 потребитель	0	10				
25									
26									
27		Обмеження							
28		Комірка	Назва	Значення	Формула	Статус	Різниця		
29		\$F\$8	Мощности	200	\$F\$8=\$F\$3	не связан.	0		
30		\$F\$9	Мощности	300	\$F\$9=\$F\$4	не связан.	0		
31		\$F\$10	Мощности	220	\$F\$10=\$F\$5	не связан.	0		
32		\$B\$12	1 потребитель	180	\$B\$12=\$B\$6	не связан.	0		
33		\$C\$12	2 потребитель	160	\$C\$12=\$C\$6	не связан.	0		
34		\$D\$12	3 потребитель	170	\$D\$12=\$D\$6	не связан.	0		
35		\$E\$12	4 потребитель	210	\$E\$12=\$E\$6	не связан.	0		
36		\$B\$8	1 потребитель	0	\$B\$8>=0	связанное	0		
37		\$C\$8	2 потребитель	0	\$C\$8>=0	связанное	0		
38		\$D\$8	3 потребитель	0	\$D\$8>=0	связанное	0		
39		\$E\$8	4 потребитель	200	\$E\$8>=0	не связан.	200		
40		\$B\$9	1 потребитель	130	\$B\$9>=0	не связан.	130		
41		\$C\$9	2 потребитель	0	\$C\$9>=0	связанное	0		
42		\$D\$9	3 потребитель	170	\$D\$9>=0	не связан.	170		
43		\$E\$9	4 потребитель	0	\$E\$9>=0	связанное	0		
44		\$B\$10	1 потребитель	50	\$B\$10>=0	не связан.	50		
45		\$C\$10	2 потребитель	160	\$C\$10>=0	не связан.	160		
46		\$D\$10	3 потребитель	0	\$D\$10>=0	связанное	0		
47		\$E\$10	4 потребитель	10	\$E\$10>=0	не связан.	10		
48									
49									
50									
51									

Рис 11.4. Звіт «Результати» розв'язку задачі «Транспортна задача»

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
5									
6		Комірки, що змінюються							
7				Результ.	Нормир.	Цільовий	Допустиме	Допустиме	
8		Комірка	Назва	значение	вартість	Коефіцієнт	Збільшення	Зменшення	
9		\$B\$8	1 потреби	0	7	18	1E+30	7	
10		\$C\$8	2 потреби	0	10	16	1E+30	10	
11		\$D\$8	3 потреби	0	2	15	1E+30	2	
12		\$E\$8	4 потреби	200	0	13	2	1E+30	
13		\$B\$9	1 потреби	130	0	15	0	2	
14		\$C\$9	2 потреби	0	0	10	1E+30	0	
15		\$D\$9	3 потреби	170	0	17	2	1E+30	
16		\$E\$9	4 потреби	0	0	17	1E+30	0	
17		\$B\$10	1 потреби	50	0	16	2	0	
18		\$C\$10	2 потреби	160	0	11	0	1E+30	
19		\$D\$10	3 потреби	0	15	33	1E+30	15	
20		\$E\$10	4 потреби	10	0	18	0	2	
21									
22		Обмеження							
23				Результ.	Нормир.	Цільовий	Допустиме	Допустиме	
24		Комірка	Назва	значение	вартість	Коефіцієнт	Збільшення	Зменшення	
25		\$F\$8	Мощности	200	13	200	0	50	
26		\$F\$9	Мощности	300	17	300	0	170	
27		\$F\$10	Мощности	220	18	220	0	50	
28		\$B\$12	1 потреби	180	-2	180	170	0	
29		\$C\$12	2 потреби	160	-7	160	50	0	
30		\$D\$12	3 потреби	170	0	170	0	1E+30	
31		\$E\$12	4 потреби	210	0	210	50	0	
32									
33									

Рис 11.5. Звіт «Стійкість» розв'язку задачі «Транспортна задача»

4							
5							
6		Цільове					
7		Комірка	Назва	Значення			
8		\$B\$14	Вартість	10180			
9							
10							
11		Змінне			Нижня	Цільовий	Верхня
12		Комірка	Назва	Значення	Границя	результат	Цільовий
13		\$B\$8	1 потреби	0	0	10180	0 10180
14		\$C\$8	2 потреби	0	0	10180	0 10180
15		\$D\$8	3 потреби	0	0	10180	0 10180
16		\$E\$8	4 потреби	200	200	10180	200 10180
17		\$B\$9	1 потреби	130	130	10180	130 10180
18		\$C\$9	2 потреби	0	0	10180	0 10180
19		\$D\$9	3 потреби	170	170	10180	170 10180
20		\$E\$9	4 потреби	0	0	10180	0 10180
21		\$B\$10	1 потреби	50	50	10180	50 10180
22		\$C\$10	2 потреби	160	160	10180	160 10180
23		\$D\$10	3 потреби	0	0	10180	0 10180
24		\$E\$10	4 потреби	10	10	10180	10 10180
25							
26							
27							

Рис 11.6. Звіт «Границі» розв’язку задачі «Транспортна задача»

Побудова альтернативних планів ТЗ

у разі існування нескінченної множини розв’язків

В звіті по стійкості значенням $x_{22} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{32} = 160$ відповідають нульові нормовані вартості і допустимі нульові зменшення та збільшення. Це говорить про те, що ТЗ має нескінченно багато розв’язків. Побудуємо альтернативний план перевезень продукції. Припустимо, що другий споживач незадоволений оплатою вартості перевезень і попросив її зменшити. Постановка задачі приймає вигляд: скласти план перевезень продукції таким чином, щоб виконувалися всі умови вихідної задачі і при цьому вартість перевезення товару до другого споживачу була мінімальною.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}$) – заплановані обсяги перевезень продукції від i -го

постачальника до j -го споживача, z_1 – сумарні транспортні витрати по перевезенню продукції до другого споживача. Тоді:

\

$$z_1 = 16x_{12} + 10x_{22} + 11x_{32} \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 220; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 180, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 160, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 210, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &18x_{11} + 16x_{12} + 15x_{13} + 13x_{14} + 15x_{21} + 10x_{22} + \\ &+ 17x_{23} + 17x_{24} + 16x_{31} + 11x_{32} + 33x_{33} + 18x_{34} \leq 10180 \\ &x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}). \end{aligned}$$

Для розв'язання цієї задачі за допомогою надбудови «Пошук рішення» електронних таблиць **Excel** додаємо в робочому аркуші в комітках **B11:E11** значення вартостей перевезень продукції до відповідного споживача, які обчислюються за формулами: **B11=СУММАПРОИЗВ(B3:B5;B8:B10)**

$$\mathbf{C11=СУММАПРОИЗВ(C3:C5;C8:C10)}$$

$$\mathbf{D11=СУММАПРОИЗВ(D3:D5;D8:D10)}$$

$$\mathbf{E11=СУММАПРОИЗВ(E3:E5;E8:E10)}.$$

У діалоговому вікні «Пошук рішення» в полі «Встановити цільову комірку» встановлюємо **C11**, в якій знаходиться мінімум цільової функції. У полі «Змінюючи комірки» залишаються комірки **B8:E10**, в яких знаходяться обсяги перевезень. У полі «Обмеження» додаємо обмеження **B14<=10180**. Для вирішення задачі активізуємо кнопку «Виконати» в діалоговому вікні «Пошук рішення». З'явиться діалогове вікно «Результати пошуку рішення», в якому буде вказано, що знайдено розв'язок ТЗ. Виділяємо команду «Зберегти знайдене рішення», тоді розв'язок буде зазначено на вихідному робочому аркуші. Оптимальний план задачі вказано у комітках **B8:E10**.

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 130 & 170 & 0 \\ 1800 & 30 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Сумарні транспортні витрати 10180 гр. од. при такому плані перевезень продукції не змінюються, але сума витрат на перевезення продукції до другого споживача зменшиться з 1760 до 1630 гр. од.

Ускладнені постановки ТЗ

Закрита ТЗ – сумарна пропозиція дорівнює сумарному попиту:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

є найпростішим варіантом і, разом з тим, найбільш природним. Цей вид є **канонічною формою ТЗ**. При розв'язанні конкретних економічних задач виникають різні ускладнення математичної моделі. Розглянемо деякі з таких ускладнених моделей ТЗ.

Відкриті (незбалансовані) ТЗ. У цьому разі сумарна пропозиція не дорівнює сумарному попиту:

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j.$$

Для розв'язання таких задач вводять фіктивного постачальника або фіктивного споживача таким чином, щоб урівняти сумарну пропозицію і сумарний попит. Тарифи перевезень від фіктивного постачальника, або, до фіктивного споживача вважають рівними нулю. Для розв'язання відкритих ТЗ з допомогою надбудови «Пошук рішення» електронних таблиць **Excel** можна скористатися одним з двох варіантів розв'язків: 1) розв'язати задачу з фіктивним постачальником (споживачем); 2) розв'язати задачу, аналогічну закритій ТЗ, тільки замінити у полі «Обмеження» відповідні рівняння на нерівності.

Максимізація цільової функції. Для розв'язання задачі слід надати всім елементам c_{ij} від'ємні значення і розв'язувати задачу мінімізації. При розв'язанні ТЗ за допомогою надбудови «Пошук рішення» електронних таблиць **Excel** можна також

залишити задачу в колишньому вигляді, змінивши вид екстремуму з мінімуму на максимум.

Обов'язкові поставки. Необхідно зменшити відповідно пропозиції постачальників і попит споживачів і розв'язувати задачу щодо тих поставок, які не є обов'язковими. Корисно розв'язати задачу в повному обсязі, для того щоб встановити, у що обійшлися обов'язкові поставки.

Обмеження по пропускній здатності. В реальних умовах виникають випадки, коли з будь-якого пункту по будь-якій дорозі не може бути перевезено будь-яку кількість вантажу. Якщо, наприклад, плануються залізничні перевезення продукції, часто доводиться враховувати, що по деяких дільницях і напрямках може бути перевезено не більше певного обсягу продукції (припущення, що не більше визначеного числа складів поїздів). При використанні декількох видів транспорту може виявитися, що кількість деяких транспортів, використовуваних на даному напрямку, обмежена. При розв'язанні такої ТЗ за допомогою надбудови **«Пошук рішення»** електронних таблиць **Excel** у полі **«Обмеження»** слід додати додаткові обмеження на змінні.

Обмеження по нижній межі. При розв'язанні відкритих ТЗ може виявитися необхідним введення умови про те, що будь-який постачальник повинен доставити реальним споживачам *не менше* деякої певної кількості продукції. Таким чином, фіксується нижня межа пропозиції. В цьому випадку для такого постачальника відводяться два рядки: в першому вказується частина пропозиції, яка обов'язково має бути розподіленою, у другому – реальна пропозиція. Показники c_{ij} в обох рядках зазначаються реальні, але в стовпці фіктивного споживача у першій з цих двох рядків вказується число **«М» (буфер)**. Це блокує можливу фіктивну поставку і гарантує, що при подальшому розв'язанні вся потужність по даному рядку закріпиться за реальним споживачем. За допомогою надбудови **«Пошук рішення»** електронних таблиць **Excel**

у полі «**Обмеження**» для блокування поставки слід додати додаткове обмеження на цю змінну, вказавши, що вона дорівнює нулю.

Обмеження по верхній межі. Слід зменшити потребу до необхідної величини.

Багатостадійні ТЗ. У багатьох випадках доставка продукції з одних пунктів до інших здійснюється через треті пункти. Іншими словами, зв'язок між постачальниками і споживачами здійснюється не безпосередньо, а через посередників. При розміщенні та розвитку пунктів виробництва необхідно враховувати не тільки віддаленість пунктів будівництва нових і розвитку діючих підприємств від районів споживання, але і розміщення пунктів постачання сировини. Крім того, у зв'язку з тим, що часто продукція проходить послідовну переробку на декількох підприємствах, виникає необхідність комплексного розв'язання проблеми розміщення на всіх стадіях. Можливі різноманітні варіанти постановки багатостадійних задач.

Розв'язання ускладненої ТЗ за допомогою надбудови

«Пошук рішення» електронних таблиць Excel

На трьох складах зберігається цукор-пісок, який необхідно доставити в п'ять торгових точок. Тарифи на перевезення цукру (у гривнях за тонну), щомісячні запаси цукру (у тонах) на складах і місячні потреби торгових точок у цукрі (у тонах) вказані в наступній таблиці:

Склади	Торгові точки					Запас, т/міс.
	1	2	3	4	5	
1	45	60	20	30	25	150
2	30	80	60	65	30	100
3	30	70	40	45	35	120
Попит, т/міс.	70	80	60	50	70	

При цьому необхідно враховувати, що із-за ремонтних робіт тимчасово немає можливості перевозити цукор зі складу № 1 до торгової точки № 2, а також зі складу № 2 до торгової точки № 4. Крім того, необхідно врахувати, що між складом № 3 і торговою точкою № 4 укладений договір на обов'язкову поставку 30 тонн цукру. Цукор зберігається і транспортується в мішках вагою по 50 кг. Організувати поставки цукру таким чином, щоб сумарні транспортні витрати були мінімальними.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. За умовою задачі цукор зберігається і транспортується в мішках вагою 50 кг, тому необхідно перевести всі одиниці виміру даних з тонн на відповідну кількість мішків. Для цього всі елементи матриці транспортних витрат помножимо на 0,05 (в одному мішку – 50 кг, 1 т = 1000 кг). У результаті одержимо нову матрицю тарифів (грн. за мішок):

$$0,05 \cdot C = 0,05 \cdot \begin{pmatrix} 45 & 60 & 20 & 30 & 25 \\ 30 & 80 & 60 & 65 & 30 \\ 30 & 70 & 40 & 45 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,25 & 3 & 1 & 1,5 & 1,25 \\ 1,5 & 4 & 3 & 3,25 & 1,5 \\ 1,5 & 3,5 & 2 & 2,25 & 1,75 \end{pmatrix}.$$

Величини попиту і запасів цукру, виражених у тоннах на місяць, переведемо в мішки за місяць, помноживши кожне значення на $1000/50 = 20$. Складемо нову таблицю з урахуванням нових одиниць вимірювання:

Склади	Торгові точки					Запас, м./міс.
	1	2	3	4	5	
1	2,25	3	1	1,5	1,25	3000
2	1,5	4	3	3,25	1,5	2000
3	1,5	3,5	2	2,25	1,75	2400
Попит, м./міс.	1400	1600	1200	1000	1400	

Позначимо x_{ij} ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,5}$) – плановані обсяги (в мішках) перевезень з i -го складу до j -ої торгової точки, z – сумарні транспортні витрати. Тоді:

$$z = 2,25x_{11} + 3x_{12} + x_{13} + 1,5x_{14} + 1,25x_{15} + 1,5x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + \\ + 3,25x_{24} + 1,5x_{25} + 1,5x_{31} + 3,5x_{32} + 2x_{33} + 2,25x_{34} + 1,75x_{35} \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 3000, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 2000, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 2400; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1400, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1600, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1200, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1000, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 1400; \end{cases}$$

$$x_{12} = 0, x_{24} = 0, x_{34} = 600; x_{ij} \geq 0 (i = 1; j = 1, 3, 4, 5);$$

$$x_{ij} \geq 0 (i = 2, 3; j = 1, 2, 3, 5)$$

На рисунку 11.7 наведено робочий лист з результатом розв'язання задачі. Оптимальний план задачі вказано у комірках **B9:F11**.

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1200 & 400 & 1400 \\ 1200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 200 & 1600 & 0 & 600 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сумарні транспортні витрати дорівнюють 12600 грн. При такому плані перевезень на другому складі залишається 800 мішків цукру.

2		1 т.т.	2 т.т.	3 т.т.	4 т.т.	5 т.т.		Запас	
3	1 склад	2,25	3	1	1,5	1,25		3000	
4	2 склад	1,5	4	2	3,25	1,5		2000	
5	3 склад	1,5	3,5	3	2,25	1,75		2400	
6	Потр.	1400	1600	1200	1000	1400			
7									
8		1 т.т.	2 т.т.	3 т.т.	4 т.т.	5 т.т.			
9	1 склад	0	0	1200	400	1400	3000		
10	2 склад	1200	0	0	0	0	1200		
11	3 склад	200	1600	0	600	0	2400		
12		1400	1600	1200	1000	1400	6600		
13									
14		12600							
15									

Рис 11.7. Розв'язок ускладненої ТЗ

Визначимо, у що обходиться транспортному підприємству обов'язкова поставка 600 мішків цукру з третього складу четвертої торговій точці. Для цього відмовимося від обмеження $x_{34} = 600$ В додатку 30 представлено робочий лист з результатом розв'язання цієї задачі. Оптимальний план має вигляд:

$$X'_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1200 & 1000 & 800 \\ 600 & 0 & 0 & 0 & 600 \\ 800 & 1600 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сумарні транспортні витрати дорівнюють 12300 грн. Відмова від обов'язкової поставки призводить до економії 300 грн.

Визначимо, на скільки зміняться сумарні транспортні витрати по закінченні ремонту доріг. Для цього знімаємо обмеження $x_{12} = 0, x_{24} = 0$. Оптимальний план має вигляд:

$$X''_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 800 & 1200 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1400 \\ 1400 & 800 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сумарна вартість перевезень складе 12100 грн. Закінчення ремонту доріг призводить до економії 200 грн.

Приклад розв'язання задачі про оптимальне закріплення операцій за верстатами

На підприємстві є три групи верстатів, кожна з яких може виконувати п'ять операцій по обробці деталей (операції можуть виконуватися в будь-якому порядку). Максимальний час роботи кожної групи верстатів, відповідно 100, 250, 180 годин. Кожна операція повинна виконуватися відповідно 100, 120, 70, 110, 130 годин. Визначити, скільки часу і на яку операцію потрібно використовувати кожен групу верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Продуктивність кожної групи верстатів на кожну операцію задана матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 1 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі.

Позначимо x_{ij} ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,5}$) – запланований час виконання i -ою групою верстатів j -ої операції, z – сумарне число оброблених деталей. Тоді:

$$z = 3x_{11} + 5x_{12} + 11x_{13} + 10x_{14} + 5x_{15} + 5x_{21} + 10x_{22} + 15x_{23} + 3x_{24} + 2x_{25} + 4x_{31} + 8x_{32} + 6x_{33} + 12x_{34} + 10x_{35} \quad (\max)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 250, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 180; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 130; \end{cases}$$

x_{ij} – невід'ємні цілі, ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,5}$).

На рисунку 11.8 представлено робочий лист з результатом розв'язання задачі.

Оптимальний план задачі вказано у клітинках **B9:F11**.

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{pmatrix}.$$

Отже, першій групі верстатів доцільно виконувати операції 1 і 4 тривалістю 40 і 60 годин відповідно, другій групі – операції 1, 2 і 3 тривалістю 60, 120 і 70 годин відповідно, третій групі – операції 4 і 5 тривалістю 50 і 130 годин відповідно. При цьому максимальне число оброблених деталей складе 5170 шт.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Задача про закріплення							
2		1 опер.	2 опер.	3 опер.	4 опер.	5 опер.		Час	
3	1 група	3	5	11	10	5		100	
4	2 група	5	10	15	3	2		250	
5	3 група	4	8	6	12	10		180	
6	Час	100	120	70	110	130			
7									
8		1 опер.	2 опер.	3 опер.	4 опер.	5 опер.			
9	1 група	40	0	0	60	0	100		
10	2 група	60	120	70	0	0	250		
11	3 група	0	0	0	50	130	180		
12		100	120	70	110	130	530		
13									
14		5170							
15									

Рис 11.8. Розв'язок задачі про закріплення

Варіанти лабораторних робіт за темою

«Транспортна задача»

Нехай є m пунктів $A_1, A_2, \dots, A_m$ виробництва однорідної продукції, причому обсяг виробництва у пункті A_i дорівнює a_i одиниць ($i = \overline{1, m}$). Вироблена продукція споживається в пунктах $B_1, B_2, \dots, B_n$, а попит на неї в пункті B_j складає b_j одиниць ($j = \overline{1, n}$). Відомі матриця тарифів (вартості) перевезень одиниці продукції з пунктів виробництва в пункти споживання C , причому транспортні витрати прямо пропорційні обсягам перевезень. Скласти план доставки продукції з пунктів виробництва в пункти споживання, який, по-можливості, задовольняє всі потреби і не допускає затоварення, а також забезпечує мінімальні сумарні транспортні витрати.

- | | | | |
|----|---|--|---|
| 1. | $a_1 = 200$
$a_2 = 80$
$a_3 = 220$ | $b_1 = 160$
$b_2 = 90$
$b_3 = 300$ | $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 10 & 11 & 10 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ |
| 2. | $a_1 = 80$
$a_2 = 160$
$a_3 = 70$ | $b_1 = 200$
$b_2 = 50$
$b_3 = 150$ | $C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 12 & 13 & 11 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ |
| 3. | $a_1 = 100$
$a_2 = 140$
$a_3 = 90$ | $b_1 = 110$
$b_2 = 50$
$b_3 = 120$ | $C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 16 \\ 10 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ |
| 4. | $a_1 = 200$
$a_2 = 100$
$a_3 = 120$ | $b_1 = 120$
$b_2 = 90$
$b_3 = 230$ | $C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 11 & 13 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| 5. | $a_1 = 220$
$a_2 = 80$
$a_3 = 130$ | $b_1 = 100$
$b_2 = 90$
$b_3 = 230$ | $C = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 10 \\ 11 & 11 & 9 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ |
| 6. | $a_1 = 230$
$a_2 = 90$
$a_3 = 100$ | $b_1 = 130$
$b_2 = 80$
$b_3 = 210$ | $C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 8 \\ 9 & 12 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| 7. | $a_1 = 280$
$a_2 = 90$
$a_3 = 330$ | $b_1 = 200$
$b_2 = 80$
$b_3 = 430$ | $C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 9 & 10 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ |

- | | | | |
|-----|---|--|--|
| 8. | $a_1 = 150$
$a_2 = 300$
$a_3 = 170$ | $b_1 = 210$
$b_2 = 100$
$b_3 = 300$ | $C = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 20 \\ 9 & 7 & 15 \\ 12 & 13 & 21 \end{pmatrix}$ |
| 9. | $a_1 = 150$
$a_2 = 320$
$a_3 = 250$ | $b_1 = 170$
$b_2 = 110$
$b_3 = 400$ | $C = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 22 \\ 9 & 7 & 15 \\ 10 & 11 & 20 \end{pmatrix}$ |
| 10. | $a_1 = 70$
$a_2 = 130$
$a_3 = 200$ | $b_1 = 150$
$b_2 = 90$
$b_3 = 170$ | $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 21 \\ 11 & 10 & 11 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ |
| 11. | $a_1 = 70$
$a_2 = 150$
$a_3 = 180$ | $b_1 = 190$
$b_2 = 70$
$b_3 = 150$ | $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 9 & 8 & 9 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ |
| 12. | $a_1 = 90$
$a_2 = 150$
$a_3 = 180$ | $b_1 = 200$
$b_2 = 50$
$b_3 = 150$ | $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 25 \\ 9 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ |
| 13. | $a_1 = 300$
$a_2 = 210$
$a_3 = 180$ | $b_1 = 110$
$b_2 = 400$
$b_3 = 180$ | $C = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 17 \\ 15 & 10 & 12 \\ 5 & 21 & 11 \end{pmatrix}$ |
| 14. | $a_1 = 320$
$a_2 = 140$
$a_3 = 180$ | $b_1 = 120$
$b_2 = 280$
$b_3 = 220$ | $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 20 & 7 & 10 \\ 13 & 14 & 8 \end{pmatrix}$ |
| 15. | $a_1 = 90$
$a_2 = 300$
$a_3 = 220$ | $b_1 = 110$
$b_2 = 120$
$b_3 = 380$ | $C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 17 \\ 11 & 8 & 15 \\ 11 & 12 & 20 \end{pmatrix}$ |
| 16. | $a_1 = 200$
$a_2 = 150$
$a_3 = 150$ | $b_1 = 120$
$b_2 = 120$
$b_3 = 90$
$b_4 = 170$ | $C = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 21 & 14 \\ 14 & 8 & 15 & 11 \\ 19 & 16 & 26 & 12 \end{pmatrix}$ |
| 17. | $a_1 = 300$
$a_2 = 280$
$a_3 = 220$ | $b_1 = 200$
$b_2 = 220$
$b_3 = 220$
$b_4 = 160$ | $C = \begin{pmatrix} 10 & 21 & 9 & 10 \\ 13 & 15 & 11 & 13 \\ 19 & 26 & 12 & 17 \end{pmatrix}$ |

18. $a_1 = 250$ $b_1 = 200$
 $a_2 = 200$ $b_2 = 150$
 $a_3 = 150$ $b_3 = 110$
 $b_4 = 130$
 $C = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 10 & 15 \\ 13 & 4 & 13 & 21 \\ 19 & 16 & 17 & 20 \end{pmatrix}$
19. $a_1 = 250$ $b_1 = 200$
 $a_2 = 200$ $b_2 = 150$
 $a_3 = 150$ $b_3 = 110$
 $b_4 = 140$
 $C = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 10 & 15 \\ 13 & 4 & 13 & 22 \\ 18 & 16 & 17 & 20 \end{pmatrix}$
20. $a_1 = 400$ $b_1 = 240$
 $a_2 = 250$ $b_2 = 210$
 $a_3 = 350$ $b_3 = 280$
 $b_4 = 260$
 $C = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 5 & 11 \\ 13 & 5 & 12 & 14 \\ 20 & 17 & 13 & 18 \end{pmatrix}$
21. $a_1 = 150$ $b_1 = 180$
 $a_2 = 200$ $b_2 = 100$
 $a_3 = 150$ $b_3 = 110$
 $b_4 = 120$
 $C = \begin{pmatrix} 9 & 19 & 7 & 11 \\ 5 & 14 & 12 & 15 \\ 15 & 22 & 11 & 12 \end{pmatrix}$
22. $a_1 = 150$ $b_1 = 210$
 $a_2 = 200$ $b_2 = 170$
 $a_3 = 150$ $b_3 = 130$
 $b_4 = 190$
 $C = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 18 & 7 \\ 15 & 12 & 15 & 3 \\ 16 & 11 & 25 & 15 \end{pmatrix}$
23. $a_1 = 150$ $b_1 = 200$
 $a_2 = 250$ $b_2 = 150$
 $a_3 = 200$ $b_3 = 110$
 $b_4 = 140$
 $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 & 5 \\ 10 & 9 & 11 & 6 \\ 11 & 7 & 13 & 8 \end{pmatrix}$
24. $a_1 = 250$ $b_1 = 330$
 $a_2 = 400$ $b_2 = 190$
 $a_3 = 350$ $b_3 = 270$
 $b_4 = 210$
 $C = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 & 7 \\ 15 & 30 & 11 & 8 \\ 16 & 19 & 15 & 25 \end{pmatrix}$
25. $a_1 = 150$ $b_1 = 100$
 $a_2 = 150$ $b_2 = 70$
 $a_3 = 200$ $b_3 = 130$
 $b_4 = 110$
 $C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 15 & 20 \\ 10 & 11 & 20 & 14 \\ 11 & 16 & 19 & 25 \end{pmatrix}$
26. $a_1 = 280$ $b_1 = 230$
 $a_2 = 220$ $b_2 = 180$
 $a_3 = 300$ $b_3 = 220$
 $b_4 = 170$
 $C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 15 \\ 4 & 10 & 12 & 20 \\ 15 & 11 & 16 & 19 \end{pmatrix}$

27.	$a_1 = 200$	$b_1 = 140$	$C = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$
	$a_2 = 250$	$b_2 = 210$	
	$a_3 = 150$	$b_3 = 130$	
		$b_4 = 120$	
28.	$a_1 = 350$	$b_1 = 220$	$C = \begin{pmatrix} 4 & 13 & 18 & 8 \\ 5 & 10 & 15 & 3 \\ 20 & 21 & 9 & 17 \end{pmatrix}$
	$a_2 = 400$	$b_2 = 270$	
	$a_3 = 250$	$b_3 = 280$	
		$b_4 = 230$	
29.	$a_1 = 250$	$b_1 = 160$	$C = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 4 & 11 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
	$a_2 = 250$	$b_2 = 150$	
	$a_3 = 200$	$b_3 = 130$	
		$b_4 = 250$	
30.	$a_1 = 250$	$b_1 = 200$	$C = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 9 & 13 \\ 6 & 15 & 14 & 4 \\ 7 & 19 & 11 & 6 \end{pmatrix}$
	$a_2 = 180$	$b_2 = 160$	
	$a_3 = 270$	$b_3 = 140$	
		$b_4 = 190$	

Тема 1.12. Елементи нелінійного програмування

Розглянемо загальну оптимізаційну задачу, що має три компоненти (цільову функцію F , основні обмеження g_i , граничні умови) та подається у наступній формі:

$$F = f(x_i) \quad (\mathbf{max}), (\mathbf{min})$$

$$g_i(x_j) \leq (\geq)(=)b_i;$$

$$a_j \leq x_j \leq d_j, \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

У випадку, коли цільова функція або (та) система основних обмежень є нелінійними, оптимізаційна задача має назву **задача нелінійного програмування**. На відміну від ЗЛП, для таких задач не існує єдиного метода розв'язання, кожна задача потребує аналізу, оцінки, можливо корегування та апроксимації. Для деяких класів задач відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але при цьому існують труднощі обчислювального характеру, тобто навіть для сучасних ЕОМ такі алгоритми є досить трудомісткими, тому в більшості випадків для розв'язування нелінійних задач виправданим є використання наближених методів. Апроксимації лінійними функціями.

Згідно теорії, у задачах лінійного програмування точка екстремуму завжди була кутовою точкою багатогранника допустимих розв'язків. Для нелінійних задач точка, в якій цільова функція досягає оптимального значення, може бути як граничною, так і розташовуватись всередині допустимої множини розв'язків (планів).

Множина допустимих планів задачі лінійного програмування завжди є опуклою множиною. У випадку, коли система обмежень задачі є нелінійною, множина допустимих розв'язків може бути неопуклою або навіть складатись із довільних не пов'язаних одна із іншою частин.

Кожна із вказаних особливостей задач нелінійного програмування вимагає застосування специфічних методів вирішення, тому, цілком природньо, найскладнішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких поєднується кілька або всі згадані особливості.

Метод множників Лагранжа.

Розглянемо задачу умовного екстремуму. Вона може бути сформульована наступним чином: знайти екстремум функції

$$Z = f(x, y) \quad (\max), (\min)$$

за умови, зв'язку між незалежними змінними

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні вихідної задачі простішою, для чого цільову функцію замінюють на іншу, з більшою кількістю змінних, до якої введено умови, що подані обмеженнями. Після такого перетворення, розв'язування задачі полягає в пошуку екстремуму нової функції, на змінні якої не накладається жодних обмежень (тобто, від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі пошуку безумовного екстремального значення нової цільової функції). Для нової функції можливе застосування методів класичного аналізу пошуку екстремуму функції кількох змінних. Сформулюємо теорему.

Теорема. Якщо функція $Z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ екстремум при умові $\varphi(x_0; y_0) = 0$ і $\varphi'(x_0; y_0) \neq 0$, то існує число λ_0 таке, що упорядкована трійка дійсних чисел $(x_0; y_0; \lambda_0)$ є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0, \end{cases} \text{ де } L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) - \text{функція Лагранжа.}$$

При цьому стаціонарна точка $M_0(x_0; y_0)$ буде:

$$\text{точкою умовного мінімуму, якщо: } \Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} > 0 ;$$

$$\text{точкою умовного максимуму, якщо: } \Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} < 0 .$$

Приклад. Фірма із виготовлення устаткування заключила контракт на постачання 77 одиниць верстатів 1 та 2 типу. Функція повних витрат виробництва має вигляд $C(x; y) = 7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64$, де x - кількість виготовлених верстатів 1 типу, а y - кількість верстатів 2 типу. Знайти оптимальну комбінацію випуску верстатів кожного типу, яка мінімізує повні витрати на їх виробництво.

Розв'язування. Математична модель задачі має вигляд: знайти мінімум функції $C(x; y) = 7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64$ за умови $x + y = 77$. Для пошуку умовного екстремуму скористуємось методом Лагранжа. Складаємо функцію Лагранжа:

$$L(x; y; \lambda) = 7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64 + \lambda(x + y - 77)$$

і досліджуємо її на екстремум. Частинні похідні першого порядку:

$$L'_x(x; y; \lambda) = (7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64 + \lambda(x + y - 77))'_x = 14x - 2y + \lambda;$$

$$L'_y(x; y; \lambda) = (7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64 + \lambda(x + y - 77))'_y = -2x + 10y + \lambda;$$

$$L'_\lambda(x; y; \lambda) = (7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64 + \lambda(x + y - 77))'_\lambda = x + y - 77.$$

Стаціонарну точку знаходимо із розв'язку системи рівнянь:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 2y + \lambda = 0, \\ -2x + 10y + \lambda = 0, \\ x + y - 77 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 12y = 0, \\ \lambda = 2x - 10y, \\ x + y = 77, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4x}{3} \\ x + \frac{4x}{3} = 77 \\ \lambda = 2x - 10y \end{cases}.$$

Розв'язок системи дає стаціонарну точку $M_0(33; 44; -374)$, яка за теоремою (необхідна умова екстремуму) є «підозрілою» на точку екстремуму. Скористуємось достатньою умовою існування умовного екстремуму функції Лагранжа $L(x; y; \lambda) = 7x^2 - 2xy + 5y^2 + 64 + \lambda(x + y - 77)$. Для цього в стаціонарній точці $M_0(33; 44; -374)$, необхідно обчислити визначник:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Знаходимо значення частинних похідних другого порядку в точці $M_0(33; 44; -374)$:

$$L''_{xx}(x; y; \lambda) = (14x - 2y + \lambda)'_x = 14;$$

$$L''_{xy}(x; y; \lambda) = (14x - 2y + \lambda)'_y = -2;$$

$$\varphi'_x = (x + y - 77)'_x = 1;$$

$$\varphi'_y = (x + y - 77)'_y = 1.$$

Обчислюємо значення визначника в стаціонарній точці $M_0(33; 44; -374)$:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 14 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{vmatrix} = -(0 - 2 - 2 - 14 - 0 - 10) = 28 > 0.$$

Оскільки визначник додатний, стаціонарна точка $M_0(33; 44; -374)$ є точкою умовного мінімуму функції Лагранжа.

Отже, мінімальні повні витрати досягаються при випуску $x = 33$ верстатів 1 типу та $y = 44$ верстатів 2 типу.

Зауважимо, що значення множника Лагранжа $\lambda = -374$ показує, що збільшення загального замовлення із 77 одиниць до 78 (на одну одиницю) призведе до збільшення загальних витрат на 374 тис. грн.

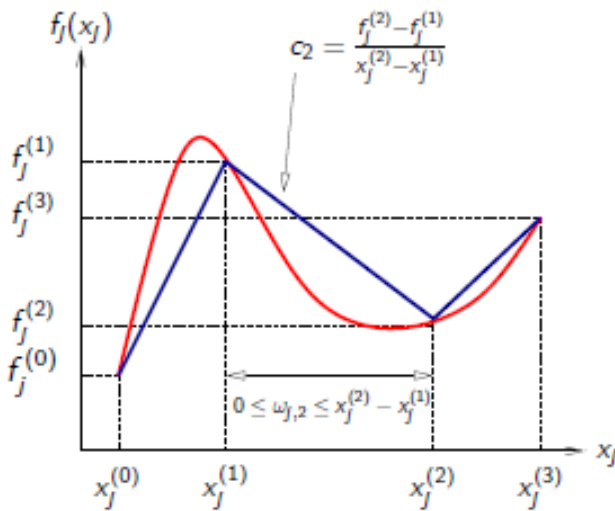
Саме в цьому полягає економічний зміст множників Лагранжа: вони показують збільшення (зменшення) значення цільової функції у випадку, коли залежні змінні змінюються на одиницю.

Поняття про змішано-цілочисельне лінійне програмування

Іноді цільова функція задачі або обмеження складаються із суми декількох лінійних функцій. Наприклад, ціна на деякий товар змінюється в залежності від кількості придбаного товару (оптові знижки), залежність функції від бінарних (двійкових) змінних тощо. Також іноді можливо нелінійну цільову функцію замінити наближено сумою лінійних (апроксимація кусково-лінійною функцією). На рисунку наведено геометричний зміст апроксимації цільової нелінійної функції кусково-лінійною функцією.

Approximating General Separable Programs as MILPs

Piecewise affine approximation:
(N_j intervals)



• Define:

$$c_j^{(k)} = \frac{f_j^{(k)} - f_j^{(k-1)}}{x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}} \\ 0 \leq \omega_{j,k} \leq x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}$$

• Substitute each variable x_j and function f_j by:

$$x_j \leftarrow x_j^{(0)} + \sum_{k=1}^{N_j} \omega_{j,k} \\ f_j(x_j) \leftarrow f_j^{(0)} + \sum_{k=1}^{N_j} c_j^{(k)} \omega_{j,k}$$

Рис. 12.1. Геометричний зміст апроксимації цільової нелінійної функції кусково-лінійною функцією.

Розглянемо на прикладі побудову задачі змішано-цілочисельного лінійного програмування.

Приклад. Підприємству необхідно вирішити проблему виготовлення 2 типів продуктів. Якщо виробляється продукт 1, фіксовані витрати складають 500 євро незалежно від того, скільки одиниць продукту 1 вироблено. Якщо виробляється продукт 2, фіксовані витрати складають 400 євро, незалежно від того, скільки одиниць продукту 2 вироблено.

На одну одиницю продукту 1 потрібно 2 години роботи машини I та 5 годин машини II. Для однієї одиниці продукту 2 потрібно 3 години роботи машини I та 1 година машини II. Усього доступно 400 годин машини I та 440 годин машини II.

Якщо підприємство виробляє не більше 20 одиниць продукту 1, то прибуток на одиницю становить 50 євро за одну одиницю продукту 1. Якщо підприємство

виробляє більше 20, але не більше 50 одиниць продукту 1, прибуток одиниця становить 40 євро. Якщо підприємство виробляє понад 50 одиниць товару 1, прибуток на одиницю становить 30 євро.

Щодо продукту 2, прибуток на перші 50 одиниць становить 20 євро. Для наступних п'ятдесяти одиниць (51-100) прибуток на одиницю становить 10 євро за кожну додаткову одиницю. Для будь-якої одиниці продукту 2 понад 100 одиниць, прибуток за одиницю 5 євро.

Побудуйте математичну модель завдання як задачу змішано-цілочисельного лінійного програмування.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_1, x_2 – запланований випуск продуктів 1 та 2 типів відповідно; x_{ij} – запланований випуск продуктів i -го типу з j -м типом прибутку; b_j – рішення про те, чи продається продукт 1 у ціновому діапазоні j ; c_j – рішення про те, чи продається продукт 2 у ціновому діапазоні j ; z_i – рішення про те, чи продається продукт i ; ($i = 1, 2, ; j = 1, 2, 3$); M – досить велике додатне число; z – запланований загальний прибуток. Прибуток потрібно максимізувати, при цьому потрібно врахувати усі обмеження задачі.

Математична модель задачі набуває вигляду:

$$z = 50x_{11} + 40x_{12} + 30x_{13} + 20x_{21} + 10x_{22} + 5x_{23} - 500x_1 - 400x_2 \quad (\max)$$

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x_{11} \leq 20b_1; \\ 20b_2 \leq x_{12} \leq 50b_2; \\ 50b_3 \leq x_{13} \leq Mb_3; \\ b_1 + b_2 + b_3 = 1. \end{cases}$$

$$b_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\begin{cases} 50c_2 \leq x_{21} \leq 50c_1; \\ (100 - 50)c_3 \leq x_{22} \leq (100 - 50)c_2; \\ 0 \leq x_{23} \leq Mc_3; \\ c_1 \geq c_2 \geq c_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \leq Mz_1; \\ x_2 \leq Mz_2; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 400; \\ 5x_1 + 1x_2 \leq 440. \end{cases}$$

$$z_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2.$$

Зрозуміло, що велика кількість бінарних змінних та обмежень задачі ускладнює її розв'язання і потребує спеціальних нетипових методів вирішення. Тому розглянемо менш складну задачу змішано-цілочисельного лінійного програмування, в якій цільова функція складається із двох функцій в залежності від того, які значення приймають змінні.

Приклад. Компанія Fly-Right Airplane Company будує невеликі реактивні літаки для продажу корпораціям для використання їх керівниками. Щоб задовольнити потреби цих керівників, клієнти компанії іноді замовляють індивідуальний дизайн літаків, що купуються. Коли це відбувається, потрібні значні початкові витрати для виробництва цих літаків. Fly-Right нещодавно отримала заявки на покупку від трьох клієнтів за короткий термін. Однак, оскільки виробничі потужності компанії вже майже повністю зайняті виконанням попередніх замовлень, вона не зможе прийняти всі три замовлення. Отже, тепер необхідно ухвалити рішення про кількість літаків, які компанія погодиться виробити (якщо такі будуть) для кожного із трьох клієнтів. Відповідні дані наведено у таблиці. У першому рядку вказані початкові витрати, необхідні для запуску виробництва літаків кожному із замовників. Після початку виробництва граничний чистий дохід (який є закупівельною ціною за вирахуванням граничних виробничих витрат) від кожного виробленого літака відображається в другому рядку. У третьому рядку вказано відсоток доступної виробничої потужності, який буде використаний для кожного виробленого літака. В останньому рядку вказано максимальну кількість літаків, запрошену кожним клієнтом (може буде вироблено менше).

	Покупець		
	1	2	3
Вартість запуску	\$3 мільйони	\$2 мільйони	0
Маржинальний чистий дохід	\$2 мільйони	\$3 мільйони	\$0.8 мільйони
Використана частка виробництва на літак	20%	40%	20%
Максимальний заказ	3 літаки	2 літаки	5 літаків

Fly-Right хоче визначити, скільки літаків зробити для кожного клієнта (якщо такий є/або взагалі), щоб максимізувати загальний прибуток компанії (загальний чистий дохід за вирахуванням початкових витрат).

Розв’язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_1, x_2, x_3 – запланований випуск літаків 1, 2 та 3 типів відповідно; z – запланований загальний прибуток (\$). Прибуток компанії Fly-Right Airplane Company потрібно максимізувати, при цьому потрібно врахувати частку виробництва на літак кожного типу та максимальний заказ літаків.

Математична модель задачі набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 z &= (2x_1 - 3) + (3x_2 - 2) + 0,8x_3 && \textbf{(max)} \\
 \left\{ \begin{array}{l} 0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3 \leq 1; \\ x_1 \leq 3; \\ x_2 \leq 2; \\ x_3 \leq 5. \end{array} \right. \\
 x_i \geq 0; x_i \in Z, \quad i &= 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Отримали задачу цілочисельного програмування, яку вирішимо за допомогою пакету «**SOLVER**» електронних таблиць **MS EXCEL**. На рисунку 12.2 представлено розв’язок задачі про планування виробництва літаків.

B	C	D	E	F	G	H	I	J
	3		2				<=	3
X=	1		3	Z=	4		<=	2
	0		0,8				<=	5
			0,2		1	<=	1	
			0,4					
			0,2					

Рис. 12.2. Розв'язок задачі про планування виробництва літаків.

Отримали наступний розв'язок: для отримання найбільшого доходу, що складає 4 мільйони \$, потрібно виготовляти 3 літаки першого типу та 1 літак другого типу. Проте знайдений розв'язок не є правильним, оскільки не врахована умова, що при відсутності випуску літаків не потрібні додаткові витрати на запуск виробництва літаків1 та 2 типу. Для усунення цього недоліку коефіцієнти c_1, c_2 позначимо наступним чином

$$c_1 = \begin{cases} 2x_1 - 3, & \text{коли } x_1 > 0, \\ 0, & \text{коли } x_1 = 0. \end{cases}$$

$$c_2 = \begin{cases} 3x_1 - 2, & \text{коли } x_2 > 0, \\ 0, & \text{коли } x_2 = 0. \end{cases}$$

Зазначим, що отримана задача не є задачею лінійного програмування в загальному вигляді, а є задачею змішано-цілочисельного лінійного програмування. Для її вирішення за допомогою пакету «**SOLVER**» електронних таблиць **MS EXCEL** обов'язково слід зазначити «Еволюційний метод вирішення» замість «Вирішення симплексним методом». На рисунку 12.3 представлено розв'язок задачі про планування виробництва літаків еволюційним методом.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
		0		2				<=	3	
	X=	2		3	Z=	4,8		<=	2	
		1		0,8				<=	5	
				-3		0				
				0						
				4		4				
				0						
				0,2		1	<=	1		
				0,4						
				0,2						

Рис. 12.3. Розв'язок задачі виробництва літаків еволюційним методом.

Отримали наступний розв'язок: для отримання найбільшого доходу, що складає 4,8 мільйонів \$, потрібно виготовляти 2 літаки другого типу та 1 літак третього типу.

Зауваження. Вирішена задача про планування виробництва літаків є задачею змішано-цілочисельного лінійного програмування, оскільки цільова функція в ній складається не є неперервною. Для її розв'язання за допомогою пакету «**SOLVER**» електронних таблиць **MS EXCEL** використовується еволюційний метод.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти найбільший прибуток підприємства, якщо функції цін на його товари 1 та 2 типу дорівнюють $p_1 = 50 - x$; $p_2 = 60 - 2y$, де x і y - кількість одиниць відповідних товарів, а функція загальних витрат виробництва має вигляд $C(x, y) = 2xy$. Визначити обсяги випуску та ціни товарів, при яких прибуток підприємства буде максимальний.

2. При виробництві деякого товару фірма використовує два типи комплектуючих: **A** і **B**. Застосування в процесі виробу **A** дає прибуток 10 грн., а виробу **B** - 12 грн. Кожного тижня фірма може використати x виробів **A** та y виробів **B**, причому у співвідношенні $x^2 + y^2 = 61$. Знайти максимальний щотижневий прибуток фірми і відповідний попит на кількість двох типів комплектуючих **A** і **B**.

3. Вам терміново потрібна квартира у Києві. Агент з нерухомості пропонує вам різні квартири. Вам потрібно вирішити, яку з квартир орендувати. Ви маєте бажання мінімізувати витрати на оренду, проте у вас є деякі вимоги до помешкання.

Орендна плата кожної із запропонованих ріелтором квартир дорівнює c_i , ($i = 1, 2, \dots, n$).

Кількість кімнат в квартирі визначається як $r_i = 1, 2, 3, 4, 5$; ($i = 1, 2, \dots, n$). Вам підходить не менше двох кімнат.

У будній день ви спочатку їдете в університет з квартири, а вечором ви повертаєтесь до квартири з роботи (неповна занятість). Час у дорозі (у хвиликах) від квартири до університету t_{1i} , ($i = 1, 2, \dots, n$), час у дорозі від робочого місця до квартири і складає t_{2i} , ($i = 1, 2, \dots, n$). Ви не маєте бажання витратити на загальний шлях більше однієї години кожного буднього дня.

В квартирі повинен бути балкон або (та) вихід у садочок. Екзогенно наведено параметр, що надає вам відомості про наявність балкона, він позначається $b_i \in \{0, 1\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Параметр, що надає вам відомості про наявність виходу в садочок позначається $g_i \in \{0, 1\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Прогулянка від квартири до найближчого парку складає d_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) хвилин. Якщо в орендованому помешканні не має виходу в садочок, піша прогулянка до парку повинна складати не більше 10 хвилин.

Скласти математичну модель задачі.

Тема 1.13 Застосування оптимізаційних методів для вирішення реальних задач планування ЗЕД.

Наведемо приклади практичного застосування оптимізаційних задач для вирішення реальних економічних, фінансових та логістичних проблем. Розв'язані у темі задачі є науковими розробками авторів та були раніше надруковані у роботах [1, 2, 3].

Оцінка ризиків у міжнародній туристичній діяльності за допомогою оптимізаційних методів

Приклад 1. Оцінити рівень прибутковості та ступень фінансового ризику сегментів зовнішньоекономічної діяльності туристичного підприємства з метою розробки стратегії розвитку та диверсифікації.

Для аналізу діяльності туристичної компанії у розрізі окремих сегментів виїзного туристичного продукту та надання рекомендацій щодо диверсифікації, скористуватись таблицями 13.1 та 13.2, складеними на основі фінансових звітів ПП «Атлас».

Таблиця 13.1

Динаміка витрат на організацію турів ПП «Атлас»
за 2014 – 2019 роки, тис. грн.

Види турів	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Пізнавальні тури	321919	222610	89658	63905	49959	43899
Оздоровчий відпочинок	43500	46096	47323	47200	44361	39872
Спортивний туризм	3327	4534	4071	5666	5101	6630
Діловий туризм	8513	15358	22032	25155	15511	12701
Елітний відпочинок	15643	3545	4170	4995	3287	13718
Розважальні тури	7205	11960	2269	9002	2557	4717
Всього	400107	304103	169523	155924	120775	121537

Динаміка доходів від реалізації турів ПП «Атлас»
за 2014 – 2019 роки, тис. грн.

Види турів	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Пізнавальні тури	413724	232496	120640	107235	72324	66397
Оздоровчий відпочинок	64275	50879	52419	65051	54324	73210
Спортивний туризм	7160	11115	9362	9196	9407	27972
Діловий туризм	16647	17941	24206	33094	19290	17464
Елітний відпочинок	36008	13815	11173	14239	12087	16227
Розважальні тури	17915	15699	14482	13152	9679	9507
Всього	555727	341945	232283	241967	177110	210777

Розв’язання. Прибуток є метою і результатом економічної діяльності кожної фірми, він забезпечує умови розширеного відтворення і тому виступає критерієм ефективності підприємницької діяльності. Для оцінки прибутку як фінансового результату діяльності організації дохід зіставляється з витратами. Результатом цього є результат з позитивним або негативним значенням. Позитивне значення показує прибуток, а негативне – збиток. У випадку збитковості не можна допускати, щоб сума змінних витрат фірми перевищувала її дохід від усіх видів діяльності. У такій складній ситуації варто припинити діяльність організації або провести санацію туристичного підприємства. Граничною межею для припинення діяльності туристичної фірми є ситуація, за якої чистий дохід від реалізації туристичного продукту менший або дорівнює сумі змінних витрат:

$$V_{\text{ч}} \leq B_{\text{зм}},$$

де $V_{\text{ч}}$ – чистий дохід фірми від реалізації туристичного продукту (послуг); $B_{\text{зм}}$ – сума змінних витрат.

Для визначення ефективності діяльності підприємства обчислюється норма прибутковості як відношення чистого прибутку, одержаного підприємством за рік, до

загальної суми витрат фірми (інвестованого капіталу). Чистий прибуток агенції визначається як різниця між балансовим прибутком і сумою податку на прибуток. Балансовий прибуток туристичної агенції розраховується як різниця між валовими прибутками і валовими видатками. Норма прибутковості окремих видів туристичної діяльності є підґрунтям для стратегічного управління фінансами турфірми з метою забезпечення фінансової стійкості. Управління діяльністю туристичної фірми розуміємо як науково обґрунтований процес планування, організації, мотивації та контролю, необхідний для того, щоб досягти сталих якісних фінансових показників. Для цього процес планування поділяють на три етапи: вивчення існуючого стану туристичного підприємства; визначення цільових показників майбутньої діяльності; вироблення конкретного стратегічного, тактичного та оперативного плану дій, спрямованих на досягнення визначених нами цілей.

Об'єктами планування у туризмі є туристичні маршрути, рекреаційні зони, історичні території, послуги перевезення та розміщення, розважальні заходи та екскурсії. Зважаючи на фінансову складову туристичної діяльності фірми їх можливо об'єднати під назвою туристичний продукт або ринок туристичних послуг. Планування інвестицій у різні сегменти туристичного ринку, засноване на аналізі майбутніх витрат і прибутків, має деяку міру невизначеності. Елементи невизначеності, пов'язані з плануванням та проектуванням діяльності туристичної фірми, повинні бути оцінені таким чином, щоб зробити мінімальним вплив можливих несприятливих умов у майбутньому. Під ризиком у плануванні роботи туристичного підприємства розуміють ймовірність деякого рівня втрат фірмою частини своїх клієнтів або недоотримання доходів, або появу непередбачуваних додаткових витрат при реалізації проекту. В інвестиційному аналізі існує співвідношення між ступенем ризику і прибутком, яке, зазвичай, точно визначає, що інвестиції, при яких очікується великий прибуток, неминуче підлягають високої мірі ризику.

Аналіз діяльності туристичного підприємства проведемо на прикладі ПП «Атлас». Компанія працює на ринку виїзного туризму біля 5 років, здійснюючи як посередницьку діяльність з продажу комплексного турпродукту, так і туроператорську діяльність з розробки та подальшої реалізації турів. Прибуток фірми в останні роки зменшується і тому виникла потреба у проведенні наукової оцінки сегментів туристичного продукту.

Для проведення аналізу зовнішньоекономічної діяльності фірми виділено наступні напрями: елітний, оздоровчо-рекреаційний, культурно-пізнавальний, професійно-діловий, спортивний та розважальний туризм.

До елітного відпочинку відносимо переважно індивідуальні тури з високим рівнем цінової політики та підвищеними вимогами до якості надання послуг. Більшість з таких турів здійснюється до екзотичних країн та островів, проте є клієнти, що прагнуть елітного відпочинку в Європі, Туреччині, Єгипті.

До оздоровчо-рекреаційного відпочинку включаємо тури з метою оздоровлення, відпочинку та лікування, відпочинок на морі, а саме, бальнеологічних, кліматологічних та спа курортах. Лікувальні тури переважно індивідуальні, а оздоровчі можуть бути сімейними та груповими (наприклад дитячі, профспілкові).

Культурно-пізнавальні тури – це подорожі та поїздки з пізнавальною метою, з ціллю знайомства з визначними пам'ятками історії та архітектури. Географія таких турів різноманітна, але переважна кількість споживачів відвідує Італію, Іспанію, Чехію, Францію. Культурно-пізнавальні тури переважно є груповими з достатньо низьким рівнем цін (економ-тури).

До професійно-ділового туризму відносимо поїздки з діловими цілями, організація симпозіумів, семінарів, конференцій (науковий туризм). Також до цієї категорії включаємо навчання за кордоном (освітній туризм) та допомогу у працевлаштуванні за межами України.

В останні роки набули популярності, так звані, шоп-тури з метою придбання брендового одягу за низькими цінами та корпоративні поїздки (різноманітні подорожі колективу деякої фірми).

В епоху урбанізації та комп'ютеризації особливої актуальності набуває спортивний туризм. До нього відносимо екстрим-тури, пригодницькі подорожі, а саме, яхтинг, сафарі-тури, експедиції та походи на гірські вершини, гірськолижні тури, рафтинг та інші види, пов'язані з великим фізичним та адреналіновим навантаженням.

Розважальний туризм – це подорожі з метою отримання яскравих емоцій від культурно-масових заходів, відвідування розважальних тематичних місць. До таких місць відносяться Монте-Карло, Лас-Вегас, Сан-Дієго, відпочинок в яких є недешевим задоволенням. Також є і більш «бюджетні» місця: аквапарки в Угорщині та Словаччині, Діснейленди у Франції та Німеччині, та інші. Різноманітні Фести, тури на концерти відомих естрадних зірок, на футбольні матчі та інші змагання також є різновидами розважального туризму.

Прибутковість та рівень ризику фінансової діяльності туристичного підприємства обчислюється за наступною схемою. Розраховуємо прибутковість конкретного виду туристичного продукту у кожному році за формулою:

$$\text{Пр}_{ij} = 1 - \frac{\text{ЧВ}_{ij}}{\text{ЧД}_{ij}},$$

де Пр_{ij} – прибутковість i -го виду туристичного продукту у j -му році ($i = \overline{1,6}; j = \overline{1,6}$); ЧВ_{ij} – чисті витрати на організацію турів за i -м видом туристичних послуг у j -му році ($i = \overline{1,6}; j = \overline{1,6}$), тис. грн.; ЧД_{ij} – чисті доходи від реалізації турів за i -м видом туристичних послуг у j -му році ($i = \overline{1,6}; j = \overline{1,6}$), тис. грн.

Визначаємо середню прибутковість i -го виду туристичного продукту за шість років:

$$r_i = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \text{Пр}_{ij}.$$

Обчислюємо частку кожного виду туристичного продукту у 2019 році за формулою:

$$w_i = \frac{\text{ЧД}_{ij}}{\sum_{j=1}^6 \text{ЧД}_{ij}}$$

Прибутковість туристичного підприємства знаходимо як добуток середньої прибутковості i -го виду туристичного продукту та його частки, тобто:

$$z = \sum_{i=1}^6 r_i \times w_i.$$

Ризик конкретного виду туристичного продукту в моделі розраховується як середнє квадратичне відхилення прибутковості. Загальний рівень ризику туристичного підприємства обчислюється за формулою:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^6 \sigma_i^2 \times w_i^2 + \sum_{i=1}^6 \sum_{i \neq j}^6 w_i \times w_j \times \sigma_i \times \sigma_j \times \rho_{ij},$$

де w_i – частка i -го виду туристичного продукту у 2019 році; σ_i – середнє квадратичне відхилення прибутковості i -го виду туристичного продукту; ρ_{ij} – коефіцієнти кореляції між видами туристичного продукту.

Для обчислення середнього прибутку та ризикованості портфелю туристичних послуг, що надає фірма застосовано електронні таблиці MS EXCEL. Отримано наступні результати діяльності: прибуток наявного портфелю туристичних послуг на рівні 26,5%, ризикованість складає 13%. Для більш детального аналізу розглянемо показники різних видів туристичного продукту.

Частка культурно-пізнавальних турів складає 29,6%, ризикованість сегменту 7,1%, середня прибутковість за шість років 24,8%.

Частка оздоровчо-рекреаційного туризму 23,8%, ризикованість 7,3%, середня прибутковість за досліджуваний період 27,7%.

Спортивний туризм складає 10,9% загального прибутку, ризикованість продукту 15,7%, середня прибутковість за шість років 37,6%.

Частка професійно-ділового туризму знаходиться на рівні 8,1%, ризикованість сегменту 14,9%, середня прибутковість за шість років 23,9%.

Елітний відпочинок складає 17,5% прибутку, ризикованість туристичного продукту 12,3%, середня прибутковість за досліджуваний період 37,1%.

Розважальні тури складають 10,1% загального прибутку, ризикованість сегменту 7,4%, середня прибутковість за шість років 28,9%.

Видатний італійський економіст В. Паретто на початку XX сторіччя запропонував новий метод знаходження оптимального стану системи. За Паретто існує декілька оптимальних станів, головною умовою є те, що значення кожного окремого критерію, що описує стан системи, не може бути покращено без погіршення становища інших елементів.

Таким чином, за критерієм найбільшої прибутковості оптимальним напрямком міжнародної діяльності фірми за Паретто буде спортивний туризм. За критерієм найменшого ризику оптимальним є культурно-пізнавальні тури.

Аналізуючи роботу підприємства, можливо зробити припущення, що для отримання більшого прибутку та зменшення рівня ризику потрібно переглянути політику фірми у розрізі видів туристичного продукту, оскільки високоприбуткові тури займають малу частку у загальному прибутку підприємства.

Одним з базових елементів сучасної теорії ринку капіталу є концепція оптимізації портфеля інвестицій. Автором її є американський економіст, лауреат Нобелівської премії з економіки **Г. Марковіц**. У 1952 р. він уперше обґрунтовано довів, що вкладення заданого обсягу інвестиційного капіталу в один об'єкт інвестицій є ризикованішим, ніж інвестування цієї ж суми в різні об'єкти (**диверсифікація**).

Завдяки диверсифікації можна зменшити сукупний ризик портфеля інвестицій підприємства. Вчений зробив спробу аргументувати правило формування портфеля інвестицій, тобто дати відповідь на питання щодо кількості і виду цінних паперів (об'єктів інвестицій), які повинні бути відібрані в інвестиційний портфель з погляду оптимізації співвідношення «ризик-прибутковість» за умови, що задано обсяг інвестиційних ресурсів. Далі припущення Марковіця щодо оптимізації портфеля цінних паперів були застосовані з метою формування портфеля реальних інвестицій підприємства.

За Марковіцем, портфель інвестицій вважатиметься оптимальним, якщо не існуватиме будь яких інших більш прибуткових інвестиційних портфелів, які характеризуються таким самим або меншим рівнем ризику. При цьому йдеться про так звані несистематичні ризики.

Модель Марковіця, яка традиційно використовується з метою оптимізації структури портфеля цінних паперів, може бути застосована і в туризмі. При цьому йдеться про оптимізацію портфеля туристичного продукту. Показники, які використовуються у моделі Марковіця для розрахунку оптимального інвестиційного портфеля, аналогічні і в туристичній діяльності. Так, прибутковість цінного паперу аналогічна прибутковості виду туристичного напрямку. Ризик цінного паперу в моделі розраховується як середнє квадратичне відхилення прибутковості. Ступінь і характер взаємозв'язку між цінними паперами виражається коефіцієнтами лінійної кореляції.

Модель Марковіця заснована на тому, що показники прибутковості цінних паперів взаємозалежні, тобто може спостерігатися зростання прибутковості одних цінних паперів з одночасним зростанням інших цінних паперів, в той час як треті залишаються без змін, а четверті взагалі зменшуються. Аналогічна ситуація притаманна і для туристичного продукту, оскільки кількість споживачів обмежена і прибутковість одного із туристичних напрямків може зростати за одними категоріями і зменшуватись за іншими.

Тому модель Марковіця у своїх базових підходах цілком прийнятна і для застосування у сфері вибору оптимального портфеля туристичних послуг.

Проведемо оптимізацію портфелю з метою отримання найбільшого прибутку за умови, що ризик портфелю не збільшується. Формалізований вигляд моделі оптимального портфелю за Марковіцем може бути представлений у вигляді задачі лінійного програмування:

$$z = \sum_{i=1}^6 r_i \times w_i \rightarrow \mathbf{max}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^6 \sigma_i^2 \times w_i^2 + \sum_{i=1}^6 \sum_{i \neq j}^6 w_i \times w_j \times \sigma_i \times \sigma_j \times \rho_{ij} \leq \sigma_H^2, \\ \sum_{i=1}^6 w_i = 1, \\ w_i \geq 0. \end{array} \right.$$

де w_i – частка i -го виду туристичного продукту, яку необхідно оптимізувати (змінні величини); σ_i – середнє квадратичне відхилення прибутковості i -го виду туристичного продукту; r_i – середня прибутковість i -го виду туристичного продукту; ρ_{ij} – коефіцієнти кореляції між видами туристичного продукту; $\sigma_H^2 = 0,01$ – очікуваний рівень ризику туристичного підприємства.

Розв'язання задачі лінійного програмування проводимо за допомогою команди «**SOLVER**» MS EXCEL. Отримані результати пошуку оптимального портфелю туристичних послуг наведено у таблиці 13.3.

Прибутковість оптимального портфелю туристичних послуг складає 33,9%, наявний портфель має прибутковість 26,5%. Діяльність туристичного підприємства згідно оптимального пакету зменшить ризик з 13% до 8%.

Пошук оптимального портфелю туристичних послуг

Microsoft Excel 11.0 Звіт про результати					
Робочий лист: [Портфель тур послуг.xls]Лист1					
Звіт складено: 14.02.2023 13:04:54					
Цільова комірка (Максимум)					
Комірка	Ім'я	Вихідне значення		Результат	
\$K\$20	сер. прибуток	0,265342		0,339401	
Змінювані комірки					
Комірка	Ім'я	Вихідне значення		Результат	
	\$Q\$3	Пізнавальні тури		29,6%	32,7%
	\$Q\$4	Оздоровчий відпочинок		23,8%	19,2%
	\$Q\$5	Спортивний туризм		10,9%	6,5%
	\$Q\$6	Діловий туризм		8,1%	5,5%
	\$Q\$7	Елітний відпочинок		17,5%	20,8%
	\$Q\$8	Розважальні тури		10,1%	15,3%
Обмеження					
Комірка	Ім'я	Значення	Формула	Статус	
\$Q\$9	Всього	1	\$Q\$9=1	Не пов'язане	
\$K\$22	ризик.	0,006378	\$K\$22<=0.007	Пов'язане	

Аналіз результатів пошуку оптимального портфелю туристичних послуг у галузі виїзного туризму демонструє, що найбільш ризикованим сегментом діяльності фірми є спортивний туризм. Це пов'язано із суттєвим впливом природних умов на цей вид відпочинку: відсутність снігу взимку, похолодання влітку тощо. Для пом'якшення ризиків цього сегменту діяльності пропонуємо страхування ризику, розробку нових географічних напрямів, інші маркетингові та економічні важелі.

Для отримання більшого прибутку та зменшення фінансових ризиків підприємству потрібно проводити активну маркетингову компанію з продажу культурно-пізнавальних та розважальних турів. Ці сегменти діяльності є найменш

вразливими у зв'язку з порівняльно низькою вартістю та менталітетом більшості українських громадян. Проте, слід розумно підходити до зміни структури туристичного продукту, оскільки така зміна потребує значних матеріальних та інших витрат.

Оцінка фінансових показників основних секторів зовнішньоекономічної діяльності підприємств туристичної галузі з метою збільшення прибутковості та зменшення рівня ризикованості є складною задачею. Запропоновано один із методів її розв'язання. Перспективи подальших розробок вбачаємо у розробці методів практичного застосування отриманих результатів для диверсифікації туристичного продукту туристичних агенцій.

Аналіз інвестиційної привабливості галузей індустрії гостинності за допомогою математичних методів

Наступний приклад присвячено аналізу інвестиційної привабливості галузей індустрії гостинності для планування процесу сталого розвитку готельних та ресторанних підприємств. Оцінку показників привабливості інвестиційних капіталовкладень в галузі індустрії гостинності виконано за допомогою економіко-математичних методів із застосуванням концепції оптимального портфелю інвестицій Г. Марковіця. Вирішення задачі нелінійного програмування з використанням електронних таблиць MS EXCEL дозволило виділити галузі індустрії гостинності з більшим коефіцієнтом прибутковості та низьким рівнем ризикованості капіталовкладень.

Застосування портфельної теорії дозволило виявити найпривабливіші, з точки зору залучення інвестицій, сфери виробництва. Результати дослідження можуть бути використані у реальному секторі економіки для проведення інвестиційної діяльності у галузі індустрії гостинності для відновлення сталого фінансово-економічного розвитку суб'єктів господарювання у післявоєнний час.

Приклад. За допомогою економіко-математичних методів дослідити інвестиційну привабливість галузей індустрії тимчасового розміщування та організації харчування з метою планування процесу сталого розвитку готельно-ресторанних підприємств.

У світовій науковій спільноті існує досвід дослідження та пошуку шляхів відновлення туристичної галузі після війни. Особливої уваги заслуговує монографія заслуженого професора Університету Стратклайда (Глазго, Шотландія) Річарда Батлера та науковця з Інституту досліджень туризму (Макао, Китай) Вантані Сантикула «Туризм і війна». В книзі автори наголошують, що програма відновлення туристичної галузі у післявоєнний час повинна ґрунтуватись на аналізі розвитку у період до військової агресії.

Для дослідження інвестиційної привабливості галузей індустрії гостинності взято за основу показники обсягу реалізованої продукції (товарів, послуг) підприємств за видами економічної діяльності у 2010 – 2021 роках та отриманий чистий прибуток (збиток) підприємств за видами економічної діяльності за той же період, що розміщені на сайті Державної служби статистики України. Обрано наступні галузі тимчасового розміщування й організації харчування (код за Класифікатором видів економічної діяльності (КВЕД) – I): діяльність готелів і подібних засобів тимчасового розміщування (код за КВЕД – 55.1); діяльність засобів розміщування на період відпустки та іншого тимчасового проживання (код за КВЕД – 55.2); діяльність ресторанів, надання послуг мобільного харчування (код за КВЕД – 56.1); постачання готових страв (код за КВЕД – 56.2); обслуговування напоями (код за КВЕД – 56.3). Розглянуто діяльність підприємств за 2016 – 2019 роки, оскільки в зазначений період суб'єкти господарської діяльності мали найкращі показники роботи (період між російським вторгненням 2014 року та світовою пандемією 2020 року). В таблиці 13.4 наведено обсяги реалізованої продукції (товарів та послуг) підприємств за видами економічної діяльності, чистий прибуток (збиток), рівень прибутковості галузей за 2016 – 2019 роки.

Таблиця 13.4

Деякі фінансові показники підприємств гостинності за видами економічної діяльності за 2016 – 2019 роки

Види економічної діяльності	Код за КВЕД	Роки	Чистий прибуток (збиток), тис. грн	Обсяг реалізованої продукції, тис. грн
Тимчасове розміщування й організація харчування	I	2016	- 1983088,8	23083768,0
		2017	1773481,4	29548159,7
		2018	2350861,6	36699962,5
		2019	4245604,3	42201850,0
Діяльність готелів і подібних засобів тимчасового розміщування	55.1	2016	-2028619,9	6352042,5
		2017	1470289,3	7895318,0
		2018	1846720,1	9479438,3
		2019	3192997,0	9884154,4
Діяльність засобів розміщування на період відпустки та іншого тимчасового проживання	55.2	2016	-29477,0	700282,6
		2017	-132208,3	906268,6
		2018	-11916,3	1130564,0
		2019	11087,9	1579748,4
Діяльність ресторанів, надання послуг мобільного харчування	56.1	2016	40196,8	11039172,9
		2017	405025,5	14753587,1
		2018	405999,2	18695113,9
		2019	931701,1	22981964,9
Постачання готових страв	56.2	2016	46280,5	4516601,6
		2017	3676,3	5241885,9
		2018	110710,8	6520385,1
		2019	122585,2	6852278,3
Обслуговування напоями	56.3	2016	-8651,8	414131,7
		2017	41743,8	658182,3
		2018	8852,1	790072,0
		2019	-3465,4	785841,1

Інвестиції у галузь гостинності є досить прибутковою справою. М. Мальська, досліджуючи інвестиції в туризмі, визначає, що вартість капіталовкладень в

економіку туризму є досить низькою і, в той же час, дає велику віддачу від інвестицій і великий прибуток для інвесторів.

Проте, слід застерегти, що планування інвестицій у різні сегменти туристичного ринку, засноване на майбутніх витратах і прибутках, має деяку міру невизначеності. Елементи невизначеності, пов'язані з проектуванням діяльності підприємств сфери гостинності, повинні бути оцінені так, щоб зробити мінімальним вплив можливих несприятливих умов у майбутньому. Під ризиком у плануванні роботи туристичної фірми розуміють ймовірність визначеного рівня втрат частини своїх клієнтів або недоотримання доходів, або появу додаткових витрат під час реалізації проекту. Існує співвідношення між мірою ризику і прибутком, яке зазвичай точно визначає, що інвестиції, за яких очікується великий прибуток, неминуче підлягають високому ступеню ризику.

Однією із базових теорій сучасного ринку інвестицій є концепція оптимального портфелю інвестицій. Започатковано цю теорію у працях лауреата Нобелівської премії з економіки, американського економіста Г. Марковіца. За допомогою економіко-математичних методів він обґрунтовано довів, що інвестиції у декілька об'єктів (диверсифікація) є менш ризикованою операцією на відміну від інвестування одного проекту. Ефективним (оптимальним) або домінуючим, за означенням автора, є портфель інвестицій, що забезпечує максимальний прибуток для заданого рівня ризику або мінімальний ризик для заданого рівня прибутковості. У подальшому портфельна теорія диверсифікації інвестицій доповнювалась та удосконалювалась, а загальні її припущення було застосовано для вирішення реальних економічних ситуацій.

Модель Марковіца, що традиційно використовується в банківській справі та фінансово-інвестиційній діяльності, може бути використана для аналізу інвестиційної привабливості галузей індустрії гостинності. Так, прибутковість цінного паперу аналогічна прибутковості суб'єктів господарської діяльності підприємств

тимчасового розміщування та організації харчування. Ризик цінного паперу аналогічний ризику вкладення інвестицій в галузі індустрії гостинності.

Прибутковість та рівень ризику інвестицій у фінансову діяльність галузей індустрії гостинності обчислюється за наступною схемою. Розраховуємо прибутковість кожної галузі в кожному році за формулою:

$$\text{Пр}_{ij} = \frac{\text{ЧПр}_{ij}}{\text{ОРПр}_{ij}}$$

де Пр_{ij} – прибутковість i -ої галузі в j -му році; ЧПр_{ij} – чистий прибуток i -ої галузі в j -му році; ОРПр_{ij} – обсяг реалізованої продукції (товарів, послуг) i -ої галузі в j -му році ($i = \overline{1,5}$; $j = \overline{1,4}$).

Визначаємо середню прибутковість i -ої галузі за чотири роки:

$$r_i = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \text{Пр}_{ij}.$$

Обчислюємо середню частку кожного виду діяльності за чотири роки:

$$w_i = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 w_{ij},$$

де w_{ij} знаходиться як відношення обсягу реалізованої продукції i -ої галузі в j -му році до загального обсягу реалізованої продукції в j -му році всіх підприємств тимчасового розміщування та організації харчування.

Загальна прибутковість інвестицій, що вкладені у галузь гостинності обчислюємо за формулою:

$$z = \sum_{i=1}^5 r_i \times w_i.$$

Ризик кожного виду економічної діяльності в моделі розраховується як середнє квадратичне відхилення прибутковості за чотири роки. Загальний рівень ризику вкладення інвестицій у підприємства гостинності дорівнює:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2 \times w_i^2 + \sum_{i=1}^5 \sum_{i \neq j}^5 w_i \times w_j \times \sigma_i \times \sigma_j \times \rho_{ij},$$

де w_i – середня частка i -ої галузі; σ_i, σ_j – середнє квадратичне відхилення відповідної галузі; ρ_{ij} – коефіцієнт кореляції між прибутковістю галузей індустрії гостинності.

Для обчислення всіх зазначених характеристик фінансово-економічної діяльності галузей тимчасового розміщування та організації харчування застосовано таблиці MS EXCEL. Отримані результати наведено у таблиці 13.5.

Таблиця 13.5

Показники інвестиційної привабливості підприємств тимчасового розміщування та організації харчування

Види економічної діяльності	Код за КВЕД	Прибутковість	Частка	Ступінь ризику
Тимчасове розміщування й організація харчування	I	3,5	100	5,78
Діяльність готелів і подібних засобів тимчасового розміщування	55.1	9,62	23,42	20,78
Діяльність засобів розміщування на період відпустки та іншого тимчасового проживання	55.2	-4,79	3,88	4,90
Діяльність ресторанів, надання послуг мобільного харчування	56.1	2,33	54,46	1,07
Постачання готових страв	56.2	1,15	16,24	0,60
Обслуговування напоями	56.3	1,23	1,99	2,55

Таким чином, за період 2016-2019 років підприємства тимчасового розміщування та організації харчування отримали у середньому 3,5% чистого прибутку від надання послуг, середній рівень ризику складав 5,78%.

Найбільш прибутковою та, водночас, ризикованою є діяльність готелів і подібних засобів тимчасового розміщування (прибутковість – 9,62%, ризикованість – 20,78%). Ця галузь індустрії гостинності в середньому займає 23,42% загального обсягу реалізованої продукції (товарів, послуг) підприємств тимчасового розміщування й організації харчування. Галузь «діяльність засобів розміщування на період відпустки та іншого тимчасового проживання» має збиток від господарювання на рівні 4,79%, ризикованість інвестицій складає 4,90%. Підприємства сфери «діяльність ресторанів, надання послуг мобільного харчування» мають рівень прибутковості 2,33%, ступінь ризику 1,07%, їх частка є найбільшою у загальному обсязі продукції (54,46%). У галузі «Постачання готових страв» низький рівень прибутковості (1,15%), проте ризикованість у цьому сегменті діяльності складає усього 0,60%. Сфера діяльності «обслуговування напоями» має наступні інвестиційні показники: прибутковість 1,23%, ступінь ризику – 2,55%.

Проведемо оптимізацію портфелю галузі індустрії гостинності для отримання найбільшого прибутку за умови, що ризик портфелю не збільшується. Модель оптимального портфелю за Марковіцем формально може бути представлена у вигляді задачі нелінійного (квадратичного) програмування:

$$z = \sum_{i=1}^5 r_i \times w_i \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2 \times w_i^2 + \sum_{i=1}^5 \sum_{i \neq j}^5 w_i \times w_j \times \sigma_i \times \sigma_j \times \rho_{ij} \leq \sigma_H^2, \\ \sum_{i=1}^5 w_i = 1, \\ w_i \geq 0. \end{array} \right.$$

де w_i – частка i -го виду підприємств економічної діяльності, яку необхідно оптимізувати (змінні величини).

Розв'язання задачі квадратичного програмування проводимо за допомогою вбудованої опції «ПОШУК РОЗВ'ЯЗКУ» MS EXCEL. Отримані результати пошуку

оптимального портфелю інвестицій у галузі індустрії гостинності наведено в таблиці 13.6.

Таблиця 13.6.

Результати пошуку оптимального портфелю інвестицій

Microsoft Excel 16.0 Звіт про результати			
Лист: [Структура-2v(pvmax).xlsx]Лист1			
Звіт складено: 18.01.2023 12:49:12			
Результат: Розв'язок знайдено. Всі обмеження та умови оптимальності виконано.			
Комірка цільової функції (Максимум)			
Комірка	Назва	Вихідне значення	Остаточне значення
\$M\$32	Прибутковість	0,034994845	0,03745287
Комірки змінних			
Комірка	Назва	Вихідне значення	Остаточне значення
\$M\$24	Діяльність готелів і подібних засобів тимчасового розміщування	0,234211401	0,193780081
\$N\$24	Діяльність засобів розміщування на період відпустки та іншого тимчасового проживання	0,037433155	0
\$O\$24	Діяльність ресторанів, надання послуг мобільного харчування	0,544572451	0,806219919
\$P\$24	Постачання готових страв	0,162369145	0
\$Q\$24	Обслуговування напоями	0,018621011	0
Обмеження			
Комірка	Назва	Значення комірки	Формула
\$M\$35	Ступінь ризику	0,003346601	\$M\$35<=\$M\$41
\$R\$24	Сумарна частка	1,00	\$R\$24=1

Джерело: розраховано авторами

Отриманий оптимальний розв'язок задачі пошуку оптимального портфелю інвестицій у підприємства тимчасового розміщування й організації харчування показує, що для отримання найвищого рівня прибутковості капіталовкладень потрібно інвестувати 80% коштів в сферу «діяльність ресторанів, надання послуг мобільного харчування» та 20% коштів у сферу «діяльність готелів і подібних засобів тимчасового розміщування».

Додаткові обчислення показують, що для зменшення рівня ризику можливо також інвестувати капітал в підприємства галузей «постачання готових страв» та «обслуговування напоями».

Оцінка показників інвестиційної привабливості підприємств тимчасового розміщування й організації харчування є досить складною задачею. В статті запропоновано методику її розв'язання за допомогою портфельної теорії Г. Марковіца. Вирішення задачі нелінійного програмування дозволило виділити галузі індустрії гостинності з більшим коефіцієнтом прибутковості та низьким рівнем ризикованості капіталовкладень.

Найпривабливішими з точки зору залучення інвестицій серед підприємств тимчасового розміщування й організації харчування виявились сфери «діяльність готелів і подібних засобів тимчасового розміщування» та «діяльність ресторанів, надання послуг мобільного харчування». Дослідження показали, що визначені галузі індустрії гостинності щільно корелюють у своїй співпраці, що є цілком зрозумілим.

Перспективи подальшого дослідження вбачаємо у розробці методів практичного застосування отриманих результатів для проведення інвестиційної діяльності в реальному секторі індустрії гостинності.

Наведені приклади доводять, що портфельна теорія інвестицій може бути застосована не тільки у банківській та фінансовій сферах, а також для оцінки інвестиційної привабливості різноманітних сфер економічної діяльності.

Оптимізація туристичного маршруту за допомогою вирішення задачі комівояжера

В умовах міжнародної інтеграції туристичного ринку, велике значення для економічного зростання регіонів набуває підвищення конкурентоспроможності послуг підприємств сфери туризму. Конкуруючи між собою, туроператори шукають нові шляхи задоволення потреб туристів, при цьому намагаючись оптимально використовувати наявні природні та матеріальні ресурси. У 2018 році кількість туристів в Україні зросла більш ніж в півтора рази в порівнянні з 2016 роком, туроператори і туристичні агентства надали послуги понад 4 млн. 557 тисяч чоловік. Україна піднялася на 10 позицій в Індексі конкурентоспроможності в сфері подорожей і туризму, зайнявши 78 місце.

Невід'ємною складовою туристичної галузі є транспортне обслуговування. Якість та комфортність пересування під час подорожей суттєво впливають на загальне враження туриста від відпочинку. Ідея наукового розгляду впливу туризму належить швейцарському вченому В. Хунзікеру, який вважає, що туризм – це сукупність відносин і явищ, які є результатом пересування людей і їх перебування за межами місця проживання до того часу, коли перебування не стає постійним місцем проживання і не пов'язане з отриманням прибутку. Подальшого розвитку тематика дослідження сфери транспортних туристичних перевезень набуває у працях Клода Каспара. Англійський вчений Джон Р. Уокер вважає, що історія розвитку туризму в цілому охоплює два періоди: перший – до появи й використання масових видів транспорту; другий – після їхньої появи, що, у свою чергу, складається з окремих етапів відповідно до виникнення нових видів транспортних засобів, а саме: вік залізниць, вік автомобілів, вік реактивних літаків і вік круїзів на морських суднах. Дослідники аналізують досвід розвитку маршрутів геотуризму, який в останні роки ставав новим глобальним явищем.

Українські науковці звертають увагу на інфраструктурне забезпечення розвитку потенціалу сфери рекреаційних послуг та туристичних подорожей, створення геоінформаційних систем туристичного призначення для інфраструктури автомагістралей та туристичних локацій. Дослідниками проаналізовано стан транспортної мережі за способом пересування туристів в західному регіоні України. Дослідження пасажирського руху в 2018 році в Україні дає нам підстави вважати, що автомобільний транспорт зменшив перевезення пасажирів та туристів на 5,6% в порівнянні з 2017 роком до 1 906,9 млн. пасажирів, пасажирооборот зменшився на 2,5% до 34,611 млрд. пас. – км за рахунок зношення автопарку перевізників та підвищення тарифів на перевезення. Послугами пасажирського транспорту скористалося 4486,7 млн. пасажирів, або 96,5% від 2017 р.

На ринку транспортних послуг існує низка об'єктивних та суб'єктивних протиріч: між кількісним навантаженням транспортних потоків та туристичними напрямками; між концентрацією пасажирських потоків та часовим проміжком; між витратами на обслуговування транспорту та ціновою політикою туристичних операторів; між існуючою дорожньо-транспортною інфраструктурою та швидкістю перевезення туристів. Тому актуальним є застосування наукових методів усунення вказаних протиріч. В пасажирських перевезеннях на короткі відстані домінує залізничний та автомобільний транспорт. Великим попитом серед українського населення користуються автобусні тури, які дозволяють безпосередньо з місця розглядати туристичні об'єкти, пам'ятки культури та місцевість. Складання схеми туристичного маршруту туроператором, здійснюється за наступними критеріями: мінімізація витрат часу на переміщення між основними пунктами маршруту та забезпечення максимальної інформативності подорожі. Схема такого складання маршруту отримала назву «задача комівояжера».

Задача комівояжера є частинним випадком загальної транспортної задачі, що сформульована вперше Г. Монже у 1781 році. Математична модель задачі була сформульована Ф. Хічкоком, вперше алгоритм розв'язку задачі наведено у роботах

Дж. Данцига. Незважаючи на відомі загальні методи розв'язання транспортних задач, практичне їх застосування потребує розробки нових методів знаходження початкового та оптимального планів. Так, у роботі наведено метод апроксимації та наближеного обчислення оптимального розв'язку у задачах досить великого розміру. Сучасними науковцями запропоновано алгоритм створення маршруту подорожі з використанням завдання комівояжера (TSP) і методу кластеризації k-середніх для розробки веб-додатку, який допоможе мандрівникам планувати свій маршрут. Розробка маршрутів подорожей з урахуванням профілів відвідувачів, відстаней і витрат на поїздки розглядається у роботі; дослідники вирішували проблеми оптимізації маршруту «одноденного туру». Автори розглядають проблеми формування єдиної хмарної архітектури для управління безліччю мультимедійного контенту туристичних маршрутів DESTINATIONS; для побудови маршрутів щодо відвідування пам'яток, дослідники пропонують використовувати методи теорії графів із застосуванням сучасних інформаційних технологій. У роботі польських науковців проведено дослідження методів класичної евристики для вирішення проблем оптимізації інтермодальних перевезень.

Варто зазначити, що в науковій літературі не існує єдиного підходу та загального алгоритму щодо процесу побудови маршруту автотранспортного туру туристичного оператора та оцінювання його оптимальності. Актуальність розв'язання цих питань зумовила вибір теми нашого дослідження, визначила її мету та завдання.

Мета дослідження полягає у розробці технологічних та управлінських рішень щодо оптимізації географічного маршруту перевезень туристів за методикою «завдання комівояжера» як одного з інструментів вирішення проблем туристичних перевезень автотранспортом. На основі даного дослідження, визначити оптимальну модель транспортування туристів на регіональних автошляхах України, що допоможе зменшити витрати організатору подорожей на транспортні послуги, побудувати схеми маршрутів до природних та культурно-історичних пам'яток, туристичних центрів.

Для визначення шляху автобусної подорожі між територіальними туристичними локаціями та формування оптимального транспортного маршруту побудовано математичну модель задачі комівояжера. Розв'язок задачі знаходився за допомогою прикладного пакету "Пошук рішення" електронних таблиць MS EXCEL. Для вирішення задачі зазначеним методом її було зведено до спеціального вигляду і введено додаткові змінні. У процесі дослідження використані методи оцінки автобусних турів туроператорів за критерієм мінімальної довжини шляху, що дозволяє перевірити оптимальність перевезення туристів при плануванні маршруту та розробки туроператором власного туристичного продукту.

В загальному вигляді задача комівояжера може бути сформульована наступним чином. Комівояжер повинен відвідати n міст. Відомі відстані між цими містами. Потрібно побудувати маршрут таким чином, щоб загальна довжина пересування була мінімальною. Математична модель задачі має вигляд

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, (i = \overline{1, n}), \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, (j = \overline{1, n}),$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\}, (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n})$$

де $c_{ij} (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n})$ – елементи матриці відстаней між містами,

$x_{ij} \in \{0; 1\}, (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n})$ – елементи матриці відстаней маршруту.

Вченими розроблено досить дієві методи вирішення даної задачі. Найбільш поширеним є метод повного та випадкового перебору маршрутів. Більш досконалішими версіями цих методів є алгоритми Дейкстри (Dijkstra, 1959), Літтла (Little et al., 1963), еластичної сітки та інші. Розвиток комп'ютерних технологій та програмного забезпечення дозволив отримати так звані метаввристичні методи оптимізації,

найвідоміші з яких нейронні сітки Гопфілда (Hopfield, 1982) та алгоритм мурашиних колоній, запропонований бельгійським дослідником Марко Доріго (Dorigo, 1997). Сучасні дослідники розглядають евристичний підхід для розробки індивідуальних туристичних маршрутів для різномірних туристичних груп (Zheng, Liao, 2019) та пропонують евристичні алгоритми в процесі вирішення транспортної задачі за допомогою методики модифікованого розподілу (MODI).

Алгоритм оптимізації методом мурашиних колоній ґрунтується на наступних припущеннях: кількість вершин графу дорівнює кількості мурах; кожна мураха починає шлях із своєї вершини графу (свого міста); до початку руху інтенсивність феромону однакова; вибір першої вершини визначається за правилом мінімізації відстані, а кожної наступної за правилом

$$P_{ij,k}(t) = \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha \cdot [1/c_{ij}]^\beta}{\sum_{j \in J_{i,k}} [\tau_{ij}(t)]^\alpha \cdot [1/c_{ij}]^\beta}, \quad j \in J_{i,k}, \quad (i = \overline{1, n}; k = \overline{1, n})$$

$$P_{ij,k}(t) = 0, \quad j \notin J_{i,k},$$

де $\tau_{ij}(i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n})$ – кількість феромону на шляху **(i, j)** у момент часу **t**, тобто привабливість шляху **(i, j)** для мурахи; α, β – параметри, що задають слід феромону; $J_{i,k}(i = \overline{1, n}; k = \overline{1, n})$ – міста, що відвідає мураха **k**, яка знаходиться у місті **i**.

Алгоритм оптимізації методом мурашиних колоній є ймовірнісним та може бути запрограмований у більшості прикладних пакетів. Побудова маршруту транспортного засобу здійснюється покрокове шляхом вибору наступного пункту до того часу, поки не будуть пройдені всі міста. Мураха обирає наступне місто зі списку доступних, після чого оновлюється цільова функція, а у списку міст, доступних до відвідування, відбуваються зміни. Далі знову здійснюється вибір наступного доступного міста. Мураха повертається у вихідне місто у випадку проходження всіх міст. Сумарна довжина маршруту розраховується як значення цільової функції повного маршруту, що пройшла мураха. Застосування мурашиних алгоритмів має високу ефективність у випадку досить великої кількості міст відвідування. Також

ефективним засобом є алгоритм розв'язання задачі комівояжера за допомогою прикладного пакету «Пошук рішення» електронних таблиць MS EXCEL. Для цього задача (1) приводиться до вигляду

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, (i = \overline{1, n}), \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, (j = \overline{1, n}),$$

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2,$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\}, (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n})$$

Додаткові змінні u_i, u_j необхідні для того, щоб не було так званих циклічних шляхів, тобто щоб комівояжер прибував у кожне місто лише один раз та не було зворотних шляхів.

Для перевірки оптимальності транспортного маршруту перевезень туристів обрано один із найпопулярніших турів «Теплий уїкенд: Закарпаття та термали». Програму та маршрут туру наведено на офіційному сайті одного із найбільших українських туристичних операторів «Аккорд-тур» (https://www.accordtour.com/tours/1118340/ukraina_regulyarnyye_tury/ukraina).

Маршрут подорожі охоплює улюблені місця відпочинку, пам'ятки культури та старовинні фортеці українських Карпат та Закарпаття та складено наступним чином: Львів – Мукачеве – Косонь – озеро Синевир – водоспад Шипіт – Боржава – Ужгород – Карпати (замок графа Шенборна) – Львів. Туристичні локації маршруту туру наведено на рис.13.1.



Рис. 13.1. Туристичні локації Закарпатського регіону

Джерело: http://www.karpatline.ua/maps_of_the_carpathians/zakarpatie_region

За маршрутом та програмою подорожі, туристам пропонують відвідування термальних басейнів. Розбудова унікального термального природного курорту на Берегівщині почалось ще в 1988 році. З часом комплекс «Косино» почав активно приймати туристів з різних міст України та Європи. Маршрут автобусного туру включає озеро Синевир, що справедливо вважається найкоштовнішим природним скарбом однойменного Національного природного парку та однією з візитних карток Українських Карпат. Розташоване воно на висоті 989 м над рівнем моря. Схему запропонованого автобусного маршруту туроператором «Аккорд-тур», зображено на рисунку 13.2.

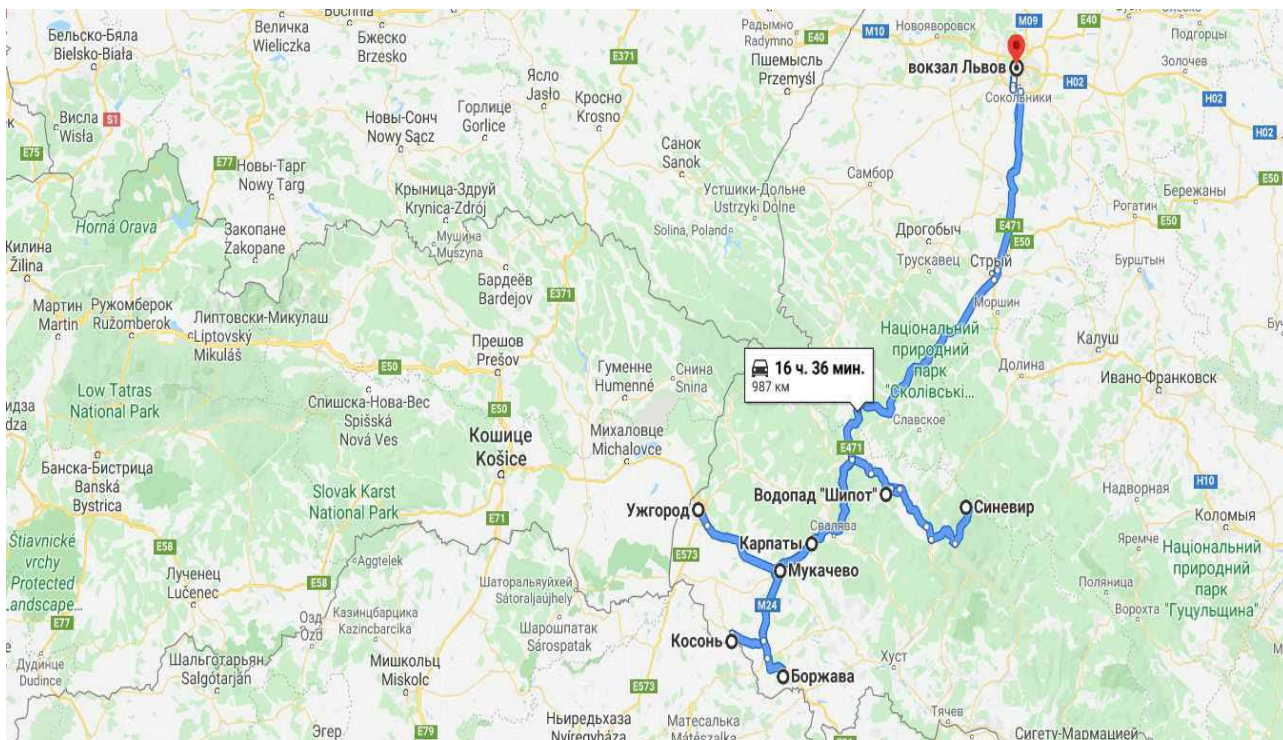


Рис. 13.2. Схема автобусного маршруту туру «Теплий уїкенд: Закарпаття та термали»

Джерело: підготували автори за даними схеми маршруту туроператора «Аккорд-тур» і допомогою зображення Google Maps (<https://www.google.com.ua/maps>)

Завдання щодо обґрунтування оптимізації схеми маршруту туристичної подорожі може бути вирішено на основі геоінформаційних систем. Для визначення загальної довжини маршруту, користуючись картами Google зазначеної місцевості, складено таблицю, в якій вказано відстані між пунктами пересування туристів. Згідно складеної таблиці 1, загальна довжина шляху пересування туристів складає 987 км.

За допомогою прикладного пакету «Пошук рішення» електронних таблиць MS EXCEL перевіримо оптимальність маршруту. На рисунку 13.3 зображено лист MS EXCEL із розв’язанням задачі.

Таблиця 13.7.

Відстань між містами та об'єктами огляду туристичного маршруту

Міста	Львів	Мукачеве	Косонь	О.Синевир	Вод. Шипіт	Боржава	Ужгород	Пункт Карпати
Львів		229	264	252	198	270	267	218
Мукачеве	229		43	136	82	44	41	17
Косонь	264	38		177	123	33	63	58
О.Синевир	252	136	177		60	141	175	121
Водоспад Шипіт	198	82	123	60		124	121	67
Боржава	270	44	33	141	124		80	59
Ужгород	267	41	63	175	121	80		56
Пункт Карпати	218	17	58	121	67	59	56	

Джерело: підготували автори за допомогою зображення Google Maps

(<https://www.google.com.ua/maps>)

Результати, отримані за допомогою пакету «Пошук рішення» показують, що запланований туристичним оператором маршрут не є оптимальним з точки зору найменшої відстані. Знайдено мінімальний за довжиною маршрут: Львів – водоспад Шипіт – озеро Синевир – Боржава – Косонь – Ужгород – Мукачеве – Карпати (замок графа Шенборна) – Львів. Отриманий оптимальний маршрут на 216 км коротший за початкового, його зображено на рисунку 13.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		1	2	3	4	5	6	7	8					
2	1	1000000	229	269	252	198	270	267	218			987		
3	2	229	1000000	43	136	82	44	41	17					
4	3	269	43	1000000	177	123	33	63	58					
5	4	252	136	177	1000000	60	141	175	121					
6	5	198	82	76	123	1000000	124	121	67					
7	6	270	44	33	141	124	1000000	80	59					
8	7	267	41	63	175	121	80	1000000	56					
9	8	218	17	58	121	67	59	56	1000000					
10														
11	X	1	2	3	4	5	6	7	8					
12	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1				
13	2	0	0	0	0	0	0	1	0	1				
14	3	0	0	0	0	0	1	0	0	1				
15	4	0	0	0	0	1	0	0	0	1				
16	5	1	0	0	0	0	0	0	0	1				
17	6	0	0	0	1	0	0	0	0	1				
18	7	0	0	1	0	0	0	0	0	1				
19	8	0	1	0	0	0	0	0	0	1				
20		1	1	1	1	1	1	1	1					
21	Z	771												

Рис. 13.3. Розв'язання задачі комівояжера для автобусного маршруту туру
«Теплий уїкенд: Закарпаття та термали»

Джерело: підготували автори за допомогою прикладного пакету «Пошук рішення»

Зазначимо, що перевезення за знайденим маршрутом суттєво дозволить зменшити транспортні витрати на організацію туру. Так, наприклад, згідно технічним характеристикам, витрати бензину для автобусу туристичного класу Neoplan «Euroliner» при швидкості 60 км/год на 100 км, складають 26 літрів. Середні витрати на придбання бензину на 216 км дорівнюють 1460.16 грн у цінах станом на 01.02.20 р. За даними офіційного сайту туроператора «Аккорд-тур», в 2020 році планується провести за розглянутим маршрутом 22 турів. За нашими підрахунками, річні витрати туроператора за рахунок економії пального від оптимізації маршруту можуть бути зменшено на 32124 грн.

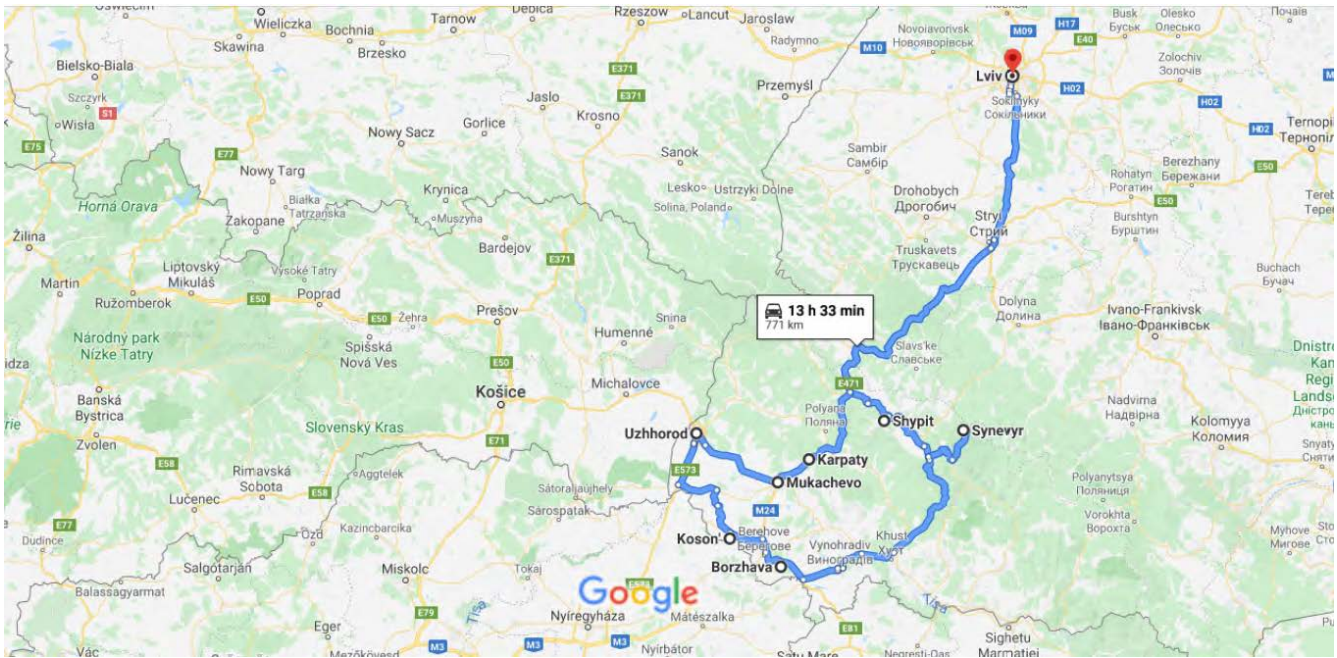


Рис. 13.4. Оптимальна схема автобусного маршруту туру «Теплий уїкенд: Закарпаття та термали»

Джерело: підготували автори за допомогою зображення Google Maps (<https://www.google.com.ua/maps>)

Розрахунки щодо оптимізації маршруту популярного автобусного туру «Теплий уїкенд: Закарпаття та термали» туроператора «Аккорд тур» доводить, що не завжди оператори складають мінімальний за довжиною маршрут. Нами перевірено ще декілька маршрутів турів внутрішнього туризму за критерієм мінімальної відстані. Отже, за результатами використання методики завдання комівояжера та його розв'язування можна зробити наступні висновки:

- критерій мінімальної загальної відстані досягається у більшості кільцевих маршрутів;
- не відповідають критерію мінімізації транспортних витрат радіальні маршрути, тобто маршрути з базовим місцем відправлення на щоденні екскурсії;
- деякі із комбінованих маршрутів також не є оптимальними у сенсі досягнення найменшої довжини загального шляху туру.

Сучасний розвиток туристичної індустрії та організації маршрутних турів потребує пошуку та використання різних видів програмних технологій, працюючих з графічною інформацією, геоінформаційними системами та забезпечують розширений просторовий ГІС-аналіз. Наприклад у модулі сервісу маршрутів ArcGIS Online World Routing Service також програмується та вирішується задача побудови найкоротшого маршруту. Мінімізація загальних транспортних витрат туроператора на перевезення туристів є важливою складовою планування туристичного маршруту. Проте існує низка обмежень, пов'язаних з насиченістю туру, з вартістю та якістю мешкання, з комфортністю подорожування. Логістика туристичних перевезень потребує комплексного вирішення проблем, що виникають у туристичного оператора при складанні маршруту туру. Конкурентна боротьба на туристичному ринку ставить жорсткі умови до організації автобусних туристичних маршрутів. Виграє у цій боротьбі той оператор, який краще використовує сучасні геоінформаційні системи, технології бізнес-планування, маркетингові стратегії, аналіз попиту та уподобань споживачів тощо.

Підбиваючи підсумки нашого дослідження, відзначимо, що організації туристичних подорожей на внутрішніх автомобільних шляхах України, буде сприяти впровадження сучасних технологій щодо оптимізації територіальної організації турів та допоможе туроператорам України в проектуванні автобусних геотуристичних маршрутів до історико-культурних та природно-рекреаційних об'єктів.

Визначено, що проектування туристичними операторами маршрутів автобусних турів за програмами відвідування та знайомства з пам'ятками культурної спадщини, природно-рекреаційними об'єктами в регіонах України, вимагають використання сучасних інструментів цифрових технологій щодо оптимізації руху транспортування туристів. Запропоновано методику оцінки автобусних турів за критерієм мінімальної довжини маршруту. Даний критерій суттєво впливає на загальну вартість перевезення туристів і є важливим при плануванні туру. Доведено, що кільцеві маршрути відповідають критерію мінімальної довжини, а радіальні,

навпаки, не відповідають. Для оцінки найменшої відстані між містами пересування туристів була застосована теорія лінійного програмування, а саме, задача комівояжера. Розв'язок задачі знаходився за допомогою пакету «Пошук рішення» електронних таблиць MS EXCEL. Отриманні результати підтримують та доповнюють алгоритм оцінювання маршруту автобусного туру, як це пропонується в дослідженнях з проблем розробки та оцінювання схем туристичних маршрутів.

Наступним етапом логістичного аналізу туристичних автобусних маршрутів є перевірка оптимальності маршрутів міжнародних турів по європейських містах. Оскільки розмір задачі суттєво збільшиться, для її розв'язку потрібно застосовувати розширений просторовий ПС-аналіз та мурашиний алгоритм, методику якого викладено у статті.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Шинкаренко В., Шинкаренко Л., Орлов Є. Аналіз інвестиційної привабливості галузей індустрії гостинності за допомогою математичних методів. Науковий вісник Одеського національного економічного університету. 2023. – № 1-2 (302-303). – С. 135-143. <https://doi.org/10.32680/2409-9260-2023-1-2-302-303-135-143>
2. Орлов Є. В., Шинкаренко В. М., Шинкаренко Л. В. Пряма задача формування портфелю Марковиця для оптимізації туристичної діяльності. Науковий вісник Одеського національного економічного університету. 2023. – № 9 (310). – С. 142-148. <https://doi.org/10.32680/2409-9260-2023-9-310-142-148>
3. Shinkarenko V. Optimization of the tourist route by solving the problem of a salesman / V. Shinkarenko, S. Nezdoyminov, S. Galasyuk, L. Shynkarenko // Journal of Geology, Geography and Geoecology. – 2020. – 29 (3). P. 572–579.
4. Мацкул В.М., колектив авторів. Економіко-математичні методи та моделі: Навчальний посібник.- Одеса, ОНЕУ, 2018.- 404с.
5. Моторин Р.М. Міжнародна статистика. Організація та методологія : Підручник / Р. М. Моторин. – Київ : Київ. нац. торг.- екон. ун-т, 2019. – 456 с.
6. Кононова К. Ю. Машинне навчання: методи та моделі: підручник для бакалаврів, магістрів та докторів філософії спеціальності 051 «Економіка» / К. Ю. Кононова. – Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2020. – 301 с.
7. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
8. Данілов В. Я. Статистична обробка даних: навчальний посібник. 2019. – 156 с.
9. Оптимум Парето. Вікіпедія. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Оптимум_Парето
10. Markowitz H. M. [Portfolio Selection](#). // The Journal of Finance. – March 1952. – №7 (1) . – p. 77-91.

11. Modern portfolio theory (MPT). [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Modern_portfolio_theory
12. Шинкаренко В. М. Використання математичних методів для оптимізації туристичного продукту / В. М. Шинкаренко, Л. В. Шинкаренко // Науковий вісник Міжнародного гуманітарного університету. Серія: «Економіка і менеджмент», – 2016. – № 20. – С. 104-108.
13. Математичне моделювання для економістів: бакалавр-магістр – доктор філософії (PhD): Навч. посіб. / Ю.Г. Козак, В.М. Мацкул, М.В. Мацкул, Д.В.Окара, В.Г. Чернишев, О.Є. Чепурна, В.М. Шинкаренко, О.В. Захарченко; за ред. Ю.Г.Козака, В.М. Мацкула. – К.: Центр учбової літератури, 2017.- 252 с.
14. Кузьмичов А. І., Медведєв М. Г. Математичне програмування в Excel: Навч. посіб. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2005. – 320 с.
15. Вітлінський В.В. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник [Електронний ресурс]. К. : КНЕУ, 2016. 303 с.
16. Шинкаренко В., Шинкаренко Л. Використання математичних методів для оптимізації туристичного продукту. *Науковий вісник Міжнародного гуманітарного університету*, № 20, 2016. С.104-108.
17. Шинкаренко В., Чернишев В., Шинкаренко Л. Оцінка ризиків у туризмі за допомогою математичних методів. *Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія: Міжнародні економічні відносини та світове господарство*. 2017. Випуск 12. С. 177-181.
18. Офіційний Сайт Служби Статистики України URL: <http://www.ukrstat.gov.ua> (дата звернення: 05.12.2022)
19. Markowitz H. Foundations of Portfolio Theory. *Journal of Finance*. 1991. Vol. 46. Issue 2. P. 469-477. <http://www.e-m-h.org/Mark91.pdf>
20. Портфельна теорія Марковіца. Методика формування інвестиційного портфеля. Інвестиції. 2019. [Електронний ресурс]. Режим доступу:

<https://uk.recrutement-basicsystem.com/4291261-portfolio-theory-markowitz-the-method-of-forming-the-investment-portfolio>

21. Шинкаренко В., Шинкаренко Л., Орлов Є. Пряма задача формування портфеля Марковиця для оптимізації туристичного продукту *Інформаційне суспільство: технологічні, економічні та технічні аспекти становлення (випуск 70): матеріали Міжнародної наукової інтернет-конференції*, (м. Тернопіль, Україна – м. Переворськ, Польща, 22-23 вересня 2022 р.) URL Інтернет-конференції: <http://www.konferenciaonline.org.ua/> С. 84-88

22. Орлов Є. В., Шинкаренко В. М., Шинкаренко Л. В. Пряма задача формування портфелю Марковиця для оптимізації туристичної діяльності. Актуальні аспекти сучасної статистичної науки і практики: матеріали Міжнародної науково-практичної конференції пам'яті проф. А.З. Підгорного (Одеса, 31 травня 2023 р.). – Одеса: Одеський національний економічний університет, 2023, С. 50-51.

23. Шинкаренко В., Шинкаренко Л., Орлов Є. Використання математичних методів для побудови туристичного портфелю *Інформаційне суспільство: технологічні, економічні та технічні аспекти становлення (випуск 80): матеріали Міжнародної наукової інтернет-конференції*, (м. Тернопіль, Україна – м. Ополе, Польща, 19-20 вересня 2023 р.). С. 98-100 URL Інтернет-конференції: <http://www.konferenciaonline.org.ua>

24. Bellman, R., 1958. On a routing problem, *Quarterly of Applied Mathematics*, 87–90. Retrieved from: <https://www.jstor.org/stable/43634538?seq=1>

25. Da Silva, A. A., Morabito, R., Pureza V., 2018. Optimization approaches to support the planning and analysis of travel itineraries, *Expert Systems with Applications*, 112, 321–330, DOI:10.1016/j.eswa.2018.06.045

26. Dantzig, G., 1951. Application of the simplex method to a transportation problem. In: Koopmans, T. (Ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*. John Wiley and Sons, 359–373.

27. Dijkstra, E. W., 1959. A note on two problems in connexion with graphs, Springer Science+Business Media, 1 (1), 269–271, DOI: 10.1007/BF01386390
28. Dorigo, M., Gambardella, L.M., 1997. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1 (1), 53–66, DOI: 10.1109/4235.585892.
29. Friggstad, Z., Gollapudi, S., Kollias, K., Sarlos, T., Swamy, C., & Tomkins, A., 2018. Orienteering algorithms for generating travel itineraries, In Proceedings of the Eleventh ACM International Conference on Web Search and Data Mining, 180-188, ACM, DOI: 10.1145 / 3159652.3159697.
30. Google Maps. Retrieved from: <https://www.google.com.ua/maps>
31. Grytsevykh, V. S., Podvirna, Kh. Ye., Senkiv, M. I., 2019. Motor transport network of western region of Ukraine as a factor of development of tourism industry, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, series “Geology. Geography. Ecology”, 50, 91-100, DOI: <https://doi.org/10.26565/2410-7360-2019-50-07>
32. Hitchcock, F., 1941. The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities, Journal of Mathematics and Physics, 20 (1-4), 224-230, DOI: 10.1002/sapm1941201224.
33. Hopfield, J.J., 1982. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, Proceedings of National Academy of Sciences, 79 (8), 2554–2558, DOI: 10.1073 / pnas.79.8.2554.
34. Hunziker, W., 1972. Le tourisme: caracteristiques principales (in French). Berne: Gurten.
35. Karta Zakarpatskoy oblasti s dostoprimechatel'nostyami. [Map of Transcarpathian region with attractions]. Retrieved from: http://www.karpatline.ru/maps_of_the_carpathians/zakarpatie_region/
36. Kaspar, C., 2018. Management der Verkehrsunternehmen, De Gruyter Oldenbourg, Auflage: Reprint.

37. Kaygili, S., Sinanoglu, D., Aksoy, E., & Sasmaz, A., 2018. Geotourism: Some Examples from Turkey. *Journal of Geology, Geography and Geoecology*, 26(1), 79-87. Retrieved from: <https://doi.org/https://doi.org/10.15421/111809>
38. Little, J.D.C., Murty, K.G., Sweeney, D.W., and Karel, C., 1963. An algorithm for the Traveling Salesman Problem, *Operations Research*, 11, 972–989.
39. Mao, X., 2019. Study on ant colony optimization algorithm for “one-day tour” traffic line. *Cluster Computing*, 22, 3673–3680. Retrieved from: <https://doi.org/10.1007/s10586-018-2217-9>
40. Monge, G., 1781. Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais. *Histoire de l’Académie Royale des Sciences de Paris, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année*, Photocopies du mémoire paru dans *Histoire de l’Académie Royale des sciences*, Année 1781, Paris, Imp. Royale, 1784, 666-704. Retrieved from: <http://www.calames.abes.fr/pub/#details?id=Calames-201176107446381241>
41. Nezdoyminov, S., Milashovska, O., 2019. River travel as a direction for the development of tourism in Ukraine, *Journal of Geology, Geography and Geoecology*, 28(1), 148-158. <https://doi.org/https://doi.org/10.15421/111916>
42. Padmabati, G., Monalisha, P., 2017. Optimization in Fuzzy Economic Order Quantity (FEOQ) Model with Promotional Effort Cost and Units Lost Due To Deterioration, *LogForum* 13(1), article 6, DOI: 10.17270/J.LOG.2017.1.6
43. Pierdicca, R., Paolanti, M., Frontoni, E., 2019. eTourism: ICT and its role for tourism management, *Journal of Hospitality and Tourism Technology*, 10 (1), 90-106, DOI: 10.1108/JHTT-07-2017-0043.
44. Rani, S., Kholidah, K. N., Huda, S. N., 2018. A development of travel itinerary planning application using traveling salesman problem and k-means clustering approach [in:] *Proceedings of the 2018 7th International Conference on Software and Computer Applications*, ACM, 327-331, DOI: 10.1145/3185089.3185142.

45. Statistical yearbook: Transport and Communication of Ukraine – 2018, 2019.
Retrieved from:
http://www.ukrstat.gov.ua/druk/publicat/kat_u/2019/zb/08/zb_tr2018pdf.pdf
46. Szwarc, K., Boryczka, U., Twaróg, S., Szoltysek, J., 2019. A comprehensive study of classical heuristic algorithms used in the process of solving Transportation Problem, LogForum, 15 (3), 390-401, DOI: 10.17270/J.LOG.2019.346.
47. Zheng, W., Liao, Z., 2019. Using a heuristic approach to design personalized tour routes for heterogeneous tourist groups, Tourism Management, 72, 313-325, DOI: 10.1016 / j.tourman.2018.12.013.
48. Walker, J. R., 2009. Introduction to Hospitality, Prentice Hall.
49. Warm weekend: Transcarpathia and Thermal Waters. Retrieved from:
https://www.accordtour.com/tours/1118340/ukraina_regulyarnyye_tury/ukraina
50. Andrea Seidl, LP Modeling I (WS 2021) The Simplex Algorithm. Universitat Wien

Навчальне видання

Шинкаренко Володимир
Миколайович

проректор з науково-педагогічної
роботи ОНЕУ, к. фіз.-мат. н.,
доцент кафедри статистики та
математичних методів в економіці

Орлов Євген Вікторович

к. фіз.-мат. н., доцент кафедри
статистики та математичних
методів в економіці

Шинкаренко Лариса Василівна

к. пед. н., доцент кафедри
менеджменту Міжнародного
гуманітарного університету

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ У ЗОВНІШНІЙ ЕКОНОМІЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ