ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. Мечникова

КОЗЬМА Олександр Олександрович

УДК 517.925

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПРАВИЛЬНО МІНЛИВИМИ ВІДНОСНО НЕВІДОМОЇ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ПОХІДНОЇ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Одеса – 2013

Дисертацією є рукопис.
Роботу виконано на кафедрі математичних методів аналізу економіки Одеського національного економічного університету.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
ЄВТУХОВ В'ячеслав Михайлович,
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
ЧЕРЕВКО Ігор Михайлович,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
завідувач кафедри математичного
моделювання,
декан факультету прикладної математики;

доктор фізико-математичних наук, доцент
ЩОГОЛЕВ Сергій Авенірович,
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова,
професор кафедри вищої математики.

Захист відбудеться «___» ______________ 2013 р. о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К41.051.05 при Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова за адресою: 65026, м. Одеса, вул. Дворянська, 2, аудиторія 73.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Одеського національного університету імені І. І. Мечникова (65026, м. Одеса, вул. Преображенська, 24).

Автореферат розісланий «___» ______________ 2013 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Кореновський А. О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Важливе місце у розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь займає дослідження рівнянь другого порядку. Це обумовлено широким спектром застосування таких рівнянь у різних областях природознавства. Так, наприклад, рівняння Польвані, яке встановлює залежність радіус-вектора r електрона від часу t при русі під дією магнітного поля, поклало початок дослідженню диференціальних рівнянь другого порядку, які містять у правій частині суму доданків з степеневими нелінійностями та неперервними на півосі коефіцієнтами. У частинному випадку одного доданку отримаємо узагальнене рівняння Емдена – Фаулера, яке розглядалось в роботах Ф. В. Аткінсона (F.V. Atkinson), І. Т. Кігурадзе, Т. А. Чантурія, С. Білогорца (S. Belohorec), Дж. Вонга (J. S. W. Wong), М. М. Аріпова, О. В. Костіна, В. М. Євтухова та інших авторів. У загальному випадку перші суттєві результати були отримані Л. О. Беклемишевою для рівнянь з степеневими коефіцієнтами та О. В. Костіним для рівнянь з коефіцієнтами, відмінними від степеневих. Це дозволило у подальшому О. В. Костіну, а потім В. М. Євтухову і Є. В. Шебаніній, для різних рівнянь такого виду отримати умови існування і точні асимптотичні зображення достатньо широких класів монотонних розв'язків.

У той же час очевидно, що степеневий характер нелінійностей відносно невідомої функції та її похідної першого порядку часто є наслідком деякої ідеалізації моделей реальних процесів. Тому є важливим питання асимптотичного поводження розв'язків рівнянь другого порядку з відмінними від степеневих нелінійностями. Перші результати такого роду були отримані для двочленних рівнянь, які не містять похідну невідомої функції. Ці рівняння досліджувались у роботах Д. В. Ізюмової, І. Т. Кігурадзе, І. В. Каменева, Ю. О. Клокова, С. В. Олехніка, Т. А. Чантурія, В. Маріча (V. Maric), М. Томіча (M. Tomic), С. Д. Таліаферо (S. D. Taliaferro), В. М. Євтухова, Л. О. Кирилової та інших. Однак практично не дослідженими залишились рівняння другого порядку, які містять у правій частині суму доданків з нелінійностями, відмінними від степеневих. Звернемо увагу, зокрема, на роботи В. М. Євтухова і В. О. Кас'янової, в яких отримано необхідні та достатні умови існування деяких класів розв'язків рівняння, права частина якого містить суму доданків з правильно мінливими відносно невідомої функції нелінійностями, а також асимптотику для таких розв'язків та їх похідних у околі особливої точки.

У подальшому в роботах В. М. Євтухова і М. О. Білозерової для двочленного рівняння з правильно мінливими відносно як невідомої функції, так і її похідної нелінійностями для достатньо широкого класу монотонних розв'язків були встановлені точні асимптотичні зображення в околі особливої точки. Природно виникає питання отримання аналогічних результатів для диференціального рівняння другого порядку, яке містить у правій частині суму доданків з правильно мінливими відносно невідомої функції та її похідної нелінійностями. Розв'язанню цього питання присвячена дана дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрямок досліджень даної дисертації є складовою частиною теми "Дослідження асимптотичного поводження розв'язків диференціальних рівнянь аналітичними і якісними методами", яка виконується на кафедрі диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, номер держреєстрації 0101U008290.

Мета і задачі дослідження. *Мета дослідження* – встановлення асимптотичного поводження розв'язків нового класу диференціальних рівнянь.

Об'єкт дослідження – звичайне диференціальне рівняння другого порядку, яке містить у правій частині суму доданків з правильно мінливими відносно невідомої функції та її похідної нелінійностями.

Задачі дослідження – отримання необхідних і достатніх умов існування у даного рівняння достатньо широкого класу так званих $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків, а також асимптотичних зображень цих розв'язків та їхніх похідних у околі особливої точки.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються методи теорії диференціальних рівнянь, класичного аналізу, лінійної алгебри, асимптотичні методи, а також сучасні результати теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. До головних з них відносяться такі:

1) Для кожного з чотирьох випадків $\mu_0 \in R \setminus \{-1, 0\}$, $\mu_0 = \pm\infty$, $\mu_0 = -1$, $\mu_0 = 0$ встановлено ознаки, за якими права частина рівняння, що досліджується, на будь – якому $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язку асимптотично еквівалентна у околі особливої точки одному доданку.

2) При дотриманні зазначених ознак одержано необхідні та достатні умови існування $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків, а також неявні асимптотичні зображення для цих розв'язків та їх похідних у околі особливої точки.

3) Наведено додаткові умови на нелінійності, при виконанні яких встановлені явні асимптотичні зображення для усіх розв'язків такого класу та їх похідних у околі особливої точки.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Результати дисертації та застосовані в ній методи дослідження можуть бути використані для вивчення асимптотичних властивостей розв'язків як диференціальних рівнянь більш високих порядків, так і конкретних нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які зустрічаються в різних галузях природознавства.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертаційної роботи одержані автором самостійно. У сумісній роботі [1] науковому керівнику В. М. Євтухову належать постановка задачі і вибір напрямку дослідження.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались на восьмій Кримській Міжнародній математичній школі "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Алушта, 2006 р.); на Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування " (Чернівці, 2006 р.); на Міжнародній математичній конференції імені В. Я. Скоробагатька (Дрогобич, 2007 р.); на Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Мелітополь, 2008 р.); на Українському математичному конгресі (Київ, 2009 р.); на Міжнародній літній математичній школі пам'яті В. О. Плотнікова (Одеса, 2010 р.); на Міжнародній науковій конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування» (Київ, 2011 р.); на науковому семінарі факультету прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, а також на наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Публікації. Основні результати роботи опубліковані в сімох статтях [1 – 7] у фахових наукових виданнях (з яких три [1, 2, 7] у виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз), та у сімох матеріалах і тезах міжнародних наукових математичних конференцій [8 – 14].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який містить 148 найменувань. Повний обсяг роботи становить 118 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність теми дослідження, формулюється його мета та завдання, відзначається наукова новизна одержаних у дисертації результатів, їх практичне значення та апробація.

У **розділі I** (§§ 1.1 – 1.3) наведено огляд наукових праць з тематики досліджень дисертаційної роботи, а також перелік основних результатів, отриманих у ній. Так, в **§ 1.3** конкретизується об'єкт дослідження – звичайне диференціальне рівняння другого порядку виду

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i [1 + r_i(t)] p_i(t) \varphi_{i0}(y) \varphi_{i1}(y'), \tag{1}$$

де $\alpha_i \in \{-1; 1\}$ $(i = 1,...,m)$, $p_i : [a;\omega) \to (0;+\infty)$ $(i = 1,...,m; -\infty < a < \omega \le \le +\infty)$ – неперервно диференційовні функції, $r_i : [a;\omega) \to R$ $(i = 1,...,m)$ – неперервні функції, які задовольняють умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_i(t) = 0 \quad (i = 1,..., m),$$

$\varphi_{ik} : \Delta_k \to (0;+\infty)$ $(k = 0,1; i = 1,...,m)$ – неперервно диференційовні функції, де при $k = 0,1$

$$\Delta_k = \begin{cases} \text{або } [y_k, Y_k), \\ \text{або } (Y_k, y_k], \end{cases} \quad y_k \in R, \qquad Y_k = \begin{cases} \text{або} \quad 0, \\ \text{або } \pm\infty \end{cases}$$

(якщо $Y_k = +\infty$ $(Y_k = -\infty)$, то вважаємо $y_k > 0$ $(y_k < 0)$), причому при $k = 0,\ 1;\ i = 1,..., m$ маємо

$$\lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi_{ik}^0 \ \left(0 \le \varphi_{ik}^0 \le +\infty\right) \ \text{ і } \ \lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z\varphi'_{ik}(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = const.$$

Для цього рівняння виділений наступний клас розв'язків

Означення. *Розв'язок* y *рівняння* (1), *визначений на* $[t_0, \omega) \subset [a, \omega)$, *називається* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *- розв'язком, де* $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, *якщо він задовольняє умови*

$$y^{(k)} : [t_0; \omega) \to \Delta_k, \ \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = Y_k \quad (k = 0,1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0 \ \text{ та, якщо } \ \mu_0 = \pm\infty, \text{ то } \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y(t) y''(t)}{(y'(t))^2} = 1,$$

де $\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty. \end{cases}$

У **розділі II** (§§2.1 – 2.3) встановлено асимптотичне поводження $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків рівняння (1) у випадку, коли $\mu_0 \in R \setminus \{-1; 0\}$. В **§ 2.1** отримано ознаки, за якими права частина рівняння (1) на кожному $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язку, для якого $\mu_0 \in R$, асимптотично еквівалентна у околі особливої точки одному доданку. Доведена

Лема 2.1. *Нехай* $\mu_0 \in R$ *і для деяких* $i, j \in \{1,...,m\}$ *таких, що* $j \ne i$, *виконується умова*

$$\limsup_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} \right] < \varsigma_{ij}^0, \tag{2}$$

де

$$\varsigma_{ij}^0 \operatorname{sgn} \pi_\omega(t) = (1 + \mu_0)(\sigma_{i0} - \sigma_{j0}) + \mu_0(\sigma_{i1} - \sigma_{j1}).$$

Тоді для кожного $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *- розв'язку рівняння* (1) *має місце граничне співвідношення*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = 0. \tag{3}$$

В **§ 2.2** у випадку, коли існує таке $i \in \{1,...,m\}$, що при всіх $j \ne i$ виконується співвідношення (2), отримано необхідні та достатні умови існування $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків рівняння (1), для яких $\mu_0 \in R \setminus \{-1;\ 0\}$, а також асимптотичні зображення для таких розв'язків та їх похідних у околі особливої точки.

Введемо наступне позначення

$$I_{i1}(t) = \int_{A_1}^{t} p_i(s) \,|\, \pi_\omega(s) \,|^{\sigma_{i0}} \; ds \,,$$

де A_1 дорівнює або a, або ω, і вибрано таким чином, щоб відповідний інтеграл при $t \uparrow \omega$ прямував чи до нуля, чи до нескінченності.

Теорема 2.1. *Нехай* $\mu_0 \in R \setminus \{-1; 0\}$ *і для деякого* $i \in \{1,...,m\}$ *при всіх* $j \neq i$ *виконується умова* (2)*, а також має місце нерівність* $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$. *Тоді для існування у рівняння* (1) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *- розв'язків необхідно, а якщо справджується одна з двох умов:*

або $\mu_0(\sigma_{i1} - 2) \neq 1$ *, або* $\mu_0(\sigma_{i1} - 2) = 1$ *і* $(\sigma_{i1} - 1)(\sigma_{i0} + \sigma_{i1} - 1) > 0$,

то й достатньо, щоб

$$Y_k = \begin{cases} \pm\infty, & \text{якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |\, \pi_\omega(t)\,|^{1-k+\mu_0} = +\infty, \\ 0, & \text{якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |\, \pi_\omega(t)\,|^{1-k+\mu_0} = 0 \end{cases} \qquad (k = 0,1),$$

виконувались при $t \in (a; \omega)$ *нерівності*

$$\alpha_i (1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) I_{i1}(t) y_1 > 0, \quad (1 + \mu_0) \pi_\omega(t) y_0 y_1 > 0$$

і мало місце граничне співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} = \mu_0 (1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}).$$

Крім того, кожний з таких розв'язків допускає при $t \uparrow \omega$ *наступні асимптотичні зображення*

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t)) \varphi_{i1}(y'(t))} \sim \alpha_i (1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) \frac{I_{i1}(t)}{|\, \pi_\omega(t)\,|^{\sigma_{i0}}}, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{1 + \mu_0}{\pi_\omega(t)}.$$

Зауважимо, що якщо накласти на функції φ_{ik} $(k = 0,1)$ деякі додаткові обмеження, то асимптотичні зображення $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків та їх похідних можна отримати у явному вигляді.

Означення. *Будемо казати, що функція* $\varphi_{ik}(z) = |\, z\,|^{\sigma_{ik}} \, \psi_{ik}(z)$, ($k = 0,1; i = 1,...,m; \psi_{ik} -$ *повільно мінлива в* Y_k *функція*) *задовольняє умову* S*, якщо для будь-якої неперервно диференційовної функції* $L : \Delta_k \to (0; +\infty)$ *такої, що*

$$\lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z L'(z)}{L(z)} = 0,$$

має місце співвідношення

$$\psi_{ik}(zL(z)) = \psi_{ik}(z)(1+o(1)) \text{ при } z \to Y_k,\ z \in \Delta_k .$$

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 і функції* φ_{ik} $(k=0,1)$ *задовольняють умову* S. *Тоді кожний* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *- розв'язок рівняння* (1) *та його похідна допускають при* $t \uparrow \omega$ *наступні асимптотичні зображення*

$$y(t) \sim y_0^0 \times$$

$$\times \left(\frac{|\pi_\omega(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} |(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) I_{i1}(t)|}{|1+\mu_0|^{1-\sigma_{i1}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t) \sim y_1^0 \left(\frac{|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) I_{i1}(t)|}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

де $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k$ $(k=0;1)$.

В **§ 2.3** результати §§2.1 – 2.2 застосовано для встановлення асимптотичного поводження при $t \uparrow \omega$, де $0 < \omega \le +\infty$, $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків рівняння

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} a_i e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} |\ln t|^{\rho_i} \left[1 + r_i(t)\right] \varphi_{i0}(y) \varphi_{i1}(y'), \tag{4}$$

у якому $a_i, \beta_i, \gamma_i, \rho_i \in R$, $a_i \ne 0$ $(i=1,...,m)$, $r_i(t)$ – неперервні на проміжку $[0,\omega)$ функції, що прямують до нуля при $t \uparrow \omega$ $(i=1,...,m)$. Рівняння (4) є частинним випадком (1) при $\alpha_i = \operatorname{sgn} a_i$, $p_i(t) = |a_i| e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} |\ln t|^{\rho_i}$. Отримано наступні результати

Наслідок 2.1. *Нехай виконуються умови теореми 2.2. Тоді кожний* $\Pi_{+\infty}(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *- розв'язок рівняння* (4) *та його похідна допускають при* $t \to +\infty$ *наступні асимптотичні зображення*

$$y(t) \sim y_0^0 \left(\frac{|a_i|}{|\mu_0| |1+\mu_0|^{1-\sigma_{i1}}} t^{2+\gamma_i-\sigma_{i1}} \ln^{\rho_i} t \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 t^{1-k+\mu_0} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t) \sim y_1^0 \left(\frac{|a_i|}{|\mu_0| |1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} t^{1+\gamma_i+\sigma_{i0}} \ln^{\rho_i} t \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 t^{1-k+\mu_0} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

де $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k$ $(k=0;1)$.

Наслідок 2.2. *Нехай виконуються умови теореми 2.2. Тоді кожний* $\Pi_1(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *- розв'язок рівняння* (4) *та його похідна допускають при* $t \uparrow 1$ *наступні асимптотичні зображення*

$$y(t) \sim y_0^0 \left(\frac{|a_i| e^{\beta_i}}{|\mu_0| |1+\mu_0|^{1-\sigma_{i1}}} (1-t)^{2+\rho_i-\sigma_{i1}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 (1-t)^{1-k+\mu_0} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t) \sim y_1^0 \left(\frac{|a_i| e^{\beta_i}}{|\mu_0| |1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} (1-t)^{1+\rho_i+\sigma_{i0}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 (1-t)^{1-k+\mu_0} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

де $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k$ $(k = 0;1)$.

Наслідок 2.3. *Нехай виконуються умови теореми 2.2 та* $\omega \in (0;1) \cup (1;+\infty)$. *Тоді кожний* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *- розв'язок рівняння* (4) *та його похідна допускають при* $t \uparrow \omega$ *наступні асимптотичні зображення*

$$y(t) \sim y_0^0 \times$$

$$\times \left(\frac{|a_i| e^{\beta_i \omega} \omega^{\gamma_i} |\ln \omega|^{\rho_i}}{|\mu_0| |1+\mu_0|^{1-\sigma_{i1}}} (\omega - t)^{2-\sigma_{i1}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 (\omega - t)^{1-k+\mu_0} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t) \sim y_1^0 \times$$

$$\times \left(\frac{|a_i| e^{\beta_i \omega} \omega^{\gamma_i} |\ln \omega|^{\rho_i}}{|\mu_0| |1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} (\omega - t)^{1+\sigma_{i0}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 (\omega - t)^{1-k+\mu_0} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

де $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k$ $(k = 0;1)$.

У **Розділі III** (§§3.1 – 3.3) встановлено асимптотичне поводження $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ - та $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ - розв'язків рівняння (1). Так, в **§ 3.1** у випадку, коли існує таке $i \in \{1,...,m\}$, що для всіх $j \neq i$ виконується співвідношення (2) при $\mu_0 = 0$, отримано необхідні та достатні умови існування, а також асимптотичні зображення $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ - розв'язків рівняння (1).

За припущенням, що існує таке $a' \in [a;\omega)$, що $y_0^0 |\pi_\omega(s)| \in \Delta_0$ при $s \in [a';\omega)$, введемо наступне позначення

$$I_{i2}(t) = \int_{A_2}^{t} p_i(s) |\pi_\omega(s)|^{\sigma_{i0}} \psi_{i0}(y_0^0 |\pi_\omega(s)|) ds,$$

де A_2 дорівнює або a', або ω, і вибрано таким чином, щоб відповідний інтеграл при $t \uparrow \omega$ прямував чи до нуля, чи до нескінченності.

Теорема 3.1. *Нехай* $\mu_0 = 0$ *і для деякого* $i \in \{1,...,m\}$ *при всіх* $j \neq i$ *виконується умова* (2). *Нехай, окрім того, має місце нерівність* $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$ *та функція* φ_{i0} *задовольняє умову* S. *Тоді для існування у рівняння (1)* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ *- розв'язків необхідно і достатньо, щоб*

$$Y_1=\begin{cases}\pm\infty, \text{ якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_{i2}(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}=+\infty,\\ 0, \text{ якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_{i2}(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}=0,\end{cases}\qquad Y_0=\begin{cases}\pm\infty, \text{ якщо } \pi_\omega(t)>0,\\ 0, \text{ якщо } \pi_\omega(t)<0,\end{cases}$$

виконувались при $t\in(a';\omega)$ *нерівності*

$$\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i2}(t)y_1>0,\quad \pi_\omega(t)y_0y_1>0$$

і мало місце граничне співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)}=0.$$

Крім того, кожний з таких розв'язків допускає при $t\uparrow\omega$ *наступні асимптотичні зображення*

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}}\operatorname{sgn}y'(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))}\sim\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i2}(t),\quad \frac{y'(t)}{y(t)}\sim\frac{1}{\pi_\omega(t)}.$$

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови теореми 3.1 і функція* φ_{i1} *задовольняє умову* S. *Тоді кожний* $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ *- розв'язок рівняння* (1) *та його похідна допускають при* $t\uparrow\omega$ *наступні асимптотичні зображення*

$$y(t)\sim y_0^0|\pi_\omega(t)|\left(\left|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i2}(t)\right|\psi_{i1}\left(y_1^0|I_{i2}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t)\sim y_1^0\left(\left|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i2}(t)\right|\psi_{i1}\left(y_1^0|I_{i2}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

де $y_k^0=\operatorname{sgn}y_k$ $(k=0;1)$.

В **§ 3.2** у випадку, коли існує таке $i\in\{1,...,m\}$, що для всіх $j\neq i$ виконується співвідношення (2) при $\mu_0=-1$, отримано необхідні та достатні умови існування, а також асимптотичні зображення $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ - розв'язків рівняння (1).

Введемо наступне позначення

$$I_{i3}(t)=\int_{A_3}^{t}p_i(s)ds,$$

де A_3 дорівнює або a, або ω, і вибрано таким чином, щоб відповідний інтеграл при $t\uparrow\omega$ прямував чи до нуля, чи до нескінченності. Окрім того, за припущенням, що існує таке $a' \in [a;\omega)$, що $y_1^0 \,|\, I_{i3}(s) \,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} \in \Delta_1$ при $s \in [a';\omega)$, введемо позначення

$$I_{i4}(t) = \int_{A_4}^{t} \left| I_{i3}(s)\psi_{i1}\left(y_1^0 \,|\, I_{i3}(s) \,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} ds,$$

де A_4 дорівнює або a', або ω, і вибрано таким чином, щоб відповідний інтеграл при $t \uparrow \omega$ прямував чи до нуля, чи до нескінченності.

Теорема 3.3. *Нехай* $\mu_0 = -1$ *і для деякого* $i \in \{1,...,m\}$ *при всіх* $j \neq i$ *виконується умова* (2). *Нехай, окрім того, має місце нерівність* $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$ *та функція* φ_{i1} *задовольняє умову* S. *Тоді для існування у рівняння* (1) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ *- розв'язків необхідно і достатньо, щоб*

$$Y_1 = \begin{cases} \pm\infty, \text{ якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |\, I_{i3}(t) \,|^{1-\sigma_{i1}} = +\infty, \\ 0, \text{ якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |\, I_{i3}(t) \,|^{1-\sigma_{i1}} = 0, \end{cases}$$

$$Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, \text{ якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |\, I_{i4}(t) \,|^{(1-\sigma_{i1})(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})} = +\infty, \\ 0, \text{ якщо } \lim\limits_{t\uparrow\omega} |\, I_{i4}(t) \,|^{(1-\sigma_{i1})(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})} = 0, \end{cases}$$

виконувались при $t \in (a';\omega)$ *нерівності*

$$\alpha_i(1-\sigma_{i1})I_{i3}(t)y_1 > 0, \quad (1-\sigma_{i1})(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i4}(t)y_0y_1 > 0$$

і мали місце граничні співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)} = \sigma_{i1} - 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'_{i4}(t)}{I_{i4}(t)} = 0.$$

Крім того, кожний з таких розв'язків допускає при $t \uparrow \omega$ *наступні асимптотичні зображення*

$$\frac{y(t)}{\left(\varphi_{i0}(y(t))\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}} \sim y_1^0 \frac{|\,1-\sigma_{i1}\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}{1-\sigma_{i1}} (1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i4}(t),$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{(1-\sigma_{i1})I'_{14}(t)}{(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{14}(t)},$$

де $y_1^0 = \operatorname{sgn} y_1$.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови теореми 3.3 і функція* φ_{i0} *задовольняє умову* S. *Тоді кожний* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ *- розв'язок рівняння* (1) *та його похідна допускають при* $t \uparrow \omega$ *наступні асимптотичні зображення*

$$y(t) \sim y_0^0 \times$$

$$\times\left(|1-\sigma_{i1}|^{\sigma_{i1}} \left|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i2}(t)\right|^{1-\sigma_{i1}} \psi_{i0}\left(y_0^0 \,|\, I_{i4}(t)\,|^{\frac{1-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} \right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t) \sim y_1^0 \left| I_{i3}(t)\psi_{i1}\left(y_1^0 \,|\, I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} \right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} \times$$

$$\times\left(|1-\sigma_{i1}|^{1-\sigma_{i0}} \left|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i2}(t)\right|^{\sigma_{i0}} \psi_{i0}\left(y_0^0 \,|\, I_{i4}(t)\,|^{\frac{1-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} \right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

де $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k \;\; (k = 0;1)$.

В **§ 3.3** результати §§3.1 – 3.2 застосовані для встановлення асимптотичного поводження $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ - та $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ - розв'язків рівняння (4).

У **розділі IV** (§§4.1 – 4.3) встановлено асимптотичне поводження $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ - розв'язків рівняння (1). В **§ 4.1** отримано ознаки, за якими права частина рівняння (1) на кожному $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ - розв'язку у околі особливої точки асимптотично еквівалентна одному доданку. Доведена

Лема 4.1. *Нехай* $\mu_0 = \pm\infty$ *і для деяких* $i, j \in \{1,\dots,m\}$ *таких, що* $j \neq i$, *виконуються умови*

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} \right] < +\infty, \qquad (5)$$

$$\gamma(\sigma_{i0} - \sigma_{j0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j1}) \operatorname{sgn} \pi_\omega(t) > 0, \qquad (6)$$

де

$$\gamma = \begin{cases} 1 \;\; \textit{при} \;\; \mu_0 = +\infty, \\ -1 \;\; \textit{при} \;\; \mu_0 = -\infty. \end{cases}$$

Тоді для кожного $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ *- розв'язку рівняння* (1) *має місце граничне співвідношення* (3).

В **§ 4.2** у випадку, коли існує таке $i \in \{1,\dots,m\}$, що при всіх $j \neq i$ виконуються співвідношення (5) і (6), отримано необхідні та достатні умови існування $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ - розв'язків рівняння (1), а також асимптотичні зображення для таких розв'язків та їх похідних у околі особливої точки.

Введемо наступне позначення

$$I_{i5}(t)=\int\limits_{A_5}^{t} I_{i3}(s)ds\,,$$

де A_5 дорівнює або a, або ω і вибрано таким чином, щоб відповідний інтеграл при $t\uparrow\omega$ прямував чи до нуля, чи до нескінченності.

Теорема 4.1. *Нехай* $\mu_0=\pm\infty$ *і для деякого* $i\in\{1,...,m\}$ *при всіх* $j\neq i$ *виконуються умови* (5), (6), *а також має місце нерівність* $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$. *Тоді для існування у рівняння* (1) $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ *- розв'язків необхідно, а якщо справджується одна з двох умов*

або $\sigma_{i1}\neq 2$, *або* $\sigma_{i1}=2$ *і* $\sigma_{i0}>-1$,

то й достатньо, щоб

$$Y_k=\begin{cases}\pm\infty, & \text{якщо} \lim\limits_{t\uparrow\omega}\left|I_{i3}(t)\right|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}=+\infty,\\ 0, & \text{якщо} \lim\limits_{t\uparrow\omega}\left|I_{i3}(t)\right|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}=0\end{cases}\qquad (k=0,1),$$

виконувались нерівності

$$\alpha_i y_0>0,\ \alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i3}(t)y_1>0 \text{ при } t\in(a,\omega),$$

і мало місце граничне співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(I_{i3}(t))^2}{p_i(t)I_{i5}(t)}=1.$$

Крім того, кожний з таких розв'язків допускає при $t\uparrow\omega$ *наступні асимптотичні зображення*

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\sim\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i3}(t)\,,\ \frac{y'(t)}{y(t)}\sim\frac{p_i(t)}{(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i3}(t)}.$$

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови теореми 4.1 і функції* φ_{ik} $(k=0,1)$ *задовольняють умову* S. *Тоді кожний* $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ *- розв'язок рівняння* (1) *та його похідна допускають при* $t\uparrow\omega$ *наступні асимптотичні зображення*

$$y(t)\sim y_0^0\left(\frac{|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i3}(t)|^{2-\sigma_{i1}}}{p_i^{1-\sigma_{i1}}(t)}\prod_{k=0}^{1}\psi_{ik}\left(y_k^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t)\sim y_1^0\left(\frac{|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i3}(t)|^{1+\sigma_{i0}}}{p_i^{\sigma_{i0}}(t)}\prod_{k=0}^{1}\psi_{ik}\left(y_k^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}.$$

де $y_k^0=\operatorname{sgn} y_k\ (k=0;1)$.

В **§ 4.3** результати §§4.1 – 4.2 застосовані для встановлення асимптотичного поводження $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ - розв'язків рівняння (4).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджується при $t \uparrow \omega$ асимптотичне поводження $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків диференціального рівняння (1). Наприклад, $\Pi_{+\infty}(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язками є показникова, степенева і логарифмічна функції, а також функції, які отримані арифметичними діями з даними та їх суперпозиціями. Значення μ_0 вказує на характер зміни розв'язка у околі особливої точки, а саме: якщо $\mu_0 = \pm\infty$, то розв'язок є швидко мінливим при $t \uparrow \omega$, якщо $\mu_0 \in R \setminus \{-1\}$, то правильно мінливим, а якщо $\mu_0 = -1$, то повільно мінливим. Вперше отримана асимптотика для таких розв'язків, причому як при $\mu_0 \in R \setminus \{-1; 0\}$, так і у особливих випадках $\mu_0 = \pm\infty$, $\mu_0 = -1$ та $\mu_0 = 0$.

Основні результати дисертації полягають у наступному:

- при всіх можливих значеннях μ_0 встановлено ознаки, за якими права частина рівняння (1) на кожному $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язку асимптотично еквівалентна у околі особливої точки одному доданку (леми 2.1 і 4.1);
- за зазначеними ознаками одержано необхідні та достатні умови існування у рівняння (1) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків, а також неявні асимптотичні зображення для цих розв'язків та їх похідних у околі особливої точки (теореми 2.1, 3.1, 3.3 і 4.1);
- наведено додаткові умови на нелінійності, за якими встановлено явні асимптотичні зображення $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків та їх похідних у околі особливої точки (теореми 2.2, 3.2, 3.4 і 4.2);
- усі твердження застосовані для встановлення асимптотичного поводження $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків рівняння (4), яке є частинним випадком рівняння (1) (наслідки 2.1 – 2.3, 3.1 – 3.6 і 4.1 – 4.3).

Застосовані в дисертаційній роботі методи дослідження можуть бути використані для вивчення асимптотичного поводження розв'язків диференціальних рівнянь більш високих порядків з правильно мінливими нелінійностями.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ

1. Евтухов В. М. Признаки существования и асимптотика некоторых классов решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений вто-

рого порядка [текст] /В. М. Евтухов, А. А. Козьма// Укр. мат. журнал. – 2011. – Т. 63, № 7. – С. 924 – 938.
2. Козьма А. А. Асимптотические представления одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] /А. А. Козьма// Нелінійні коливання. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 490 – 501.
3. Козьма О. О. Асимптотичне поводження розв'язків істотно нелінійних рівнянь другого порядку [текст] /О. О. Козьма// Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 374. – С. 55 – 65.
4. Козьма А. А. Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] /А. А. Козьма// Вісник Одеського нац. ун-ту. Матем. і механ. – 2009. – Т. 14, Вип. 20. – С. 75 –90.
5. Козьма А. А. Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] /А.А. Козьма// Вісник Одеського нац. ун-ту. Матем. і механ. – 2010. – Т. 15, Вип. 19. – С. 77 – 87.
6. Козьма А. А. Условия существования и асимптотика одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] /А. А. Козьма// Математичні студії. – 2011. – Т. 36, № 2. – С. 176 – 187.
7. Козьма А. А. Асимптотическое поведение одного класса решений нелинейных неавтономних дифференциальных уравнений второго порядка [текст] /А. А. Козьма// Нелінійні коливання. – 2011. – Т. 14, № 4. – С. 468 – 481.
8. Козьма А. А. Условия существования одного класса решений у существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] /А. А. Козьма// Метод функций Ляпунова и его приложения: Восьмая Крымская Международная математическая школа, 10 – 17 сентября 2006 г.: тезисы докладов. – Симферополь, 2006. – С. 87.
9. Козьма А. А. Асимптотические представления одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] /А. А. Козьма// Диференціальні рівняння та їх застосування: Міжнародна конференція, 11 – 14 жовтня 2006 р.: тези доповідей. – Чернівці, 2006. – С. 66.
10. Козьма О. О. Асимптотичні зображення одного класу розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку [текст] /О. О. Козьма// Міжнародна математична конференція імені В. Я. Скоробагатько, 24 – 28 вересня 2007 р.: тези доповідей. – Львів, 2007. – С. 138.
11. Козьма А. А. Условия существования одного класса решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] /А. А. Козьма// Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування: Міжнародна наукова конференція, 16 – 21 червня 2008 р.: тези доповідей. – Мелітополь, 2008. – С. 62.

12. Козьма А. А. Признаки существования и асимптотическое поведение одного класса решений существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка [электронный ресурс] /А. А. Козьма// Український математичний конгрес, 27 – 29 серпня 2009 р.: тези доповідей. – Київ, 2009. – http: // www. imath. kiev. ua. / congress 2009 / part UMC 2009 html.

13. Козьма А. А. Условия существования одного класса решений существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка [текст] /А. А. Козьма// Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова, 9 – 11 августа 2010 г.: тезисы докладов. – Одесса, 2010. – С. 60.

14. Козьма А. А. Асимптотическое поведение одного класса решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст] /А. А. Козьма// Диференціальні рівняння та їх застосування: Міжнародна наукова конференція, 8 – 10 червня 2011 р.: тези доповідей. –Київ, 2011. – С. 100.

АНОТАЦІЯ

Козьма Олександр Олександрович. Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з правильно мінливими відносно невідомої функції та її похідної першого порядку нелінійностями. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, 2013.

В дисертаційній роботі розглянуто диференціальне рівняння виду

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i [1 + r_i(t)] p_i(t) \varphi_{i0}(y) \varphi_{i1}(y'),$$

де $\alpha_i \in \{-1;1\}$ $(i=1,...,m)$, $p_i : [a;\omega) \to (0;+\infty)$ $(i=1,...,m; -\infty < a < \omega \le \le +\infty)$ – неперервно диференційовні функції, $r_i : [a;\omega) \to R$ $(i=1,...,m)$ – неперервні функції, які зникають у ω, $\varphi_{ik} : \Delta_k \to (0;+\infty)$ $(k=0,1;$ $i=1,...,m; \Delta_k -$ односторонній окіл $Y_k; Y_k -$ або нуль, або нескінченність) – неперервно диференційовні функції, правильно мінливі в Y_k.

Встановлено асимптотичне поводження широкого класу так званих $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків. Дисертація містить наступні нові наукові результати:

1) Для кожного з чотирьох випадків $\mu_0 \in R \setminus \{-1,0\}$, $\mu_0 = \pm\infty$, $\mu_0 = -1$, $\mu_0 = 0$ встановлено ознаки, за якими права частина рівняння, що досліджується, на будь – якому $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язку асимптотично еквівалентна у околі особливої точки одному доданку.

2) За зазначеними ознаками одержано необхідні та достатні умови існування $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків, а також неявні асимптотичні зображення для цих розв'язків та їх похідних у околі особливої точки.

3) Наведено додаткові умови на нелінійності, при виконанні яких встановлені явні асимптотичні зображення для $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - розв'язків та їх похідних у околі особливої точки.

Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння другого порядку, асимптотичне поводження монотонних розв'язків, правильно мінливі функції.

АННОТАЦИЯ

Козьма Александр Александрович. Асимптотические представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися относительно неизвестной функции и её производной первого порядка нелинейностями. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса, 2013.

В диссертационной работе рассмотрено дифференциальное уравнение вида

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i [1 + r_i(t)] p_i(t) \varphi_{i0}(y) \varphi_{i1}(y'),$$

где $\alpha_i \in \{-1; 1\}$ $(i = 1,...,m)$, $p_i : [a;\omega) \to (0;+\infty)$ $(i = 1,...,m; -\infty < a < \omega \le \le +\infty)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $r_i : [a;\omega) \to R$ $(i = 1,...,m)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_i(t) = 0 \quad (i = 1,..., m),$$

$\varphi_{ik} : \Delta_k \to (0;+\infty)$ $(k = 0,1; i = 1,...,m)$ – непрерывно дифференцируемые функции, где при $k = 0,1$

$$\Delta_k = \begin{cases} \text{или } [y_k, Y_k), \\ \text{или } (Y_k, y_k], \end{cases} \quad y_k \in R, \qquad Y_k = \begin{cases} \text{или} \quad 0, \\ \text{или } \pm\infty \end{cases}$$

(если $Y_k = +\infty$ $(Y_k = -\infty)$, то полагаем $y_k > 0$ $(y_k < 0)$), причём при $k = 0, 1;$ $i = 1,...,m$ имеем

$$\lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi_{ik}^0 \quad \left(0 \le \varphi_{ik}^0 \le +\infty\right) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z \varphi_{ik}'(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = const.$$

Исследован вопрос об асимптотическом поведении широкого класса так называемых $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - решений данного уравнения. Примерами

$\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - решений при $\omega = +\infty$ являются показательная, степенная и логарифмическая функции, а также функции, полученные арифметическими действиям над ними и их суперпозициями. При этом значение μ_0 указывает на характер изменения решения в окрестности $+\infty$: если $\mu_0 = \pm\infty$, то решение является быстро меняющимся, если $\mu_0 \in R \setminus \{-1\}$, то правильно меняющимся, если $\mu_0 = -1$, то медленно меняющимся. В случае $\omega < +\infty$ примерами $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - решений будут функции $e^{\frac{1}{t-\omega}}$, $(t-\omega)^\alpha$ $(\alpha \in R \setminus \{0\})$, $\ln|t-\omega|$ и многие другие.

Получены следующие новые научные результаты:

1. Для $\mu_0 \in R$ и $\mu_0 = \pm\infty$ приведены признаки, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - решении рассматриваемого уравнения правая его часть асимптотически эквивалентна одному слагаемому.

2. С помощью этих признаков установлены необходимые и достаточные условия существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - решений как в случае $\mu_0 \in R \setminus \{-1; 0\}$, так и в особых случаях $\mu_0 = \pm\infty$, $\mu_0 = -1$ и $\mu_0 = 0$. Кроме того, получены неявные асимптотические представления для таких решений и их производных при $t \uparrow \omega$.

3. Указаны дополнительные ограничения на нелинейности, которые позволяют записать асимптотические представления $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - решений и их производных при $t \uparrow \omega$ в явном виде.

Все полученные результаты проиллюстрированы при установлении асимптотического поведения при $t \uparrow \omega$, где $0 < \omega \le +\infty$, $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ - решений уравнения

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} a_i e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \, |\ln t|^{\rho_i} \, [1 + r_i(t)] \varphi_{i0}(y) \varphi_{i1}(y'),$$

в котором $a_i, \beta_i, \gamma_i, \rho_i \in R$, $a_i \ne 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $r_i(t)$ – непрерывные на промежутке $[0, \omega)$ функции, стремящиеся к нулю при $t \uparrow \omega$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка, асимптотическое поведение монотонных решений, правильно меняющиеся функции.

ABSTRACT

Kozma A. A. Asymptotic representations of solutions of ordinary differential equations of the second order with regularly varying relative to unknown function and its derivative of the first order nonlinearities. – Manuscript.

Thesis for the candidate's degree (Physical and Mathematical sciences) by speciality 01.01.02 – differential equations. Odessa National University named after I. I. Mechnikov, Odessa, 2013.

In the thesis it is considered the differential equation of the type

$$y''=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i[1+r_i(t)]p_i(t)\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'),$$

where $\alpha_i\in\{-1;1\}$ $(i=1,...,m)$, $p_i:[a;\omega)\to(0;+\infty)$ $(i=1,...,m;\ -\infty<a<\omega\le$ $\le+\infty)$ – are continuously differentiable functions, $r_i:[a;\omega)\to R$ $(i=1,...,m)$ – are continuous functions disappearing in ω, $\varphi_{ik}:\Delta_k\to(0;+\infty)$ $(k=0,1;i=1,...,m;\Delta_k$ – is one-sided neighbourhood Y_k; Y_k – is zero or infinity) – are e continuously differentiable functions regularly varying in Y_k.

It is established the asymptotical behaviour of a wide class so-called $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ - solutions. The thesis contains following new scientific results

1) For each of the four cases $\mu_0\in R\setminus\{-1,0\}$, $\mu_0=\pm\infty$, $\mu_0=-1$, $\mu_0=0$ there are researched the attributes by which the right part of the investigated equation in any $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ - solution is asymptotically equivalent in a neighborhood of the singular point of one item.

2) By means of these attributes the necessary and sufficient conditions of the existence of $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ - solutions, as well as the implicit asymptotic representation for such solutions and their derivatives in the neighborhood of a singular point, are obtained.

3) Additional conditions of nonlinearity are carried out, at fulfillment of these conditions there are established explicit asymptotic representations of $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ - solutions and their derivatives in the neighborhood of a singular point.

Key words: nonlinear differential equations of the second order, asymptotical behaviour of monotone solutions, regularly varying functions.