ОДЕССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени И.И. Мечникова

На правах рукописи

КОЗЬМА АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 517.925

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЁ ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения

Диссертация
на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
Евтухов Вячеслав Михайлович,
доктор физико-математических
наук, профессор.

Одесса – 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Важное место в развитии качественной теории дифференциальных уравнений занимает исследование уравнений второго порядка. Это обусловлено широким спектром применения таких уравнений в различных областях естествознания. Так, например, уравнение Польвани, устанавливающее зависимость радиус – вектора r электрона от времени t при движении под действием магнитного поля, положило начало исследованию дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих в правой части суммы слагаемых со степенными нелинейностями и непрерывными на полуоси коэффициентами. В частном случае одного слагаемого получаем обобщённое уравнение Эмдена – Фаулера, которое рассматривалось в работах Ф.В. Аткинсона (F.V. Atkinson), И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия, С. Белогорца (S. Belohorec), Дж. Вонга (J.S.W. Wong), М.М. Арипова, А.В.Костина, В.М. Евтухова и других авторов. В общем же случае первые значительные результаты были получены Л.А. Беклемишевой для уравнений со степенными коэффициентами и А.В.Костиным для уравнений с коэффициентами, отличными от степенных. Это позволило в дальнейшем А.В.Костину, а затем В.М.Евтухову и Е.В. Шебаниной, для различных уравнений такого вида получить условия существования и точные асимптотические представления достаточно широких классов монотонных решений.

В тоже время, очевидно, что степенной характер нелинейностей относительно неизвестной функции и её производной первого порядка часто является следствием некоторой идеализации моделей реальных процессов. Поэтому представляется важным вопрос асимптотического поведения решений уравнений второго порядка, содержащих в правой части нелинейности, отличные от степенных. Первые результаты такого рода были получены для двучленных уравнений, не содержащих производную неизвестной функции. Следует отметить работы Д.В. Изюмовой, И.Т. Кигурадзе, И.В. Каменева, Ю.А. Клокова, С.В. Олехника, Т.А. Чантурия, В.

Марича (V. Maric), М. Томича (M. Tomic), С.Д. Талиаферро (S.D. Taliaferro), В.М. Евтухова и Л.А. Кирилловой. Однако практически не исследованными оставались уравнения второго порядка, содержащие в правой части сумму слагаемых с нелинейностями, отличными от степенных. Заслуживают внимания работы В.М. Евтухова и В.А. Касьяновой, в которых удалось получить необходимые и достаточные условия существования некоторых классов монотонных решений уравнения, правая часть которого содержит сумму слагаемых с правильно меняющимися относительно неизвестной функции нелинейностями, а так же точные асимптотические формулы для таких решений в окрестности особой точки.

В дальнейшем в работах В.М. Евтухова и М.А. Белозёровой для двучленного уравнения с правильно меняющимися относительно как неизвестной функции, так и её производной первого порядка нелинейностями были установлены точные асимптотические представления для достаточно широкого класса монотонных решений в окрестности особой точки. Естественным представляется вопрос о получении аналогичных результатов для дифференциального уравнения второго порядка, содержащего в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися относительно неизвестной функции и её производной первого порядка нелинейностями. Решению данного вопроса и посвящена настоящая диссертационная работа.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Направление исследований, выбранное в диссертации, является составной частью темы «Исследование асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений аналитическими и качественными методами», которая выполняется на кафедре дифференциальных уравнений Одесского национального университета имени И.И. Мечникова. (Номер госрегистрации 0109U003665.)

Цель и задачи исследования. *Цель исследования* – установление асимптотического поведения различных типов монотонных решений нового класса дифференциальных уравнений.

Объект исследования – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, содержащее в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися относительно неизвестной функции и её производной первого порядка нелинейностями.

Задачи исследования – получение необходимых и достаточных условий существования у данного уравнения одного достаточно широкого класса монотонных решений, а так же асимптотических представлений для таких решений и их производных первого порядка в окрестности особой точки.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы теории дифференциальных уравнений, классического анализа, линейной алгебры, асимптотические методы, а также современные результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна полученных результатов. Все результаты диссертации являются новыми.

К главным из них относятся следующие:

1) Установлены достаточные условия, при выполнении которых правая часть рассматриваемого уравнения на каждом монотонном решении из выделенного класса асимптотически эквивалентна в окрестности особой точки одному слагаемому.

2) При соблюдении указанных условий получены необходимые и достаточные признаки существования у уравнения решений такого класса, а также неявные асимптотические формулы для данных решений и их производных первого порядка в окрестности особой точки.

3) Приведены дополнительные условия на нелинейности, при выполнении которых установлены явные асимптотические представления в окрестности особой точки для всех решений такого класса и их производных первого порядка.

Практическое значение полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации и разработанные в ней методы исследования могут быть использованы при изучении асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений более высоких порядков. Кроме того, данные результаты могут быть применены для рассмотрения конкретных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возникающих на практике.

Личный вклад соискателя. Все основные результаты получены автором самостоятельно. Научному руководителю В.М. Евтухову принадлежат постановка задачи, выбор направления исследования и общее руководство работой.

Апробация результатов диссертации. Результаты работы докладывались на международной конференции "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Черновцы, 2006 г.); в восьмой Крымской Международной математической школе "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Алушта, 2006 г.); на Международной математической конференции им. В.Я. Скоробагатько (Дрогобыч, 2007 г.); на международной научной конференции "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Мелитополь, 2008 г.); на Украинском математическом конгрессе (Киев, 2009 г.); в международной летней математической школе памяти В.А. Плотникова (Одесса, 2010 г.); на международной научной конференции "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Киев, 2011 г.); неоднократно на научных семинарах в Одесском национальном университете имени И.И. Мечникова и Одесском национальном экономическом университете, а также на научном семинаре факультета прикладной математики Черновецкого национального университета имени Ю. Федьковича.

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в семи статьях [39, 65 – 70], которые входят в перечень, утверждённый ВАК Украины, и в семи материалах и тезисах международных научных математических конференций [71 – 77].

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, которые разбиты на параграфы, выводов и списка использованных источников, который содержит 148 наименований. Полный объём работы составляет 113 страниц.

ГЛАВА I

ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

§1.1. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих суммы слагаемых со степенными нелинейностями.

Начало исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих суммы слагаемых со степенными нелинейностями, было положено в 1899 году в работах Е. Бореля [111] и Е. Линделефа [132], посвящённых уравнению вида

$$\sum_{i=1}^{N} a_i t^{l_i} u^{m_i} (u')^{n_i} = 0\,, \tag{1.1}$$

в котором $a_i \in R;\, l_i, m_i, n_i \in N \cup \{0\}$. Для данного уравнения были получены оценки для всех решений, определённых на промежутке $[t_0, +\infty)$ и являющихся на нём непрерывно дифференцируемыми функциями:

Теорема. *Пусть* k *– наивысший показатель степени* l_i, *тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *на некотором промежутке* $[t_1, +\infty) \subset [t_0, +\infty)$ *имеет место неравенство*

$$|u(t)| < \exp\left(\frac{t^{k+\varepsilon+1}}{k+\varepsilon+1}\right).$$

В 1912 году была опубликована работа Г. Харди [122], в которой для частного случая уравнения (1.1) вида

$$u' = \frac{P(t,u)}{Q(t,u)}\,, \tag{1.2}$$

где P и Q – многочлены относительно t и u, была разработана методика установления точных асимптотических представлений для всех решений, определённых в окрестности $+\infty$. Результат, полученный Харди, имеет вид:

Теорема. *Каждое ненулевое решение дифференциального уравнения* (1.2) *в конце концов становится, как и его производные всех порядков, монотонным и удовлетворяет при* $t \to +\infty$ *одному из асимптотических соотношений*

$$u(t) = at^b e^{R(t)}[1 + o(1)], \quad u(t) = at^b (\ln t)^{1/c}[1 + o(1)],$$

где a *– отличная от нуля вещественная постоянная,* b *– рациональное число,* c *– отличное от нуля целое число,* $R(t)$ *– многочлен.*

С помощью разработанной методики исследования Г. Харди удалось получить следующие асимптотические представления для решений уравнения (1.1):

Теорема. *Пусть* u *– любое определённое на полуоси решение полиномиального уравнения* (1.1). *Тогда при* $t \to +\infty$ *либо*

$$u(t) = o(t^b),$$

либо

$$u(t) = \pm\exp(at^b[1 + o(1)]),$$

где a, b *– постоянные, причём решения последнего класса монотонны, как и их производные всех порядков.*

Перечисленные результаты для уравнений (1.1) и (1.2) с подробными доказательствами содержатся в монографии Р. Беллмана [9, Глава V, стр. 113 – 126].

Принимая во внимание методику Харди исследования уравнения (1.2) и учитывая результаты, полученные для дифференциального уравнения второго порядка $y'' = \pm t^{1-\sigma} y^{\sigma}$ $(\sigma \in R, \sigma > 1)$, Р. Фаулеру [119] в 1914 году для уравнения

$$u'' = \frac{P(t,u)}{Q(t,u)}, \tag{1.3}$$

в котором P и Q – многочлены относительно t и u, удалось установить оценки для всех правильных решений. Кроме того, было показано, что если решение удовлетворяет вместе со своей производной первого порядка некоторому дополнительному условию, то оно допускает при $t \to +\infty$ одно из следующих представлений:

$$u(t) = \exp\left[t^b e^{p(t)}(a+o(1))\right];\ u(t) = \exp\left[(t^q \ln t)^{1/p}(a+o(1))\right];\ u(t) = \exp\left[(\ln t)^{(p+1)/p}(a+o(1))\right];$$

$$u(t) = \exp\left[(\ln t)^{(p-1)/p}(a+o(1))\right];\ u(t) = a(\ln t)^b[1+o(1)];\ u(t) = a(\ln t)^b(\ln\ln t)^{1/q}[1+o(1)],$$

где a,b – вещественные числа, p,q – целые числа, $p(t)$ – многочлен.

Наряду с результатами, полученными Р. Фаулером для уравнения (1.3), необходимо отметить вышедшие в 1936 году работы [136] и [100], посвящённые дифференциальному уравнению второго порядка, описывающему движение электрона в цилиндрическом диоде, находящемся в продольном магнитном поле. Данное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\lambda^2 t}{2r} - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r^3},$$

где аргумент t – время, функция r – радиус – вектор электрона, λ – положительный параметр. Для этого частного случая уравнения (1.3) Г. Асколи удалось без каких – либо дополнительных ограничений на решения установить их асимптотические представления при $t \to +\infty$.

Теорема. 1. *Каждое решение определено на всей прямой.* 2. *Любое положительное особенное решение допускает асимптотическое представление*

$$r(t) = \lambda\sqrt{t} + \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2\lambda^3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{t^3}} + \frac{O(1)}{\sqrt{t^7}} \quad \textit{при} \quad t \to +\infty.$$

3. *Для каждого положительного неособенного решения имеет место асимптотическое представление вида*

$$r(t) = \lambda\sqrt{t} + C\sin\left(t + \frac{C^2}{12\lambda^2}\ln t - \gamma\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \textit{при} \quad t \to +\infty,$$

где C и γ – некоторые постоянные. Такое решение обладает бесконечным множеством максимумов и минимумов, абсциссы которых имеют следующие асимптотические выражения

$$t_n = n + 0{,}5 - \frac{C^2}{12\lambda^2}\ln(n+0{,}5)\pi + \gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty .$$

Разработке методики установления асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений второго порядка, полиномиальных как относительно аргумента, так и неизвестной функции, посвящены также работы Л.А. Беклемишевой [6, 7, 8]. В них для уравнения

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} b_i t^{m_i} y^{\sigma_i}[1 + o_i(1)], \tag{1.4}$$

где b_i, m_i – действительные числа, а $\sigma_i > 0$ – рациональное число с нечётным знаменателем, были получены асимптотические представления при $t \to +\infty$ для всех правильных решений. Однако используемая в данных работах методика опирается на степенной характер коэффициентов и не может быть применена к уравнениям более общего вида.

Следующим шагом в развитии теории обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих суммы слагаемых со степенными нелинейностями, стало рассмотрение уравнений с коэффициентами, отличными от степенных. Такая задача была поставлена и успешно решена А.В. Костиным вначале для уравнений первого порядка. В работе [76], вышедшей в 1967 году, исследовалось асимптотическое поведение решений уравнения (1.2), в котором P и Q – многочлены вида

$$P(t,u) = \sum_{i=0}^{n} p_i(t)u^i \ , \ Q(t,u) = \sum_{i=0}^{m} p_{n+1+i}(t)u^i \ ,$$

где $p_i : [t_0, +\infty) \to R \ (i = 0,1,...,n+1+m)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие вместе со своими производными первого и второго порядков некоторым дополнительным соотношениям (условию A). Было показано, что все правильные решения уравнения (1.2) являются в окрестности $+\infty$ либо тождественными константами, либо строго монотонными функциями. Затем, с учетом идей, заложенных в работе Г. Харди [122], была получена

Теорема. *При выполнении условия* A *левая часть дифференциального уравнения* (1.2), *записанного в виде* $Q(t,u)u' - P(t,u) = 0$, *ведет себя вдоль каждого правильного его частного решения так, что среди всех слагаемых вида* $p_{n+1+j}(t)u^j u'$, $p_i(t)u^i$ $(j = 0,1,...,m; i = 0,1,...,m)$ *найдутся, по крайней мере, два таких слагаемых, отношение которых к друг другу будет стремиться к отличному от нуля конечному пределу при* $t \to +\infty$.

Применяя данную теорему, для дифференциального уравнения (1.2) были выписаны асимптотические представления при $t \to +\infty$ для всех возможных типов правильных решений. Кроме того, был рассмотрен вопрос о фактическом существовании решений с указанной асимптотикой.

Затем в работе А.В. Костина [77] было исследовано уравнение вида

$$P(t,u,u') = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t,u)(u')^i = 0,$$

в котором $\pi_i : [t_0, +\infty) \times R \to R$ $(i = 1,...,n)$ – непрерывные функции. Полученные в данной работе результаты позволили достаточно подробно описать асимптотическое поведение правильных решений полиномиального как относительно неизвестной функции, так и её производной первого порядка уравнения

$$P(t,u,u') = \sum_{i+k=1}^{n_1} p_{ik}(t)u^i (u')^k = 0, \tag{1.5}$$

в котором все $p_{ik} : [t_0, +\infty) \to R$ – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие вместе со своими производными первого порядка некоторым дополнительным соотношениям. Для уравнения (1.5) были установлены условия, при выполнении которых каждое правильное решение u_0 данного уравнения либо, начиная с некоторого момента, становится тождественной постоянной, либо найдётся хотя бы одна четверка номеров i, k, j, m, удовлетворяющих условию $(i-j)^2+(k-m)^2 \neq 0$, для которых предел

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{p_{ik}(t)u_0^i(t)(u_0'(t))^k}{p_{jm}(t)u_0^j(t)(u_0'(t))^m}$$

будет конечным и отличным от нуля. При выполнении этих условий были получены асимптотические формулы при $t\to+\infty$ для всех правильных решений уравнения (1.5), а затем, применяя данные формулы, выяснен вопрос о существовании таких решений.

Отметим, что рассмотрение уравнений второго и более высоких порядков, содержащих в правой части суммы слагаемых со степенными нелинейностями и непрерывными на полуоси коэффициентами, тесным образом связано с результатами для соответствующих двучленных уравнений. Поэтому необходимо остановиться на основных этапах развития теории данных уравнений.

Вышедшая в 1955 году работа Ф.В. Аткинсона [101] положила начало исследованию обобщённого уравнения Эмдена – Фаулера

$$y'' = \alpha_0 p(t)\,|\,y\,|^{\sigma}\,\mathrm{sgn}\,y\,, \tag{1.6}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1,1\}$ и $p:[a,+\infty)\to(0,+\infty)$ – непрерывная функция. В этой работе при $\alpha_0=-1$ и $\sigma>1$ были установлены необходимые и достаточные признаки колеблемости всех правильных решений данного уравнения. Затем И.Т. Кигурадзе [51, 53, 54, 126] были приведены асимптотические представления всех правильных неколеблющихся решений обобщённого уравнения Эмдена – Фаулера, в котором $\sigma>1$, а функция p удовлетворяет некоторым дополнительным ограничениям. Кроме того, был выяснен вопрос о фактическом существовании решений с указанной асимптотикой. Позже в работах С. Белогорца (S. Belohorec) [109, 110] и Т.А. Чантурия [89, 90, 91, 92, 94] аналогичные результаты были получены для случая $0<\sigma<1$. Исследованию асимптотики монотонных решений уравнения (1.6) посвящены также работы А.В. Костина [78], М.М. Арипова [1], Л.В.

Клебанова [63], С.Д. Талиаферро (S.D. Taliaferro) [140], Дж. Вонга (J.S.W. Wong) [145], В.А. Кондратьева и В.С. Самовола [75].

Так, А.В. Костин [78] разработал для установления асимптотического поведения правильных неколеблющихся решений уравнения (1.6) в случае $\sigma > 1$ методику, отличную от предложенной И.Т. Кигурадзе. Применение данной методики позволило в работах А.В.Костина, В.М. Евтухова [79] и В.М. Евтухова [16, 17, 18, 19] получить условия существования и асимптотику всех неколеблющихся решений дифференциального уравнения вида

$$y'' = \alpha_0 p(t) \,|\, y \,|^{\sigma} |\, y' \,|^{\lambda} \operatorname{sgn} y, \tag{1.7}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $\sigma, \lambda \in R$, $p:[a,\omega) \to R$ – непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$. При этом был указан единый подход к рассмотрению как правильных, так и различных типов сингулярных решений.

Однако при попытке установить асимптотическое поведение всех решений дифференциальных уравнений типа Эмдена – Фаулера третьего и более высоких порядков возникали затруднения. Поэтому в работе И.Т. Кигурадзе [52] была предложена идея, которая заключалась в разбиении всех возможных правильных и различных типов сингулярных решений на классы, а затем исследовании условий существования и асимптотического поведения решений каждого класса в отдельности. Данная идея получила своё развитие в монографии И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурия [59]. В этой работе для дифференциального уравнения n-го порядка общего вида

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

были указаны теоремы существования колеблющихся, сингулярных, быстро растущих и кнезеровских решений, а так же приведены асимптотические оценки для решений некоторых из этих классов. При этом очевидно, что точные асимптотические представления решений возможны только для уравнений более конкретного вида. Рассмотрим основные полиномиальные относительно неизвестной функции и её производных дифференциальные уравнения порядка выше первого, которые допускают такие представления.

С учётом идей, заложенных при исследовании уравнений (1.5) – (1.7), А.В. Костин [80, 81] для уравнения вида

$$y^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i(t) y^{\sigma_{0i}} (y')^{\sigma_{1i}} ... (y^{(n-1)})^{\sigma_{n-1i}} + f_1(t, y, y', ..., y^{(n-1)})}{\sum_{i=k+1}^{m} p_i(t) y^{\sigma_{0i}} (y')^{\sigma_{1i}} ... (y^{(n-1)})^{\sigma_{n-1i}} + f_2(t, y, y', ..., y^{(n-1)})},$$

где $\sigma_{ji} \in R$ $(i = 1,...,m; j = 0,1,..,n-1)$, $p_i : [a, +\infty) \to C \setminus \{0\}$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, а $f_1, f_2 : [a, +\infty) \times C^n \to C$ – малые в некотором смысле непрерывные функции, получил достаточные признаки существования и точные асимптотические представления при $t \to +\infty$ правильных неколеблющихся решений, определяемых с помощью применения формул Г. Харди (см. [10], гл. V, стр. 322 – 343)

$$\frac{y^{(i)}(t)}{y(t)} \leftrightarrow c_i \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)^i \quad (i \geq 1,\ c_i \neq 0).$$

В дальнейшем В.М. Евтухов и Е.В. Шебанина [95, 117], применяя методику исследования уравнения (1.5), предложенную А.В. Костиным, рассмотрели дифференциальное уравнение следующего вида

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \prod_{j=0}^{n-1} | y^{(j)} |^{\sigma_{ji}},$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1,...,m)$, $p_i : [a, \omega) \to (0, +\infty)$ $(i = 1,..m; -\infty < a < \omega \leq +\infty)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $\sigma_{ji} \in R$ $(i = 1,...,m; j = 0,1,..,n-1)$ и такие, что $\sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{jk} \neq \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{ji}$ при $i \neq k$. Для данного уравнения было установлено асимптотическое поведение в окрестности особой точки всех возможных типов так называемых $P_\omega\left(\lambda_{n-1}^0\right)$ – решений, а именно решений, заданных на промежутке $[t_0, \omega) \subset [a, \omega)$ и удовлетворяющих условиям:

1) $y^{(n-1)}(t) \neq 0$ при $t \in [t_0, \omega)$;

2) для каждого $k \in \{0,...,n-1\}$ либо $\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = 0$, либо $\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \pm\infty$;

3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lambda_{n-1}^{0} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y^{(n-1)}(t))^2}{y^{(n)}(t)y^{(n-2)}(t)}.$$

Данная классификация решений была предложена в работах В.М. Евтухова [20, 23, 25, 28], посвященных обобщенному уравнению Эмдена – Фаулера

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) | y |^{\sigma_0} | y' |^{\sigma_1} ... | y^{(n-1)} |^{\sigma_{n-1}} \operatorname{sgn} y,$$

где $n \geq 2$, $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $\sigma_0,...,\sigma_{n-1}$ – вещественные числа, удовлетворяющие неравенству $\sigma_0 + \sigma_1 + ... + \sigma_{n-1} \neq 1$ и $p : [a,\omega) \to (0,+\infty)$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Введение такой классификации позволило охватить случай, когда n – я производная неизвестной функции не может быть асимптотически выражена через саму функцию и её производную первого порядка.

Кроме того, необходимо отметить работы В.М. Евтухова и Н.С. Васильевой [27, 11, 35, 118], в которых рассматривалось асимптотическое поведение при $t\uparrow\omega$ $(a \leq t < \omega \leq +\infty)$ всех правильных неколеблющихся решений полулинейного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$y'' + g(t)y' = \sum_{i-1}^{n} \alpha_i p_i(t)[1 + r_i(t)] | y(t) |^{1-\lambda_i} | y'(t) |^{\lambda_i} \operatorname{sgn} y,$$

где $\alpha_i \in \{-1,1\}$, $\lambda_i \in R \setminus \{1,2\}$ $(i = 1,..,n)$, причём $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $p_i : [a,\omega) \to (0,+\infty)$ $(i = 1,...,n; -\infty < a < \omega \leq +\infty)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $g : [a,\omega) \to R$ и $r_i : [a,\omega) \to R$ $(i = 1,...,n)$ – непрерывные функции и, кроме того,

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(t) = 0 \quad (i = 1,...,n).$$

Среди исследований, посвящённых асимптотическим свойствам решений полиномиальных дифференциальных уравнений порядка выше первого, следует также упомянуть работы Л.М. Муратова [83], S. Bank, I. Laine [108],

§1.2. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих суммы слагаемых с нелинейностями, отличными от степенных.

После выхода работ А.В. Костина, В.М. Евтухова, Е.В. Шебаниной и Н.С. Васильевой, посвящённых установлению условий существования и асимптотике решений полиномиальных относительно неизвестной функции и её производных уравнений, естественным образом возник вопрос о распространении полученных результатов на случай, когда нелинейности в данных уравнениях отличны от степенных. Заметим, что интерес к соответствующим двучленным уравнениям второго порядка, не содержащим производную неизвестной функции,

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.8}$$

$\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p:[a,+\infty) \to (0,+\infty)$ – непрерывная функция, $\varphi:(0,+\infty) \to R \setminus \{0\}$ – непрерывная функция, возник ещё в 60-е – 70-е годы. В работах Д.В. Изюмовой [41, 42, 43], Д.В. Изюмовой и И.Т. Кигурадзе [44], И.Т. Кигурадзе [50, 55], Ю.А. Клокова [64], С.Н. Олехника [84, 85], Т.А. Чантурия [93], В.Н. Шевело [97], В.Н. Шевело и В.Г. Штелик [96], J.S.W. Wong [144], C.V. Coffman, J.S.W. Wong [112], I.W. Heidel, D.V. Hinton [125] для таких уравнений были получены условия существования правильных и различного типа сингулярных решений, признаки колеблемости и неколеблемости решений, условия существования ограниченных и стремящихся к нулю при $t \to +\infty$ решений. Кроме того, из работ И.Т. Кигурадзе [56, 126, 127, 128, 129], Г.Г. Квиникадзе, И.Т. Кигурадзе [47], Г.Г. Квиникадзе [48, 49] вытекают результаты о двухсторонних асимптотических оценках для кнезеровских и быстрорастущих решений. Отметим также работы В.М. Евтухова, Н.Г. Дрик [21, 26, 116], Н.Г. Дрик [14, 15], в которых впервые были установлены точные асимптотические представления для правильных и сингулярных решений уравнения (1.8) в случае, когда

$\varphi(y)=\exp(\sigma y)$. В дальнейшем В.М. Евтуховым, В.Н. Шинкаренко [29, 30, 36], В.Н. Шинкаренко [98, 99] были получены аналогичные результаты для соответствующего уравнения n – го порядка.

Следующий этап в исследовании уравнения (1.8) начался после выхода монографии Е. Сенета [87], посвящённой O – регулярно меняющимся и o – регулярно (правильно) меняющимся функциям.

Определение. *Измеримая функция* $\varphi:[a,+\infty)\to(0,+\infty)$ *называется правильно меняющейся на бесконечности, если существует такое число* $\sigma\in R$, что для произвольного $\lambda>0$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\varphi(\lambda y)}{\varphi(y)}=\lambda^{\sigma}.$$

При этом число σ называется порядком функции при $y\to+\infty$.

Определение. *Измеримая функция* $\varphi:(0,a]\to(0,+\infty)$ *называется правильно меняющейся в нуле*, *если* $\varphi\left(\frac{1}{y}\right)$ *является правильно меняющейся на бесконечности*.

Аналогичным образом вводится понятие правильной изменяемости в любой точке и, следовательно, можно ограничиться изучением свойств функций, правильно меняющихся на бесконечности.

Определение. *Правильно меняющаяся функция* $\psi(y)$ *порядка* $\sigma=0$ *называется медленно меняющейся функцией*.

Было показано, что функция φ является правильно меняющейся на бесконечности (в нуле) порядка σ тогда и только тогда, когда она представима в виде $\varphi(y)=|y|^{\sigma}\psi(y)$, где ψ – медленно меняющаяся на бесконечности (в нуле) функция. Таким образом, при построении теории правильно меняющихся функций достаточно исследовать свойства соответствующих медленно меняющихся функций. Сформулируем два основных результата:

Теорема о представлении. *Если функция* ψ, *определённая на полуоси* $[a,+\infty)$, *где* $a>0$, *является медленно меняющейся, то найдётся число* $b \ge a$ *такое, что при всех* $x \ge b$

$$\psi(x) = \exp\left(\nu(x) + \int_b^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right),$$

где $\nu(x)$ – *ограниченная измеримая на* $[b,\infty)$ *функция, такая что* $\nu(x) \to c$ $(|c| < \infty)$ *при* $x \to \infty$; $\varepsilon(x)$ – *непрерывная на* $[b,\infty)$ *функция, такая что* $\varepsilon(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$.

Теорема о равномерной сходимости. *Если* $\psi:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ – *медленно меняющаяся на бесконечности (в нуле) функция, то для любого фиксированного отрезка* $[a,b]$ $(0<a<b<+\infty)$ *предельное соотношение* $\lim\limits_{\substack{y\to+\infty \\ y\downarrow 0}} \frac{\psi(\lambda y)}{\psi(y)} = 1$ *выполняется равномерно относительно* $\lambda \in [a,b]$.

С помощью первого из приведенных утверждений установлена важная для дальнейшего изложения

Лемма. *Пусть* $\varphi:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ – *непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\substack{y\to+\infty \\ (y\downarrow 0)}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \sigma,$$

тогда она является правильно меняющейся на бесконечности (в нуле) порядка σ.

Монография [87] дала толчок рассмотрению уравнения (1.8), в котором функция φ является непрерывной и правильно меняющейся. Так, в работе S.D. Taliaferro [141] были получены теоремы существования решений данного уравнения, которые вместе со своей производной первого порядка стремятся к нулю при $t \to +\infty$. В свою очередь, в работах V. Maric, M. Tomic [133] и V. Maric [134] были установлены двухсторонние асимптотические оценки для отношений $\frac{y(t)}{\varphi(y(t))}$, где y – решения уравнения (1.8), стремящиеся к нулю при $t \to +\infty$, и указано необходимое и достаточное условие существования таких решений.

Точные асимптотические представления для одного достаточно широкого класса монотонных решений уравнения (1.8) удалось получить в работах В.М. Евтухова, Л.А. Кирилловой [32] и Л.А. Кирилловой [61, 62]. В них уравнение (1.8) рассматривалось в предположении, что $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p:[a,\omega) \to (0,+\infty)$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ – непрерывная функция, $\varphi : \Delta_0 \to (0, +\infty)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, для которой

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_0}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty, \end{cases} \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_0}} \frac{z\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma,$$

где Y_0 принимает значение либо 0, либо $\pm\infty$, Δ_0 – односторонняя окрестность Y_0. При этом было показано, что функция φ удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_0}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \sigma + 1$$

и, следовательно, является правильно меняющейся при $y \to Y_0$ $(y \in \Delta_0)$ порядка $\sigma + 1$. Для данного уравнения был введён класс решений, заданный следующим образом

Определение. *Решение* $y:[t_0,\omega) \to \Delta_0$ $\left([t_0,\omega) \subset [a,\omega)\right)$ *уравнения* (1.8) *называется* $P_\omega(\lambda_0, Y_0)$ *– решением, если оно удовлетворяет следующим условиям*:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0,\ \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Были получены асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для отношений $\dfrac{y(t)}{\varphi(y(t))}$ и $\dfrac{y'(t)}{y(t)}$, где $y(t)$ – либо неограниченное, либо исчезающее в окрестности особой точки $P_\omega(\lambda_0, Y_0)$ – решение уравнения (1.8), а так же установлены необходимые и достаточные условия существования таких решений. Для записи асимптотических представлений $P_\omega(\lambda_0, Y_0)$ – решений уравнения (1.8) в явном виде было указано дополнительное условие на функцию φ:

Определение 1.1. *Будем говорить, что функция* $\varphi(y) = |y|^\sigma \psi(y)$ *обладает свойством* S, *если для любой непрерывно дифференцируемой функции* $L : \Delta_0 \to (0, +\infty)$ *такой, что*

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_0}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0,$$

имеет место соотношение

$$\psi\big(yL(y)\big) = \psi(y)(1 + o(1)) \text{ при } y \to Y_0 \ \ (y \in \Delta_0).$$

Кроме того, в данных работах для уравнения (1.8) рассмотрен случай, когда либо само решение, либо его производная первого порядка стремятся при $t \uparrow \omega$ к константе, отличной от нуля.

После выхода работ В.М. Евтухова и Л.А. Кирилловой, посвящённых уравнению (1.8), естественным образом возникает вопрос об исследовании дифференциального уравнения второго порядка, содержащего в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися относительно неизвестной функции нелинейностями. Начало такому исследованию было положено в работах В.М. Евтухова, В.А. Касьяновой [33, 34] и В.А.Касьяновой [45, 46]. В них рассмотрено уравнение вида

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)[1 + r_i(t)]\varphi_i(y), \tag{1.9}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, \dots, m)$, $p_i : [a, \omega) \to (0, +\infty)$ $(i = 1, \dots m; -\infty < a < \omega \le +\infty)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $r_i : [a, \omega) \to R$ $(i = 1, \dots, m)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_i(t) = 0 \ \ (i = 1, \dots, m),$$

$\varphi_i : \Delta_0 \to (0, +\infty)$ $(i = 1, \dots, m)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции. При этом предполагается, что Y_0 принимает значение либо 0, либо

$\pm\infty$, Δ_0 – односторонняя окрестность Y_0, существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_0}} \varphi_i(y)=\varphi_i^0 ,$$

причём

$$\varphi_i'(y)\neq 0 \text{ при } y\in\Delta_0,\ \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_0}} \frac{y\varphi_i''(y)}{\varphi_i'(y)}=\sigma_i=const .$$

Для данного уравнения был введён несколько иной, по сравнению с работами В.М. Евтухова и В.А. Кирилловой, класс решений. Положим

$$\pi_\omega(t)=\begin{cases} t & \text{при } \omega=+\infty,\\ t-\omega & \text{при } \omega<+\infty.\end{cases}$$

Определение. *Решение* y *уравнения* (1.9) *будем называть* $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$ – *решением*, *где* $-\infty\le\mu_0\le+\infty$, *если оно определено на некотором промежутке* $[t_0,\omega)\subset[a,\omega)$ *и удовлетворяет условиям*:

1) $y(t)\in\Delta_0$ *при* $t\in[t_0,\omega)$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y(t)=Y_0$;

2) $y'(t)\neq 0$ *при* $t\in[t_0,\omega)$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y'(t)=\begin{cases} \text{либо } 0,\\ \text{либо } \pm\infty;\end{cases}$

3) $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}=\mu_0$, *причём при* $\mu_0=\pm\infty$ $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2}=1$.

Данная классификация позволяет описать, исходя из значения μ_0, характер изменения $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$ – решения в окрестности особой точки. Так, если $\mu_0=\pm\infty$, то решение является быстро изменяющимся при $t\uparrow\omega$, если $\mu_0\in R\setminus\{-1\}$, то правильно меняющимся, если $\mu_0=-1$, то медленно меняющимся. Были установлены следующие априорные свойства $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$ – решений:

Лемма 1.1. *Пусть* $y:[t_0,\omega)\to\Delta_0$ – $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$ – *решение уравнения* (1.9). *Тогда имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=1+\mu_0 \quad при \quad |\mu_0|<+\infty,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=\pm\infty \quad при \quad \mu_0=\pm\infty.$$

Наиболее же важными из априорных свойств $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$ – решений являются достаточные признаки, при соблюдении которых правая часть уравнения (1.9) на любом $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$ – решении асимптотически эквивалентна одному слагаемому. Приведём один из них:

Лемма 1.2. *Пусть* $|\mu_0|<+\infty$ *и для некоторого* $i\in\{1,2,...,m\}$ *такого*, что $\varphi_i^0=const\neq 0$, *при всех* $j\in\{1,2,...,m\}\setminus\{i\}$ *имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_j(t)}{p_i(t)}=0, \text{ если } \varphi_j^0=const\neq 0;$$

$$\limsup_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|\left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)}-\frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right]<-|1+\mu_0|(1-\sigma_j), \text{ если } \varphi_j^0=\begin{cases} либо\ 0,\\ либо\ +\infty;\end{cases}$$

Тогда для каждого $\Pi_\omega(\infty,\mu_0)$ *– решения уравнения* (1.9) *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)\varphi_i(y(t))}=0.$$

При выполнении этих признаков были получены необходимые и достаточные условия существования у уравнения (1.9) $\Pi_\omega(\infty,\mu_0)$ – решений и $\Pi_\omega(0,\mu_0)$ – решений, а так же асимптотические представления таких решений в окрестности особой точки.

Другим обобщением уравнения (1.8) является дифференциальное уравнение вида

$$y''=\alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1.10}$$

Данное уравнение было рассмотрено в работах В.М. Евтухова, М.А. Белозёровой [37] и М.А. Белозёровой [3, 4, 5] в предположении, что $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $p:[a,\omega)\to(0,+\infty)$ $(-\infty<a<\omega\le+\infty)$ – непрерывная функция,

$\varphi_i : \Delta_i \to (0, +\infty)$ $(i = 0,1)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_i}} \frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i = const, \quad \limsup_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_i}} \left| \frac{z\varphi_i''(z)}{\varphi_i'(z)} \right| < +\infty \quad (i = 0,1),$$

$$Y_i = \begin{cases} либо & 0, \\ либо & \pm\infty, \end{cases} \quad \Delta_i = \begin{cases} либо & [y_i^0, Y_i), \\ либо & (Y_i, y_i^0] \end{cases} \quad (i = 0,1)$$

и, кроме того, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

Исследовался вопрос об асимптотическом поведении $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений уравнения (1.10), а именно таких решений y, которые удовлетворяют соотношениям

$$y^{(i)} : [t_0, \omega) \to \Delta_i, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0,1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Для четырёх возможных случаев ($\lambda_0 \in R \setminus \{0,1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$) в рамках единого подхода были установлены признаки существования и асимптотические представления всех $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений (правильных и сингулярных, неограниченных и исчезающих). В неособом случае ($\lambda_0 \in R \setminus \{0,1\}$) условия существования были получены без дополнительных ограничений на функции φ_0 и φ_1, а в каждом из особых случаев приходилось требовать, чтобы одна из этих функций обладала свойством S. При этом был указан удобный для применения достаточный признак того, что функция φ_i $(i \in \{0,1\})$ обладает свойством S.

Лемма. *Пусть для функции* $\psi_i(z) = \dfrac{\varphi_i(z)}{|z|^{\sigma_i}}$ $(i \in \{1,2\})$ *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta_i}} \frac{z \ln|z| \psi_i'(z)}{\psi_i(z)} = const,$$

тогда функция φ_i *обладает свойством* S.

В случае же, когда свойством S обладает каждая из функций φ_0 и φ_1, асимптотические представления для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ – решений были записаны в явном виде (при любом значении λ_0).

После выхода работ В.М. Евтухова, В.А. Касьяновой и В.М. Евтухова, М.А. Белозёровой естественным образом возникает вопрос о получении аналогичных результатов для дифференциального уравнения второго порядка, содержащего в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися относительно неизвестной функции и её производной первого порядка нелинейностями. Данному вопросу и посвящена эта диссертационная работа.

§1.3. Постановка задачи и основные результаты

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)[1 + r_i(t)]\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'), \tag{1.11}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1,1\}$ $(i = 1,...,m)$, $p_i : [a,\omega) \to (0,+\infty)$ $(i = 1,..m; -\infty < a < \omega \le +\infty)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $r_i : [a,\omega) \to R$ $(i = 1,...,m)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_i(t) = 0 \quad (i = 1,..., m), \tag{1.12}$$

$\varphi_{ik} : \Delta_k \to (0,+\infty)$ $(k = 0,1; i = 1,...,m)$ – непрерывно дифференцируемые функции, где при $k = 0,1$

$$\Delta_k = \begin{cases} \text{либо } [y_k^0, Y_k), \\ \text{либо } (Y_k, y_k^0], \end{cases} \quad y_k^0 \in R, \quad Y_k = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \tag{1.13}$$

причём φ_{ik} такие, что при $k = 0,1; i = 1,...,m$

$$\lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi_{ik}^0 \quad \left(0 \le \varphi_{ik}^0 \le +\infty\right) \tag{1.14}$$

и

$$\lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z\varphi_{ik}'(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = const\,. \tag{1.15}$$

Из (1.15) следует, что для функций

$$\psi_{ik}(z) = \frac{\varphi_{ik}(z)}{|z|^{\sigma_{ik}}} \quad (k = 0,1)$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{z \to Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z\psi_{ik}'(z)}{\psi_{ik}(z)} = 0\,. \tag{1.16}$$

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & при\ \omega = +\infty, \\ t - \omega & при\ \omega < +\infty. \end{cases}$$

Определение. *Решение* y *уравнения* (1.11), *заданное на промежутке* $[t_0, \omega) \subset [a, \omega)$, *будем называть* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *– решением, где* $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, *если оно удовлетворяет следующим условиям*

$$y^{(k)} : [t_0, \omega) \to \Delta_k\,,\ \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = Y_k \quad (k = 0,1)\,, \tag{1.17}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0\,,\ \textit{причём при}\ \mu_0 = \pm\infty \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y''(t) y(t)}{(y'(t))^2} = 1\,. \tag{1.18}$$

Целью настоящей диссертационной работы является получение необходимых и достаточных условий существования у уравнения (1.11) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решений, а также установление асимптотического поведения таких решений и их производных первого порядка в окрестности особой точки. Отметим наиболее важные моменты в постановке данной задачи:

1) Так как особая точка ω может принимать и конечные значения, и быть равной $+\infty$, для уравнения (1.11) ставится задача использовать единый подход для установления асимптотики как правильных, так и различных типов сингулярных решений. Кроме того, из (1.13) следует, что искомые решения могут быть в окрестности ω либо неограниченными, либо исчезающими.

2) Запись коэффициента в виде $p_i[1+r_i(t)]$, где функции p_i являются непрерывно дифференцируемыми, а r_i – непрерывными, позволяет, в некоторых случаях, ослабить ограничения на коэффициент, который может не быть дифференцируемой функцией. Так, например, функция $t+|\sin t|$ не является дифференцируемой в окрестности бесконечности, поскольку в точках $t_k=\pi k$ производная не существует. Однако она представима в виде $t[1+|\sin t|/t]$, где функция t является непрерывно дифференцируемой, а функция $|\sin t|/t$ – непрерывной в окрестности бесконечности. Как будет показано в дальнейшем, вид $r_i(t)$ не влияет на асимптотическое поведение решений выделенного класса.

3) Предельное соотношение (1.15) является достаточным условием правильной изменяемости функций φ_{ik} $(k=0,1; i=1,...,m)$ в окрестности Y_k (по Е. Сенета). Заметим, что данное ограничение на гладкость рассматриваемых нелинейностей является менее жёстким по сравнению с теми, которые использовались при исследовании уравнений (1.9) и (1.10).

Далее обратим внимание на особенности рассматриваемого класса решений. Отметим, что те из монотонных решений уравнения (1.11), которые удовлетворяют условию (1.16), являются наиболее сложными для рассмотрения, поскольку при $t\uparrow\omega$ и само решение, и его производная первого порядка стремятся либо к нулю, либо к бесконечности. Поэтому при исследовании таких решений приходится накладывать на них дополнительные ограничения, а именно первое из условий (1.17). Примером $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – решений могут служить показательная, степенная и логарифмическая функции, а также функции, полученные арифметическими действиями над данными и их суперпозициями. Величина μ_0 указывает на характер изменения решения в окрестности особой точки: если $\mu_0=\pm\infty$, то решение является быстро изменяющимся при $t \uparrow \omega$, если $\mu_0 \in R \setminus \{-1\}$, то правильно меняющимся, если $\mu_0 = -1$, то медленно меняющимся.

Необходимо подчеркнуть, что вопрос о существовании у уравнения (1.11) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решений при $\varphi_{ik} \equiv 1$ $(i = 1,...,m)$ рассматривался в работах В.А. Касьяновой [45, 46], а при $m = 1$ – в работах М.А. Белозёровой [3, 4, 5]. В них были получены необходимые и достаточные условия существования таких решений, а так же их асимптотические представления в окрестности особой точки. Однако в этих работах накладывались более жёсткие ограничения на нелинейности, а именно все функции φ_{ik} должны были быть дважды непрерывно дифференцируемыми. Кроме того, у В.А.Касьяновой отдельно исследовалась асимптотика неограниченных и исчезающих в окрестности особой точки решений. В данной же постановке задача рассматривается впервые.

Основные результаты диссертации содержатся в главах II – IV. Так, в главе II для произвольных $\mu_0 \in R$ и $i \in \{1,...,m\}$ приведены условия, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решении уравнения (1.11) правая его часть асимптотически эквивалентна в окрестности особой точки i – му слагаемому (Лемма 2.1). При соблюдении этих условий установлены необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решений в случае, когда $\mu_0 \in R \setminus \{-1, 0\}$, а также получены неявные асимптотические представления для таких решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$ (Теорема 2.1). Кроме того, указаны дополнительные ограничения на нелинейности, которые позволяют записать данные представления в явном виде (Теорема 2.2). Результаты главы II отражены в работах [66, 70].

В главе III, в случае соблюдения условий асимптотической эквивалентности правой части уравнения (1.11) одному слагаемому, приведенных в главе II, установлены необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ – решений и $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ – решений данного уравнения, а так же получены асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка при $t\uparrow\omega$ (Теоремы 3.1 – 3.4). Результаты главы III отражены в работах [67, 68].

В главе IV для произвольного $i\in\{1,...,m\}$ приведены условия, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ – решении уравнения (1.11) правая его часть асимптотически эквивалентна в окрестности особой точки i – му слагаемому (Лемма 4.1). При соблюдении этих условий установлены необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ – решений, а так же получены неявные асимптотические представления для таких решений и их производных первого порядка при $t\uparrow\omega$ (Теорема 4.1). Кроме того, указаны дополнительные ограничения на нелинейности, которые позволяют записать данные представления в явном виде (Теорема 4.2). Результаты главы IV отражены в работах [39, 69].

Все полученные результаты проиллюстрированы на примере дифференциального уравнения с быстро и правильно изменяющимися в окрестности особой точки коэффициентами

$$y''=\sum_{i=1}^{m}a_i e^{\beta_i t}t^{\gamma_i}\,|\ln t|^{\rho_i}\,[1+r_i(t)]\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'),\qquad(1.19)$$

в котором $a_i,\beta_i,\gamma_i,\rho_i\in R,\ a_i\neq 0,\ (i=1,...,m),\ t\in(0,+\infty),\ r_i(t)$ – непрерывные на полуоси функции, стремящиеся к нулю при $t\uparrow\omega\ (\omega\in(0,+\infty);i=1,...,m)$. Уравнение (1.19) является частным случаем (1.11) при $\alpha_i=\operatorname{sgn}a_i$, $p_i(t)=|a_i|e^{\beta_i t}t^{\gamma_i}|\ln t|^{\rho_i}$. Для него решён вопрос об асимптотическом поведении $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – решений в случаях $\omega=+\infty,\ \omega=1$ и $\omega\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$.

Выводы

В §§1.1 – 1.2 отражены основные этапы развития асимптотической теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков, содержащих в правой части сумму слагаемых со степенными и близкими к степенным нелинейностями. Естественным представляется распространение некоторых из ранее полученных результатов на дифференциальное уравнении второго порядка, содержащее в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися как относительно неизвестной функции, так и её производной первого порядка нелинейностями. В §1.3 приведено уравнение такого вида (уравнение (1.11)) и выделен достаточно широкий класс монотонных решений ($\Pi_{\omega}(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решений) данного уравнения. Кроме того, сформулированы основные задачи по установлению условий существования и асимптотического поведения решений из этого класса в окрестности особой точки.

ГЛАВА II

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (1.11) ДЛЯ СЛУЧАЯ $\mu_0 \in \mathrm{R}\setminus\{-1;0\}$

Настоящая глава посвящена установлению условий существования и асимптотических представлений $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – решений уравнения (1.11) в случае, когда правая его часть на каждом таком решении асимптотически эквивалентна при $t\uparrow\omega$ одному слагаемому и $\mu_0 \in \mathrm{R}\setminus\{-1;0\}$.

§ 2.1. Некоторые априорные свойства $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – решений

Обозначим $M=\{1,...,m\}$.

Лемма 2.1. *Пусть* $\mu_0 \in \mathrm{R}$ *и для некоторых* $i\in M$ *и* $j\in M\setminus\{i\}$ *соблюдается условие*

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|\left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)}-\frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right]<\xi_{ij}^0, \tag{2.1}$$

где

$$\xi_{ij}^0 \operatorname{sgn}\pi_\omega(t)=(1+\mu_0)(\sigma_{i0}-\sigma_{j0})+\mu_0(\sigma_{i1}-\sigma_{j1}).$$

Тогда для каждого $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – решения уравнения (1.11) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $y:[t_0,\omega)\to\Delta_0$ – произвольное $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – решение уравнения (1.11). Обозначим

$$z_j(t)=\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))},$$

тогда

$$z_j'(t) = z_j(t)\left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} + \frac{y'(t)\varphi_{j0}'(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} + \right.$$

$$\left. + \frac{y''(t)\varphi_{j1}'(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))} - \frac{y'(t)\varphi_{i0}'(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} - \frac{y''(t)\varphi_{i1}'(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right].$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$z_j'(t) = \frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|\,p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|\,p_i'(t)}{p_i(t)} - \right.$$

$$- \frac{|\pi_\omega(t)|\,y'(t)}{y(t)}\left(\frac{y(t)\varphi_{i0}'(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} - \frac{y(t)\varphi_{j0}'(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))}\right) -$$

$$\left. - \frac{|\pi_\omega(t)|\,y''(t)}{y'(t)}\left(\frac{y'(t)\varphi_{i1}'(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))} - \frac{y'(t)\varphi_{j1}'(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))}\right)\right].$$

В силу условий (1.15) и (1.17)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y^{(k)}(t)\varphi_{lk}'(y^{(k)}(t))}{\varphi_{lk}(y^{(k)}(t))} = \sigma_{lk},\ \text{где } k = 0,1;\ l = 1,\dots,m. \qquad (2.3)$$

Кроме того, согласно условию (1.18) и лемме 1.1 имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)} = 1 - k + \mu_0 \quad (k = 0,1). \qquad (2.4)$$

Из (2.1), (2.3) и (2.4) вытекает существование постоянных $z_j^0 < 0$ и $t_1 \in [t_0,\omega)$ таких, что выполняется неравенство

$$z_j'(t) \le \frac{z_j^0 \cdot z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|} \quad \text{при} \quad t \in [t_1,\omega),$$

откуда следует

$$\ln\left|\frac{z_j(t)}{z_j(t_1)}\right| \le z_j^0 \operatorname{sgn}\pi_\omega(t)\ln\left|\frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_1)}\right| \quad \text{при} \quad t \in [t_1,\omega).$$

Поскольку выражение, стоящее справа, стремится к $-\infty$ при $t\uparrow\omega$, то

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_j(t) = 0.$$

Из этого предельного соотношения и определения $z_j(t)$ вытекает справедливость (2.2).

§2.2. Условия существования и асимптотические представления $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – решений для случая $\mu_0 \in \mathrm{R}\setminus\{-1;0\}$

Введём при $i \in \{1,...,m\}$ вспомогательную функцию

$$I_{i1}(t)=\int_{I_{i1}^0}^{t} p_i(s)\,|\,\pi_\omega(s)\,|^{\sigma_{i0}}\,ds,$$

где предел интегрирования I_{i1}^0 равен или a, или ω и выбран так, чтобы соответствующий интеграл стремился при $t\uparrow\omega$ либо к бесконечности, либо к нулю.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mu_0 \in \mathrm{R}\setminus\{-1,0\}$ *и для некоторого* $i\in M$ *при всех* $j\in M\setminus\{i\}$ *соблюдается условие (2.1), а так же имеет место неравенство* $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$. *Тогда для существования у уравнения (1.11)* $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ *– решений необходимо, а если выполняется одно из двух условий :*

$$\mu_0(\sigma_{i1}-2)\neq 1;\ \mu_0(\sigma_{i1}-2)=1\ \text{и}\ \ (\sigma_{i1}-1)(\sigma_{i0}+\sigma_{i1}-1)>0, \tag{2.5}$$

то и достаточно, чтобы

$$Y_k=\begin{cases}\pm\infty, & \text{если}\ \lim\limits_{t\uparrow\omega}|\,\pi_\omega(t)\,|^{1-k+\mu_0}=+\infty,\\ 0, & \text{если}\ \lim\limits_{t\uparrow\omega}|\,\pi_\omega(t)\,|^{1-k+\mu_0}=0\end{cases}\qquad (k=0,1), \tag{2.6}$$

при $t\in(a,\omega)$ *выполнялись неравенства*

$$\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i1}(t)y_1>0,\quad (1+\mu_0)\pi_\omega(t)y_0y_1>0 \tag{2.7}$$

и имело место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)}=\mu_0(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}). \tag{2.8}$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})\frac{I_{i1}(t)}{|\,\pi_\omega(t)\,|^{\sigma_{i0}}}[1+o(1)]\,,\ \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)]\,. \tag{2.9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y:[t_0,\omega)\to\Delta_0$ – произвольное $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – решение уравнения (1.11). Так как $\mu_0\in R\setminus\{-1,0\}$, то из соотношения (2.4) вытекает справедливость (2.6), второго из неравенств (2.7) и второго из асимптотических представлений (2.9). В силу выполнения условий (1.12) и (2.1) из уравнения (1.11) с учётом леммы 2.1 получим

$$y''(t)=\alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega .$$

Из данного равенства, принимая во внимание соотношения (2.4) и определение функций ψ_{ik} $(k=0,1)$, имеем при $t\uparrow\omega$

$$\frac{y''(t)\,|\,y'(t)\,|^{-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))}=\frac{\alpha_i}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}}\,p_i(t)\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\sigma_{i0}}\,[1+o(1)] \tag{2.10}$$

и

$$\frac{|\,y'(t)\,|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\,\operatorname{sgn} y'(t)}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))}=\frac{\alpha_i}{\mu_0\,|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}}\,p_i(t)\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\sigma_{i0}}\,\pi_\omega(t)[1+o(1)]. \tag{2.11}$$

Покажем, учитывая условие $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$, что допустимо асимптотическое представление

$$\frac{|\,y'(t)\,|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\,\operatorname{sgn} y'(t)}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))}=\frac{\alpha_i\left(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}\right)}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}}\,I_{i1}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega . \tag{2.12}$$

Поскольку

$$\left(\frac{|\,y'(t)\,|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\,\operatorname{sgn} y'(t)}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))}\right)'=\frac{|\,y'(t)\,|^{-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\,y''(t)}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))}\times$$

$$\times\left(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}-\frac{y'(t)\psi_{i1}'(y'(t))}{\psi_{i1}(y'(t))}-\frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)}\cdot\frac{y(t)\psi_{i0}'(y(t))}{\psi_{i0}(y(t))}\right),$$

то, принимая во внимание (1.15) – (1.18) и (2.10), имеем

$$\left(\frac{|\,y'(t)\,|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\,\operatorname{sgn} y'(t)}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))}\right)'=\frac{\alpha_i\left(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}\right)}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}}\,p_i(t)\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\sigma_{i0}}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega .$$

Интегрируя последнее соотношение от t_0 до t $(t\in(t_0,\omega))$ с учётом определения функции $I_{i1}(t)$, получим

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\operatorname{sgn} y'(t)}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))} = c_i + \frac{\alpha_i\left(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}\right)}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} I_{i1}(t)[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega,$$

где $c_i \in R$. Если $I_{i1}^0 = t_0$, то справедливо (2.12). Покажем, что $c_i = 0$ при $I_{i1}^0 = \omega$. Предположим противное, тогда

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\operatorname{sgn} y'(t)}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))} = c_i + o(1) \text{ при } t\uparrow\omega$$

и, в силу (2.10),

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\alpha_i}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} p_i(t)\,|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}} \left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \text{ при } t\uparrow\omega.$$

Интегрируя последнее соотношение от t_0 до t $(t\in(t_0,\omega))$, находим, что

$$\ln|y'(t)| = C_i + \frac{\alpha_i}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} I_{i1}(t)\left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \text{ при } t\uparrow\omega,$$

где $C_i \in R$. В данном соотношении левая часть при $t\uparrow\omega$ стремится к бесконечности, а правая – к константе. Полученное противоречие доказывает справедливость (2.12) в случае, когда $I_{i1}^0 = \omega$.

Из (2.12) вытекает справедливость первого из неравенств (2.7), а также, учитывая определение функций ψ_{ik} $(k=0,1)$ и условие (2.4), первого из асимптотических представлений (2.9). Кроме того, в силу (2.11) и (2.12) имеет место предельное соотношение (2.8).

Достаточность. Пусть для некоторого $i\in M$ соблюдаются условия теоремы и выполняются (2.5) – (2.8). Зафиксировав с помощью (2.6), (2.7) значения Y_k и окрестности Δ_k $(k=0,1)$, докажем существование у уравнения (1.11) хотя бы одного $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – решения, допускающего при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (2.9).

Рассмотрим сначала систему соотношений вида

$$\frac{|y'|^{1/\Lambda_i}}{\psi_{i0}(y)\psi_{i1}(y')} = \frac{|I_{i1}(t)|}{|\Lambda_i|\,|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}}[1+v_1], \quad \frac{y'}{y} = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}[1+v_2], \tag{2.13}$$

в которой $\Lambda_i = 1/(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})$, и установим, что она однозначно определяет заданные на множестве $D_0 = [t_2,\omega)\times V_0$, где $t_2 \in [a,\omega)$, $V_0 = \{(v_1,v_2):|v_k| \le 0{,}5 (k=1,2)\}$ непрерывно дифференцируемые неявные функции $y^{(k)} = Y_{ik}(t,v_1,v_2)$ $(k=0,1)$ следующего вида

$$Y_{ik}(t,v_1,v_2) = y_k^0 \,|\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}(t,v_1,v_2)} \ (k=0,1), \tag{2.14}$$

где $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k$, $|z_{k+1}(t,v_1,v_2)| \le |1-k+\mu_0|/2$ при $(t,v_1,v_2)\in D_0$ и $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z_{k+1}(t,v_1,v_2)=0$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$. Для этого, полагая в (2.13)

$$y^{(k)} = y_k^0 \,|\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}} \quad (k=0,1), \tag{2.15}$$

получим, с учётом знаковых условий (2.7), систему соотношений вида

$$\begin{cases} |\pi_\omega(t)|^{\frac{\mu_0+z_2}{\Lambda_i}} = \dfrac{|I_{i1}(t)|[1+v_1]}{|\Lambda_i|\,|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} \prod\limits_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 \,|\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}}\right), \\ |\pi_\omega(t)|^{z_2-z_1} = |1+\mu_0|[1+v_2]. \end{cases} \tag{2.16}$$

Поскольку в силу условия (2.8) имеем $|I_{i1}(t)| = |\pi_\omega(t)|^{\frac{\mu_0}{\Lambda_i}+u(t)}$, где $u(t)$ – непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $t\uparrow\omega$, то систему (2.16) можно переписать в виде

$$\begin{cases} z_2 = \Lambda_i\left(u(t) + \dfrac{\ln\left|\dfrac{|I_{i1}(t)|[1+v_1]}{|\Lambda_i|\,|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} \prod\limits_{k=0}^{1}\psi_{ik}\left(y_k^0\,|\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}}\right)\right|}{\ln|\pi_\omega(t)|}\right), \\ z_2 - z_1 = \dfrac{\ln|(1+\mu_0)[1+v_2]|}{\ln|\pi_\omega(t)|}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Частично разрешая эту систему относительно z_1, z_2 (как линейную неоднородную), получим

$$z_k = a_k(t) + b_k(t,v_1,v_2) + Z(t,z_1,z_2) \quad (k=1,2),$$

где

$$a_1(t)=\Lambda_i u(t)-\Lambda_i\,\frac{\ln(|\Lambda_i\|1+\mu_0|^{1-\sigma_{i1}})}{\ln|\pi_\omega(t)|},\qquad a_2(t)=\Lambda_i u(t)-\Lambda_i\,\frac{\ln(|\Lambda_i\|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}})}{\ln|\pi_\omega(t)|},$$

$$b_1(t,v_1,v_2)=\Lambda_i\,\frac{\ln\left([1+v_1][1+v_2]^{-\frac{1}{\Lambda_i}}\right)}{\ln|\pi_\omega(t)|},\quad b_2(t,v_1,v_2)=\Lambda_i\,\frac{\ln[1+v_1]}{\ln|\pi_\omega(t)|},$$

$$Z(t,z_1,z_2)=\Lambda_i\,\frac{\ln\left[\prod_{k=0}^{1}\psi_{ik}(y_k^0|\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}})\right]}{\ln|\pi_\omega(t)|}.$$

В силу свойств функций u, I_{i1} и условий (1.16), (2.6), (2.7) имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} a_k(t)=0 \quad (k=1,2),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} b_k(t,v_1,v_2)=0 \quad (k=1,2) \quad \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t,z_1,z_2)=0 \quad \textit{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\partial Z(t,z_1,z_2)}{\partial z_k}=0 \quad (k=1,2) \tag{2.18}$$

$$\textit{равномерно по} \quad (z_1,z_2)\in Z_0,$$

где $Z_0=\{(z_1,z_2):|z_{k+1}|\le|1-k+\mu_0|/2 \quad (k=0,1)\}$.

Поскольку выполняется (2.18), то существует число $t_0\in[a,\omega)$ такое, что на множестве $[t_0,\omega)\times Z_0\times V_0$ соблюдаются неравенства

$$|a_k(t)+b_k(t,v_1,v_2)+Z(t,z_1,z_2)|\le\frac{\beta_0}{4} \quad (k=1,2)$$

$$(\textit{где} \quad \beta_0=\min\{|1+\mu_0|,|\mu_0|\}). \tag{2.19}$$

и условие Липшица

$$|Z(t,z_1^2,z_2^2)-Z(t,z_1^1,z_2^1)|\le 1/3\sum_{l=1}^{2}|z_l^2-z_l^1|. \tag{2.20}$$

Теперь обозначим через B банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega=[t_0,\omega)\times V_0$ вектор-функций $z=(z_1,z_2):\Omega\to\mathrm{R}^n$ с нормой

$$\| z \| = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{2} | z_k(t, v_1, v_2) | : (t, v_1, v_2) \in \Omega \right\}.$$

Выберем из него подпространство B_0 таких функций из B, для которых $\| z \| \le \beta_0/2$, и рассмотрим на B_0, выбрав произвольное число $\nu \in (0,1)$, оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, определённый соотношениями

$$\Phi_k(z)(t, v_1, v_2) = z_k(t, v_1, v_2) - \nu \,| z_k(t, v_1, v_2) - a_k(t) - b_k(t, v_1, v_2) -$$
$$- Z(t, z_1(t, v_1, v_2), z_2(t, v_1, v_2)) | \quad (k = 1,2). \tag{2.21}$$

Для любого $z \in B_0$ в силу условия (2.19) имеем

$$| \Phi_k(z)(t, v_1, v_2) | \le (1 - \nu) | z_k(t, v_1, v_2) | + \frac{\nu \beta_0}{4} \quad (k = 1,2)$$

при $(t, v_1, v_2) \in \Omega$. Поэтому на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2} | \Phi_k(z)(t, v_1, v_2) | \le (1 - \nu) \sum_{k=1}^{2} | z_k(t, v_1, v_2) | + \frac{\nu \beta_0}{2} \le$$
$$\le (1 - \nu) \| z \| + \frac{\nu \beta_0}{2} \le (1 - \nu) \frac{\beta_0}{2} + \frac{\nu \beta_0}{2} = \frac{\beta_0}{2}.$$

Отсюда вытекает, что $\| \Phi(z) \| \le \beta_0/2$ и, следовательно, $\Phi(B_0) \subset B_0$.

Пусть теперь $z^1, z^2 \in B_0$. Тогда в силу (2.20) при $(t, v_1, v_2) \in \Omega$

$$| \Phi_k(z^2)(t, v_1, v_2) - \Phi_k(z^1)(t, v_1, v_2) | \le (1 - \nu) | z_k^2(t, v_1, v_2) - z_k^1(t, v_1, v_2) | +$$
$$+ \nu \,| Z(t, z_1^2, z_2^2) - Z(t, z_1^1, z_2^1) | \le (1 - \nu) | z_k^2(t, v_1, v_2) - z_k^1(t, v_1, v_2) | +$$
$$+ \frac{\nu}{3} \sum_{l=1}^{2} | z_l^2(t, v_1, v_2) - z_l^1(t, v_1, v_2) | \, (k = 1,2).$$

Значит, на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2} | \Phi_k(z^2)(t, v_1, v_2) - \Phi_k(z^1)(t, v_1, v_2) | \le$$
$$\le \left(1 - \frac{\nu}{3} \right) \sum_{k=1}^{2} | z_k^2(t, v_1, v_2) - z_k^1(t, v_1, v_2) | \le \left(1 - \frac{\nu}{3} \right) \| z^2 - z^1 \|,$$

откуда следует, что

$$\| \Phi(z^2) - \Phi(z^1) \| \le \left(1 - \frac{\nu}{3} \right) \| z^2 - z^1 \|.$$

Таким образом показано, что оператор Ф отображает пространство B_0 в себя и является на нём оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная вектор-функция $z \in B_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (2.21) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением системы (2.17), удовлетворяющим условию $\| z \| \le \beta_0/2$. Из (2.17) с учётом (2.18) следует, что компоненты данного решения стремятся к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$. Кроме того, поскольку для системы (2.17) якобиан

$$1 - \Lambda_i \left(\frac{y_0^0 \, |\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0+z_1} \, \psi'_{i0}(y_0^0 \, |\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0+z_1})}{\psi_{i0}(y_0^0 \, |\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0+z_1})} + \frac{y_1^0 \, |\pi_\omega(t)|^{\mu_0+z_2} \, \psi'_{i1}(y_1^0 \, |\pi_\omega(t)|^{\mu_0+z_2})}{\psi_{i1}(y_1^0 \, |\pi_\omega(t)|^{\mu_0+z_2})} \right)$$

в силу представлений (2.15) и условий (1.16), (2.6), (2.7) отличен от нуля на множестве $\Omega_1 = [t_1, \omega) \times V_0$, где $t_1 \in [t_0, \omega)$, то из известной локальной теоремы о существовании неявных функций, определённых системой соотношений, вытекает непрерывная дифференцируемость этого решения на Ω_1. В силу замены (2.15) полученной вектор-функции (z_1, z_2) соответствует вектор-функция (Y_{i0}, Y_{i1}) с компонентами вида (2.14), которая является решением системы (2.13), причём с учётом (2.6), (2.7)

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y_{ik}(t, v_1, v_2) = Y_k$$

$$\textit{равномерно по } (v_1, v_2) \in V_0 \quad (k = 0,1),$$

$$Y_{ik}(t, v_1, v_2) \subset \Delta_k \tag{2.22}$$

$$\textit{при } (v_1, v_2) \in V_0, \ t \in [t_2, \omega), \ \textit{где } t_2 \in [t_1, \omega) \quad (k = 0,1).$$

Рассмотрим некоторые свойства функций Y_{ik} $(k = 0,1)$. В силу (1.16), (2.22) при $j \in M, k = 0,1$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} G_{jk}(t,v_1,v_2)=0, \quad \textit{в которых}$$

$$G_{jk}(t,v_1,v_2)=\frac{Y_{ik}(t,v_1,v_2)\psi'_{jk}\left(Y_{ik}(t,v_1,v_2)\right)}{\psi_{jk}\left(Y_{ik}(t,v_1,v_2)\right)}. \tag{2.23}$$

Теперь положим в системе (2.13) $y^{(k)}=Y_{ik}(t,v_1,v_2)$ $(k=0,1)$ и продифференцируем полученные соотношения по t. В результате имеем систему уравнений, линейных относительно $(Y_{i0})'_t$ и $(Y_{i1})'_t$

$$\begin{cases} -\dfrac{\psi'_{i0}\left(Y_{i0}(t,v_1,v_2)\right)}{\psi_{i0}\left(Y_{i0}(t,v_1,v_2)\right)}(Y_{i0})'_t+ \\ +\left(\dfrac{1}{\Lambda_i Y_{i1}(t,v_1,v_2)}-\dfrac{\psi'_{i1}\left(Y_{i1}(t,v_1,v_2)\right)}{\psi_{i1}\left(Y_{i1}(t,v_1,v_2)\right)}\right)(Y_{i1})'_t=\dfrac{I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)}, \\ -\dfrac{Y_{i1}(t,v_1,v_2)}{Y_{i0}^2(t,v_1,v_2)}(Y_{i0})'_t+\dfrac{1}{Y_{i0}(t,v_1,v_2)}(Y_{i1})'_t=-\dfrac{1+\mu_0}{\pi_\omega^2(t)}[1+v_2]. \end{cases} \tag{2.24}$$

Определитель данной системы равен

$$\frac{1}{Y_{i0}^2(t,v_1v_2)}\left(\frac{1}{\Lambda_i}-G_{i0}(t,v_1,v_2)-G_{i1}(t,v_1,v_2)\right),$$

поэтому в силу (2.23), условия $1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}\neq 0$ и вида функции Y_{i0} найдётся $t_3\in[t_2,\omega)$ такое, что на множестве $[t_3,\omega)\times V_0$ у системы (2.24) существует единственное решение, заданное формулами

$$(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t=\frac{\dfrac{Y_{i0}(t,v_1,v_2)I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)}+\dfrac{1+\mu_0}{\pi_\omega^2(t)}[1+v_2]\dfrac{Y_{i0}^2(t,v_1,v_2)}{Y_{i1}(t,v_1,v_2)}\left(\dfrac{1}{\Lambda_i}-G_{i1}(t,v_1,v_2)\right)}{\dfrac{1}{\Lambda_i}-G_{i0}(t,v_1,v_2)-G_{i1}(t,v_1,v_2)},$$

$$(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t=\frac{\dfrac{Y_{i1}(t,v_1,v_2)I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)}+\dfrac{1+\mu_0}{\pi_\omega^2(t)}[1+v_2]Y_{i0}(t,v_1,v_2)G_{i0}(t,v_1,v_2)}{\dfrac{1}{\Lambda_i}-G_{i0}(t,v_1,v_2)-G_{i1}(t,v_1,v_2)}.$$

Принимая во внимание представления для $(Y_{i0})'_t$ и $(Y_{i1})'_t$, получим

$$\frac{\pi_\omega(t)(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i0}(t,v_1,v_2)}=\frac{\dfrac{\pi_\omega(t)I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)}+\dfrac{1}{\Lambda_i}-G_{i1}(t,v_1,v_2)}{\dfrac{1}{\Lambda_i}-G_{i0}(t,v_1,v_2)-G_{i1}(t,v_1,v_2)},$$

$$\frac{\pi_\omega(t)(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i1}(t,v_1,v_2)} = \frac{\dfrac{\pi_\omega(t)I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} + G_{i0}(t,v_1,v_2)}{\dfrac{1}{\Lambda_i} - G_{i0}(t,v_1,v_2) - G_{i1}(t,v_1,v_2)},$$

из чего, с учетом (2.8), следует, что равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ справедливы равенства

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i0}(t,v_1,v_2)} = 1+\mu_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i1}(t,v_1,v_2)} = \mu_0. \qquad (2.25)$$

Поскольку предельные соотношения (2.23) и (2.25) выполняются равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$, то и равенство

$$\lim_{t\uparrow\omega} H_i(t,v_1,v_2) = 1, \quad \textit{в котором}$$

$$H_i(t,v_1,v_2) = \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_j [1+r_j(t)] \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{j1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}, \qquad (2.26)$$

также выполняется равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$. Для установления этого факта воспользуемся схемой доказательства леммы 2.1. Обозначим

$$P_j(t,v_1,v_2) = \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{j1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}.$$

Поскольку

$$(P_j(t,v_1,v_2))'_t = \frac{P_j(t,v_1,v_2)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|\,p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|\,p'_i(t)}{p_i(t)} + \right.$$

$$+\frac{|\pi_\omega(t)|(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i0}(t,v_1,v_2)}\left(\frac{Y_{i0}(t,v_1,v_2)\varphi'_{j0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))}{\varphi_{j0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))} - \frac{Y_{i0}(t,v_1,v_2)\varphi'_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))}{\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))}\right) +$$

$$\left.+\frac{|\pi_\omega(t)|(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i1}(t,v_1,v_2)}\left(\frac{Y_{i1}(t,v_1,v_2)\varphi'_{j1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{\varphi_{j1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))} - \frac{Y_{i1}(t,v_1,v_2)\varphi'_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}\right)\right],$$

то в силу (2.23), (2.25) и условия (2.1) существуют постоянные $P_j^0 < 0$ и $t_4 \in [t_3,\omega)$ такие, что при всех $(v_1,v_2)\in V_0$ выполняется неравенство

$$(P_j(t,v_1,v_2))'_t \le \frac{P_j^0 \cdot P_j(t,v_1,v_2)}{|\pi_\omega(t)|} \quad \textit{при} \quad t\in[t_4,\omega),(v_1,v_2)\in V_0.$$

Проинтегрировав последнее соотношение по t от t до t_4, получим неравенство

$$\ln|P_j(t,v_1,v_2)| \le C + P_j^0 \operatorname{sgn}\pi_\omega(t)\ln\left|\frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_4)}\right|,$$

в котором $t\in[t_4,\omega)$, $(v_1,v_2)\in V_0$. Поскольку выражение, стоящее справа, стремится к $-\infty$ при $t\uparrow\omega$, то предельное соотношение (2.26) выполняется равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$.

Кроме того, поскольку вектор-функция $(Y_{i0}(t,v_1,v_2),\ Y_{i1}(t,v_1,v_2))$ удовлетворяет системе соотношений (2.13), то имеет место равенство

$$\frac{\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{Y_{i1}(t,v_1,v_2)} = \alpha_i\Lambda_i\frac{|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}}}{I_{i1}(t)}\cdot\frac{1}{[1+v_1][1+v_2]^{\sigma_{i0}}}. \qquad (2.27)$$

Теперь, применяя к уравнению (1.11) преобразование

$$y^{(k)}(t) = Y_{ik}(t,v_1(x),v_2(x))\ (k=0,1),\quad x=\beta\ln|\pi_\omega(t)|,$$

$$\beta=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \omega=+\infty,\\ -1, & \textit{если}\ \omega<+\infty,\end{cases} \qquad (2.28)$$

и учитывая, что вектор-функция $(Y_{i0}(t,v_1(x),v_2(x)),Y_{i1}(t,v_1(x),v_2(x)))$ при $t\in[t_4,\omega)$ и $(v_1(x),\ v_2(x))\in V_0$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{|y'(t)|^{1/\Lambda_i}}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))} = \frac{|I_{i1}(t)|}{|\Lambda_i||1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}}[1+v_1(x)],\quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}[1+v_2(x)], \qquad (2.29)$$

получим, принимая во внимание (2.27), систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1' = \beta[-h_i(t)[1+v_1] - (1+\mu_0)G_{i0}(t,v_1,v_2)[1+v_1][1+v_2] + \\ \qquad + (1-\Lambda_i G_{i1}(t,v_1,v_2))h_i(t)H_i(t,v_1,v_2)[1+v_2]^{-\sigma_{i0}}, \\ v_2' = \beta[[1+v_2] - (1+\mu_0)[1+v_2]^2 + \\ \qquad + \Lambda_i h_i(t)H_i(t,v_1,v_2)[1+v_2]^{1-\sigma_{i0}}[1+v_1]^{-1}], \end{cases} \qquad (2.30)$$

в которой $h_i(t)=\dfrac{\pi_\omega(t)I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)}$, t-функция, обратная к $x=\beta\ln|\pi_\omega(t)|$. Данную систему рассмотрим на множестве $[x_0,+\infty)\times V_0$, где $x_0=\beta\ln|\pi_\omega(t_4)|$.

Поскольку выполняется (2.26), то имеет место равенство

$$H_i(t,v_1,v_2)=1+R_{i1}(x,v_1,v_2), \tag{2.31}$$

где функция $R_{i1}(x,v_1,v_2)$ стремится к нулю при $x\to+\infty$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$.

Кроме того, допустимы представления

$$[1+v_2]^{-\sigma_{i0}}=1-\sigma_{i0}v_2+R_2(v_1,v_2) \quad и \quad \frac{[1+v_2]^{1-\sigma_{i0}}}{1+v_1}=1-v_1+(1-\sigma_{i0})v_2+R_3(v_1,v_2), \tag{2.32}$$

в которых функции $R_k(v_1,v_2)$ $(k=2,3)$ обладают свойством: $\lim\limits_{|v_1|+|v_2|\to0}\dfrac{R_k(v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|}=0$.

Учитывая (2.31) и (2.32), систему (2.30) можно переписать в виде

$$\begin{cases} v_1'=\beta[f_1(x)+c_{11}(x)v_1+c_{12}(x)v_2+V_{11}(x,v_1,v_2)+V_{12}(x,v_1,v_2)], \\ v_2'=\beta[f_2(x)+c_{21}(x)v_1+c_{22}(x)v_2+V_{21}(x,v_1,v_2)+V_{22}(x,v_1,v_2)], \end{cases} \tag{2.33}$$

где

$$f_1(x)=0, \quad c_{11}(x)=-h_i(t), \quad c_{12}(x)=-\sigma_{i0}h_i(t),$$

$$f_2(x)=-\mu_0+\Lambda_i h_i(t), \quad c_{21}(x)=-\Lambda_i h_i(t), \quad c_{22}(x)=-1-2\mu_0+\Lambda_i(1-\sigma_{i0})h_i(t),$$

$$V_{11}(x,v_1,v_2)=-(1+\mu_0)G_{i0}(t,v_1,v_2)[1+v_1][1+v_2]-$$

$$-\Lambda_i h_i(t)G_{i1}(t,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2)[1+v_2]^{-\sigma_{i0}}+(1-\Lambda_i G_{i1}(t,v_1,v_2))h_i(t)R_{i1}(x,v_1,v_2)[1+v_2]^{-\sigma_{i0}},$$

$$V_{12}(x,v_1,v_2)=(1-\Lambda_i G_{i1}(t,v_1,v_2))h_i(t)H_i(t,v_1,v_2)R_2(v_1,v_2),$$

$$V_{21}(x,v_1,v_2)=\Lambda_i h_i(t)R_{i1}(x,v_1,v_2)\frac{[1+v_2]^{1-\sigma_{i0}}}{1+v_1},$$

$$V_{22}(x,v_1,v_2)=-(1+\mu_0)v_2^2+\Lambda_i h_i(t)H_i(t,v_1,v_2)R_3(v_1,v_2).$$

В силу (2.8), (2.31), (2.32), определения Λ_i и замены независимой переменной имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty}f_1(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty}c_{11}(x)=-\mu_0(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}), \quad \lim_{x\to+\infty}c_{12}(x)=-\mu_0\sigma_{i0}(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}),$$

$$\lim_{x\to+\infty}f_2(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty}c_{21}(x)=-\mu_0, \quad \lim_{x\to+\infty}c_{22}(x)=-1-\mu_0-\mu_0\sigma_{i0},$$

а функции $V_{lk}(x,v_1,v_2)$ $(l=1,2;\ k=1,2)$ таковы, что

$$\lim_{x\to+\infty} V_{l1}(x,v_1,v_2)=0\,(l=1,2) \quad \textit{равномерно по} \ (v_1,v_2)\in V_0,$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V_{l2}(x,v_1,v_2)}{|\,v_1\,|+|\,v_2\,|}=0\ (l=1,2) \quad \textit{равномерно по} \ x\in[x_0;+\infty).$$

Таким образом, система (2.33) является квазилинейной системой дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение для предельной матрицы коэффициентов линейной части имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\beta\mu_0(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})-\lambda & -\beta\mu_0\sigma_{i0}(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) \\ -\beta\mu_0 & -\beta(1+\mu_0+\mu_0\sigma_{i0})-\lambda \end{vmatrix}=0$$

или

$$\lambda^2+\beta(2\mu_0-\mu_0\sigma_{i1}+1)\lambda+(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})(\mu_0^2+\mu_0)=0\,.$$

Поскольку имеет место условие (2.5), данное характеристическое уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (2.33) выполнены все условия теоремы 2.2 работы [38]. Согласно данной теореме система (2.33) имеет хотя бы одно решение $(v_1,v_2):[x_1,+\infty)\to R$ $(x_1\ge x_0)$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Этому решению, с учётом преобразования (2.28), соответствует решение $y(t)$ уравнения (1.11), которое вместе со своей производной первого порядка допускают, в силу (2.29), асимптотические представления (2.9). Кроме того, из (2.22) и (2.9), (1.11), (2.8) следует, что данное решение является $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – решением уравнения (1.11).

Теперь приведём результат, который позволяет при некоторых дополнительных ограничениях на функции φ_{ik} $(k=0,1)$ получить асимптотические представления при $t\uparrow\omega$ для $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\mu_0)$ – решений и их производных первого порядка в явном виде.

Теорема 2.2. *Пусть соблюдаются условия теоремы* 2.1 *и, кроме того, функции* φ_{ik} $(k=0,1)$ *обладают свойством* S (*см. определение* 1.1). *Тогда* *при выполнении* (2.5) – (2.8) *каждое* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *– решение уравнения* (1.11) *и его производная первого порядка при* $t \uparrow \omega$ *представимы в виде*

$$y(t) \sim y_0^0 \left(\frac{|\pi_\omega(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} |(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) I_{i1}(t)|}{|1+\mu_0|^{1-\sigma_{i1}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0}\right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}, \quad (2.34)$$

$$y'(t) \sim y_1^0 \left(\frac{|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) I_{i1}(t)|}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0}\right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}, \quad (2.35)$$

где $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k \ \ (k = 0,1)$ *и определяются из условия* (2.7).

Доказательство. Для начала покажем, что функция $L_0(z) = \dfrac{|y(t(z))|}{|\pi_\omega(t(z))|^{1+\mu_0}}$, где $z = y_0^0 |\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0}$, является медленно меняющейся при $z \to Y_0 \ \ (z \in \Delta_0)$:

$$\lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_0}} \frac{z L_0'(z)}{L_0(z)} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[y_0^0 |\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0} \cdot \frac{1}{y_0^0 (1+\mu_0) |\pi_\omega(t)|^{\mu_0} \operatorname{sgn} \pi_\omega(t)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{y_0^0 y'(t) |\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0} - |y(t)| (1+\mu_0) |\pi_\omega(t)|^{\mu_0} \operatorname{sgn} \pi_\omega(t)}{|\pi_\omega(t)|^{2+2\mu_0}} \cdot \frac{|\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0}}{|y(t)|} \right] =$$

$$= \lim_{t \uparrow \omega} \left[\frac{1}{1+\mu_0} \cdot \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} - 1 \right] = 0 .$$

Поскольку функция φ_{i0} обладает свойством S, то с учётом медленной изменяемости функции L_0 при $z \to Y_0 \ \ (z \in \Delta_0)$ и условия (2.6) получим

$$\psi_{i0}(y(t)) = \psi_{i0}(y_0^0 |\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0})[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega . \quad (2.36)$$

Теперь докажем, что функция $L_1(z) = \dfrac{|y'(t(z))|}{|\pi_\omega(t(z))|^{\mu_0}}$, где $z = y_1^0 |\pi_\omega(t)|^{\mu_0}$, является медленно меняющейся при $z \to Y_1 \ \ (z \in \Delta_1)$:

$$\lim_{\substack{z \to Y_1 \\ z \in \Delta_1}} \frac{z L_1'(z)}{L_1(z)} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[y_1^0 |\pi_\omega(t)|^{\mu_0} \cdot \frac{1}{y_1^0 \mu_0 |\pi_\omega(t)|^{\mu_0 - 1} \operatorname{sgn} \pi_\omega(t)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{y_1^0 y''(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_0} - |y'(t)| \mu_0 |\pi_\omega(t)|^{\mu_0 - 1} \operatorname{sgn} \pi_\omega(t)}{|\pi_\omega(t)|^{2\mu_0}} \cdot \frac{|\pi_\omega(t)|^{\mu_0}}{|y'(t)|} \right] =$$

$$= \lim_{t \uparrow \omega} \left[\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} - 1 \right] = 0 .$$

Так как функция φ_{i1} обладает свойством S, то с учётом медленной изменяемости функции L_1 при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_1)$ и условия (2.6) имеем

$$\psi_{i1}(y'(t)) = \psi_{i1}(y_1^0 \mid \pi_\omega(t) \mid^{\mu_0})[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.37}$$

Принимая во внимание (2.36), (2.37) и (2.7), первое из соотношений (2.9) можно переписать в виде

$$\mid y'(t) \mid^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} = \frac{\mid (1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) I_{i1}(t) \mid}{\mid 1+\mu_0 \mid^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 \mid \pi_\omega(t) \mid^{1-k+\mu_0}\right)[1+o(1)],$$

откуда вытекает асимптотическое представление (2.35). В свою очередь, из (2.35) с учётом второго из соотношений (2.9) получаем, что имеет место асимптотическое представление (2.34).

§ 2.3. Пример уравнения с быстро и правильно меняющимися коэффициентами $p_i(t)$

Для иллюстрации полученных в §§2.1 – 2.2 результатов исследуем вопрос об асимптотическом поведении $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решений уравнения (1.19). При этом необходимо рассмотреть три возможных случая: а) $\omega = +\infty$; б) $\omega = 1$; в) $\omega \in (0;1) \cup (1;+\infty)$.

а) Пусть $t \to +\infty$, тогда при $i = 1,...,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{\mid \pi_\omega(t) \mid p_i'(t)}{p_i(t)} = \frac{t(\beta_i e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t + e^{\beta_i t} \gamma_i t^{\gamma_i - 1} \ln^{\rho_i} t + e^{\beta_i t} t^{\gamma_i - 1} \rho_i \ln^{\rho_i - 1} t)}{e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t} = \beta_i t + \gamma_i + \frac{\rho_i}{\ln t},$$

$$I_{i1}(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|a_i|}{\beta_i} e^{\beta_i t} t^{\gamma_i+\sigma_{i0}} \ln^{\rho_i} t & при \quad \beta_i \neq 0, \\ \dfrac{|a_i|}{1+\gamma_i+\sigma_{i0}} t^{1+\gamma_i+\sigma_{i0}} \ln^{\rho_i} t & при \quad \beta_i = 0,\ \gamma_i+\sigma_{i0} \neq -1, \\ \dfrac{|a_i|}{1+\rho_i} \ln^{1+\rho_i} t & при \quad \beta_i = 0,\ \gamma_i+\sigma_{i0} = -1,\ \rho_i \neq -1, \\ |a_i| \ln(\ln t) & при \quad \beta_i = 0,\ \gamma_i+\sigma_{i0} = -1,\ \rho_i = -1, \end{cases}$$

$$\frac{\pi_\omega(t) I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} \sim \begin{cases} \beta_i t & при \quad \beta_i \neq 0, \\ 1+\gamma_i+\sigma_{i0} & при \quad \beta_i = 0,\ \gamma_i+\sigma_{i0} \neq -1, \\ \dfrac{1+\rho_i}{\ln t} & при \quad \beta_i = 0,\ \gamma_i+\sigma_{i0} = -1,\ \rho_i \neq -1, \\ \dfrac{1}{\ln t \ln\ln t} & при \quad \beta_i = 0,\ \gamma_i+\sigma_{i0} = -1,\ \rho_i = -1. \end{cases}$$

С учётом полученных представлений, леммы 2.1 и теорем 2.1, 2.2 имеет место

Следствие 2.1. *Пусть* $\mu_0 \in \mathrm{R} \setminus \{-1,0\}$ *и для некоторого* $i \in M$ *при каждом* $j \in M \setminus \{i\}$ *либо*

$$\beta_j < \beta_i,$$

либо

$$\beta_j = \beta_i \quad и \quad \gamma_j - \gamma_i < (1+\mu_0)(\sigma_{i0} - \sigma_{j0}) + \mu_0(\sigma_{i1} - \sigma_{j1}).$$

Предположим, кроме того, что имеет место неравенство $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$. *Тогда для существования у уравнения* (1.19) $\Pi_{+\infty}(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *– решений необходимо, а если соблюдается одно из двух условий*:

$$\mu_0(\sigma_{i1} - 2) \neq 1; \quad \mu_0(\sigma_{i1} - 2) = 1 \ и \ (\sigma_{i1} - 1)(\sigma_{i0} + \sigma_{i1} - 1) > 0,$$

то и достаточно, чтобы

$$\beta_i = 0, \quad \mu_0 = \frac{1+\gamma_i+\sigma_{i0}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}},$$

$$Y_1 = \begin{cases} \pm\infty, \ \textit{если}\ \mu_0 > 0, \\ 0 \quad, \ \textit{если}\ \mu_0 < 0, \end{cases} \qquad Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, \ \textit{если}\ 1+\mu_0 > 0, \\ 0 \quad, \ \textit{если}\ 1+\mu_0 < 0 \end{cases}$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_i \mu_0 y_1 > 0, \quad (1+\mu_0) y_0 y_1 > 0.$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = \frac{a_i}{\mu_0} t^{1+\gamma_i} \ln^{\rho_i} t[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+\mu_0}{t}[1+o(1)],$$

которые в случае, когда функции $\varphi_{ik}\,(k=0,1)$ *обладают свойством* S, *могут быть записаны в виде*

$$y(t) = y_0^0 \left(\frac{|a_i|}{|\mu_0| |1+\mu_0|^{1-\sigma_{i1}}} t^{2+\gamma_i-\sigma_{i1}} \ln^{\rho_i} t \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}(y_k^0 t^{1-k+\mu_0}) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} [1+o(1)],$$

$$y'(t) = y_1^0 \left(\frac{|a_i|}{|\mu_0| |1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} t^{1+\gamma_i+\sigma_{i0}} \ln^{\rho_i} t \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}(y_k^0 t^{1-k+\mu_0}) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} [1+o(1)].$$

б) Пусть $t \uparrow 1$, тогда при $i = 1,...,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{|\pi_\omega(t)|\, p_i'(t)}{p_i(t)} = (1-t)\left(\beta_i + \frac{\gamma_i}{t} + \frac{\rho_i}{t \ln t}\right) \sim -\rho_i,$$

$$I_{i1}(t) \sim \begin{cases} -\dfrac{|a_i|}{1+\rho_i+\sigma_{i0}} e^{\beta_i} (1-t)^{1+\rho_i+\sigma_{i0}} & \textit{при} \ \ \rho_i+\sigma_{i0} \neq -1, \\ -|a_i| e^{\beta_i} \ln(1-t) & \textit{при} \ \ \rho_i+\sigma_{i0} = -1, \end{cases}$$

$$\frac{\pi_\omega(t) I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)} \sim \begin{cases} 1+\rho_i+\sigma_{i0} & \textit{при} \ \ \rho_i+\sigma_{i0} \neq -1, \\ \dfrac{1}{\ln(1-t)} & \textit{при} \ \ \rho_i+\sigma_{i0} = -1. \end{cases}$$

С учётом полученных представлений, леммы 2.1 и теорем 2.1, 2.2 имеет место

Следствие 2.2. *Пусть* $\mu_0 \in \mathrm{R} \setminus \{-1, 0\}$ *и для некоторого* $i \in M$ *при всех* $j \in M \setminus \{i\}$ *справедливо соотношение*

$$(1+\mu_0)(\sigma_{i0}-\sigma_{j0})+\mu_0(\sigma_{i1}-\sigma_{j1})<\rho_j-\rho_i.$$

Предположим, кроме того, что имеет место неравенство $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$. *Тогда для существования у уравнения* (1.19) $\Pi_1(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *– решений необходимо, а если выполняется одно из двух условий*:

$$\mu_0(\sigma_{i1}-2)\neq 1; \quad \mu_0(\sigma_{i1}-2)=1 \ \text{и} \ (\sigma_{i1}-1)(\sigma_{i0}+\sigma_{i1}-1)>0,$$

то и достаточно, чтобы

$$\mu_0=\frac{1+\rho_i+\sigma_{i0}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}},$$

$$Y_1=\begin{cases}\pm\infty, & \text{если } \mu_0<0,\\ \\ 0 & , \text{ если } \mu_0>0,\end{cases} \qquad Y_0=\begin{cases}\pm\infty, & \text{если } 1+\mu_0<0,\\ \\ 0 & , \text{ если } 1+\mu_0>0\end{cases}$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_i\mu_0 y_1<0, \quad (1+\mu_0)y_0y_1<0,$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=-\frac{a_ie^{\beta_i}}{\mu_0}(1-t)^{1+\rho_i}[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1+\mu_0}{t-1}[1+o(1)],$$

которые в случае, когда функции φ_{ik} $(k=0,1)$ *обладают свойством* S, *могут быть записаны в виде*

$$y(t)=y_0^0\left(\frac{|a_i|e^{\beta_i}}{|\mu_0||1+\mu_0|^{1-\sigma_{i1}}}(1-t)^{2+\rho_i-\sigma_{i1}}\prod_{k=0}^{1}\psi_{ik}(y_k^0(1-t)^{1-k+\mu_0})\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}[1+o(1)],$$

$$y'(t)=y_1^0\left(\frac{|a_i|e^{\beta_i}}{|\mu_0||1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}}(1-t)^{1+\rho_i+\sigma_{i0}}\prod_{k=0}^{1}\psi_{ik}(y_k^0(1-t)^{1-k+\mu_0})\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}[1+o(1)].$$

в) Пусть $t \uparrow \omega$, где $\omega \in (0;1) \cup (1;+\infty)$, тогда при $i = 1,...,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{|\,\pi_\omega(t)\,|\; p_i'(t)}{p_i(t)} = (\omega - t)\left(\beta_i + \frac{\gamma_i}{t} + \frac{\rho_i}{t\ln t}\right) \sim 0,$$

$$I_{i1}(t) \sim \begin{cases} -\dfrac{|\,a_i\,|}{1+\sigma_{i0}} e^{\beta_i\omega}\omega^{\gamma_i}\,|\ln\omega|^{\rho_i}\,(\omega - t)^{1+\sigma_{i0}} & \text{при } \sigma_{i0} \neq -1 \\ -|\,a_i\,|\, e^{\beta_i\omega}\omega^{\gamma_i}\,|\ln\omega|^{\rho_i}\,\ln(\omega - t) & \text{при } \sigma_{i0} = -1, \end{cases}$$

$$\frac{\pi_\omega(t) I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)} \sim \begin{cases} 1+\sigma_{i0} & \text{при } \sigma_{i0} \neq -1, \\ \dfrac{1}{\ln(\omega - t)} & \text{при } \sigma_{i0} = -1. \end{cases}$$

С учётом полученных представлений, леммы 2.1 и теорем 2.1, 2.2 имеет место

Следствие 2.3. *Пусть* $\mu_0 \in \mathrm{R} \setminus \{-1,0\}$ *и для некоторого* $i \in M$ *при всех* $j \in M \setminus \{i\}$ *справедливо соотношение*

$$(1+\mu_0)(\sigma_{i0} - \sigma_{j0}) + \mu_0(\sigma_{i1} - \sigma_{j1}) < 0.$$

Предположим, кроме того, что имеет место неравенство $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$. *Тогда для существования у уравнения* (1.19) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ *– решений необходимо, а если выполняется одно из двух условий*:

$$\mu_0(\sigma_{i1} - 2) \neq 1; \quad \mu_0(\sigma_{i1} - 2) = 1 \text{ и } (\sigma_{i1} - 1)(\sigma_{i0} + \sigma_{i1} - 1) > 0,$$

то и достаточно, чтобы

$$\mu_0 = \frac{1+\sigma_{i0}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}},$$

$$Y_1 = \begin{cases} \pm\infty, \; \textit{если}\; \mu_0 < 0, \\ \\ 0 \quad, \; \textit{если}\; \mu_0 > 0, \end{cases} \qquad Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, \; \textit{если}\, 1+\mu_0 < 0, \\ \\ 0 \quad, \; \textit{если}\, 1+\mu_0 > 0 \end{cases}$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_i \mu_0 y_1 < 0, \quad (1+\mu_0) y_0 y_1 < 0,$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = -\frac{a_i e^{\beta_i \omega} \omega^{\gamma_i} |\ln\omega|^{\rho_i}}{\mu_0}(\omega - t)[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+\mu_0}{t-\omega}[1+o(1)].$$

которые в случае, когда функции $\varphi_{ik}\,(k=0,1)$ *обладают свойством* S, *могут быть записаны в виде*

$$y(t) = y_0^0 \left(\frac{|a_i| e^{\beta_i \omega} \omega^{\gamma_i} |\ln\omega|^{\rho_i}}{|\mu_0||1+\mu_0|^{1-\sigma_{i1}}} (\omega - t)^{2-\sigma_{i1}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 (\omega - t)^{1-k+\mu_0}\right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} [1+o(1)],$$

$$y'(t) = y_1^0 \left(\frac{|a_i| e^{\beta_i \omega} \omega^{\gamma_i} |\ln\omega|^{\rho_i}}{|\mu_0||1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} (\omega - t)^{1+\sigma_{i0}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 (\omega - t)^{1-k+\mu_0}\right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} [1+o(1)].$$

Выводы

В главе II были получены следующие результаты:

1) Для произвольных $\mu_0 \in \mathrm{R}$ и $i \in \{1,...,m\}$ приведены условия, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решении уравнения (1.11) правая его часть при $t \uparrow \omega$ асимптотически эквивалентна i -му слагаемому;

2) При соблюдении этих условий установлены необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1,\ \mu_0)$ – решений в случае, когда $\mu_0 \in \mathrm{R} \setminus \{-1; 0\}$, а также получены неявные асимптотические представления для таких решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$;

3) Указаны дополнительные ограничения на нелинейности, которые позволяют записать данные представления в явном виде.

Все результаты проиллюстрированы на примере уравнения (1.19).

ГЛАВА III

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – РЕШЕНИЙ И $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ – РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (1.11)

Настоящая глава посвящена установлению условий существования и асимптотических представлений $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – решений и $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ – решений уравнения (1.11) в случае, когда правая его часть на каждом таком решении асимптотически эквивалентна при $t\uparrow\omega$ одному слагаемому.

§3.1. Условия существования и асимптотические представления $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – решений

Обозначим $y_0^0=\operatorname{sgn} y_0$ и в случае, когда существует значение $a'\in[a,\omega)$ такое, что $y_0^0\,|\pi_\omega(s)|\in\Delta_0$ ($s\in[a',\omega)$), введём при $i\in\{1,\dots,m\}$ вспомогательную функцию

$$I_{i2}(t)=\int_{I_{i2}^0}^{t}p_i(s)\,|\pi_\omega(s)|^{\sigma_{i0}}\,\psi_{i0}(y_0^0\,|\pi_\omega(s)|)ds,$$

где предел интегрирования I_{i2}^0 равен или a', или ω и выбран так, чтобы соответствующий интеграл стремился при $t\uparrow\omega$ либо к бесконечности, либо к нулю.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mu_0=0$ *и для некоторого* $i\in M$ *при всех* $j\in M\setminus\{i\}$ *соблюдается условие (2.1). Предположим, кроме этого, что имеет место неравенство* $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq1$ *и функция* φ_{i0} *обладает свойством* S. *Тогда для существования у уравнения (1.11)* $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ *– решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$Y_1=\begin{cases}\pm\infty & ,\text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_{i2}(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}=+\infty,\\ 0 & ,\text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_{i2}(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}=0,\end{cases}\qquad Y_0=\begin{cases}\pm\infty & ,\text{если } \omega=+\infty,\\ 0 & ,\text{если } \omega<+\infty,\end{cases} \tag{3.1}$$

при $t\in(a',\omega)$ *выполнялись неравенства*

$$\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i2}(t)y_1>0,\quad \pi_\omega(t)y_0y_1>0 \tag{3.2}$$

и имело место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)}=0. \tag{3.3}$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}}\operatorname{sgn}y'(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))}=\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i2}(t)[1+o(1)],\ \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)]. \tag{3.4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y:[t_0,\omega)\to\Delta_0$ – произвольное $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – решение уравнения (1.11). Из определения $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – решения и леммы 1.1 следует, что имеют место второе из условий (3.1), второе из неравенств (3.2), второе из асимптотических представлений (3.4) и соотношение

$$y(t)=\pi_\omega(t)y'(t)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega \tag{3.5}$$

Поскольку выполняются условия (1.12) и (2.1), то из уравнения (1.11) с учетом леммы 2.1 следует, что

$$y''(t)=\alpha_ip_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega \tag{3.6}$$

Покажем, что функция $L(z)=|y'(t(z))|$, где $z=y_0^0|\pi_\omega(t)|$, является медленно меняющейся при $z\to Y_0$, $z\in\Delta_0$

$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_0}}\frac{zL'(z)}{L(z)}=\lim_{t\uparrow\omega}\left(y_0^0|\pi_\omega(t)|\cdot\frac{1}{|y'(t)|}\cdot y_1^0y''(t)\cdot\frac{1}{y_0^0\pi'_\omega(t)\operatorname{sgn}\pi_\omega(t)}\right)=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}=0.$$

Так как функция φ_{i0} обладает свойством S, то из (3.6) с учётом (3.5) и медленной изменяемости L имеем при $t\uparrow\omega$

$$\frac{y''(t)\,|\,y'(t)\,|^{-\sigma_{i0}}}{\varphi_{i1}(y'(t))}=\alpha_i\,p_i(t)\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\sigma_{i0}}\ \psi_{i0}(|\,\pi_\omega(t)\,|\,y_0^0)[1+o(1)]. \tag{3.7}$$

Далее, применяя правило Лопиталя в форме Штольца, получим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{|\,y'(t)\,|^{1-\sigma_{i0}}\ \operatorname{sgn} y'(t)}{I_{i2}(t)\varphi_{i1}(y'(t))}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\dfrac{|\,y'(t)\,|^{1-\sigma_{i0}}\ \operatorname{sgn} y'(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right)'}{(I_{i2}(t))'}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y''(t)\,|\,y'(t)\,|^{-\sigma_{i0}}}{\varphi_{i1}(y'(t))}\left[1-\sigma_{i0}-\dfrac{y'(t)\varphi'_{i1}(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right]}{p_i(t)\,|\,\pi_\omega(t)\,|^{\sigma_{i0}}\ \psi_{i0}(|\,\pi_\omega(t)\,|\,y_0^0)}$$

или, с учетом (1.15), (3.7) и неравенства $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$,

$$\frac{|\,y'(t)\,|^{1-\sigma_{i0}}\ \operatorname{sgn} y'(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))}=\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i2}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.8}$$

Из последнего соотношения вытекает справедливость первого из условий (3.1), первого из неравенств (3.2) и первого из асимптотических представлений (3.4). Кроме того, из (3.7) и (3.8) с учетом определения $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – решения следует, что имеет место предельное соотношение (3.3).

Достаточность. Пусть для некоторого $i\in M$ соблюдаются условия теоремы и выполняются соотношения (3.1) – (3.3). Зафиксировав с помощью (3.1), (3.2) значения Y_k и окрестности Δ_k $(k=0,1)$, докажем существование у уравнения (1.11) хотя бы одного $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – решения, допускающего при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (3.4).

Рассмотрим сначала систему соотношений вида

$$\frac{|\,y'\,|^{1-\sigma_{i0}}}{\varphi_{i1}(y')}=\left|\frac{I_{i2}(t)}{\Lambda_i}\right|[1+v_1],\qquad \frac{y'}{y}=\frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+v_2], \tag{3.9}$$

где $\Lambda_i=1/(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})$, и установим, что она однозначно определяет заданные на множестве $D_0=[t_1,\omega)\times V_0$, где $t_1\in[a,\omega)$, $V_0=\{(v_1,v_2):|\,v_k\,|\le 0{,}5\ (k=1{,}2)\}$ непрерывно дифференцируемые неявные функции $y^{(k)}=Y_{ik}(t,v_1,v_2)$ $(k=0{,}1)$ следующего вида

$$Y_{i0}(t,v_1,v_2) = y_0^0 \mid \pi_\omega(t)\mid^{1+z_1(t,v_1,v_2)}, \quad Y_{i1}(t,v_1,v_2) = y_1^0 \mid I_{i2}(t)\mid^{\Lambda_i+z_2(t,v_1,v_2)} \tag{3.10}$$

где $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k$, $|z_{k+1}(t,v_1,v_2)| \le \Lambda_i^k/2$ при $(t,v_1,v_2) \in D_0$ и $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z_{k+1}(t,v_1,v_2) = 0$

равномерно по $(v_1,v_2) \in V_0$. Для этого, полагая в (3.9)

$$y = y_0^0 \mid \pi_\omega(t)\mid^{1+z_1}, \qquad y' = y_1^0 \mid I_{i2}(t)\mid^{\Lambda_i+z_2}, \tag{3.11}$$

получим, с учётом знаковых условий (3.2), систему соотношений вида

$$\begin{cases} z_2 = \Lambda_i \dfrac{\ln\left|\dfrac{1+v_1}{\Lambda_i}\psi_{i1}(y_1^0 \mid I_{i2}(t)\mid^{\Lambda_i+z_2})\right|}{\ln|I_{i2}(t)|}, \\ \ln|I_{i2}(t)|\,z_2 - \ln|\pi_\omega(t)|\,z_1 = \ln\dfrac{1+v_2}{|I_{i2}(t)|^{\Lambda_i}}. \end{cases}$$

Частично разрешая данную систему относительно z_1,z_2 (как линейную неоднородную), имеем

$$z_k = a_k(t) + b_k(t,v_1,v_2) + Z_k(t,z_2) \ (k=1,2), \tag{3.12}$$

где

$$a_1(t) = \Lambda_i \frac{\ln|(1/\Lambda_i)I_{i2}(t)|}{\ln|\pi_\omega(t)|}, \quad a_2(t) = -\Lambda_i \frac{\ln|\Lambda_i|}{\ln|I_{i2}(t)|},$$

$$b_1(t,v_1,v_2) = \Lambda_i \frac{\ln\left([1+v_1][1+v_2]^{-\frac{1}{\Lambda_i}}\right)}{\ln|\pi_\omega(t)|}, \quad b_2(t,v_1,v_2) = \Lambda_i \frac{\ln[1+v_1]}{\ln|I_{i2}(t)|},$$

$$Z_1(t,z_2) = \Lambda_i \frac{\ln\left|\psi_{i1}(y_1^0 \mid I_{i2}(t)\mid^{\Lambda_i+z_2})\right|}{\ln|\pi_\omega(t)|},$$

$$Z_2(t,z_2) = \Lambda_i \frac{\ln\left|\psi_{i1}(y_1^0 \mid I_{i2}(t)\mid^{\Lambda_i+z_2})\right|}{\ln|I_{i2}(t)|}.$$

Принимая во внимание условия (1.16), (3.1) – (3.3), получим предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} a_k(t) = 0 \quad (k = 1,2),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} b_k(t, v_1, v_2) = 0 \quad (k = 1,2) \quad \textit{равномерно по} \ (v_1, v_2) \in V_0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z_k(t, z_2) = 0 \quad \textit{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z_k(t, z_2)}{\partial z_k} = 0 \quad (k = 1,2) \tag{3.13}$$

$$\textit{равномерно} \quad \textit{по} \quad (z_1, z_2) \in Z_0,$$

где $Z_0 = \{(z_1, z_2) : |z_{k+1}| \le |\Lambda_i^k|/2 \ \ (k = 0,1)\}$.

Поскольку выполняется (3.13), то существует число $t_0 \in [a, \omega)$ такое, что на множестве $[t_0, \omega) \times Z_0 \times V_0$ соблюдаются неравенства

$$|a_k(t) + b_k(t, v_1, v_2) + Z_k(t, z_2)| \le \frac{\beta_0}{4} \quad (k = 1,2)$$

$$(\textit{где} \quad \beta_0 = \min\{1, |\Lambda_i|\}) \tag{3.14}$$

и условия Липшица

$$|Z_k(t, z_2^2) - Z_k(t, z_2^1)| \le 1/3 \, |z_2^2 - z_2^1| \quad (k = 1,2). \tag{3.15}$$

Теперь обозначим через B банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega = [t_0, \omega) \times V_0$ вектор-функций $z = (z_1, z_2) : \Omega \to \mathrm{R}^n$ с нормой

$$\| z \| = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{2} |z_k(t, v_1, v_2)| : (t, v_1, v_2) \in \Omega \right\}.$$

Выберем из него подпространство B_0 таких функций из B, для которых $\| z \| \le \beta_0/2$, и рассмотрим на B_0, задав произвольное число $\nu \in (0,1)$, оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, определённый соотношениями

$$\Phi_k(z)(t, v_1, v_2) = z_k(t, v_1, v_2) - \nu \, | z_k(t, v_1, v_2) - a_k(t) - b_k(t, v_1, v_2) -$$

$$- Z_k(t, z_2(t, v_1, v_2)) | \quad (k = 1,2). \tag{3.16}$$

Для любого $z \in B_0$ в силу условия (3.14) при $(t, v_1, v_2) \in \Omega$ имеем

$$|\Phi_k(z)(t, v_1, v_2)| \le (1 - \nu) \, |z_k(t, v_1, v_2)| + \frac{\nu \beta_0}{4} \quad (k = 1,2).$$

Поэтому на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2} |\Phi_k(z)(t,v_1,v_2)| \le (1-\nu)\sum_{k=1}^{2} |z_k(t,v_1,v_2)| + \frac{\nu\beta_0}{2} \le$$

$$\le (1-\nu)\| z \| + \frac{\nu\beta_0}{2} \le (1-\nu)\frac{\beta_0}{2} + \frac{\nu\beta_0}{2} = \frac{\beta_0}{2}.$$

Отсюда вытекает, что $\| \Phi(z) \| \le \beta_0/2$ и, следовательно, $\Phi(B_0) \subset B_0$.

Пусть теперь $z^1, z^2 \in B_0$. Тогда в силу (3.15) при $(t,v_1,v_2) \in \Omega$

$$|\Phi_k(z^2)(t,v_1,v_2) - \Phi_k(z^1)(t,v_1,v_2)| \le (1-\nu)\,|z_k^2(t,v_1,v_2) - z_k^1(t,v_1,v_2)| +$$

$$+\nu\,|Z_k(t,z_2^2) - Z_k(t,z_2^1)| \le (1-\nu)\,|z_k^2(t,v_1,v_2) - z_k^1(t,v_1,v_2)| +$$

$$+\frac{\nu}{3}|z_2^2(t,v_1,v_2) - z_2^1(t,v_1,v_2)| \quad (k=1,2).$$

Значит, на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2} |\Phi_k(z^2)(t,v_1,v_2) - \Phi_k(z^1)(t,v_1,v_2)| \le$$

$$\le (1-\nu)\sum_{k=1}^{2} |z_k^2(t,v_1,v_2) - z_k^1(t,v_1,v_2)| + \frac{2\nu}{3}|z_2^2(t,v_1,v_2) - z_2^1(t,v_1,v_2)| \le \left(1-\frac{\nu}{3}\right)\| z^2 - z^1 \|,$$

откуда следует, что

$$\| \Phi(z^2) - \Phi(z^1) \| \le \left(1-\frac{\nu}{3}\right)\| z^2 - z^1 \|.$$

Таким образом показано, что оператор Ф отображает пространство B_0 в себя и является на нём оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная вектор-функция $z \in B_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (3.16) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением системы (3.12), удовлетворяющим условию $\| z \| \le \beta_0/2$. Из (3.12) с учётом (3.13) следует, что компоненты данного решения стремятся к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $(v_1,v_2) \in V_0$. Кроме того, поскольку для системы (3.12) якобиан

$$1 - \Lambda_i \frac{y_1^0 \,|I_{i2}(t)|^{\Lambda_i + z_2}\, \psi'_{i1}(y_1^0 \,|I_{i2}(t)|^{\Lambda_i + z_2})}{\psi_{i1}(y_1^0 \,|I_{i2}(t)|^{\Lambda_i + z_2})}$$

в силу первого из представлений (3.11) и условий (1.16), (3.1), (3.2) отличен от нуля на множестве $\Omega_1 = [t_1,\omega)\times V_0$, где $t_1 \in [t_0,\omega)$, то из известной локальной теоремы о существовании неявных функций, определённых системой соотношений, вытекает непрерывная дифференцируемость этого решения на Ω_1. В силу замены (3.11) полученной вектор-функции (z_1, z_2) соответствует вектор-функция (Y_{i0}, Y_{i1}) с компонентами вида (3.10), которая является решением системы (3.9), причём, с учётом (3.1), (3.2), справедливы утверждения

$$\begin{gathered}\lim_{t\uparrow\omega} Y_{ik}(t,v_1,v_2) = Y_k \quad (k=0,1)\\ \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0,\\ Y_{ik}(t,v_1,v_2)\subset \Delta_k \quad (k=0,1)\\ \textit{при } (v_1,v_2)\in V_0,\ t\in[t_2,\omega),\quad \textit{где } t_2\in[t_1,\omega).\end{gathered} \tag{3.17}$$

Рассмотрим некоторые свойства функций Y_{ik} $(k=0,1)$. В силу (3.17) и (1.15) при $j\in M, k=0,1$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ имеют место предельные соотношения

$$\begin{gathered}\lim_{t\uparrow\omega} G_{jk}(t,v_1,v_2) = \sigma_{jk}, \quad \textit{в которых}\\ G_{jk}(t,v_1,v_2) = \frac{Y_{ik}(t,v_1,v_2)\varphi'_{jk}\big(Y_{ik}(t,v_1,v_2)\big)}{\varphi_{jk}\big(Y_{ik}(t,v_1,v_2)\big)}.\end{gathered} \tag{3.18}$$

Теперь положим в системе (3.9) $y^{(k)} = Y_{ik}(t,v_1,v_2)$ $(k=0,1)$ и продифференцируем полученные соотношения по t. В результате имеем систему уравнений, линейных относительно $(Y_{i0})'_t$ и $(Y_{i1})'_t$

$$\begin{cases} (Y_{i1})'_t = \dfrac{I'_{i2}(t)}{(1-\sigma_{i0}-G_{i1}(t,v_1,v_2))I_{i2}(t)} Y_{i1}(t,v_1,v_2),\\ -\dfrac{Y_{i1}(t,v_1,v_2)}{Y^2_{i0}(t,v_1,v_2)}(Y_{i0})'_t + \dfrac{1}{Y_{i0}(t,v_1,v_2)}(Y_{i1})'_t = \dfrac{1}{\pi^2_\omega(t)}[1+v_2]. \end{cases} \tag{3.19}$$

Определитель данной системы равен

$$\frac{Y_{i1}(t,v_1,v_2)}{Y_{i0}^2(t,v_1,v_2)},$$

поэтому в силу вида функций $Y_{ik}\,(k=0,1)$ найдётся $t_3\in[t_2,\omega)$ такое, что на множестве $[t_3,\omega)\times V_0$ у системы (3.19) существует единственное решение, заданное формулами

$$(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t=\left(\frac{1}{\pi_\omega(t)}+\frac{I'_{i2}(t)}{(1-\sigma_{i0}-G_{i1}(t,v_1,v_2))I_{i2}(t)}\right)Y_{i0}(t,v_1,v_2),$$

$$(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t=\frac{I'_{i2}(t)}{(1-\sigma_{i0}-G_{i1}(t,v_1,v_2))I_{i2}(t)}Y_{i1}(t,v_1,v_2).$$

Принимая во внимание представления для $(Y_{i0})'_t$, $(Y_{i1})'_t$ и условия (3.3), (3.18), получим, что равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ справедливы равенства

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i0}(t,v_1,v_2)}=1,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i1}(t,v_1,v_2)}=0. \tag{3.20}$$

Таким образом, функции $Y_{ik}\;(k=0,1)$ обладают всеми свойствами $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – решения, которые использовались при доказательстве леммы 2.1, и, следовательно, равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}H_i(t,v_1,v_2)=1,\quad \textit{в котором}$$

$$H_i(t,v_1,v_2)=\alpha_i\sum_{j=1}^{m}\alpha_j[1+r_j(t)]\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{j1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}, \tag{3.21}$$

Кроме того, поскольку функция φ_{i0} обладает свойством S и справедливо первое из (3.20), то равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega}K_i(t,v_1,v_2)=1,\quad \textit{в котором}\;\; K_i(t,v_1,v_2)=\frac{\psi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))}{\psi_{i0}(y_0^0\,|\,\pi_\omega(t)\,|)}. \tag{3.22}$$

Теперь, применяя к уравнению (1.11) преобразование

$$y^{(k)}(t)=Y_{ik}(t,v_1(x),v_2(x))\;\;(k=0,1),\quad x=\beta\ln|\,\pi_\omega(t)\,|,$$

$$\beta=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \omega=+\infty,\\ -1, & \textit{если}\ \omega<+\infty,\end{cases} \tag{3.23}$$

и учитывая, что вектор – функция $(Y_{i0}(t,v_1(x),v_2(x)),Y_{i1}(t,v_1(x),v_2(x)))$ при $t\in[t_3,\omega)$ и $(v_1(x),v_2(x))\in V_0$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{|\,y'(t)\,|^{1-\sigma_{i0}}}{\varphi_{i1}(y'(t))}=\left|\frac{I_{i2}(t)}{\Lambda_i}\right|[1+v_1(x)],\quad \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+v_2(x)], \tag{3.24}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1'=\beta h_i(t)[-[1+v_1]+\Lambda_i(1-\sigma_{i0}-G_{i1}(t,v_1,v_2))\times \\ \quad\times K_i(t,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2)[1+v_2]^{-\sigma_{i0}}], \\ v_2'=\beta[[1+v_2]-[1+v_2]^2+ \\ \quad+\Lambda_i h_i(t)K_i(t,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2)\dfrac{[1+v_2]^{1-\sigma_{i0}}}{1+v_1}], \end{cases} \tag{3.25}$$

в которой $h_i(t)=\dfrac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)}$, t – функция, обратная к $x=\beta\ln|\pi_\omega(t)|$. Данную систему рассмотрим на множестве $[x_0,+\infty)\times V_0$, где $x_0=\beta\ln|\pi_\omega(t_3)|$.

Поскольку выполняются (3.18), (3.21) и (3.22), то имеют место равенства

$$\begin{gathered} H_i(t,v_1,v_2)=1+R_{i1}(x,v_1,v_2), \\ G_{i1}(t,v_1,v_2)=\sigma_{i1}+R_{i2}(x,v_1,v_2),\quad K_i(t,v_1,v_2)=1+R_{i3}(x,v_1,v_2), \end{gathered} \tag{3.26}$$

где функции $R_{ik}(x,v_1,v_2)$ $(k=1,2,3)$ стремятся к нулю при $x\to+\infty$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$.

Кроме того, допустимы представления

$$[1+v_2]^{-\sigma_{i0}}=1-\sigma_{i0}v_2+R_4(v_2),\quad \frac{[1+v_2]^{1-\sigma_{i0}}}{1+v_1}=1-v_1+(1-\sigma_{i0})v_2+R_5(v_1,v_2), \tag{3.27}$$

в которых функции $R_4(v_2)$ и $R_5(v_1,v_2)$ удовлетворяют предельным соотношениям:

$$\lim_{|v_2|\to0}\frac{R_4(v_2)}{|\,v_2\,|}=0,\qquad \lim_{|v_1|+|v_2|\to0}\frac{R_5(v_1,v_2)}{|\,v_1\,|+|\,v_2\,|}=0.$$

Учитывая (3.26) и (3.27), систему (3.25) можно переписать в виде

$$\begin{cases} v_1' = \beta h_i(t)[f_1(x) + c_{11}(x)v_1 + c_{12}(x)v_2 + V_{11}(x,v_1,v_2) + V_{12}(x,v_1,v_2)], \\ v_2' = \beta[f_2(x) + c_{21}(x)v_1 + c_{22}(x)v_2 + V_{21}(x,v_1,v_2) + V_{22}(x,v_1,v_2)], \end{cases} \tag{3.28}$$

где

$$f_1(x) = 0, \quad c_{11}(x) = -1, \quad c_{12}(x) = -\sigma_{i0},$$

$$f_2(x) = \Lambda_i h_i(t), \quad c_{21}(x) = -\Lambda_i h_i(t), \quad c_{22}(x) = -1 - \Lambda_i(1-\sigma_{i0})h_i(t),$$

$$V_{11}(x,v_1,v_2) = \Lambda_i[1+v_2]^{-\sigma_{i0}}(-R_{i2}(x,v_1,v_2)K_i(t,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2) +$$

$$+(1-\sigma_{i0} - G_{i1}(t,v_1,v_2))R_{i3}(x,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2) +$$

$$+(1-\sigma_{i0} - G_{i1}(t,v_1,v_2))K_i(t,v_1,v_2)R_{i1}(x,v_1,v_2)),$$

$$V_{12}(x,v_1,v_2) = \Lambda_i(1-\sigma_{i0} - G_{i1}(t,v_1,v_2))K_i(t,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2)R_4(v_2),$$

$$V_{21}(x,v_1,v_2) = \Lambda_i h_i(t)(R_{i1}(x,v_1,v_2)K_i(t,v_1,v_2) + R_{i3}(x,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2))\frac{[1+v_2]^{1-\sigma_{i0}}}{1+v_1},$$

$$V_{22}(x,v_1,v_2) = -v_2^2 + \Lambda_i h_i(t)K_i(t,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2)R_5(v_1,v_2).$$

В силу (3.3), (3.26), (3.27), определения Λ_i и замены независимой переменной имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0, \ \lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = 0, \ \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = -1,$$

а функции $V_{lk}(x,v_1,v_2)$ $(l=1,2; k=1,2)$ таковы, что

$$\lim_{x\to+\infty} V_{l1}(x,v_1,v_2) = 0 \ (l=1,2) \quad \textit{равномерно по } (v_1,v_2)\in V_0,$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V_{l2}(x,v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|} = 0 \ (l=1,2) \quad \textit{равномерно по } x\in[x_0;+\infty).$$

Кроме того, имеем

$$\int_{x_0}^{\pm\infty} h_i(t(x))dx = \int_{x_0}^{\pm\infty} \frac{\pi_\omega(t(x))I_{i2}'(t(x))}{I_{i2}(t(x))}dx = \beta\int_{t_3}^{\omega} \frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)}\frac{1}{\pi_\omega(t)}dt = \pm\infty .$$

Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (3.28) выполнены все условия теоремы 2.1 работы [38]. Согласно данной теореме система (3.28) имеет хотя бы одно решение $(v_1,v_2):[x_1,+\infty)\to \mathrm{R}$ $(\textit{где}\ x_1 \ge x_0)$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Этому решению с учётом преобразования

(3.23) соответствует решение $y(t)$ уравнения (1.11), которое вместе со своей производной первого порядка допускают, в силу (3.24) и (3.2), асимптотические представления (3.4). Кроме того, из (3.17) и (3.4), (1.11), (3.3) следует, что данное решение является $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ – решением уравнения (1.11).

Приведём теперь результат, который позволяет при некоторых дополнительных ограничениях на функцию φ_{i1} получить асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ – решений и их производных первого порядка в явном виде.

Теорема 3.2. *Пусть соблюдаются условия теоремы* 3.1 *и, кроме этого, функция* φ_{i1} *обладает свойством* S. *Тогда при выполнении* (3.1) – (3.3) *каждое* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ *– решение уравнения* (1.11) *и его производная первого порядка при* $t \uparrow \omega$ *представимы в виде*

$$y(t) \sim y_0^0 \, |\pi_\omega(t)| \left(|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) I_{i2}(t)| \, \psi_{i1}\!\left(y_1^0 \, |I_{i2}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}, \qquad (3.29)$$

$$y'(t) \sim y_1^0 \left(|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) I_{i2}(t)| \, \psi_{i1}\!\left(y_1^0 \, |I_{i2}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}, \qquad (3.30)$$

где $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k \quad (k = 0,1)$ *и определяются из условия* (3.2).

Доказательство. Для начала покажем, что функция $L(z) = \dfrac{y'(t(z))}{|I_{i2}(t(z))|^{\Lambda_i}}$, где $z = y_1^0 \, |I_{i2}(t)|^{\Lambda_i}$ и $\Lambda_i = 1/(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})$, является медленно меняющейся при $z \to Y_1 \, (z \in \Delta_1)$:

$$\lim_{\substack{z \to Y_1 \\ z \in \Delta_1}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[y_1^0 \, |I_{i2}(t)|^{\Lambda_i} \cdot \frac{1}{y_1^0 \Lambda_i \, |I_{i2}(t)|^{\Lambda_i - 1} \, I'_{i2}(t) \operatorname{sgn} I_{i2}(t)} \times \right.$$

$$\times \frac{y''(t)\,|\,I_{i2}(t)\,|^{\Lambda_i} - y'(t)\Lambda_i\,|\,I_{i2}(t)\,|^{\Lambda_i-1}\,I'_{i2}(t)\operatorname{sgn} I_{i2}(t)}{|\,I_{i2}(t)\,|^{2\Lambda_i}} \cdot \frac{|\,I_{i2}(t)\,|^{\Lambda_i}}{y'(t)}\Bigg] =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{1}{\Lambda_i}\cdot\frac{I_{i2}(t)y''(t)}{I'_{i2}(t)y'(t)} - 1\right] = 0$$

(справедливость последнего равенства вытекает из предельных соотношений (3.7), (3.8)).

Поскольку функция φ_{i1} обладает свойством S, то с учётом медленной изменяемости функции L при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_1)$ и условия (3.1) получим

$$\varphi_{i1}(y'(t)) = |\,y'(t)\,|^{\sigma_{i1}}\,\psi_{i1}(y_1^0\,|\,I_{i2}(t)\,|^{\Lambda_i})[1+o(1)] \quad при \quad t \uparrow \omega.$$

Принимая во внимание данное соотношение, асимптотические представления (3.4) можно переписать в виде (3.29), (3.30).

§ 3.2. Условия существования и асимптотические представления $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ – решений

Введём при $i \in \{1,\dots,m\}$ вспомогательную функцию

$$I_{i3}(t) = \int_{I_{i3}^0}^{t} p_i(s)ds,$$

где предел интегрирования I_{i3}^0 равен или a, или ω и выбран так, чтобы соответствующий интеграл стремился при $t \uparrow \omega$ либо к бесконечности, либо к нулю.

Кроме того, обозначим $y_1^0 = \operatorname{sgn} y_1$ и в случае, когда существует значение $a' \in [a,\omega)$ такое, что $y_1^0\,|\,I_{i3}(s)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} \in \Delta_1$ $(s \in [a',\omega))$, введём вспомогательную функцию

$$I_{i4}(t) = \int_{I_{i4}^0}^{t} \left| I_{i3}(s)\psi_{i1}\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(s)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} \right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} ds,$$

где предел интегрирования I_{i4}^{0} равен или a', или ω и выбран так, чтобы соответствующий интеграл стремился при $t\uparrow\omega$ либо к бесконечности, либо к нулю.

Теорема 3.3. *Пусть* $\mu_0=-1$ *и для некоторого* $i\in M$ *при всех* $j\in M\setminus\{i\}$ *соблюдается условие (2.1). Положим, кроме этого, что имеют место неравенства* $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1, \sigma_{i1}\neq 1$ *и функция* φ_{i1} *обладает свойством* S. *Тогда для существования у уравнения (1.11)* $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ *– решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$Y_1=\begin{cases}\pm\infty & ,\text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}=+\infty,\\ 0 & ,\text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}=0,\end{cases}$$

$$Y_0=\begin{cases}\pm\infty & ,\text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_{i4}(t)|^{\frac{1-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}=+\infty,\\ 0 & ,\text{если } \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_{i4}(t)|^{\frac{1-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}=0,\end{cases} \tag{3.31}$$

при $t\in(a',\omega)$ *выполнялись неравенства*

$$\alpha_i(1-\sigma_{i1})I_{i3}(t)y_1>0,\quad (1-\sigma_{i1})(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i4}(t)y_0y_1>0 \tag{3.32}$$

и имели место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)}=\sigma_{i1}-1,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i4}(t)}{I_{i4}(t)}=0. \tag{3.33}$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y(t)}{(\varphi_{i0}(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}} \sim y_1^0 \frac{|1-\sigma_{i1}|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}{1-\sigma_{i1}}(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i4}(t),$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{(1-\sigma_{i1})I'_{i4}(t)}{(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i4}(t)}. \tag{3.34}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y:[t_0,\omega)\to\Delta_0$ – произвольное $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ – решение уравнения (1.11). Поскольку выполняются условия (1.12) и (2.1), то из уравнения (1.11) с учетом леммы 2.1 следует, что

$$y''(t)=\alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.35}$$

Покажем, учитывая условие $\sigma_{i1}\neq 1$, что имеет место асимптотическое представление

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=\alpha_i(1-\sigma_{i1})I_{i3}(t)[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.36}$$

Поскольку

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\right)'=$$

$$=\frac{y''(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\left[1-\frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)}\frac{y(t)\varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))}-\frac{y'(t)\varphi'_{i1}(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right],$$

то в силу (1.15) – (1.18) и (3.35) получим, что

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\right)'=\alpha_i(1-\sigma_{i1})p_i(t)[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Интегрируя это соотношение от t_0 до $t\,(t\in(t_0,\omega))$, имеем

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=c_i+\alpha_i(1-\sigma_{i1})I_{i3}(t)[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega,$$

где $c_i\in\mathrm{R}$. Если $I_{i3}^0=t_0$, то справедливо (3.36). Покажем, что $c_i=0$ при $I_{i3}^0=\omega$. Предположим противное, тогда

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=c_i+o(1) \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega$$

и, в силу (3.35),

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_i p_i(t)\left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \quad при \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя последнее соотношение от t_0 до $t\,(t \in (t_0, \omega))$, находим, что

$$\ln|y'(t)| = C_i + \alpha_i I_{i3}(t)\left[\frac{1}{c_i} + o(1)\right] \quad при \quad t \uparrow \omega,$$

где $C_i \in \mathrm{R}$. В данном соотношении левая часть при $t \uparrow \omega$ стремится к бесконечности, а правая – к константе. Полученное противоречие доказывает справедливость (3.36) в случае, когда $I_{i3}^0 = \omega$. Из (3.36) следует, что имеют место первое из неравенств (3.32), а также (с учётом (3.35)) первое из условий (3.31) и первое из предельных соотношений (3.33).

Покажем теперь, что функция $L(z) = \dfrac{|y'(t(z))|}{|I_{i3}(t(z))|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}$, где $z = y_1^0 |I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}$, является медленно меняющейся при $z \to Y_1 (z \in \Delta_1)$:

$$\lim_{\substack{z \to Y_1 \\ z \in \Delta_1}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = \lim_{t \uparrow \omega}\left[y_1^0 |I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} \cdot \frac{|I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}{|y'(t)|} \cdot \frac{1-\sigma_{i1}}{y_1^0 |I_{i3}(t)|^{\frac{\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i1}}} I'_{i3}(t) \operatorname{sgn} I_{i3}(t)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{y''(t) y_1^0 |I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} - |y'(t)| \cdot \dfrac{1}{1-\sigma_{i1}} \cdot |I_{i3}(t)|^{\frac{\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i1}}} I'_{i3}(t) \operatorname{sgn} I_{i3}(t)}{|I_{i3}(t)|^{\frac{2}{1-\sigma_{i1}}}} \right] =$$

$$= \lim_{t \uparrow \omega}\left[(1-\sigma_{i1}) \frac{I_{i3}(t) y''(t)}{I'_{i3}(t) y'(t)} - 1\right] = 0$$

(справедливость последнего равенства вытекает из предельных соотношений (3.35), (3.36)).

Поскольку функция φ_{i1} обладает свойством S, то с учётом медленной изменяемости функции L при $z \to Y_1 (z \in \Delta_1)$ из соотношения (3.36) следует, что

$$\frac{|\,y'(t)\,|^{1-\sigma_{i1}}\,\mathrm{sgn}\,y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))}=\alpha_i(1-\sigma_{i1})I_{i3}(t)\psi_{i1}\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right)[1+o(1)]\quad при\quad t\uparrow\omega$$

или

$$\frac{y'(t)}{(\varphi_{i0}(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}=y_1^0\,|1-\sigma_{i1}\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\left|I_{i3}(t)\psi_{i1}\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}[1+o(1)]\quad при\quad t\uparrow\omega.\tag{3.37}$$

Далее, применяя правило Лопиталя в форме Штольца, получим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y(t)}{I_{i4}(t)(\varphi_{i0}(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\dfrac{y(t)}{(\varphi_{i0}(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}\right)'}{(I_{i4}(t))'}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y'(t)}{(\varphi_{i0}(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}\left[1-\dfrac{1}{1-\sigma_{i1}}\cdot\dfrac{y(t)\varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))}\right]}{\left|I_{i3}(t)\psi_{i1}\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}$$

или, с учетом (1.15), (3.37) и неравенства $\sigma_{i1}\neq 1$,

$$\frac{y(t)}{(\varphi_{i0}(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}=y_1^0\,\frac{|1-\sigma_{i1}\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}{1-\sigma_{i1}}(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i4}(t)[1+o(1)]\quad при\quad t\uparrow\omega.\tag{3.38}$$

Из данного соотношения вытекает справедливость второго из неравенств (3.32) и первого из асимптотических представлений (3.34). Кроме того, из (3.37), (3.38) следует, что имеют место второе из условий (3.31), второе из предельных соотношений (3.33) и второе из асимптотических представлений (3.34).

Достаточность. Пусть для некоторого $i\in M$ соблюдаются условия теоремы и выполняются соотношения (3.31) – (3.33). Зафиксировав с помощью (3.31), (3.32) значения Y_k и окрестности Δ_k $(k=0,1)$, докажем существование у уравнения (1.11) хотя бы одного $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ – решения, допускающего при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.34).

Рассмотрим сначала систему соотношений вида

$$\frac{|y|}{(\varphi_{i0}(y))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}} = \frac{|1-\sigma_{i1}|^{\frac{\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i1}}}}{|\Lambda_i|} |I_{i4}(t)| [1+v_1], \quad \left|\frac{y'}{y}\right| = |\Lambda_i(1-\sigma_{i1})| \left|\frac{I'_{i4}(t)}{I_{i4}(t)}\right| [1+v_2], \quad (3.39)$$

в которой $\Lambda_i = 1/(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})$, и установим, что она однозначно определяет заданные на множестве $D_0 = [t_2, \omega) \times V_0$, где $t_2 \in [a, \omega)$, $V_0 = \{(v_1, v_2) : |v_k| \le 0{,}5 \ (k = 1,2)\}$ непрерывно дифференцируемые неявные функции $y^{(k)} = Y_{ik}(t, v_1, v_2)$ $(k = 0,1)$ следующего вида

$$Y_{i0}(t, v_1, v_2) = y_0^0 \, |I_{i4}(t)|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1}) + z_1(t, v_1, v_2)},$$

$$Y_{i1}(t, v_1, v_2) = y_1^0 \, |I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}} + z_2(t, v_1, v_2)}, \quad (3.40)$$

где $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k$, $|z_1(t, v_1, v_2)| \le 0{,}5\Lambda_i(1-\sigma_{i1})$ и $|z_2(t, v_1, v_2)| \le \dfrac{1}{2(1-\sigma_{i1})}$ при $(t, v_1, v_2) \in D_0$, $\lim\limits_{t \uparrow \omega} z_{k+1}(t, v_1, v_2) = 0$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$. Для этого, полагая в (3.39)

$$y = y_0^0 \, |I_{i4}(t)|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1}) + z_1}, \; y' = y_1^0 \, |I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}} + z_2}, \quad (3.41)$$

получим систему соотношений вида

$$\begin{cases} z_1 = \Lambda_i(1-\sigma_{i1}) \times \\ \times \dfrac{\ln\left| \dfrac{|1-\sigma_{i1}|^{\frac{\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i1}}}}{|\Lambda_i|} \left(\psi_{i0}\left(y_0^0 \, |I_{i4}(t)|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1}) + z_1}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} [1+v_1] \right|}{\ln|I_{i4}(t)|}, \\ \ln|I_{i3}(t)| \, z_2 - \ln|I_{i4}(t)| (\Lambda_i \sigma_{i0} + z_1) = \\ = \ln\left| \Lambda_i(1-\sigma_{i1}) \left(\psi_{i1}\left(y_1^0 \, |I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}} + z_2} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} [1+v_2] \right|. \end{cases}$$

Частично разрешая данную систему относительно z_1,z_2 (как линейную неоднородную), имеем

$$z_k = a_k(t) + b_k(t, v_1, v_2) + Z_k(t, z_1, z_2) \quad (k = 1,2), \tag{3.42}$$

где

$$a_1(t) = \Lambda_i \frac{\sigma_{i1} \ln|1-\sigma_{i1}| - (1-\sigma_{i1}) \ln|\Lambda_i|}{\ln|I_{i4}(t)|},$$

$$a_2(t) = \frac{\Lambda_i \sigma_{i0} \ln|I_{i4}(t)| + \Lambda_i (1-\sigma_{i0}) \ln|1-\sigma_{i1}| - \Lambda_i \sigma_{i0} \ln|\Lambda_i|}{\ln|I_{i3}(t)|},$$

$$b_1(t, v_1, v_2) = \Lambda_i (1-\sigma_{i1}) \frac{\ln[1+v_1]}{\ln|I_{i4}(t)|}, \qquad b_2(t, v_1, v_2) = \frac{\Lambda_i (1-\sigma_{i1}) \ln[1+v_1] + \ln[1+v_2]}{\ln|I_{i3}(t)|},$$

$$Z_1(t, z_1, z_2) = \Lambda_i \frac{\ln \psi_{i0}\left(y_0^0 \,|I_{i4}(t)|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})+z_1}\right)}{\ln|I_{i4}(t)|},$$

$$Z_2(t, z_1, z_2) = \frac{\ln\left[\left(\psi_{i0}\left(y_0^0 \,|I_{i4}(t)|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})+z_1}\right)\right)^{\Lambda_i} \left(\psi_{i1}\left(y_1^0 \,|I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}+z_2}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right]}{\ln|I_{i3}(t)|}.$$

Принимая во внимание условия (1.16) и (3.31) – (3.33), получим предельные соотношения

$$\lim_{t \uparrow \omega} a_k(t) = 0 \quad (k = 1,2),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} b_k(t, v_1, v_2) = 0 \quad (k = 1,2) \quad \textit{равномерно по} \;\; (v_1, v_2) \in V_0,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} Z_k(t, z_1, z_2) = 0 \quad \textit{и} \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\partial Z_k(t, z_1, z_2)}{\partial z_l} = 0 \quad (k, l = 1, 2) \tag{3.43}$$

$$\textit{равномерно по} \quad (z_1, z_2) \in Z_0,$$

где $Z_0 = \left\{ (z_1, z_2) : |z_1| \le 0{,}5\Lambda_i (1-\sigma_{i1}),\; |z_2| \le \dfrac{1}{2(1-\sigma_{i1})} \right\}.$

Поскольку выполняется (3.43), то существует число $t_0 \in [a, \omega)$ такое, что на множестве $[t_0, \omega) \times Z_0 \times V_0$ соблюдаются неравенства

$$|a_k(t)+b_k(t,v_1,v_2)+Z_k(t,z_1,z_2)|\le\frac{\beta_0}{4}\quad(k=1,2)$$

$$\left(где\quad \beta_0=\min\left\{|\Lambda_i(1-\sigma_{i1})|,\left|\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\right|\right\}\right). \tag{3.44}$$

и условия Липшица

$$|Z_k(t,z_1^2,z_2^2)-Z_k(t,z_1^1,z_2^1)|\le 1/3\sum_{k=1}^{2}|z_k^2-z_k^1|\quad(k=1,2). \tag{3.45}$$

Теперь обозначим через B банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega=[t_0,\omega)\times V_0$ вектор-функций $z=(z_1,z_2):\Omega\to\mathrm{R}^n$ с нормой

$$\|z\|=\sup\left\{\sum_{k=1}^{2}|z_k(t,v_1,v_2)|:(t,v_1,v_2)\in\Omega\right\}.$$

Выберем из него подпространство B_0 таких функций из B, для которых $\|z\|\le\beta_0/2$, и рассмотрим на B_0, задав произвольное число $\nu\in(0,1)$, оператор $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)$, определённый соотношениями

$$\Phi_k(z)(t,v_1,v_2)=z_k(t,v_1,v_2)-\nu\,|z_k(t,v_1,v_2)-a_k(t)-b_k(t,v_1,v_2)-$$

$$-Z_k(t,z_1(t,v_1,v_2),z_2(t,v_1,v_2))|\quad(k=1,2). \tag{3.46}$$

Для любого $z\in B_0$ в силу условия (3.44) при $(t,v_1,v_2)\in\Omega$ имеем

$$|\Phi_k(z)(t,v_1,v_2)|\le(1-\nu)\,|z_k(t,v_1,v_2)|+\frac{\nu\beta_0}{4}\quad(k=1,2).$$

Поэтому на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2}|\Phi_k(z)(t,v_1,v_2)|\le(1-\nu)\sum_{k=1}^{2}|z_k(t,v_1,v_2)|+\frac{\nu\beta_0}{2}\le$$

$$\le(1-\nu)\,\|z\|+\frac{\nu\beta_0}{2}\le(1-\nu)\frac{\beta_0}{2}+\frac{\nu\beta_0}{2}=\frac{\beta_0}{2}.$$

Отсюда вытекает, что $\|\Phi(z)\|\le\beta_0/2$ и, следовательно, $\Phi(B_0)\subset B_0$.

Пусть теперь $z^1,z^2\in B_0$. Тогда в силу (3.45) при $(t,v_1,v_2)\in\Omega$

$$|\Phi_k(z^2)(t,v_1,v_2)-\Phi_k(z^1)(t,v_1,v_2)|\le(1-\nu)\,|z_k^2(t,v_1,v_2)-z_k^1(t,v_1,v_2)|+$$

$$+\nu\,|Z_k(t,z_1^2,z_2^2)-Z_k(t,z_1^1,z_2^1)|\le(1-\nu)\,|z_k^2(t,v_1,v_2)-z_k^1(t,v_1,v_2)|+$$

$$+\frac{\nu}{3}\,|\,z_2^2(t,v_1,v_2)-z_2^1(t,v_1,v_2)\,| \quad (k=1,2).$$

Значит, на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2}|\,\Phi_k(z^2)(t,v_1,v_2)-\Phi_k(z^1)(t,v_1,v_2)\,|\le$$

$$\le(1-\nu)\sum_{k=1}^{2}|\,z_k^2(t,v_1,v_2)-z_k^1(t,v_1,v_2)\,|+\frac{2\nu}{3}|\,z_2^2(t,v_1,v_2)-z_2^1(t,v_1,v_2)\,|\le\left(1-\frac{\nu}{3}\right)\|\,z^2-z^1\,\|,$$

откуда следует, что

$$\|\,\Phi(z^2)-\Phi(z^1)\,\|\le\left(1-\frac{\nu}{3}\right)\|\,z^2-z^1\,\|.$$

Таким образом показано, что оператор Φ отображает пространство B_0 в себя и является на нём оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная вектор-функция $z\in B_0$ такая, что $z=\Phi(z)$. В силу (3.46) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением системы (3.42), удовлетворяющим условию $\|\,z\,\|\le\beta_0/2$. Из (3.42) с учётом (3.43) следует, что компоненты данного решения стремятся к нулю при $t\uparrow\omega$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$. Кроме того, поскольку для системы (3.42) якобиан

$$\left(1-\Lambda_i\,\frac{y_0^0\,|\,I_{i4}(t)\,|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})+z_1}\;\psi_{i0}'(y_0^0\,|\,I_{i4}(t)\,|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})+z_1})}{\psi_{i0}(y_0^0\,|\,I_{i4}(t)\,|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})+z_1})}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\,\frac{y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}+z_2}\;\psi_{i1}'\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}+z_2}\right)}{\psi_{i1}\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}+z_2}\right)}\right)$$

в силу представлений (3.41) и условий (1.16), (3.31), (3.32) отличен от нуля на множестве $\Omega_1=[t_1,\omega)\times V_0$, где $t_1\in[t_0,\omega)$, то из известной локальной теоремы о существовании неявных функций, определённых системой соотношений, вытекает непрерывная дифференцируемость этого решения на Ω_1. В силу замены (3.41) полученной вектор-функции (z_1,z_2) соответствует вектор-функция (Y_{i0}, Y_{i1}) с компонентами вида (3.40), которая является решением системы (3.39), причём, с учётом (3.31), (3.32), справедливы утверждения

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y_{ik}(t, v_1, v_2) = Y_k$$

$$\textit{равномерно по } (v_1, v_2) \in V_0 \quad (k = 0{,}1),$$

$$Y_{ik}(t, v_1, v_2) \subset \Delta_k \tag{3.47}$$

$$\textit{при } (v_1, v_2) \in V_0,\ t \in [t_2, \omega),\ \textit{где } t_2 \in [t_1, \omega) \quad (k = 0{,}1).$$

Рассмотрим некоторые свойства функций Y_{ik} $(k = 0{,}1)$. В силу (3.47) и (1.15) при $j \in M, k = 0{,}1$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} G_{jk}(t, v_1, v_2) = \sigma_{jk}, \quad \textit{в которых}$$

$$G_{jk}(t, v_1, v_2) = \frac{Y_{ik}(t, v_1, v_2)\varphi'_{jk}\big(Y_{ik}(t, v_1, v_2)\big)}{\varphi_{jk}\big(Y_{ik}(t, v_1, v_2)\big)}. \tag{3.48}$$

Теперь положим в системе (3.39) $y^{(k)} = Y_{ik}(t, v_1, v_2)(k = 0{,}1)$ и продифференцируем полученные соотношения по t. В результате имеем систему уравнений, линейных относительно $(Y_{i0})'_t$ и $(Y_{i1})'_t$

$$\begin{cases} \dfrac{(Y_{i0})'_t}{(\varphi_{i0}(Y_{i0}(t, v_1, v_2)))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}\left[1 - \dfrac{G_{i0}(t, v_1, v_2)}{1-\sigma_{i1}}\right] = \\[2ex] \quad = y_1^0 \dfrac{|1-\sigma_{i1}|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})} I'_{i4}(t)[1+v_1], \\[2ex] -\dfrac{Y_{i1}(t, v_1, v_2)}{Y_{i0}^2(t, v_1, v_2)}(Y_{i0})'_t + \dfrac{1}{Y_{i0}(t, v_1, v_2)}(Y_{i1})'_t = \\[2ex] = \Lambda_i(1-\sigma_{i1}) \dfrac{I''_{i4}(t)I_{i4}(t) - (I'_{i4}(t))^2}{(I_{i4}(t))^2}[1+v_2]. \end{cases} \tag{3.49}$$

Определитель данной системы равен

$$\frac{1}{Y_{i0}(t,v_1,v_2)(\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2)))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}\left[1-\frac{G_{i0}(t,v_1,v_2)}{1-\sigma_{i1}}\right],$$

поэтому в силу вида функций $Y_{ik}\,(k=0,1)$, (3.48) и условия $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$ найдётся $t_3\in[t_2,\omega)$ такое, что на множестве $[t_3,\omega)\times V_0$ у системы (3.49) существует единственное решение, заданное формулами

$$(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t=\frac{1-\sigma_{i1}}{1-G_{i0}(t,v_1,v_2)-\sigma_{i1}}\cdot\frac{I'_{i4}(t)}{I_{i4}(t)}\cdot Y_{i0}(t,v_1,v_2),$$

$$(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t=\left(\frac{I''_{i4}(t)}{I'_{i4}(t)}+\frac{G_{i0}(t,v_1,v_2)}{1-G_{i0}(t,v_1,v_2)-\sigma_{i1}}\cdot\frac{I'_{i4}(t)}{I_{i4}(t)}\right)\cdot Y_{i1}(t,v_1,v_2),$$

Кроме того, поскольку

$$I''_{i4}(t)=\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\left|I_{i3}(t)\psi_{i1}\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right)\right|^{\frac{\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i1}}}\operatorname{sgn} I_{i3}(t)\times$$

$$\times\left[I'_{i3}(t)\psi_{i1}\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right)+I_{i3}(t)\psi'_{i1}\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right)y_1^0\frac{1}{1-\sigma_{i1}}|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i1}}}\operatorname{sgn} I_{i3}(t)I'_{i3}(t)\right]$$

,

то в силу (1.16) и первого из (3.33) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I''_{i4}(t)}{I'_{i4}(t)}=\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\pi_\omega(t)I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\cdot\frac{y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\,\psi'_{i1}\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right)}{\psi_{i1}\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right)}\right)\right]=-1.$$

Принимая во внимание данное предельное соотношение, представления для $(Y_{i0})'_t$, $(Y_{i1})'_t$ и условия (3.33), (3.48) получим, что равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ справедливы равенства

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i0}(t,v_1,v_2)}=0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{i1}(t,v_1,v_2)}=-1. \tag{3.50}$$

Таким образом, функции Y_{ik} $(k=0,1)$ обладают всеми свойствами $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ – решения, которые использовались при доказательстве леммы 2.1, и, следовательно, равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} H_i(t,v_1,v_2)=1, \quad \textit{в котором}$$
$$H_i(t,v_1,v_2)=\alpha_i\sum_{j=1}^{m}\alpha_j[1+r_j(t)]\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{j1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}, \tag{3.51}$$

Кроме того, поскольку функция φ_{i1} обладает свойством S, то в силу (3.31), (3.47) и (3.50) равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} K_i(t,v_1,v_2)=1, \quad \textit{в котором} \;\; K_i(t,v_1,v_2)=\frac{\psi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{\psi_{i1}\left(y_1^0\,|\,I_{i3}(t)\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right)}. \tag{3.52}$$

Теперь, применяя к уравнению (1.11) преобразование

$$y^{(k)}(t)=Y_{ik}(t,v_1(x),v_2(x)) \;\; (k=0,1), \quad x=\beta\ln|I_{i3}(t)|,$$
$$\beta=\begin{cases}1, & \textit{если } I_{i3}^0=a,\\ -1, & \textit{если } I_{i3}^0=\omega,\end{cases} \tag{3.53}$$

и учитывая, что вектор-функция $(Y_{i0}(t,v_1(x),v_2(x)),Y_{i1}(t,v_1(x),v_2(x)))$ при $t\in[t_3,\omega)$ и $(v_1(x),v_2(x))\in V_0$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{y(t)}{(\varphi_{i0}(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}=y_1^0\,\frac{|1-\sigma_{i1}|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})}I_{i4}(t)[1+v_1(x)],$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\Lambda_i(1-\sigma_{i1})\frac{I'_{i4}(t)}{I_{i4}(t)}[1+v_2(x)], \tag{3.54}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1' = \beta h_i(t)[-[1+v_1] + \Lambda_i(1 - G_{i0}(t, v_1, v_2) - \sigma_{i1})[1+v_1][1+v_2]], \\ v_2' = \beta\left[-\left(\dfrac{I_{i4}''(t) I_{i3}(t)}{I_{i4}'(t) I_{i3}'(t)} - h_i(t)\right)[1+v_2] - \Lambda_i(1-\sigma_{i1}) h_i(t)[1+v_2]^2 + \right. \\ \left. \qquad + \dfrac{1}{1-\sigma_{i1}} K_i(t, v_1, v_2) H_i(t, v_1, v_2) \dfrac{[1+v_2]^{\sigma_{i1}}}{[1+v_1]^{1-\sigma_{i1}}}\right], \end{cases} \tag{3.55}$$

в которой $h_i(t) = \dfrac{I_{i4}'(t) I_{i3}(t)}{I_{i4}(t) I_{i3}'(t)}$, t-функция, обратная к $x = \beta \ln |I_{i3}(t)|$. Данную систему рассмотрим на множестве $[x_0, +\infty) \times V_0$, где $x_0 = \beta \ln |I_{i3}(t_3)|$.

Поскольку выполняются (3.48), (3.51) и (3.52), то имеют место равенства

$$\begin{gathered} G_{i0}(t, v_1, v_2) = \sigma_{i0} + R_{i1}(x, v_1, v_2), \\ K_i(t, v_1, v_2) = 1 + R_{i2}(x, v_1, v_2), \quad H_i(t, v_1, v_2) = 1 + R_{i3}(x, v_1, v_2), \end{gathered} \tag{3.56}$$

где функции $R_{ik}(x, v_1, v_2)$ $(k = 1,3)$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$.

Кроме того, допустимы представления

$$\begin{gathered} [1+v_1][1+v_2] = 1 + v_1 + v_2 + R_4(v_1, v_2) \\ и \\ \frac{[1+v_2]^{\sigma_{i1}}}{[1+v_1]^{1-\sigma_{i1}}} = 1 + (\sigma_{i1} - 1) v_1 + \sigma_{i1} v_2 + R_5(v_1, v_2), \end{gathered} \tag{3.57}$$

в которых функции $R_k(v_1, v_2)$ $(k = 4,5)$ удовлетворяют предельным соотношениям:

$$\lim_{|v_1|+|v_2| \to 0} \frac{R_k(v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0.$$

Учитывая (3.56) и (3.57), систему (3.55) можно переписать в виде

$$\begin{cases} v_1' = \beta h_i(t)[f_1(x) + c_{11}(x) v_1 + c_{12}(x) v_2 + V_{11}(x, v_1, v_2) + V_{12}(x, v_1, v_2)], \\ v_2' = \beta[f_2(x) + c_{21}(x) v_1 + c_{22}(x) v_2 + + V_{21}(x, v_1, v_2) + V_{22}(x, v_1, v_2)], \end{cases} \tag{3.58}$$

где

$$f_1(x) = 0, \quad c_{11}(x) = 0, \quad c_{12}(x) = 1,$$

$$f_2(x) = -\Lambda_i(1-\sigma_{i1})h_i(t) - \frac{I''_{i4}(t)I_{i3}(t)}{I'_{i4}(t)I'_{i3}(t)} + h_i(t) + \frac{1}{1-\sigma_{i1}}, \quad c_{21}(x) = -1,$$

$$c_{22}(x) = -2\Lambda_i(1-\sigma_{i1})h_i(t) - \frac{I''_{i4}(t)I_{i3}(t)}{I'_{i4}(t)I'_{i3}(t)} + h_i(t) + \frac{\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i1}},$$

$$V_{11}(x,v_1,v_2) = -\Lambda_i R_{i1}(x,v_1,v_2)[1+v_1][1+v_2],\ V_{12}(x,v_1,v_2) = \Lambda_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})R_4(v_1,v_2),$$

$$V_{21}(x,v_1,v_2) = \frac{1}{1-\sigma_{i1}}\frac{[1+v_2]^{\sigma_{i1}}}{[1+v_1]^{1-\sigma_{i1}}}(R_{i2}(x,v_1,v_2) + R_{i3}(x,v_1,v_2) + R_{i2}(x,v_1,v_2)R_{i3}(x,v_1,v_2)),$$

$$V_{22}(x,v_1,v_2) = -\Lambda_i(1-\sigma_{i1})h_i(t)v_2^2 + \frac{1}{1-\sigma_{i1}}R_5(v_1,v_2).$$

В силу (3.33), (3.56), (3.57), определения Λ_i и замены независимой переменной имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = -1,\ \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = -1,$$

а функции $V_{lk}(x,v_1,v_2)$ $(l=1,2; k=1,2)$ таковы, что

$$\lim_{x\to+\infty} V_{l1}(x,v_1,v_2) = 0\ \ (l=1,2) \quad \textit{равномерно по}\ \ (v_1,v_2)\in V_0,$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V_{l2}(x,v_1,v_2)}{|\,v_1\,|+|\,v_2\,|} = 0\ \ (l=1,2) \quad \textit{равномерно по}\ \ x\in[x_0;+\infty).$$

Чтобы привести данную систему к почти треугольному виду, применим преобразование

$$v_2(x) = w_1(x), \quad v_1(x) = w_2(x) + \frac{1}{1-\sigma_{i1}}\frac{\pi_\omega(t(x))I'_{i4}(t(x))}{I_{i4}(t(x))}w_1(x), \tag{3.59}$$

в результате чего получим

$$\begin{cases} w_1' = \beta[F_1(x) + C_{11}(x)w_1 + C_{12}(x)w_2 + W_{11}(x,w_1,w_2) + W_{12}(x,w_1,w_2)], \\ w_2' = \beta h_i(t)[F_2(x) + C_{21}(x)w_1 + C_{22}(x)w_2 + W_{21}(x,w_1,w_2) + W_{22}(x,w_1,w_2)], \end{cases} \tag{3.60}$$

где

$$F_1(x) = f_2(x), \quad C_{11}(x) = \frac{1}{1-\sigma_{i1}}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i4}(t)}{I_{i4}(t)}c_{21}(x) + c_{22}(x), \quad C_{12}(x) = c_{21}(x),$$

$$W_{1l}(x,w_1,w_2)=V_{2l}\left(x,w_2+\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\frac{\pi_\omega(t(x))I'_{i4}(t(x))}{I_{i4}(t(x))}w_1,w_1\right)\quad (l=1,2)\,,$$

$$C_{21}(x)=\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i4}(t)}{I_{i4}(t)}c_{11}(x)+c_{12}(x)-$$
$$-\frac{1}{(1-\sigma_{i1})^2}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i4}(t)}{I_{i4}(t)}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)}c_{21}(x)-\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)}c_{22}(x)-$$
$$-\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\left(1+\frac{\pi_\omega(t)I''_{i4}(t)}{I'_{i4}(t)}-\frac{\pi_\omega(t)I'_{i4}(t)}{I_{i4}(t)}\right),$$

$$C_{22}(x)=c_{11}(x)-\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)}c_{21}(x),$$

$$W_{2l}(x,w_1,w_2)=V_{1l}\left(x,w_2+\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\frac{\pi_\omega(t(x))I'_{i4}(t(x))}{I_{i4}(t(x))}w_1,w_1\right)-\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\frac{\pi_\omega(t)I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)}\times$$
$$\times V_{2l}\left(x,w_2+\frac{1}{1-\sigma_{i1}}\frac{\pi_\omega(t(x))I'_{i4}(t(x))}{I_{i4}(t(x))}w_1,w_1\right)\quad (l=1,2).$$

В силу свойств коэффициентов системы (3.58), преобразования (3.59) и второго из условий (3.33) имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty}F_1(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty}C_{11}(x)=-1,\ \lim_{x\to+\infty}C_{12}(x)=-1,$$
$$\lim_{x\to+\infty}F_2(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty}C_{21}(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty}C_{22}(x)=-1,$$

а функции $W_{lk}(x,w_1,w_2)$ $(l=1,2;k=1,2)$ таковы, что

$$\lim_{x\to+\infty}W_{l1}(x,w_1,w_2)=0\ \ (l=1,2)\ \ \textit{равномерно по}\ \ (w_1,w_2)\in W_0$$

(где W_0 определяется через V_0 с помощью (3.59)),

$$\lim_{|w_1|+|w_2|\to0}\frac{W_{l2}(x,w_1,w_2)}{|w_1|+|w_2|}=0\ \ (l=1,2)\quad \textit{равномерно по}\ \ x\in[x_0;+\infty).$$

Кроме того, имеем

$$\int_{x_0}^{\pm\infty}h_i(t(x))dx=\int_{x_0}^{\pm\infty}\frac{I'_{i4}(t(x))I_{i3}(t(x))}{I_{i4}(t(x))I'_{i3}(t(x))}dx=\beta\int_{t_3}^{\omega}\frac{I'_{i4}(t)I_{i3}(t)}{I_{i4}(t)I'_{i3}(t)}\cdot\frac{I'_{i3}(t)}{I_{i3}(t)}dt=\pm\infty.$$

Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (3.60) выполнены все условия теоремы 2.1 работы [38]. Согласно данной теореме система (3.60) имеет хотя бы одно решение $(w_1,w_2):[x_1,+\infty)\to\mathrm{R}$ (*где* $x_1\ge x_0$), стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Этому решению, с учётом преобразований (3.53) и (3.59), соответствует решение $y(t)$ уравнения (1.11), которое вместе со своей производной первого порядка допускают, в силу (3.54) и (3.32), асимптотические представления (3.34). Кроме того, из (3.47) и (3.34), (1.11), (3.33) следует, что данное решение является $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ – решением уравнения (1.11).

Приведём теперь результат, который позволяет при некоторых дополнительных ограничениях на функцию φ_{i0} получить асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ – решений и их производных первого порядка в явном виде.

Теорема 3.4. *Пусть соблюдаются условия теоремы 3.3 и, кроме этого, функция* φ_{i0} *обладает свойством* S. *Тогда при выполнении (3.31) – (3.33) каждое* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, -1)$ *– решение уравнения (1.11) и его производная первого порядка при* $t \uparrow \omega$ *представимы в виде*

$$y(t) \sim y_0^0 \left(|1-\sigma_{i1}|^{\sigma_{i1}} |(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) I_{i4}(t)|^{1-\sigma_{i1}} \psi_{i0}\left(y_0^0 \, | I_{i4}(t) |^{\frac{1-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t) \sim y_1^0 \left| I_{i3}(t) \psi_{i1}\left(y_1^0 \, | I_{i3}(t) |^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} \times \tag{3.61}$$

$$\times \left(|1-\sigma_{i1}|^{1-\sigma_{i0}} |(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) I_{i4}(t)|^{\sigma_{i0}} \psi_{i0}\left(y_0^0 \, | I_{i4}(t) |^{\frac{1-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

где $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k \ (k = 0,1)$ и определяются из условия (3.32).

Доказательство. Для начала покажем, что функция $L(z)=\dfrac{|\,y(t(z))\,|}{|\,I_{i4}(t(z))\,|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})}}$,

где $z=y_0^0\,|\,I_{i4}(t)\,|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})}$ и $\Lambda_i=1/(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})$, является медленно меняющейся при $z\to Y_0\,(z\in\Delta_0)$:

$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_0}}\frac{zL'(z)}{L(z)}=\lim_{t\uparrow\omega}\Bigg[y_0^0\,|\,I_{i4}(t)\,|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})}\cdot\frac{|\,I_{i4}(t)\,|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})}}{|\,y(t)\,|}\cdot\frac{1}{y_0^0\Lambda_i(1-\sigma_{i1})\,|\,I_{i4}(t)\,|^{\Lambda_i\sigma_{i0}}\;I'_{i4}(t)\operatorname{sgn}I_{i4}(t)}\times$$

$$\times\frac{y_0^0y'(t)\,|\,I_{i4}(t)\,|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})}-|\,y(t)\,\|\,I_{i4}(t)\,|^{\Lambda_i\sigma_{i0}}\;I'_{i4}(t)\operatorname{sgn}I_{i4}(t)}{|\,I_{i4}(t)\,|^{2\Lambda_i(1-\sigma_{i1})}}\Bigg]=\lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{I_{i4}(t)y'(t)}{I'_{i4}(t)y(t)}-\Lambda_i(1-\sigma_{i1})\right]=0$$

(справедливость последнего равенства вытекает из предельных соотношений (3.37), (3.38)).

Поскольку функция φ_{i0} обладает свойством S, то с учётом медленной изменяемости функции L при $z\to Y_0\,(z\in\Delta_0)$ и условия (3.31) получим

$$\varphi_{i0}(y(t))=|\,y(t)\,|^{\sigma_{i0}}\;\psi_{i0}\Big(y_0^0\,|\,I_{i4}(t)\,|^{\Lambda_i(1-\sigma_{i1})}\Big)[1+o(1)]\;\;\textit{при}\;\;t\uparrow\omega.$$

Принимая во внимание данное соотношение, асимптотические представления (3.34) можно переписать в виде (3.61).

§ 3.3. Пример уравнения с быстро и правильно меняющимися коэффициентами $p_i(t)$

Для иллюстрации полученных в §§3.1−3.2 результатов исследуем вопрос об асимптотическом поведении $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – решений и $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ – решений уравнения (1.19). При этом необходимо рассмотреть три возможных случая: $\omega=+\infty$, $\omega=1$ и $\omega\in(0;1)\cup(1;+\infty)$. Поскольку в уравнении (1.19) не задан конкретный вид функций φ_{i0} и φ_{i1}, возникают трудности при нахождении $I_{i2}(t)$ и $I_{i4}(t)$ соответственно. Поэтому придется потребовать от $\varphi_{ik}\,(k=0,1)$ обладания свойством более жёстким, чем S

Определение 3.1. *Будем говорить, что функция* $\varphi_{ik}(z)$ $(i=1,...,m; k=0,1)$ *обладает свойством* $\overline{S}$*, если имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\substack{z\to Y_k \\ z\in\Delta_k}} \frac{z\ln|z|\psi'_{ik}(z)}{\psi_{ik}(z)}=0.$$

Свойством $\overline{S}$ обладает, например, функция $\ln|\ln|z||$. Функция же $|\ln|z||^k$ $(k\neq 0)$ не обладает свойством $\overline{S}$ (хотя обладает свойством S). Отметим, что данное дополнительное ограничение на нелинейности не является необходимым и связано с достаточно общим видом уравнения (1.19).

Вначале получим условия существования и асимптотические представления $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ – решений.

а) Пусть $t\to+\infty$, тогда при $i=1,...,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{|\pi_\omega(t)|\,p'_i(t)}{p_i(t)}=\beta_i t+\gamma_i+\frac{\rho_i}{\ln t},$$

$$I_{i2}(t)\sim\begin{cases}\dfrac{|a_i|}{\beta_i}e^{\beta_i t}t^{\gamma_i+\sigma_{i0}}\ln^{\rho_i}t\,\psi_{i0}(y_0^0t) & \textit{при} \quad \beta_i\neq 0,\\[2ex] \dfrac{|a_i|}{1+\gamma_i+\sigma_{i0}}t^{1+\gamma_i+\sigma_{i0}}\ln^{\rho_i}t\,\psi_{i0}(y_0^0t) & \textit{при} \quad \beta_i=0,\ \gamma_i+\sigma_{i0}\neq-1,\\[2ex] \dfrac{|a_i|}{1+\rho_i}\ln^{1+\rho_i}t\,\psi_{i0}(y_0^0t) & \textit{при} \quad \beta_i=0,\ \gamma_i+\sigma_{i0}=-1,\ \rho_i\neq-1,\end{cases}$$

(последнее представление для $I_{i2}(t)$ получено при условии, что φ_{i0} обладает свойством $\overline{S}$; чтобы не накладывать ещё более сильные ограничения на функцию φ_{i0}, случай $\beta_i=0,\ \gamma_i+\sigma_{i0}=-1,\ \rho_i=-1$ не рассматриваем),

$$\frac{\pi_\omega(t)I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)} \sim \begin{cases} \beta_i t & \textit{при} \;\; \beta_i \neq 0, \\ 1+\gamma_i+\sigma_{i0} & \textit{при} \;\; \beta_i = 0, \gamma_i+\sigma_{i0} \neq -1, \\ \dfrac{1+\rho_i}{\ln t} & \textit{при} \;\; \beta_i = 0, \gamma_i+\sigma_{i0} = -1, \; \rho_i \neq -1. \end{cases}$$

С учётом полученных представлений, леммы 2.1 и теорем 3.1, 3.2 имеют место

Следствие 3.1. *Пусть* $\mu_0 = 0$ *и для некоторого* $i \in M$ *при каждом* $j \in M \setminus \{i\}$ *либо*

$$\beta_j < \beta_i,$$

либо

$$\beta_j = \beta_i \;\; \textit{и} \;\; \gamma_j - \gamma_i < \sigma_{i0} - \sigma_{j0}.$$

Предположим, кроме того, что имеет место неравенство $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$ *и функция* φ_{i0} *обладает свойством* S. *Тогда при* $\beta_i \neq 0$ *или* $\beta_i = 0,\ \gamma_i + \sigma_{i0} \neq -1$ *у уравнения* (1.19) *не существует* $\Pi_{+\infty}(Y_0, Y_1, 0)$ *– решений.*

Следствие 3.2. *Пусть* $\mu_0 = 0$ *и для некоторого* $i \in M$ *при каждом* $j \in M \setminus \{i\}$ *либо*

$$\beta_j < \beta_i,$$

либо

$$\beta_j = \beta_i \;\; \textit{и} \;\; \gamma_j - \gamma_i < \sigma_{i0} - \sigma_{j0}.$$

Предположим, кроме того, что имеет место неравенство $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$ *и функция* φ_{i0} *обладает свойством* $\overline{S}$. *Тогда при* $\beta_i = 0, \gamma_i + \sigma_{i0} = -1, \rho_i \neq -1$ *для существования у уравнения* (1.19) $\Pi_{+\infty}(Y_0, Y_1, 0)$ *– решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$Y_1 = \begin{cases} \pm\infty, \textit{если} \;\; (1+\rho_i)(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) > 0, \\ 0 \quad, \textit{если} \;\; (1+\rho_i)(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}) < 0, \end{cases} \qquad Y_0 = \pm\infty,$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_i(1+\rho_i)(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})y_1>0,\quad y_0y_1>0.$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t\to+\infty$ *асимптотические представления*

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}}}{\varphi_{i1}(y'(t))}=\left|\frac{a_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})}{1+\rho_i}\right|\ln^{1+\rho_i}t\psi_{i0}(y_0^0t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1}{t}[1+o(1)],$$

которые в случае, когда функция φ_{i1} *обладает свойством* S, *могут быть записаны в виде*

$$y(t)\sim y_0^0t\left(\left|\frac{a_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})}{1+\rho_i}\right|\ln^{1+\rho_i}t\psi_{i0}(y_0^0t)\psi_{i1}\left(y_1^0\left|\frac{a_i}{1+\rho_i}\ln^{1+\rho_i}t\psi_{i0}(y_0^0t)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t)\sim y_1^0\left(\left|\frac{a_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})}{1+\rho_i}\right|\ln^{1+\rho_i}t\psi_{i0}(y_0^0t)\psi_{i1}\left(y_1^0\left|\frac{a_i}{1+\rho_i}\ln^{1+\rho_i}t\psi_{i0}(y_0^0t)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}.$$

б) Пусть $t\uparrow 1$, тогда при $i=1,...,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{|\pi_\omega(t)|\,p_i'(t)}{p_i(t)}=(1-t)\left(\beta_i+\frac{\gamma_i}{t}+\frac{\rho_i}{t\ln t}\right)\sim-\rho_i,$$

$$I_{i1}(t)\sim\begin{cases}-\dfrac{|a_i|}{1+\rho_i+\sigma_{i0}}e^{\beta_i}(1-t)^{1+\rho_i+\sigma_{i0}}\psi_{i0}(y_0^0(1-t)) & \text{при}\quad \rho_i+\sigma_{i0}\neq-1,\\ -|a_i|e^{\beta_i}\ln(1-t)\psi_{i0}(y_0^0(1-t)) & \text{при}\quad \rho_i+\sigma_{i0}=-1,\end{cases}$$

(последнее представление для $I_{i2}(t)$ получено при условии, что φ_{i0} обладает свойством $\overline{S}$),

$$\frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)}\sim\begin{cases}1+\rho_i+\sigma_{i0} & \text{при}\quad \rho_i+\sigma_{i0}\neq-1,\\ \dfrac{1}{\ln(1-t)} & \text{при}\quad \rho_i+\sigma_{i0}=-1.\end{cases}$$

С учётом полученных представлений, леммы 2.1 и теорем 3.1, 3.2 имеют место

Следствие 3.3. *Пусть* $\mu_0 = 0$ *и для некоторого* $i \in M$ *при всех* $j \in M \setminus \{i\}$ *справедливо соотношение*

$$\sigma_{i0} - \sigma_{j0} < \rho_j - \rho_i.$$

Положим, кроме того, что имеет место неравенство $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$ *и функция* φ_{i0} *обладает свойством* S. *Тогда при* $\rho_i + \sigma_{i0} \neq -1$ *у уравнения* (1.19) *не существует* $\Pi_1(Y_0, Y_1, 0)$ *– решений.*

Следствие 3.4. *Пусть* $\mu_0 = 0$ *и для некоторого* $i \in M$ *при всех* $j \in M \setminus \{i\}$ *справедливо соотношение*

$$\sigma_{i0} - \sigma_{j0} < \rho_j - \rho_i.$$

Положим, кроме того, что имеет место неравенство $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$ *и функция* φ_{i0} *обладает свойством* $\overline{S}$. *Тогда при* $\rho_i + \sigma_{i0} = -1$ *для существования у уравнения* (1.19) $\Pi_1(Y_0, Y_1, 0)$ *– решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$Y_1 = \begin{cases} \pm\infty, \textit{если } 1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1} > 0, \\ \\ 0 \quad, \textit{если } 1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1} < 0, \end{cases} \qquad Y_0 = 0$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_i (1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) y_1 > 0, \quad y_0 y_1 < 0.$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}}}{\varphi_{i1}(y'(t))} = |a_i e^{\beta_i} (1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})| \ln(1-t) \psi_{i0}(y_0^0 (1-t))[1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{t-1}[1 + o(1)],$$

которые в случае, когда функция φ_{i1} *обладает свойством* S, *могут быть записаны в виде*

$$y(t) \sim y_0^0(1-t)\left(\left|a_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})e^{\beta_i}\ln(1-t)\psi_{i0}(y_0^0(1-t))\right|\times\right.$$

$$\left.\times\psi_{i1}\left(y_1^0\left|a_ie^{\beta_i}\ln(1-t)\psi_{i0}(y_0^0(1-t))\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t) \sim y_1^0\left(\left|a_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})e^{\beta_i}\ln(1-t)\psi_{i0}(y_0^0(1-t))\right|\times\right.$$

$$\left.\times\psi_{i1}\left(y_1^0\left|a_ie^{\beta_i}\ln(1-t)\psi_{i0}(y_0^0(1-t))\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}.$$

в) Пусть $t\uparrow\omega$, где $\omega\in(0;1)\cup(1;+\infty)$, тогда при $i=1,...,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{|\pi_\omega(t)|\,p_i'(t)}{p_i(t)}=(\omega-t)\left(\beta_i+\frac{\gamma_i}{t}+\frac{\rho_i}{t\ln t}\right)\sim 0,$$

$$I_{i2}(t)\sim\begin{cases}-\dfrac{|a_i|}{1+\sigma_{i0}}e^{\beta_i\omega}\omega^{\gamma_i}\,|\ln\omega|^{\rho_i}\,(\omega-t)^{1+\sigma_{i0}}\psi_{i0}(y_0^0(\omega-t)) & \text{при } \sigma_{i0}\neq-1\\ -|a_i|\,e^{\beta_i\omega}\omega^{\gamma_i}\,|\ln\omega|^{\rho_i}\,\ln(\omega-t)\psi_{i0}(y_0^0(\omega-t)) & \text{при } \sigma_{i0}=-1,\end{cases}$$

(последнее представление для $I_{i2}(t)$ получено при условии, что φ_{i0} обладает свойством $\overline{S}$),

$$\frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)}\sim\begin{cases}1+\sigma_{i0} & \text{при } \sigma_{i0}\neq-1,\\ \dfrac{1}{\ln(\omega-t)} & \text{при } \sigma_{i0}=-1.\end{cases}$$

С учётом полученных представлений, леммы 2.1 и теорем 3.1, 3.2 имеют место

Следствие 3.5. *Пусть* $\mu_0=0$ *и для некоторого* $i\in M$ *при всех* $j\in M\setminus\{i\}$ *справедливо соотношение*

$$\sigma_{i0}-\sigma_{j0}<0.$$

Предположим, кроме того, что имеет место неравенство $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$ *и функция* φ_{i0} *обладает свойством* S. *Тогда при* $\sigma_{i0}\neq -1$ *у уравнения* (1.19) *не существует* $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ *– решений.*

Следствие 3.6. *Пусть* $\mu_0=0$ *и для некоторого* $i\in M$ *при всех* $j\in M\setminus\{i\}$ *справедливо соотношение*

$$\sigma_{i0}-\sigma_{j0}<0.$$

Предположим, кроме того, что имеет место неравенство $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$ *и функция* φ_{i0} *обладает свойством* $\overline{S}$. *Тогда при* $\sigma_{i0}=-1$ *для существования у уравнения* (1.19) $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,0)$ *– решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$Y_1=\begin{cases}\pm\infty, \textit{если } 2-\sigma_{i1}>0,\\[2ex] 0 \quad ,\textit{если } 2-\sigma_{i1}<0,\end{cases} \qquad Y_0=0$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_i(2-\sigma_{i1})y_1>0, \quad y_0y_1<0.$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{(y'(t))^2}{\varphi_{i1}(y'(t))}=|\,a_i(2-\sigma_{i1})\,|\,e^{\beta_i\omega}\omega^{\gamma_i}\,|\ln\omega|^{\rho_i}\,\ln(\omega-t)\psi_{i0}(y_0^0(\omega-t))[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1}{t-\omega}[1+o(1)],$$

которые в случае, когда функция φ_{i1} *обладает свойством* S, *могут быть записаны в виде*

$$y(t)\sim y_0^0(\omega-t)\Big(\big|a_iA_i(2-\sigma_{i1})\ln(\omega-t)\psi_{i0}(y_0^0(\omega-t))\big|\times$$

$$\times\psi_{i1}\left(y_1^0\big|a_iA_i\ln(\omega-t)\psi_{i0}(y_0^0(\omega-t))\big|^{\frac{1}{2-\sigma_{i1}}}\right)\Bigg)^{\frac{1}{2-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t)\sim y_1^0\Big(\big|a_iA_i(2-\sigma_{i1})\ln(\omega-t)\psi_{i0}(y_0^0(\omega-t))\big|\times$$

$$\times\psi_{i1}\left(y_1^0\left|a_iA_i\ln(\omega-t)\psi_{i0}(y_0^0(\omega-t))\right|^{\frac{1}{2-\sigma_{i1}}}\right)\Bigg)^{\frac{1}{2-\sigma_{i1}}},$$

где $A_i=e^{\beta_i\omega}\omega^{\gamma_i}\,|\ln\omega|^{\rho_i}$.

Теперь получим условия существования и асимптотические представления $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ – решений.

г) Пусть $t\to+\infty$, тогда при $i=1,...,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{|\pi_\omega(t)|\,p_i'(t)}{p_i(t)}=\beta_i t+\gamma_i+\frac{\rho_i}{\ln t},$$

$$I_{i3}(t)\sim\begin{cases}\dfrac{|a_i|}{\beta_i}e^{\beta_i t}t^{\gamma_i}\ln^{\rho_i}t & \textit{при }\beta_i\neq0,\\[2ex] \dfrac{|a_i|}{1+\gamma_i}t^{1+\gamma_i}\ln^{\rho_i}t & \textit{при }\beta_i=0,\ \gamma_i\neq-1,\\[2ex] \dfrac{|a_i|}{1+\rho_i}\ln^{1+\rho_i}t & \textit{при }\beta_i=0,\ \gamma_i=-1,\ \rho_i\neq-1,\\[2ex] |a_i|\ln\ln t & \textit{при }\beta_i=0,\ \gamma_i=-1,\ \rho_i=-1,\end{cases}$$

$$\frac{tI_{i3}'(t)}{I_{i3}(t)}\sim\begin{cases}\beta_i t & \textit{при }\beta_i\neq0,\\[2ex] 1+\gamma_i & \textit{при }\beta_i=0,\ \gamma_i\neq-1,\\[2ex] \dfrac{1+\rho_i}{\ln t} & \textit{при }\beta_i=0,\ \gamma_i=-1,\ \rho_i\neq-1,\\[2ex] \dfrac{1}{\ln t\ln\ln t} & \textit{при }\beta_i=0,\ \gamma_i=-1,\ \rho_i=-1,\end{cases}$$

(из последнего представления, первого из предельных сотношений (3.33) и условия $\sigma_{i1}\neq1$ теоремы 3.3 вытекает, что $\beta_i=0$, $\gamma_i\neq-1$),

$$I_{i4}(t) \sim \frac{A_i(1-\sigma_{i1})}{1-\sigma_{i1}+\rho_i}(\ln t)^{\frac{1-\sigma_{i1}+\rho_i}{1-\sigma_{i1}}}\left(\psi_{i1}\left(y_1^0 A_i \frac{(\ln t)^{\frac{\rho_i}{1-\sigma_{i1}}}}{t}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}, \quad где\ A_i = \left|\frac{a_i}{1-\sigma_{i1}}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}$$

(представление для $I_{i4}(t)$ получено при условии, что φ_{i1} обладает свойством $\overline{S}$ и $\rho_i \neq \sigma_{i1} - 1$),

$$\frac{tI'_{i4}(t)}{I_{i4}(t)} \sim \frac{1}{\ln t}.$$

В силу этих представлений, леммы 2.1 и теорем 3.3, 3.4 для уравнения (1.19) имеет место

Следствие 3.7. *Пусть* $\mu_0 = -1$ *и для некоторого* $i \in M$ *при всех* $j \in M \setminus \{i\}$ *либо*

$$\beta_j < \beta_i,$$

либо

$$\beta_j = \beta_i \quad и \quad \gamma_j - \gamma_i < \sigma_{j1} - \sigma_{i1}.$$

Предположим, кроме того, что имеют место неравенства $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$, $\sigma_{i1} \neq 1$, $\rho_i \neq \sigma_{i1} - 1$ *и функция* φ_{i1} *обладает свойством* $\overline{S}$. *Тогда для существования у уравнения* (1.19) $\Pi_{+\infty}(Y_0, Y_1, -1)$ *– решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$\beta_i = 0, \ \gamma_i = \sigma_{i1} - 2,$$

$$Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, если\ (1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})(1-\sigma_{i1}+\rho_i) > 0, \\ 0 \quad , если\ (1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})(1-\sigma_{i1}+\rho_i) < 0, \end{cases} \qquad Y_1 = 0$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_i y_1 < 0, \quad (1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})(1-\sigma_{i1}+\rho_i) y_0 y_1 > 0.$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y(t)}{(\varphi_{i0}(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}} = y_1^0 \,|\, a_i \,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} \frac{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i1}+\rho_i} (\ln t)^{\frac{1-\sigma_{i1}+\rho_i}{1-\sigma_{i1}}} \left(\psi_{i1}\left(y_1^0 A_i \frac{(\ln t)^{\frac{\rho_i}{1-\sigma_{i1}}}}{t} \right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} [1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1-\sigma_{i1}+\rho_i}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} \cdot \frac{1}{t\ln t}[1+o(1)],$$

которые в случае, когда функция φ_{i0} *обладает свойством* S, *могут быть записаны в виде*

$$y(t) \sim y_0^0 \left(|1-\sigma_{i1}\,\|\, A_i B_i \,|^{1-\sigma_{i1}} \, (\ln t)^{1-\sigma_{i1}+\rho_i} \psi_{i1}\left(y_1^0 A_i \frac{(\ln t)^{\frac{\rho_i}{1-\sigma_{i1}}}}{t} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \psi_{i0}\left(y_0^0 \left| \frac{A_i(1-\sigma_{i1})}{1-\sigma_{i1}+\rho_i} \right|^{\frac{1-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} (\ln t)^{\frac{1}{B_i}} \left(\psi_{i1}\left(y_1^0 A_i \frac{(\ln t)^{\frac{\rho_i}{1-\sigma_{i1}}}}{t} \right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} \right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t) \sim y_1^0 A_i \frac{(\ln t)^{\frac{\rho_i}{1-\sigma_{i1}}}}{t} \left(\psi_{i1}\left(y_1^0 A_i \frac{(\ln t)^{\frac{\rho_i}{1-\sigma_{i1}}}}{t} \right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}} \times$$

$$\left(|1-\sigma_{i1}\,|^{1-\sigma_{i0}} \left| A_i B_i (1-\sigma_{i1})(\ln t)^{\frac{1-\sigma_{i1}+\rho_i}{1-\sigma_{i1}}} \right|^{\sigma_{i0}} \times \right.$$

$$\times \left(\psi_{i1}\left(y_1^0 A_i \frac{(\ln t)^{\frac{\rho_i}{1-\sigma_{i1}}}}{t} \right)\right)^{\frac{\sigma_{i0}}{1-\sigma_{i1}}} \psi_{i0}\left(y_0^0 \left| \frac{A_i(1-\sigma_{i1})}{1-\sigma_{i1}+\rho_i} \right|^{\frac{1-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} \times \right.$$

$$\left. \left. \times (\ln t)^{\frac{1}{B_i}} \left(\psi_{i1}\left(y_1^0 A_i \frac{(\ln t)^{\frac{\rho_i}{1-\sigma_{i1}}}}{t} \right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} \right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

где $B_i = \dfrac{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i1}+\rho_i}$.

д) Пусть $t\uparrow 1$, тогда при $i=1,...,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{|\pi_\omega(t)|\,p_i'(t)}{p_i(t)} = (1-t)\left(\beta_i + \frac{\gamma_i}{t} + \frac{\rho_i}{t\ln t}\right) \sim -\rho_i,$$

$$I_{i3}(t) \sim \begin{cases} -\dfrac{|a_i|}{1+\rho_i} e^{\beta_i}(1-t)^{1+\rho_i} & \text{\textit{при} } \rho_i \neq -1, \\ -|a_i|\,e^{\beta_i}\ln(1-t) & \text{\textit{при} } \rho_i = -1, \end{cases}$$

$$\frac{(t-1)I_{i3}'(t)}{I_{i3}(t)} \sim \begin{cases} 1+\rho_i & \text{\textit{при} } \rho_i \neq -1, \\ \dfrac{1}{\ln(1-t)} & \text{\textit{при} } \rho_i = -1, \end{cases}$$

(из последнего представления, первого из предельных сотношений (3.33) и условия $\sigma_{i1}\neq 1$ теоремы 3.3 вытекает, что $\rho_i \neq -1$),

$$I_{i4}(t) \sim -A_i\ln(1-t)\left(\psi_{i1}\left(\frac{y_1^0 A_i}{1-t}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}, \quad \text{\textit{где} } A_i = \left|\frac{a_i e^{\beta_i}}{1-\sigma_{i1}}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}},$$

$$\frac{(t-1)I_{i4}'(t)}{I_{i4}(t)} \sim \frac{1}{\ln(1-t)}.$$

(представление для $I_{i4}(t)$ получено при условии, что φ_{i1} обладает свойством $\overline{S}$).

С учётом полученных представлений, леммы 2.1 и теорем 3.3, 3.4 для уравнения (1.19) имеет место

Следствие 3.8. *Пусть* $\mu_0=-1$ *и для некоторого* $i\in M$ *при всех* $j\in M\setminus\{i\}$ *справедливо соотношение*

$$\sigma_{j1}-\sigma_{i1} < \rho_j - \rho_i.$$

Предположим, кроме того, что имеют место неравенства $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$, $\sigma_{i1}\neq 1$ *и функция* φ_{i1} *обладает свойством* $\overline{S}$. *Тогда для существования у уравнения* (1.19) $\Pi_1(Y_0,Y_1,-1)$ *– решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$1+\rho_i=\sigma_{i1}-1,$$

$$Y_0=\begin{cases}\pm\infty, если\ (1-\sigma_{i1})(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})>0,\\ \\ 0\quad , если\ (1-\sigma_{i1})(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})<0,\end{cases}\qquad Y_1=\pm\infty$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_i y_1>0,\quad (1-\sigma_{i1})(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})y_0y_1<0.$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t\uparrow 1$ *асимптотические представления*

$$\frac{y(t)}{(\varphi_{i0}(y(t)))^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}}=-y_1^0\,\frac{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i1}}\,|\,a_ie^{\beta_i}\,|^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\,\ln(1-t)\left(\psi_{i1}\left(\frac{y_1^0A_i}{1-t}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{1-\sigma_{i1}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}\frac{1}{(1-t)\ln(1-t)}[1+o(1)],$$

которые в случае, когда функция φ_{i0} *обладает свойством* S, *могут быть записаны в виде*

$$y(t)\sim y_0^0\left(|1-\sigma_{i1}|^{\sigma_{i1}}|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})A_i\ln(1-t)|^{1-\sigma_{i1}}\ \psi_{i1}\left(\frac{y_1^0A_i}{1-t}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\psi_{i0}\left(y_0^0\left|A_i\ln(1-t)\left(\psi_{i1}\left(\frac{y_1^0A_i}{1-t}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right|^{\frac{1-\sigma_{i0}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t)\sim\frac{y_1^0A_i}{1-t}\left(\psi_{i1}\left(\frac{y_1^0A_i}{1-t}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\times$$

$$\times\left(|1-\sigma_{i1}|^{1-\sigma_{i0}}\left|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})A_i\ln(1-t)\left(\psi_{i1}\left(\frac{y_1^0A_i}{1-t}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right|^{\sigma_{i0}}\times\right.$$

$$\times\psi_{i0}\left(y_0^0\left|A_i\ln(1-t)\left(\psi_{i1}\left(\frac{y_1^0A_i}{1-t}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i1}}}\right|^{\frac{1-\sigma_{i0}}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\Bigg)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}.$$

е) Пусть $t\uparrow\omega$, где $\omega\in(0;1)\cup(1;+\infty)$, тогда при $i=1,...,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{|\pi_\omega(t)|\,p_i'(t)}{p_i(t)}=(\omega-t)\left(\beta_i+\frac{\gamma_i}{t}+\frac{\rho_i}{t\ln t}\right)\sim 0,$$

$$I_{i3}(t)\sim|a_i|\,e^{\beta_i\omega}\omega^{\gamma_i}\,|\ln\omega|^{\rho_i}\,(t-\omega),\qquad \frac{(t-\omega)I_{i3}'(t)}{I_{i3}(t)}\sim 1,$$

$$I_{i4}(t)\sim-\frac{A_i\ln(\omega-t)}{\psi_{i1}\left(\frac{y_1^0A_i}{\omega-t}\right)},\ \textit{где}\ A_i=\frac{1}{|a_i|\,e^{\beta_i\omega}\omega^{\gamma_i}\,|\ln\omega|^{\rho_i}},\quad \frac{(t-\omega)I_{i4}'(t)}{I_{i4}(t)}\sim\frac{1}{\ln(\omega-t)}$$

(представление для $I_{i4}(t)$ получено при условии, что φ_{i1} обладает свойством $\overline{S}$).

С учётом полученных представлений, леммы 2.1 и теорем 3.3, 3.4 для уравнения (1.19) имеет место

Следствие 3.9. *Пусть* $\mu_0=-1$ *и для некоторого* $i\in M$ *при всех* $j\in M\setminus\{i\}$ *справедливо соотношение*

$$\sigma_{j1}-\sigma_{i1}<0.$$

Предположим, кроме того, что имеют место неравенства $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$, $\sigma_{i1}\neq 1$ и *функция* φ_{i1} *обладает свойством* $\overline{S}$. *Тогда для существования у уравнения* (1.19) $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,-1)$ *– решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sigma_{i1}=2,$$

$$Y_0=\begin{cases}\pm\infty,\ \textit{если}\ 1+\sigma_{i0}>0,\\ 0\quad,\textit{если}\ 1+\sigma_{i0}<0,\end{cases}\qquad Y_1=\pm\infty$$

и выполнялись неравенства

$$\alpha_i y_1 > 0, \quad (1+\sigma_{i0}) y_0 y_1 > 0.$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$y(t)\varphi_{i0}(y(t)) = -y_1^0 A_i (1+\sigma_{i0}) \frac{\ln(\omega - t)}{\psi_{i1}\left(\dfrac{y_1^0 A_i}{\omega - t}\right)} [1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{(1+\sigma_{i0})(\omega - t)\ln(\omega - t)} [1+o(1)],$$

которые в случае, когда функция φ_{i0} *обладает свойством* S, *могут быть записаны в виде*

$$y(t) \sim y_0^0 \left| \frac{A_i (1+\sigma_{i0}) \ln(\omega - t)}{\psi_{i0}\left(y_0^0 \left| \dfrac{A_i \ln(\omega - t)}{\psi_{i1}\left(\dfrac{y_1^0 A_i}{\omega - t}\right)} \right|^{\frac{1}{1+\sigma_{i0}}} \right) \psi_{i1}\left(\dfrac{y_1^0 A_i}{\omega - t}\right)} \right|^{\frac{1}{1+\sigma_{i0}}},$$

$$y'(t) \sim \frac{y_1^0 A_i}{(\omega - t)\psi_{i1}\left(\dfrac{y_1^0 A_i}{\omega - t}\right)} \left| \frac{A_i (1+\sigma_{i0}) \ln(\omega - t)}{\left(\psi_{i0}\left(y_0^0 \left| \dfrac{A_i \ln(\omega - t)}{\psi_{i1}\left(\dfrac{y_1^0 A_i}{\omega - t}\right)} \right|^{\frac{1}{1+\sigma_{i0}}} \right)\right)^{-\frac{1}{\sigma_{i0}}} \psi_{i1}\left(\dfrac{y_1^0 A_i}{\omega - t}\right)} \right|^{-\frac{\sigma_{i0}}{1+\sigma_{i0}}}.$$

Выводы

В главе III были получены следующие результаты:

1) При соблюдении условий Леммы 2.1 установлены необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_{\omega}(Y_0,Y_1,-1)$ – решений и $\Pi_{\omega}(Y_0,Y_1,0)$ – решений уравнения (1.11), а так же получены неявные асимптотические представления для таких решений и их производных первого порядка при $t\uparrow\omega$;

2) Указаны дополнительные ограничения на нелинейности, которые позволяют записать данные представления в явном виде.

Все результаты проиллюстрированы на примере уравнения (1.19).

ГЛАВА IV

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ – РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (1.11)

Настоящая глава посвящена установлению условий существования и асимптотических представлений $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ – решений уравнения (1.11) в случае, когда правая его часть на каждом таком решении асимптотически эквивалентна при $t \uparrow \omega$ одному слагаемому.

§ 4.1. Некоторые априорные свойства $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ – решений

Лемма 4.1. *Пусть* $\mu_0 = \pm\infty$ *и для некоторых* $i \in M$ *и* $j \in M \setminus \{i\}$ *соблюдаются условия*

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] < +\infty \tag{4.1}$$

и

$$\gamma(\sigma_{i0} - \sigma_{j0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j1})\pi_\omega(t) > 0, \tag{4.2}$$

где

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_0 = +\infty, \\ -1 & \text{при } \mu_0 = -\infty. \end{cases}$$

Тогда для каждого $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ *– решения уравнения* (1.11) *выполняется предельное соотношение* (2.2).

Доказательство. Пусть $y:[t_0, \omega) \to \Delta_0$ – произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ – решение уравнения (1.11). Обозначим

$$z_j(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))},$$

тогда

$$z'_j(t)=z_j(t)\left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)}-\frac{p'_i(t)}{p_i(t)}+\frac{y'(t)\varphi'_{j0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))}+\right.$$
$$\left.+\frac{y''(t)\varphi'_{j1}(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))}-\frac{y'(t)\varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))}-\frac{y''(t)\varphi'_{i1}(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right].$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$z'_j(t)=\frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|\,p'_j(t)}{p_j(t)}-\frac{|\pi_\omega(t)|\,p'_i(t)}{p_i(t)}-\frac{|\pi_\omega(t)|\,y'(t)}{y(t)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{y(t)\varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))}-\frac{y(t)\varphi'_{j0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))}+\frac{y(t)y''(t)}{(y'(t))^2}\left[\frac{y'(t)\varphi'_{i1}(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}-\frac{y'(t)\varphi'_{j1}(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))}\right]\right)\right].$$

В силу условий (1.15) и (1.17)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{lk}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{lk}(y^{(k)}(t))}=\sigma_{lk},\ \text{где}\ k=0,1;\ l=1,\dots,m. \tag{4.3}$$

Кроме того, согласно условию (1.18) и лемме 1.1 имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)}=\pm\infty\ (k=0,1),\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2}=1. \tag{4.4}$$

Из (4.1) – (4.4) вытекает существование постоянных $z_j^0<0$ и $t_1\in[t_0,\omega)$ таких, что выполняется неравенство

$$z'_j(t)\le\frac{z_j^0\cdot z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\qquad \text{при}\ t\in[t_1,\omega),$$

откуда следует

$$\ln\left|\frac{z_j(t)}{z_j(t_1)}\right|\le z_j^0\,\mathrm{sgn}\,\pi_\omega(t)\ln\left|\frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_1)}\right|\qquad \text{при}\ t\in[t_1,\omega).$$

Поскольку выражение, стоящее справа, стремится к $-\infty$ при $t\uparrow\omega$, то

$$\lim_{t\uparrow\omega}z_j(t)=0.$$

Из этого предельного соотношения и определения $z_j(t)$ вытекает справедливость (2.2).

§ 4.2. Условия существования и асимптотические представления $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ – решений

Введём при $i \in \{1,...,m\}$ вспомогательную функцию

$$I_{i5}(t) = \int_{I_{i5}^0}^{t} I_{i3}(s)ds,$$

где предел интегрирования I_{i5}^0 равен или a, или ω и выбран так, чтобы соответствующий интеграл стремился при $t \uparrow \omega$ либо к бесконечности, либо к нулю; $I_{i3}(t)$ – функция, определённая в главе III.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mu_0 = \pm\infty$ *и для некоторого* $i \in M$ *при всех* $j \in M \setminus \{i\}$ *соблюдаются условия (4.1), (4.2), а так же имеет место неравенство* $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$. *Тогда для существования у уравнения (1.11)* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ *– решений необходимо, а если выполняется одно из двух условий*

$$\sigma_{i1} \neq 2; \qquad \sigma_{i1} = 2 \ \ и \ \ \sigma_{i0} > -1, \tag{4.5}$$

то и достаточно, чтобы

$$Y_k = \begin{cases} \pm\infty, & если \ \lim\limits_{t\uparrow\omega} | I_{i3}(t) |^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} = +\infty, \\ 0, & если \ \lim\limits_{t\uparrow\omega} | I_{i3}(t) |^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} = 0 \end{cases} \quad (k = 0,1), \tag{4.6}$$

выполнялись неравенства

$$\alpha_i y_0 > 0, \quad \alpha_i (1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) I_{i3}(t) y_1 > 0 \ \ при \ \ t \in (a, \omega) \tag{4.7}$$

и имело место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(I_{i3}(t))^2}{p_i(t) I_{i5}(t)} = 1. \tag{4.8}$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\begin{gathered} \frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i (1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) I_{i3}(t)[1 + o(1)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{p_i(t)}{(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) I_{i3}(t)}[1 + o(1)]. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y:[t_0,\omega)\to\Delta_0$ – произвольное $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ – решение уравнения (1.11). В силу выполнения условий (1.12), (4.1) и (4.2) из уравнения (1.11) с учетом леммы 4.1 получим

$$y''(t)=\alpha_i p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))[1+o(1)] \quad при \quad t\uparrow\omega. \tag{4.10}$$

Покажем, учитывая условие $\sigma_{i0}+\sigma_{i1}\neq 1$, что имеет место асимптотическое представление

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i3}(t)[1+o(1)] \quad при \quad t\uparrow\omega. \tag{4.11}$$

Поскольку

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\right)'=\frac{y''(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\left[1-\frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)}\frac{y(t)\varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))}-\frac{y'(t)\varphi'_{i1}(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right],$$

то в силу (1.15) – (1.18) и (4.10) получим, что

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\right)'=\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})p_i(t)[1+o(1)] \quad при \quad t\uparrow\omega.$$

Интегрируя это соотношение от t_0 до $t\,(t\in(t_0,\omega))$, имеем

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=c_i+\alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i3}(t)[1+o(1)] \quad при \quad t\uparrow\omega,$$

где $c_i\in\mathrm{R}$. Если $I_{i3}^0=t_0$, то справедливо (4.11). Покажем, что $c_i=0$ при $I_{i3}^0=\omega$. Предположим противное, тогда

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=c_i+o(1) \quad при \quad t\uparrow\omega$$

и, в силу (4.10),

$$\frac{y''(t)}{y'(t)}=\alpha_i p_i(t)\left[\frac{1}{c_i}+o(1)\right] \quad при \quad t\uparrow\omega.$$

Интегрируя последнее соотношение от t_0 до $t\,(t\in(t_0,\omega))$, находим, что

$$\ln|y'(t)|=C_i+\alpha_i I_{i3}(t)\left[\frac{1}{c_i}+o(1)\right] \quad при \quad t\uparrow\omega,$$

где $C_i \in \mathrm{R}$. В данном соотношении левая часть при $t \uparrow \omega$ стремится к бесконечности, а правая – к константе. Полученное противоречие доказывает справедливость (4.11) в случае, когда $I_{i3}^0 = \omega$.

Из (4.10) и (4.11) следует, что

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p_i(t)}{(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i3}(t)}[1+o(1)] \quad при \quad t \uparrow \omega \tag{4.12}$$

и, с учётом второго из условий (1.18),

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{p_i(t)}{(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i3}(t)}[1+o(1)] \quad при \quad t \uparrow \omega. \tag{4.13}$$

Из (4.11) – (4.13) вытекает справедливость условий (4.6), неравенств (4.7) и асимптотических предсталений (4.9).

Далее, поскольку

$$\left(\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\right)' = \frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}\left[1-\frac{y(t)\varphi_{i0}'(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))}-\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2}\frac{y'(t)\varphi_{i1}'(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right],$$

то рассуждая таким же образом, как при доказательстве соотношения (4.11), получим

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})^2 I_{i5}(t)[1+o(1)] \quad при \quad t \uparrow \omega. \tag{4.14}$$

Из (4.10), (4.11) и (4.14) с учётом второго из условий (1.18) следует, что имеет место предельное соотношение (4.8).

Достаточность. Пусть выполняются условия (4.5) – (4.8). Зафиксировав с помощью (4.6), (4.7) значения Y_k и окрестности $\Delta_k\,(k=0,1)$, докажем существование у уравнения (1.11) хотя бы одного $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ – решения, допускающего при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (4.9).

Рассмотрим сначала систему соотношений вида

$$\frac{y}{\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y')} = \frac{\alpha_i}{\Lambda_i^2} I_{i5}(t)[1+v_1], \quad \frac{y'}{\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y')} = \frac{\alpha_i}{\Lambda_i} I_{i3}(t)[1+v_2], \tag{4.15}$$

в которой $\Lambda_i = 1/(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})$, и установим, что она однозначно определяет заданные на множестве $D_0 = [t_2,\omega)\times V_0$, где

$t_2 \in [a,\omega),\ V_0 = \{(v_1,v_2) : |v_k| \le 0{,}5\ (k=1,2)\}$ непрерывно дифференцируемые неявные функции $y^{(k)} = Y_{ik}(t,v_1,v_2)\ (k=0,1)$ следующего вида

$$Y_{ik}(t,v_1,v_2) = y_k^0 \,|\, I_{i3}(t)\,|^{\Lambda_i + z_{k+1}(t,v_1,v_2)} \quad (k=0,1), \tag{4.16}$$

где $y_k^0 = \operatorname{sgn} y_k$, $|z_{k+1}(t,v_1,v_2)| \le |\Lambda_i|/2$ при $(t,v_1,v_2) \in D_0$ и $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z_{k+1}(t,v_1,v_2) = 0$ равномерно по $(v_1,v_2) \in V_0$. Для этого, полагая в (4.15)

$$y^{(k)} = y_k^0 \,|\, I_{i3}(t)\,|^{\Lambda_i + z_{k+1}} \ (k=0,1), \tag{4.17}$$

получим систему соотношений вида

$$\begin{cases} y_0^0 \,|\, I_{i3}(t)\,|^{(1-\sigma_{i1})(\Lambda_i+z_2)-\sigma_{i0}(\Lambda_i+z_1)} = \\ \qquad = \dfrac{\alpha_i}{\Lambda_i^2} I_{i5}(t)[1+v_1] \prod\limits_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 \,|\, I_{i3}(t)\,|^{\Lambda_i+z_{k+1}}\right), \\ y_1^0 \,|\, I_{i3}(t)\,|^{(1-\sigma_{i0})(\Lambda_i+z_1)-\sigma_{i1}(\Lambda_i+z_2)} = \\ \qquad = \dfrac{\alpha_i}{\Lambda_i} I_{i3}(t)[1+v_2] \prod\limits_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 \,|\, I_{i3}(t)\,|^{\Lambda_i+z_{k+1}}\right). \end{cases} \tag{4.18}$$

Поскольку в силу условия (4.8) имеем $I_{i5}(t) = |I_{i3}(t)|^{1+u(t)}$, где $u(t)$ – непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $t \uparrow \omega$, то с учётом знаковых условий (4.7) систему (4.18) можно переписать в виде

$$\begin{cases} (1-\sigma_{i0})z_1 - \sigma_{i1} z_2 = u(t) + \\ \qquad + \dfrac{\ln\left| \dfrac{1+v_1}{\Lambda_i^2} \prod\limits_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 \,|\, I_{i3}(t)\,|^{\Lambda_i+z_{k+1}}\right) \right|}{\ln |I_{i3}(t)|}, \\ -\sigma_{i0} z_1 + (1-\sigma_{i1}) z_2 = \\ \qquad = \dfrac{\ln\left| \dfrac{1+v_2}{\Lambda_i} \prod\limits_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 \,|\, I_{i3}(t)\,|^{\Lambda_i+z_{k+1}}\right) \right|}{\ln |I_{i3}(t)|}. \end{cases} \tag{4.19}$$

Частично разрешая эту систему относительно z_1, z_2 (как линейную неоднородную), получим

$$z_k = a_k(t) + b_k(t, v_1, v_2) + Z(t, z_1, z_2) \quad (k = 1,2),$$

в которой

$$a_1(t) = \Lambda_i \left((1-\sigma_{i1})u(t) - \frac{\ln|\Lambda_i|^{2-\sigma_{i1}}}{\ln|I_{i3}(t)|} \right),\ a_2(t) = \Lambda_i \left(\sigma_{i0}u(t) - \frac{\ln|\Lambda_i|^{1+\sigma_{i0}}}{\ln|I_{i3}(t)|} \right),$$

$$b_1(t, v_1, v_2) = \Lambda_i \frac{\ln|[1+v_1]^{1-\sigma_{i1}}[1+v_2]^{\sigma_{i1}}|}{\ln|I_{i3}(t)|},\ b_2(t, v_1, v_2) = \Lambda_i \frac{\ln|[1+v_1]^{\sigma_{i0}}[1+v_2]^{1-\sigma_{i0}}|}{\ln|I_{i3}(t)|},$$

$$Z(t, z_1, z_2) = \Lambda_i \frac{\ln\left[\prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}(y_k^0 |I_{i3}(t)|^{\Lambda_i + z_{k+1}}) \right]}{\ln|I_{i3}(t)|}.$$

В силу свойств функций u, I_{i3} и условий (1.16), (4.6), (4.7) имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} a_k(t) = 0 \quad (k = 1,2),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} b_k(t, v_1, v_2) = 0 \quad (k = 1,2) \quad \textit{равномерно по } (v_1, v_2) \in V_0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t, z_1, z_2) = 0 \ \textit{ и } \ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z(t, z_1, z_2)}{\partial z_k} = 0 \quad (k = 0,1) \tag{4.20}$$

$$\textit{равномерно по } (z_1, z_2) \in Z_0.$$

где $Z_0 = \{(z_1, z_2) : |z_k| \le |\Lambda_i|/2 (k = 1,2)\}$.

Поскольку выполняется (4.20), то существует число $t_0 \in [a, \omega)$ такое, что на множестве $[t_0, \omega) \times Z_0 \times V_0$ соблюдаются неравенства

$$|a_k(t) + b_k(t, v_1, v_2) + Z(t, z_1, z_2)| \le \frac{|\Lambda_i|}{4} \quad (k = 1,2) \tag{4.21}$$

и условие Липшица

$$|Z(t, z_1^2, z_2^2) - Z(t, z_1^1, z_2^1)| \le 1/3 \sum_{k=1}^{2} |z_k^2 - z_k^1|. \tag{4.22}$$

Теперь обозначим через B банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega=[t_0,\omega)\times V_0$ вектор-функций $(z_1,z_2):\Omega\to\mathrm{R}^n$ с нормой

$$\| z\|=\sup\left\{\sum_{k=1}^{2}|z_k(t,v_1,v_2)|:(t,v_1,v_2)\in\Omega\right\}.$$

Выберем из него подпространство B_0 таких функций из B, для которых $\| z\|\le|\Lambda_i|/2$, и рассмотрим на B_0, выбрав произвольное число $\nu\in(0,1)$, оператор $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)$, определённый соотношениями

$$\Phi_k(z)(t,v_1,v_2)=z_k(t,v_1,v_2)-\nu\,|z_k(t,v_1,v_2)-a_k(t)-b_k(t,v_1,v_2)-$$
$$-Z(t,z_1(t,v_1,v_2),z_2(t,v_1,v_2))|\quad (k=1,2). \tag{4.23}$$

Для любого $z\in B_0$ в силу условия (4.21) при $(t,v_1,v_2)\in\Omega$ имеем

$$|\Phi_k(z)(t,v_1,v_2)|\le(1-\nu)\,|z_k(t,v_1,v_2)|+\frac{\nu\,|\Lambda_i|}{4}\quad (k=1,2).$$

Поэтому на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2}|\Phi_k(z)(t,v_1,v_2)|\le(1-\nu)\sum_{k=1}^{2}|z_k(t,v_1,v_2)|+\frac{\nu\,|\Lambda_i|}{2}\le$$

$$\le(1-\nu)\,\| z\|+\frac{\nu\,|\Lambda_i|}{2}\le(1-\nu)\frac{|\Lambda_i|}{2}+\frac{\nu\,|\Lambda_i|}{2}=\frac{|\Lambda_i|}{2}.$$

Отсюда вытекает, что $\|\Phi(z)\|\le|\Lambda_i|/2$ и, следовательно, $\Phi(B_0)\subset B_0$.

Пусть теперь $z^1,z^2\in B_0$. Тогда в силу (4.22) при $(t,v_1,v_2)\in\Omega$

$$|\Phi_k(z^2)(t,v_1,v_2)-\Phi_k(z^1)(t,v_1,v_2)|\le(1-\nu)\,|z_k^2(t,v_1,v_2)-z_k^1(t,v_1,v_2)|+$$
$$+\nu\,|Z(t,z_1^2,z_2^2)-Z(t,z_1^1,z_2^1)|\le(1-\nu)\,|z_k^2(t,v_1,v_2)-z_k^1(t,v_1,v_2)|+$$
$$+\frac{\nu}{3}\sum_{k=1}^{2}|z_k^2(t,v_1,v_2)-z_k^1(t,v_1,v_2)|\quad (k=1,2).$$

Значит, на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2}|\Phi_k(z^2)(t,v_1,v_2)-\Phi_k(z^1)(t,v_1,v_2)|\le\left(1-\frac{\nu}{3}\right)\sum_{k=1}^{2}|z_k^2(t,v_1,v_2)-z_k^1(t,v_1,v_2)|\le\left(1-\frac{\nu}{3}\right)\| z^2-z^1\|$$

откуда следует, что

$$\| \Phi(z^2) - \Phi(z^1) \| \le \left(1 - \frac{\nu}{3}\right) \| z^2 - z^1 \| .$$

Таким образом показано, что оператор Ф отображает пространство B_0 в себя и является на нём оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z \in B_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (4.23) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением системы (4.19), удовлетворяющим условию $\| z \| \le | \Lambda_i | / 2$. Из (4.19) с учётом (4.20) следует, что компоненты данного решения стремятся к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$. Кроме того, поскольку для системы (4.19) якобиан

$$1 - \Lambda_i \left(\frac{y_0^0 \, | I_{i3}(t) |^{\Lambda_i + z_1} \, \psi'_{i0}(y_0^0 \, | I_{i3}(t) |^{\Lambda_i + z_1})}{\psi_{i0}(y_0^0 \, | I_{i3}(t) |^{\Lambda_i + z_1})} + \frac{y_1^0 \, | I_{i3}(t) |^{\Lambda_i + z_2} \, \psi'_{i1}(y_1^0 \, | I_{i3}(t) |^{\Lambda_i + z_2})}{\psi_{i1}(y_1^0 \, | I_{i3}(t) |^{\Lambda_i + z_2})} \right)$$

в силу представлений (4.17) и условий (1.16), (4.6), (4.7) отличен от нуля на множестве $\Omega_1 = [t_1, \omega) \times V_0$, где $t_1 \in [t_0, \omega)$, то из известной локальной теоремы о существовании неявных функций, определённых системой соотношений, вытекает непрерывная дифференцируемость этого решения на Ω_1. В силу замены (4.17) полученной вектор-функции (z_1, z_2) соответствует вектор-функция (Y_{i0}, Y_{i1}) с компонентами вида (4.16), которая является решением системы (4.15), причём, с учётом (4.6), (4.7)

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y_{ik}(t, v_1, v_2) = Y_k \quad (k = 0,1)$$

$$\textit{равномерно по } (v_1, v_2) \in V_0,$$

$$Y_{ik}(t, v_1, v_2) \subset \Delta_k \quad (k = 0,1) \tag{4.24}$$

$$\textit{при } (v_1, v_2) \in V_0, \; t \in [t_2, \omega), \quad \textit{где } t_2 \in [t_1, \omega).$$

Рассмотрим некоторые свойства функций Y_{ik} $(k = 0,1)$. В силу (4.24) и (1.15) при $j \in M$, $k = 0,1$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} G_{jk}(t,v_1,v_2)=\sigma_{jk}, \quad \text{\it в которых}$$

$$G_{jk}(t,v_1,v_2)=\frac{Y_{ik}(t,v_1,v_2)\varphi'_{jk}\left(Y_{ik}(t,v_1,v_2)\right)}{\varphi_{jk}\left(Y_{ik}(t,v_1,v_2)\right)}. \tag{4.25}$$

Теперь положим в системе (4.15) $y^{(k)}=Y_{ik}(t,v_1,v_2)$ $(k=0{,}1)$ и продифференцируем полученные соотношения по t. В результате имеем систему уравнений, линейных относительно $(Y_{i0})'_t$ и $(Y_{i1})'_t$

$$\begin{cases} (1-G_{i0}(t,v_1,v_2))(Y_{i0})'_t-\dfrac{Y_{i0}(t,v_1,v_2)\varphi'_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}(Y_{i1})'_t= \\ \qquad =\dfrac{\alpha_i}{\Lambda_i^2}I_{i3}(t)[1+v_1], \\ -\dfrac{Y_{i1}(t,v_1,v_2)\varphi'_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))}{\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))}(Y_{i0})'_t+(1-G_{i1}(t,v_1,v_2))(Y_{i1})'_t= \\ \qquad =\dfrac{\alpha_i}{\Lambda_i}p_i(t)[1+v_1]. \end{cases} \tag{4.26}$$

Определитель данной системы равен $1-G_{i0}(t,v_1,v_2)-G_{i1}(t,v_1,v_2)$, поэтому в силу (4.25) и условия $1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}\neq 0$ найдётся $t_3\in[t_2,\omega)$ такое, что на множестве $[t_3,\omega)\times V_0$ у системы (4.26) существует единственное решение, заданное формулами

$$(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t=\frac{\alpha_i}{\Lambda_i^2}\frac{I_{i3}(t)}{h_i(t)}\frac{[h_i(t)-h_i(t)G_{i1}(t,v_1,v_2)+G_{i1}(t,v_1,v_2)]}{1-G_{i0}(t,v_1,v_2)-G_{i1}(t,v_1,v_2)}\times$$

$$\times\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))[1+v_1],$$

$$(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t=\frac{\alpha_i}{\Lambda_i}p_i(t)\frac{[1-G_{i0}(t,v_1,v_2)+h_i(t)G_{i0}(t,v_1,v_2)]}{1-G_{i0}(t,v_1,v_2)-G_{i1}(t,v_1,v_2)}\times$$

$$\times\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))[1+v_2],$$

где $h_i(t)=\dfrac{(I_{i3}(t))^2}{p_i(t)I_{i5}(t)}$.

Кроме того, отметим, что из (4.8) вытекает выполнение следующих предельных соотношений

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p_i(t)}{I_{i3}(t)}=\infty,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_{i3}(t)}{I_{i5}(t)}=\infty. \tag{4.27}$$

Из этих предельных соотношений, (4.8) и представлений для $(Y_{i0})'_t$, $(Y_{i1})'_t$ следует, что равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ справедливы равенства

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y_{ik}(t,v_1,v_2))'_t}{Y_{ik}(t,v_1,v_2)}=\infty\ (k=0,1),\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(Y_{i1}(t,v_1,v_2))'_t Y_{i0}(t,v_1,v_2)}{Y_{i1}(t,v_1,v_2)(Y_{i0}(t,v_1,v_2))'_t}=1. \tag{4.28}$$

Таким образом, функции $Y_{ik}\,(k=0,1)$ обладают всеми свойствами $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)-$ решения, которые использовались при доказательстве леммы 4.1, и, следовательно, равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$ имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}H_i(t,v_1,v_2)=1,\quad \text{\textit{в котором}}$$
$$H_i(t,v_1,v_2)=\alpha_i\sum_{j=1}^{m}\alpha_j[1+r_j(t)]\frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{j1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_{i0}(t,v_1,v_2))\varphi_{i1}(Y_{i1}(t,v_1,v_2))}, \tag{4.29}$$

Теперь, применяя к уравнению (1.11) преобразование

$$y^{(k)}(t)=Y_{ik}(t,v_1(x),v_2(x))\ (k=0,1),\quad x=\beta\ln|I_{i3}(t)|,$$
$$\beta=\begin{cases}1, & \text{\textit{если }} I_{i3}^0=a,\\ -1, & \text{\textit{если }} I_{i3}^0=\omega,\end{cases} \tag{4.30}$$

и учитывая, что вектор-функция $(Y_{i0}(t,v_1(x),v_2(x)),Y_{i1}(t,v_1(x),v_2(x)))$ при $t\in[t_3,\omega)$ и $(v_1(x),\ v_2(x))\ \in V_0$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=\frac{\alpha_i}{\Lambda_i^2}I_{i5}(t)[1+v_1(x)],\quad \frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))}=\frac{\alpha_i}{\Lambda_i}I_{i3}(t)[1+v_2(x)] \tag{4.31}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1'=\beta[-h_i(t)[1+v_1]+\Lambda_i h_i(t)(1-G_{i0}(t,v_1,v_2))[1+v_2]-\\ \qquad -\Lambda_i\dfrac{1+v_1}{1+v_2}G_{i1}(t,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2)],\\ v_2'=\beta[-[1+v_2]-\Lambda_i h_i(t)G_{i0}(t,v_1,v_2)\dfrac{[1+v_2]^2}{1+v_1}+\\ \qquad +\Lambda_i(1-G_{i1}(t,v_1,v_2))H_i(t,v_1,v_2)],\end{cases} \tag{4.32}$$

в которой t – функция, обратная к $x=\beta\ln|I_{i3}(t)|$. Данную систему рассмотрим на множестве $[x_0,+\infty)\times V_0$, где $x_0=\beta\ln|I_{i3}(t_3)|$.

Поскольку выполняются (4.25) и (4.29), то имеют место равенства

$$G_{ik}(t,v_1,v_2)=\sigma_{ik}+R_{ik}(x,v_1,v_2)\quad (k=0,1),$$
$$H_i(t,v_1,v_2)=1+R_{i2}(x,v_1,v_2), \tag{4.33}$$

где функции $R_{ik}(x,v_1,v_2)$ $(k=0,2)$ стремятся к нулю при $x\to+\infty$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$.

Кроме того, допустимы представления

$$\frac{1+v_1}{1+v_2}=1+v_1-v_2+R_3(x,v_1,v_2),$$
$$\frac{[1+v_2]^2}{1+v_1}=1-v_1+2v_2+R_4(x,v_1,v_2), \tag{4.34}$$

в которых функции $R_k(v_1,v_2)$ $(k=3,4)$ обладают свойством: $\lim\limits_{|v_1|+|v_2|\to 0}\dfrac{R_k(v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|}=0$ $(k=3,4)$ равномерно по $x\in[x_0;+\infty)$.

Учитывая (4.33) и (4.34), систему (4.32) можно переписать в виде

$$\begin{cases} v_1'=\beta[f_1(x)+c_{11}(x)v_1+c_{12}(x)v_2+\sum\limits_{k=1}^{2}V_{1k}(x,v_1,v_2)], \\ v_2'=\beta[f_2(x)+c_{21}(x)v_1+c_{22}(x)v_2+\sum\limits_{k=1}^{2}V_{2k}(x,v_1,v_2)], \end{cases} \tag{4.35}$$

где

$$f_1(x)=-h_i(t)+\Lambda_i h_i(t)(1-\sigma_{i0})-\Lambda_i\sigma_{i1},\ c_{11}(x)=-h_i(t)-\Lambda_i\sigma_{i1},\ c_{12}(x)=\Lambda_i h_i(t)(1-\sigma_{i0})+\Lambda_i\sigma_{i1},$$

$$f_2(x)=-1-\Lambda_i\sigma_{i0}h_i(t)+\Lambda_i(1-\sigma_{i1}),\ c_{21}(x)=\Lambda_i\sigma_{i0}h_i(t),\ c_{22}(x)=-1-2\Lambda_i\sigma_{i0}h_i(t),$$

$$V_{11}(x,v_1,v_2)=-\Lambda_i h_i(t)R_{i0}(x,v_1,v_2)[1+v_2]-$$
$$-\Lambda_i\frac{1+v_1}{1+v_2}R_{i1}(x,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2)-\Lambda_i\frac{1+v_1}{1+v_2}G_{i1}(t,v_1,v_2)R_{i2}(x,v_1,v_2),$$

$$V_{12}(x,v_1,v_2)=-\Lambda_i R_3(v_1,v_2)G_{i1}(t,v_1,v_2)H_i(t,v_1,v_2),$$

$$V_{21}(x,v_1,v_2) = -\Lambda_i h_i(t) R_{i0}(x,v_1,v_2)\frac{[1+v_2]^2}{1+v_1} -$$

$$-\Lambda_i R_{i1}(x,v_1,v_2) H_i(t,v_1,v_2) + \Lambda_i (1 - G_{i1}(t,v_1,v_2)) R_{i2}(x,v_1,v_2),$$

$$V_{22}(x,v_1,v_2) = -\Lambda_i h_i(t) G_{i0}(t,v_1,v_2) R_4(v_1,v_2).$$

В силу (4.8), (4.33), (4.34) и замены независимой переменной имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = -1 - \Lambda_i \sigma_{i1}, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = \Lambda_i (1 - \sigma_{i0} + \sigma_{i1}),$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0, \ \lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = \Lambda_i \sigma_{i0}, \ \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = -1 - 2\Lambda_i \sigma_{i0},$$

а функции $V_{lk}(x,v_1,v_2)$ $(l=1,2;\, k=1,2)$ таковы, что

$$\lim_{x\to+\infty} V_{l1}(x,v_1,v_2) = 0 \ \ (l=1,2) \ \ \textit{равномерно по} \ \ (v_1,v_2)\in V_0,$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V_{l2}(x,v_1,v_2)}{|v_1|+|v_2|} = 0 \ \ (l=1,2) \ \ \textit{равномерно по} \ \ x\in[x_0;+\infty).$$

Таким образом, система (4.35) является квазилинейной системой дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами. Характеристическое уранение для предельной матрицы коэффициентов линейной части имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\beta(1+\Lambda_i\sigma_{i1})-\lambda & \beta\Lambda_i(1-\sigma_{i0}+\sigma_{i1}) \\ \beta\Lambda_i\sigma_{i0} & -\beta(1+2\Lambda_i\sigma_{i0})-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 + \beta\Lambda_i(2-\sigma_{i1})\lambda + \Lambda_i = 0.$$

Поскольку выполняется условие (4.5), данное характеристическое уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (4.35) выполнены все условия теоремы 2.2 работы [38]. Согласно данной теореме система (4.35) имеет хотя бы одно решение $(v_1,v_2):[x_1,+\infty)\to \mathrm{R}$ $(\textit{где}\ x_1 \ge x_0)$, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Этому решению с учётом преобразования (4.30) соответствует решение $y(t)$ уравнения (1.11), которое вместе со своей производной первого порядка допускают, в силу (4.31) и (4.8), асимптотические представления

(4.9). Кроме того, из (4.24) и (4.9), (1.11), (4.8) следует, что данное решение является $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ – решением уравнения (1.11).

Теперь приведём результат, который позволяет при некоторых дополнительных ограничениях на функции φ_{ik} $(k=0,1)$ получить асимптотические представления при $t\uparrow\omega$ для $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ – решений и их производных первого порядка в явном виде.

Теорема 4.2. *Пусть соблюдаются условия теоремы* 4.1 *и, кроме того, функции* φ_{ik} $(k=0,1)$ *обладают свойством* S (*см. определение* 1.1). *Тогда при выполнении* (4.5) – (4.8) *каждое* $\Pi_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$ *– решение уравнения* (1.11) *и его производная первого порядка при* $t\uparrow\omega$ *представимы в виде*

$$y(t)\sim y_0^0\left(\frac{|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i3}(t)|^{2-\sigma_{i1}}}{(p_i(t))^{1-\sigma_{i1}}}\prod_{k=0}^{1}\psi_{ik}\left(y_k^0\,|I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},\quad(4.36)$$

$$y'(t)\sim y_1^0\left(\frac{|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i3}(t)|^{1+\sigma_{i0}}}{(p_i(t))^{\sigma_{i0}}}\prod_{k=0}^{1}\psi_{ik}\left(y_k^0\,|I_{i3}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},\quad(4.37)$$

где $y_k^0=\operatorname{sgn} y_k$ $(k=0,1)$ *и определяются из условия* (4.7).

Доказательство. Для начала покажем, что функция $L_0(z)=\dfrac{|y(t(z))|}{|I_{i3}(t(z))|^{\Lambda_i}}$, где $z=y_0^0\,|I_{i3}(t)|^{\Lambda_i}$ и $\Lambda_i=1/(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})$, является медленно меняющейся при $z\to Y_0$ $(z\in\Delta_0)$:

$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_0}}\frac{zL_0'(z)}{L_0(z)}=\lim_{t\uparrow\omega}\left[y_0^0\,|I_{i3}(t)|^{\Lambda_i}\cdot\frac{1}{y_0^0\Lambda_i\,|I_{i3}(t)|^{\Lambda_i(\sigma_{i0}+\sigma_{i1})}\,p_i(t)\operatorname{sgn}I_{i3}(t)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{y_0^0y'(t)|I_{i3}(t)|^{\Lambda_i}-|y(t)|\Lambda_i\,|I_{i3}(t)|^{\Lambda_i(\sigma_{i0}+\sigma_{i1})}\,p_i(t)\operatorname{sgn}I_{i3}(t)}{|I_{i3}(t)|^{2\Lambda_i}}\cdot\frac{|I_{i3}(t)|^{\Lambda_i}}{|y(t)|}\right]=$$

$$=\frac{1}{\Lambda_i}\lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{I_{i3}(t)y'(t)}{p_i(t)y(t)}-\Lambda_i\right]=0\,.$$

Поскольку функция φ_{i0} обладает свойством S, то с учётом медленной изменяемости функции L_0 при $z \to Y_0$ $(z \in \Delta_0)$ и условия (4.6) получим

$$\varphi_{i0}(y(t)) = |y(t)|^{\sigma_{i0}} \psi_{i0}(y_0^0 |I_{i3}(t)|^{\Lambda_i})[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

или, принимая во внимание второе из соотношений (4.9),

$$\varphi_{i0}(y(t)) = \frac{|I_{i3}(t)|^{\sigma_{i0}}}{|\Lambda_i|^{\sigma_{i0}} (p_i(t))^{\sigma_{i0}}} |y'(t)|^{\sigma_{i0}} \psi_{i0}(y_0^0 |I_{i3}(t)|^{\Lambda_i})[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \quad (4.38)$$

Теперь докажем, что функция $L_1(z) = \dfrac{|y'(t(z))|}{|I_{i3}(t(z))|^{\Lambda_i}}$, где $z = y_1^0 |I_{i3}(t)|^{\Lambda_i}$, является медленно меняющейся при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_1)$:

$$\lim_{\substack{z\to Y_1 \\ z\in\Delta_1}} \frac{zL_1'(z)}{L_1(z)} = \lim_{t\uparrow\omega}\left[y_1^0 |I_{i3}(t)|^{\Lambda_i} \cdot \frac{1}{y_1^0 \Lambda_i |I_{i3}(t)|^{\Lambda_i(\sigma_{i0}+\sigma_{i1})} p_i(t) \operatorname{sgn} I_{i3}(t)} \right.\times$$

$$\left.\times \frac{y_1^0 y''(t) |I_{i3}(t)|^{\Lambda_i} - |y'(t)| \Lambda_i |I_{i3}(t)|^{\Lambda_i(\sigma_{i0}+\sigma_{i1})} p_i(t) \operatorname{sgn} I_{i3}(t)}{|I_{i3}(t)|^{2\Lambda_i}} \cdot \frac{I_{i3}(t)|^{\Lambda_i}}{|y'(t)|}\right] =$$

$$= \frac{1}{\Lambda_i} \lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{I_{i3}(t) y''(t)}{p_i(t) y'(t)} - \Lambda_i \right] = 0.$$

Так как функция φ_{i1} обладает свойством S, то с учётом медленной изменяемости функции L_1 при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_1)$ и условия (4.6) имеем

$$\varphi_{i1}(y'(t)) = |y'(t)|^{\sigma_{i1}} \psi_{i1}(y_1^0 |I_{i3}(t)|^{\Lambda_i})[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \quad (4.39)$$

Принимая во внимание (4.38), (4.39) и (4.7), первое из соотношений (4.9) можно переписать в виде

$$|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} = \frac{|I_{i3}(t)|^{1+\sigma_{i0}}}{|\Lambda_i|^{1+\sigma_{i0}} (p_i(t))^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 |I_{i3}(t)|^{\Lambda_i}\right)[1+o(1)],$$

откуда вытекает асимптотическое представление (4.37). В свою очередь, из (4.37) с учётом второго из соотношений (4.9) получаем, что имеет место асимптотическое представление (4.36).

§ 4.3. Пример уравнения с быстро и правильно меняющимися коэффициентами $p_i(t)$

Для иллюстрации полученных в §§4.1–4.2 результатов исследуем вопрос об асимптотическом поведении $\Pi_{\omega}(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ – решений уравнения (1.19). При этом необходимо рассмотреть три возможных случая: а) $\omega = +\infty$; б) $\omega = 1$; в) $\omega \in (0;1) \cup (1;+\infty)$.

а) Пусть $t \to +\infty$, тогда при $i = 1,...,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{|\pi_{\omega}(t)|\, p_i'(t)}{p_i(t)} = \frac{t(\beta_i e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t + e^{\beta_i t} \gamma_i t^{\gamma_i - 1} \ln^{\rho_i} t + e^{\beta_i t} t^{\gamma_i - 1} \rho_i \ln^{\rho_i - 1} t)}{e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t} = \beta_i t + \gamma_i + \frac{\rho_i}{\ln t},$$

$$I_{i3}(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|a_i|}{\beta_i} e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t & при\ \beta_i \neq 0, \\ \dfrac{|a_i|}{1+\gamma_i} t^{1+\gamma_i} \ln^{\rho_i} t & при\ \beta_i = 0,\ \gamma_i \neq -1, \\ \dfrac{|a_i|}{1+\rho_i} \ln^{1+\rho_i} t & при\ \beta_i = 0,\ \gamma_i = -1,\ \rho_i \neq -1, \\ |a_i| \ln\ln t & при\ \beta_i = 0,\ \gamma_i = -1,\ \rho_i = -1, \end{cases}$$

$$I_{i5}(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|a_i|}{\beta_i^2} e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t & при\ \beta_i \neq 0, \\ \dfrac{|a_i|}{(1+\gamma_i)(2+\gamma_i)} t^{2+\gamma_i} \ln^{\rho_i} t & при\ \beta_i = 0,\ \gamma_i \in R \setminus \{-2, -1\}, \\ \dfrac{|a_i|}{(1+\gamma_i)(1+\rho_i)} \ln^{1+\rho_i} t & при\ \beta_i = 0,\ \gamma_i = -2, \rho_i \neq -1, \\ \dfrac{|a_i|}{1+\gamma_i} \ln\ln t & при\ \beta_i = 0,\ \gamma_i = -2, \rho_i = -1, \\ \dfrac{|a_i|}{1+\rho_i} t \ln^{1+\rho_i} t & при\ \beta_i = 0,\ \gamma_i = -1,\ \rho_i \neq -1, \\ |a_i|\, t \ln\ln t & при\ \beta_i = 0,\ \gamma_i = -1,\ \rho_i = -1, \end{cases}$$

$$\frac{I_{i3}^2(t)}{p_i(t)I_{i5}(t)} \sim \begin{cases} 1 & \text{при } \beta_i \neq 0, \\ 2+\gamma_i & \text{при } \beta_i = 0,\ \gamma_i \in R \setminus \{-2,-1\}, \\ -\dfrac{1+\rho_i}{\ln t} & \text{при } \beta_i = 0,\ \gamma_i = -2, \rho_i \neq -1, \\ -\dfrac{1}{\ln t \ln\ln t} & \text{при } \beta_i = 0,\ \gamma_i = -2, \rho_i = -1, \\ \dfrac{\ln t}{1+\rho_i} & \text{при } \beta_i = 0,\ \gamma_i = -1,\ \rho_i \neq -1, \\ \ln t \ln\ln t & \text{при } \beta_i = 0,\ \gamma_i = -1,\ \rho_i = -1, \end{cases}$$

В силу этих представлений, леммы 4.1 и теорем 4.1, 4.2 имеет место

Следствие 4.1. *Пусть* $\mu_0 = \pm\infty$ *и для некоторого* $i \in M$ *при всех* $j \in M \setminus \{i\}$ *соблюдаются условия*

$$\beta_j \leq \beta_i, \qquad \gamma(\sigma_{i0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j0} - \sigma_{j1}) > 0,$$

а так же имеет место неравенство $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$. *Тогда для существования у уравнения* (1.19) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ *– решений необходимо, а если выполняется одно из двух условий*

$$\sigma_{i1} \neq 2; \qquad \sigma_{i1} = 2 \ \text{ и } \ \sigma_{i0} > -1,$$

то и достаточно, чтобы

$$\beta_i \neq 0,$$

$$Y_k = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если } \beta_i(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) > 0, \\ 0, & \text{если } \beta_i(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) < 0 \end{cases} \qquad (k = 0,1),$$

и выполнялись неравенства

$$a_i y_0 > 0, \quad a_i \beta_i (1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) y_1 > 0.$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} \sim \frac{a_i}{\beta_i}(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})e^{\beta_i t}t^{\gamma_i}\ln^{\rho_i} t, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{\beta_i}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}},$$

которые в случае, когда функции $\varphi_{ik}\,(k=0,1)$ *обладают свойством* S, *могут быть записаны в виде*

$$y(t) \sim y_0^0 \left(\left| \frac{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}{\beta_i} \right|^{2-\sigma_{i1}} e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 \left| \frac{a_i}{\beta_i} e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t \right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}},$$

$$y'(t) \sim y_1^0 \left(\left| \frac{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}{\beta_i} \right|^{1+\sigma_{i0}} e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t \prod_{k=0}^{1} \psi_{ik}\left(y_k^0 \left| \frac{a_i}{\beta_i} e^{\beta_i t} t^{\gamma_i} \ln^{\rho_i} t \right|^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}.$$

б) Пусть $t \uparrow 1$, тогда при $i=1,\dots,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{|\pi_\omega(t)|\,p_i'(t)}{p_i(t)} = (1-t)\left(\beta_i + \frac{\gamma_i}{t} + \frac{\rho_i}{t\ln t}\right) \sim -\rho_i,$$

$$I_{i3}(t) \sim \begin{cases} -\dfrac{|a_i|}{1+\rho_i} e^{\beta_i}(1-t)^{1+\rho_i} & \textit{при } \rho_i \neq -1, \\[2ex] -|a_i|\, e^{\beta_i} \ln(1-t) & \textit{при } \rho_i = -1, \end{cases}$$

$$I_{i5}(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|a_i|}{(1+\rho_i)(2+\rho_i)} e^{\beta_i}(1-t)^{2+\rho_i} & \textit{при } \rho_i \in R \setminus \{-2,-1\}, \\[2ex] -|a_i|\, e^{\beta_i} \ln(1-t) & \textit{при } \rho_i = -2, \\[2ex] |a_i|\, e^{\beta_i}(1-t)\ln(1-t) & \textit{при } \rho_i = -1, \end{cases}$$

$$\frac{I_{i3}^2(t)}{p_i(t)I_{i5}(t)} \sim \begin{cases} \dfrac{2+\rho_i}{1+\rho_i} & при \ \rho_i \in R \setminus \{-2,-1\}, \\ -\dfrac{1}{\ln(1-t)} & при \ \rho_i = -2, \\ \ln(1-t) & при \ \rho_i = -1. \end{cases}$$

С учётом полученных представлений, леммы 4.1 и теорем 4.1, 4.2 имеет место

Следствие 4.2. *Пусть* $\mu_0 = \pm\infty$ *и для некоторого* $i \in M$ *при всех* $j \in M \setminus \{i\}$ *соблюдается условие*

$$\gamma(\sigma_{i0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j0} - \sigma_{j1}) < 0,$$

а так же имеет место неравенство $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$. *Тогда у уравнения* (1.19) *не существует* $\Pi_1(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ *– решений.*

в) Пусть $t \uparrow \omega$, где $\omega \in (0;1) \cup (1;+\infty)$, тогда при $i = 1,...,m$ имеют место следующие представления

$$\frac{|\pi_\omega(t)|\, p_i'(t)}{p_i(t)} = (\omega - t)\left(\beta_i + \frac{\gamma_i}{t} + \frac{\rho_i}{t \ln t}\right) \sim 0,$$

$$I_{i3}(t) \sim |a_i|\, e^{\beta_i \omega} \omega^{\gamma_i} \,|\ln\omega|^{\rho_i}\, (t - \omega),$$

$$I_{i5}(t) \sim |a_i|\, e^{\beta_i \omega} \omega^{\gamma_i} \,|\ln\omega|^{\rho_i}\, \frac{(t-\omega)^2}{2},$$

$$\frac{I_{i3}^2(t)}{p_i(t) I_{i5}(t)} \sim 2.$$

С учётом полученных представлений, леммы 4.1 и теорем 4.1, 4.2 имеет место

Следствие 4.3. *Пусть* $\mu_0 = \pm\infty$ *и для некоторого* $i \in M$ *при всех* $j \in M \setminus \{i\}$ *соблюдается условие*

$$\gamma(\sigma_{i0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j0} - \sigma_{j1}) < 0,$$

а так же имеет место неравенство $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$. *Тогда у уравнения* (1.19) *не существует* $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ *– решений.*

Выводы

В главе IV были получены следующие результаты:

1) Для произвольного $i \in \{1,...,m\}$ приведены условия, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ – решении уравнения (1.11) правая его часть асимптотически эквивалентна при $t \uparrow \omega$ i-му слагаемому;

2) При соблюдении этих условий установлены необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ – решений, а так же получены неявные асимптотические представления для таких решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$;

3) Указаны дополнительные ограничения на нелинейности, которые позволяют записать данные представления в явном виде.

Все результаты проиллюстрированы на примере уравнения (1.19).

ВЫВОДЫ

Уравнение Польвани, устанавливающее зависимость радиус-вектора r электрона от времени t при движении под действием магнитного поля, положило начало исследованию дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих в правой части суммы слагаемых со степенными нелинейностями и непрерывными на полуоси коэффициентами. Уравнениям такого вида посвящены работы Л.А. Беклемишевой, А.В. Костина, В.М. Евтухова и Е. В. Шебаниной, а так же других авторов. Были установлены условия существования и асимптотическое поведение различных классов решений таких уравнений. В случае же, когда нелинейности отличны от степенных, законченных результатов для уравнений данного вида получить не удавалось. Для двучленных уравнений следует отметить работы Д.В. Изюмовой, И.Т. Кигурадзе, И.В. Каменева, Ю.А. Клокова, С.В. Олехника, Т.А. Чантурия, В. Марича (V. Maric), М. Томича (M. Tomic), С.Д. Талиаферро (S.D. Taliaferro), В.М. Евтухова, Л.А. Кирилловой, М.А. Белозёровой. В общем же случае заслуживают внимания работы В.М. Евтухова и В.А. Касьяновой, в которых были установлены точные асимптотические формулы для некоторых типов монотонных решений уравнения, правая часть которого содержит слагаемые с правильно меняющимися относительно неизвестной функции нелинейностями.

Настоящая работа посвящена исследованию асимптотического поведения достаточно широкого класса монотонных решений (так называемых $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решений) дифференциального уравнения второго порядка (1.11), содержащего в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися как относительно неизвестной функции, так и её производной первого порядка нелинейностями. В рамках единого подхода были установлены условия существования и асимптотические представления как правильных, так и различных типов сингулярных решений (неограниченных или исчезающих в ω). Отметим, что из монотонных решений уравнения

(1.11) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решения являются наиболее сложными для рассмотрения, поскольку при $t \uparrow \omega$ и само решение, и его производная первого порядка стремятся либо к нулю, либо к бесконечности.

Работа содержит следующие новые результаты:

– установлены достаточные условия, при выполнении которых правая часть уравнения (1.11) на каждом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решении асимптотически эквивалентна в окрестности ω одному слагаемому;

– при соблюдении указанных условий получены необходимые и достаточные признаки существования у уравнения (1.11) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решений, а так же неявные асимптотические формулы для данных решений и их производных первого порядка в окрестности ω;

– приведены дополнительные условия на нелинейности, при выполнении которых установлены явные асимптотические представления в окрестности ω для всех $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решений и их производных первого порядка.

Необходимо подчеркнуть, что вопрос о существовании у уравнения (1.11) $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ – решений при $\varphi_{i1} \equiv 1$ $(i = 1, ..., m)$ рассматривался в работах В. А. Касьяновой [45, 46], а при $m = 1$ – в работах М.А. Белозёровой [3, 4, 5]. В них были получены необходимые и достаточные условия существования таких решений, а так же их асимптотические представления в окрестности особой точки. Однако в этих работах накладывались более жёсткие ограничения на нелинейности, а именно все функции φ_{ik} должны были быть дважды непрерывно дифференцируемы. Кроме того, у В.А. Касьяновой отдельно исследовалась асимптотика неограниченных и исчезающих в особой точке решений. В данной же постановке задача рассматривается впервые.

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации и разработанные в ней методы исследования могут быть использованы при изучении асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений более высоких порядков с правильно меняющимися нелинейностями. Кроме того, данные результаты могут быть применены для рассмотрения конкретных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возникающих в различных областях естествознания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Арипов М.М.* Метод "эталонных" уравнений (ВКБ – метод) для нелинейных уравнений второго порядка / М.М. Арипов // Изв. АН УзССР. Сер. Физ. – мат. – 1970. – № 4. – С. 3 – 8.

2. *Арипов М.М.* Асимптотическое поведение решений нелинейного дифференциального уравнения $y''' - g(x)y^n = 0$ / М.М. Арипов, Т. Каюмов // Изв. АН УзССР. – 1982. – 6. – С. 6 – 8.

3. *Белозерова М.А.* Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ М.А. Белозерова // Математичні студії. – 2008. – Т.29, №1. – С. 52 – 62.

4. *Білозерова М.О.* Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями у деякому сенсі близькими до степеневих [текст]/ М.О. Білозерова // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці: "Рута". – 2008.– Вип.374. – С.34 – 43.

5. *Белозерова М.А.* Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями близкими к степенным [текст]/ М.А. Белозерова // Нелінійні коливання. – 2009. – Т.12, №1. – С.3 – 15.

6. *Беклемишева Л.А.* Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений / Л.А. Беклемишева// Докл. АН СССР. – 1956. – 111, №2. – С. 261 – 264.

7. *Беклемишева Л.А.* Некоторые свойства систем дифференциальных уравнений, близких к каноническим / Л.А. Беклемишева// Вестник МГУ. – 1960. – 4. – С. 26 – 36.

8. *Беклемишева Л.А.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка/ Л.А. Беклемишева// Мат. сб. – 1962. – 56(98), № 2. – С. 207 – 236.

9. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман. – Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1954. – 216 с.

10. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного / Н. Бурбаки. – М.: Наука, 1965. – 424 с.

11. *Васильева Н.С.* Асимптотические свойства правильных решений одного класса полулинейных дифференциальных уравнений второго порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Васильева Наталья Степановна. – Одесса, 1998. – 109 с.

12. *Вишняков В.И.* Распределение электростатического потенциала в сферически симметричной плазме / В.И. Вишняков, Г.С. Драган, В.М. Евтухов, С. В. Маргащук. – Теплофизика высоких температур. – 1987. – Т. 25, № 3. – 620 С. – Деп. в ВИНИТИ 13.12.86, № 8791. – 17 с.

13. *Даутов М.А.* Асимптотическое представление решений полиномиального дифференциального уравнения первого порядка / М.А. Даутов, Л.М. Муратов// Изв. вузов, Матем. – 1964. – 41, № 4.

14. *Дрик Н.Г.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в особом случае/ Н.Г. Дрик // Дифференц. уравнения. -- 1989. -- 25, № 1. -- С.~1071 – 1072.

15. *Дрик Н.Г.* Асимптотическое поведение решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка: Дис.... канд. физ. – мат. наук: 01.01.02-дифференциальные уравнения / Дрик Наталья Георгиевна. – Одесса. – 1992 – 122с.

16. *Евтухов В.М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка/ В.М. Евтухов // Докл. АН СССР. – 1977. – 233., № 4. – С. 531 – 534.

17. *Евтухов В.М.* Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена - Фаулера: дис. ... канд. физ. – мат. наук: 01.01.02 / Евтухов Вячеслав Михайлович. – Одесса, 1980. – 154 с.

18. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В.М. Евтухов // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – 106, № 3. – С. 473 – 476.

19. *Евтухов В.М.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка / В.М. Евтухов // Math. Nachr. – 1984. – Bd. 115. – P. 215 – 236.

20. *Евтухов В.М.* Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка / В.М. Евтухов //Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа ТГУ. – 1988. – 3, № 3. – С. 62 – 65.

21. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В.М. Евтухов, Н.Г. Дрик // Сообщ. АН ГССР. – 1989. – 133, № 1. – С. 29 – 32.

22. *Евтухов В.М.* Асимптотика решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка / В.М. Евтухов // Дифференц. уравнения. – 1990. – 26, N 5. – С. 776 – 787.

23. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера n-го порядка / В.М. Евтухов // Докл. АН России. – 1992. – 324, № 2. – С. 258 – 260

24. *Евтухов В.М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена – Фаулера / В.М. Евтухов // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – 145, № 2. – С. 269 – 273.

25. *Евтухов В.М.* Об асимптотике монотонных решений дифференциальных уравнений типа Эмдена – Фаулера / В.М. Евтухов // Дифференц. уравнения. – 1992. – 28, № 6. – С. 1076 – 1078.

26. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка/ В.М. Евтухов, Н.Г. Дрик // Reports of enlarged session of the seminar of I.N. Vekua inst. of appl. math. – 1992. – 7, № 3. – P. 39 – 42.

27. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления правильных решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка/ В.М. Евтухов, Н.С. Васильева// Сообщ. АН Грузии. – 1995. – 152, № 2. – С. 228 –234.

28. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Евтухов Вячеслав Михайлович. – Киев, 1998. – 295с.

29. *Евтухов В.М.* Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью/ В.М. Евтухов, В.Н. Шинкаренко// Дифференц. уравнения. – 2001. – 37, № 11. – С. 1578 – 1579.

30. *Евтухов В.М.* О решениях со степенной асимптотикой дифференциальных уравнений с экспоненциальной нелинейностью/ В.М. Евтухов, В.Н. Шинкаренко// Нелінійні коливання. – 2002. – 5, № 3. – С. 306 – 325.

31. *Євтухов В.М.* Асимптотичні зображення розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку/ В.М. Євтухов, В.О. Касьянова// Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробагатька, 27 вересня – 1 жовтня 2004р., м. Дрогобич: тези доповідей. – Львів. – 2004. – Стор. 79.

32. *Евтухов В.М.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В.М. Евтухов, Л.А. Кириллова // Дифференц. уравнения. – 2005. – 41, №8. – С. 1053 – 1061.

33. *Евтухов В.М.* Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. I/ В.М. Евтухов, В.А. Касьянова// Укр. Мат. журнал. – 2005. – 57, №3. – С. 338 – 355.

34. *Евтухов В.М.* Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. II/ В.М. Евтухов, В.А. Касьянова// Укр. Мат. журнал. – 2006. – 58, №7. – С. 901 – 921.

35. *Евтухов В.М.* Условия колеблемости и неколеблемости решений одного класса полулинейных дифференциальных уравнений второго порядка/ В.М. Евтухов, Н.С. Васильева// Укр. Мат. Ж. – 2007. – 59, № 4. – С. 458 – 466.

36. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью/ В.М. Евтухов, В.Н. Шинкаренко// Дифференц. уравнения. – 2008. – 44, № 3 . – С. 308 – 322.

37. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ В.М. Евтухов, М.А. Белозёрова // Укр. Мат. журнал – 2008. – Т. 60, № 3. – С. 310 – 331.

38. *Евтухов В.М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений [текст]/ В.М. Евтухов, А.М. Самойленко // Укр. Мат. журнал – 2010. – Т. 62, № 1. – С. 52 – 80.

39. *Евтухов В.М.* Признаки существования и асимптотика некоторых классов решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ В.М. Евтухов, А.А. Козьма // Укр. Мат. журнал – 2011. – Т. 63, № 7. – С. 924 – 938.

40. *Еременко А.Э.* О мероморфных решениях алгебраических дифференциальных уравнений 1-го порядка/ А.Э. Еременко// Функциональный анализ и его приложения. – 1984. – 18, вып. 3. – С. 78 – 79.

41. *Изюмова Д.В.* Об условиях колеблемости и неколеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Д.В. Изюмова // Дифференц. уравнения. – 1966. – 11, № 12. – С. 1572 – 1586.

42. *Изюмова Д.В.* Заметки о колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Д.В. Изюмова // Сообщ. АН ГССР. – 1967. – 17, № 1. – С. 19 – 24.

43. *Изюмова Д.В.* Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Д.В. Изюмова // Тр. Тбилис. ун-та. – 1968. – Т. 129. – С. 157 – 178.

44. *Изюмова Д.В.* Некоторые замечания о решениях уравнения $u'' + a(t) f(u) = 0$ / Д.В. Изюмова, И.Т. Кигурадзе // Дифференц. уравнения. – 1968. – 4, № 4. – С. 589 – 605.

45. *Касьянова В.О.* Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [текст]/ В.О. Касьянова // Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика – 2004, – вип. 228 – С. 15 – 29.

46. *Касьянова В.О.* Асимптотичне поводження розв'язків істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку [текст]/ В.О. Касьянова // Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика – 2005, – вип. 239 – С. 66 – 81.

47. *Квиникадзе Г.Г.* О быстро растущих решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.Г. Квиникадзе, И.Т. Кигурадзе // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – 106, № 3. – С. 465 – 468.

48. *Квиникадзе Г.Г.* Об исчезающих в бесконечности решениях задачи Кнезера / Г.Г. Квиникадзе // Сообщ. АН ГССР. – 1985. – 118, № 2. – С. 241 – 244.

49. *Квиникадзе Г.Г.* О кнезеровских решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.Г. Квиникадзе // Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа ТГУ. – 1985. – 1, № 3. – С. 47 – 53.

50. *Кигурадзе И.Т.* О колеблемости решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе // Докл. АН СССР. – 1962. – 144, № 1. – С. 33 – 36.

51. *Кигурадзе И.Т.* Об асимптотических свойствах решений уравнения $u'' + a(t)u^n = 0$ / И.Т. Кигурадзе // Сообщ. АН ГССР. – 1963. – 30, № 2. – С. 129 – 136.

52. *Кигурадзе И.Т.* О колеблемости решений уравнения $u^{(n)} + a(t)\,|\,u\,|^n \operatorname{sgn} u = 0$ / И.Т. Кигурадзе // Мат. сб. – 1964. – 65, № 2. – С. 172 – 187.

53. *Кигурадзе И.Т.* О неколеблющихся решениях уравнения $u'' + a(t)\,|\,u\,|^n \operatorname{sgn} u = 0$ / И.Т. Кигурадзе // Сообщ. АН ГССР. – 1964. – 35, № 1. – С. 15 – 22.

54. *Кигурадзе И.Т.* Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера / И.Т. Кигурадзе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – 29, № 5. – С. 965 – 986.

55. *Кигурадзе И.Т.* Заметка об ограниченности решений дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе // Тр. Тбилис. ун-та. – 1965. – 110. – С. 103 – 108.

56. *Кигурадзе И.Т.* О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка/ И.Т. Кигурадзе // Докл. АН СССР. – 1968. – 181, № 5. – С. 1054 – 1057.

57. *Кигурадзе И.Т.* О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка / И.Т. Кигурадзе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – 33, № 6. – С. 1373 – 1398.

58. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та. – 1975.

59. *Кигурадзе И.Т.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений /И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия. – М.: Наука, 1990. – 430 с.

60. *Кириллова Л.О.* Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена – Фаулера / Л.О. Кирилова // Науковий вісник Чернівецького університету. – Чернівці: "Рута". – 2004. – 228. – С. 30 – 35.

61. *Кириллова Л.А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Л.А. Кириллова // Нелінійні коливання. – 2005. – 8, №1. – С. 18 – 28.

62. *Кириллова Л.А.* Асимптотические представления решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка, асимптотически близких к уравнениям типа Эмдена – Фаулера: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Кириллова Людмила Александровна. – Одесса, 2009.

63. *Клебанов Л.В.* Локальное поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л.В. Клебанов // Дифференц. уравнения. – 1977. – 7, № 8. – С. 1393 – 1397.

64. *Клоков Ю.А.* Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.А. Клоков // Успехи мат. наук. – 1958. – 80, № 2. – С. 189 – 194.

65. *Козьма А.А.* Асимптотические представления одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Нелінійні коливання – 2006, – т. 9 – № 4, – С. 490 – 501.

66. *Козьма О.О.* Асимптотичне поводження розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [текст]/ О.О. Козьма // Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика – 2008, – вип. 374 – С. 55 – 65.

67. *Козьма А.А.* Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Вісник Одеського нац. ун-ту. – 2009. – Т.14. – Вип.20. Матем. і механ. – С. 75 – 90.

68. *Козьма А.А.* Условия существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Вісник Одеського нац. ун-ту. – 2010. – Т.15. – Вип.19. Матем. і механ. – С. 77 – 87.

69. *Козьма А.А.* Условия существования и асимптотика одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Математичні студії. – 2011. – Т.36, №2. – С. 176 – 187.

70. *Козьма А.А.* Асимптотическое поведение одного класса решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго

порядка [текст]/ А.А. Козьма // Нелінійні коливання – 2011, – т. 14 – № 4, – С. 468 –481.

71. *Козьма А.А.* Условия существования одного класса решений у существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Метод функций Ляпунова и его приложения: Восьмая Крымская Международная математическая школа, 10 – 17 сентября 2006 г.: тезисы докладов. – Симферополь, 2006. – С. 87.

72. *Козьма А.А.* Асимптотические представления одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/А.А. Козьма // Диференціальні рівняння та їх застосування: Міжнародна конференція , 11 – 14 жовтня 2006 р.: тези доповідей. – Чернівці, 2006. – С. 66.

73. *Козьма О.О.* Асимптотичні зображення одного класу розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку [текст]/ О.О. Козьма // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробагатька, 24 – 28 вересня 2007 р.: тези доповідей. – Львів, 2007. – С. 138.

74. *Козьма А.А.* Условия существования одного класса решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування: Міжнародна наукова конференція, 16 – 21 червня 2008 р.: тези доповідей. – Мелітополь, 2008. – С. 62.

75. *Козьма А.А.* Признаки существования и асимптотическое поведение одного класса решений существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка [электронный ресурс]/ А.А. Козьма // Український математичний конгрес, 27 – 29 серпня 2009 р.: тези доповідей. – Київ, 2009. – http://www. imath. kiev. ua. / congress 2009 / part UMC 2009 html.

76. *Козьма А.А.* Условия существования одного класса решений существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова, 9 – 11 августа 2010 г.: тезисы докладов. – Одесса, 2010. – С. 60.

77. *Козьма А.А.* Асимптотическое поведение одного класса решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка [текст]/ А.А. Козьма // Диференціальні рівняння та їх застосування: Міжнародна наукова конференція, 8 – 10 червня 2011 р.: тези доповідей. – Київ, 2011. – С. 100.

78. *Кондратьев В.А.* О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена – Фаулера / В.А. Кондратьев, В.С. Самовол // Дифференц. уравнения. – 1981. – 17, № 4. – С. 749 – 750.

79. *Костин А.В.* О поведении при $x \to +\infty$ решений обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений с монотонными коэффициентами / А.В. Костин // Дифференц. уравнения. – 1967. – 3, № 2. –С. 206 – 218.

80. *Костин А.В.* Об асимптотических свойствах решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / А.В. Костин // Дифференц. уравнения. – 1968. – 4, № 7. – С. 1184 – 1195.

81. *Костин А.В.* Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена – Фаулера / А.В. Костин // Докл. АН СССР. – 1971. – 200, № 1. – С. 28 – 31.

82. *Костин А.В.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения / А.В. Костин, В.М. Евтухов // Докл. АН СССР. – 1976. – 231, № 5. – С. 1059 – 1062.

83. *Костин А.В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А.В. Костин // Дифференц. уравнения. – 1987. – 23, № 3. – С. 524 – 526.

84. *Костин А.В.* Асимптотика правильных решений обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Костин Александр Васильевич. – Киев, 1991.

85. *Муратов Л.М.* Необходимое условие асимптотического представления решений одного класса дифференциальных уравнений / Л.М. Муратов// Изв. вузов. Матем. – 1963. – 34, №3. – С. 107 – 108.

86. *Муратов Л.М.* О полиномиальных дифференциальных уравнениях n-го порядка, имеющих решения, асимптотически равные степенным функциям / Л.М. Муратов // Изв. Вузов. – 1965. – 46, № 3. – С. 126 – 132.

87. *Олехник С.Н.* Асимптотическое поведение решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка / С.Н. Олехник // Дифференц. уравнения. – 1969. – 5, № 11. – С. 2093 – 2095.

88. *Олехник С.Н.* Об ограниченности и неограниченности решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка/ С.Н. Олехник // Дифференц. уравнения. – 1972. – 8, № 9. – С. 1701 – 1704.

89. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. – Пер. с итал. – М.: ИЛ, 1954. – Т. 2. – 415 с.

90. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. – М.: Наука, 1985. – 141с.

91. *Стойкова Г.А.* Применение формул Харди к исследованию асимптотического поведения решений некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Стойкова Галина Александровна. – Одесса, 1980.

92. *Чантурия Т.А.* Асимптотика решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Т.А. Чантурия // Сообщ. АН ГССР. – 1970 – 57, № 2. – С. 289 – 292.

93. *Чантурия Т.А.* Об асимптотическом представлении решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Т.А. Чантурия // Дифференц. уравнения. – 1970. – 6, № 6. – С. 948 – 961.

94. *Чантурия Т.А.* Об асимптотическом представлении решений уравнения $u'' = a(t)\,|\,u\,|^n \operatorname{sgn} u$ / Т.А. Чантурия // Дифференц. уравнения. – 1972. – 8, № 7. – С. 1195 – 1206.

95. *Чантурия Т.А.* Об асимптотическом поведении колеблющихся решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Т.А. Чантурия // Дифференц. уравнения. – 1975. – 11, № 7. – С. 1232 – 1245.

96. *Чантурия Т.А.* Об асимптотическом поведении колеблющихся решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Т.А. Чантурия // Дифференц. уравнения. – 1975. – 11, № 7. – С. 1232 – 1245.

97. *Чантурия Т.А.* О некоторых асимптотических свойствах решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Т.А. Чантурия // Докл. АН СССР. – 1977. – 235, № 5. – С. 1049 – 1052.

98. *Шебанина Е.В.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений n-го порядка с нелинейностями типа Эмдена – Фаулера: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Шебанина Елена Вячеславовна. – Одесса, 1999. – 149с.

99. *Шевело В.Н.* Некоторые вопросы осцилляции решений нелинейных неавтономных уравнений второго порядка / В.Н. Шевело, В.Г. Штелик // Докл. АН СССР. – 1963. – 149, № 2. – С. 276 – 279.

100. *Шевело В.Н.* Задачи, методы и основные результаты теории осцилляции решений нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Н. Шевело // Тр. II Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механ. – 1965. – 2. – С. 142 – 152.

101. *Шинкаренко В.Н.* Асимптотические представления решений дифференциального уравнения n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью/ В.Н. Шинкаренко// Нелінійні коливання. – 2004. – 7, № 4. – С. 562 – 573.

102. *Шинкаренко В.Н.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью: дис. ...канд. физ.-мат. наук: 01.01.02-дифференциальные уравнения/ Шинкаренко Владимир Николаевич. – Одесса, 2005. – 150с.

103. *Ascoli G.* Sopra una particolare equazione differenziale del secondo ordine/G. Ascoli// Rend. R. Inst. Lombardo Sc. Lettere – 1936. – 69. – P.167 – 184, P. 185 – 197.

104. *Atkinson F.V.* On second-order non-linear oscillations [text]/ F.V. Atkinson // Pasif. J. Math – 1955. – V.5, №1. – P. 643 – 647.

105. *Bank S.* On solutions having large rate of growth for nonlinear differential equations in the complex domain/ S. Bank // J. Math Anal. Appl. – 1968. – 22. – P. 129 – 143.

106. *Bank S.* One solutions of algebraic differential equations whose coefficients are entire functions of finite order/ S. Bank // Ann. Mat. Pura. Appl. – 1969. – 83. – P. 175 – 184.

107. *Bank S.* On the growth of solutions of algebraic differential equations whose coefficients are arbitrary entire functions/ S. Bank// Nagoya Math. J. – 1970. – 39. – P. 107 – 117.

108. *Bank S.* A note on algebraic differential equations whose coefficients are arbitrary entire functions of finite order/ S. Bank// Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze 3 serie. – 1972. – 26, № 2. – P. 291 – 297.

109. *Bank S.* On the asymptotic representations of analytic solutions of first order algebraic differential equations in sectors/ S. Bank// Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – 176. – P. 263 – 283.

110. *Bank S.* An existence theorem for certain solutions of algebraic differential equations in sectors/ S. Bank // Rendiconti del seminario matematico della Universita di Padova. – 1974. – 51. – P. 67 – 81.

111. *Bank S.* On the growth of geomorphic solutions of linear and algebraic differential equations/ S. Bank, I. Laine// Math. Scand. – 1977. – 40. – P. 119 – 126.

112. *Belohorec* $\breve{S}$. Neoscilatorcke riesenia stej nelinearnej differensialnej rovnice druheho radu / S. Belohorec // Mat. Fuz. Cas. – 1962. – 12, № 4. – S. 253 – 262.

113. *Belohorec* $\breve{S}$. On some properties of the equation $y''(x) + f(x)y^{\alpha}(x) = 0$ / S. Belohorec // Math. Cas. – 1967. – 17, № 1. – S. 10 – 19.

114. *Borel E.* Memoir sur les series divergentes / E. Borel// Annales de L'ecole Normale Superiere. – 1899. – 16. – P. 9 – 136.

115. *Coffman C.V.* On a second order nonlinear oscillation problem / C.V. Coffman, J.S.W. Wong // Trans. Amer. Math Soc. – 1970. – 147, № 2. – P. 357 – 366.

116. *Cooke K.I.* The rate increase of real continuous solutions of algebraic differential-difference equations of the first order/ K.I. Cooke// Pacific. J. Math. – 1954. – 4. – P. 483 – 501.

117. *Emden R.* Gaskugeln Anwendungen der mechanishen Warmen-theorie auf Kosmologie metheorologishe Probleme / R. Emden – Leipzig. – 1907.

118. *Eremenko A.* Rational solutions of first-order differential equations/ A. Eremenko// Annal. Acad. Sci. Fennicae Math. – 1998. – 23. – P. 181 – 190.

119. *Evtukhov V.M.* Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation/ V.M. Evtukhov, N.G. Drik // Georgian Math. J. – 1996. – 3, N 2. – P. 101 – 120.

120. *Evtukhov V.M.* Asymptotic behaviour of solutions of n-th order differential equations/ V.M. Evtukhov, E.V. Shebanina // Mem. Differential Equations Math. Phys. Tbilisi. – 1998. – 13. – P. 150 – 153.

121. *Evtukhov V.M.* Asymptotic representations of proper nonoscillation solutions of a class semilinear differential equations of the second order/ V.M. Evtukhov, N.S. Vasiljeva// Nonlinear Oscillations. – 2001. – 4, N 2. – P. 190 – 215.

122. *Fowler R.H.* The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of the second order / R.H. Fowler// Quart. J. Pure Appl. Math. – 1914. – V. 45. – P. 289 – 350.

123. Fowler R.H. The solutions of Emden's and similar differential equations / R.H. Fowler // Month. Notices. Roy. Astr. Soc. – 1930. – V. 91. – P. 63 – 91.

124. *Fowler R.H.* Further studies of Emden's and similar differential equations / R.H. Fowler // Quart. J. Math. – 1931. – V. 2, № 2. – P. 259 – 288.

125. *Hardy G.H.* Some results concerning the behavior at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equations of the first order / G.H. Hardy// Proc. London Math. Soc., ser 2. – 1912. – 10. – P. 451 – 468.

126. *Hastings S.P.* A nonlinear problem from combustion theory: Linan's problem / S.P. Hastings, A.B. Poor // SIAM J. Math. – 1983. – 14, № 3. – P. 425 – 430.

127. *Hastings S.P.* Linan's problem from combustion theory. Part II. / S.P. Hastings, A.B. Poor // SIAM J. Math. – 1985. – 16, № 2. – P. 331 – 340.

128. *Heidel I.W.* The existence of oscillatory solutions for a nonlinear differential equation / I.W. Heidel, D.B. Hinton // SIAM I. Math. Anal. – 1972. – 3, № 2. – P. 344 – 351.

129. *Kiguradze I.T.* On the non-negative non-increasing solutions of non-linear second order differential equations / I.T. Kiguradze // Ann. Math. pur. ed. apple. – 1969. – 81. – P. 169 – 192.

130. *Kiguradze I.T.* On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations / I.T. Kiguradze // Arch. Math. (Brno). – 1978. – T. 14, № 1. – P. 21 – 44.

131. *Kiguradze I.T.* On asymptotic behavior of solution of non-linear non-autonomous ordinary differential equation /I.T. Kiguradze // Qual. Theory Differ. Equations. V.1. – Amsterdam e.a. – 1981. – P. 507 – 554.

132. *Kiguradze I.T.* On strongly increasing solutions of nonlinear ordinary differential equations / I.T. Kiguradze, G.G. Kvinikadze // Ann. Math. pura ed appl. – 1982. – 130. – P. 67 – 87.

133. *Lane J.H.* On the theoretical temperature of the Sun under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat and depending of the laws of gases known to terrestrial experiment/ J.H. Lane// Amer. J. Sci. and Arts., second series. – 1870. – 50. – P. 57 – 74.

134. *Lancaster O.E.* Some results concerning the behavior at infinity of real continuous solutions of algebraic difference equations/O.E. Lancaster// Bull. Amer. Math. Soc. – 1940. – 46. – P. 169 – 177.

135. *Lindelef E.* Sur la croissance des integrales des equations differentielles algebriques du premier ordre / E. Lindelef // Bull. Soc. Math. France. – 1899. – 27. – P. 205 –215.

136. *Maric V.* Regular variation and asymptotic properties of solutions of nonlinear differential equations / V. Maric, M. Tomic // Publ. Inst. Math. – 1977. – 21, № 35 – P. 119 – 129.

137. *Maric V.* Regular variation and differential equations (Seria: Lecture Notes in Mathematics Series) / V. Maric – Springer-Verlag. New York LLC. - 2000. – 40 p.

138. *Matsuda M.* First order algebraic differential equations (Seria: Lecture Notes in Mathematics Series)/ M. Matsuda – Springer-Verlag. New York, LLC. – 2008. – 120 p.

139. *Polvani G.* Questioni riguardanti il magnetron/ G. Polvani, G. Ascoli, A. Giacomini// Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano. – 1936. – 10. – P. 279 – 338.

140. *Shah S.M.* On real continuous solutions of algebraic difference equations/ S.M. Shah// Bull. Amer. Math. Soc. – 1947. – 53. – P. 548 – 558.

141. *Shah S.M.* On real continuous solutions of algebraic difference equations. II/ S.M. Shah// Proc. National Inst. Sci. India. – 1950. – 16. – P. 11 – 17.

142. *Strodt W.* Asymptotic behavior of solutions and adjunction fields for nonlinear first-order differential equations/ W. Strodt, R.K. Wright// Mem. Amer. Math. Soc. – 1971. – 109.

143. *Taliaferro S.D.* Asymptotic behavior of solutions of $y''=\varphi(t)y^{\lambda}$ / S.D. Taliaferro// J. Math. Anal. Appl. – 1978. – 6. – P. 95 – 134.

144. *Taliaferro S.D.* Asymptotic behavior of solutions of $y''=\Phi(t)f(y)$/ S.D. Taliaferro // SIAM J. Math. Anal. –1981. – 12. – P. 853 – 865.

145. *Yuzan He.* On the growth of algebraic differential equations/ He Yuzan, I. Laine// Math. Scand. – 1986. – 58. – P. 125 – 138.

146. *Vishnyakov V.I.* Nonlinear Poisson – Boltzmann equation in spherical symmetry / V.I. Vishnyakov, V.M. Evtukhov, G.S. Dragan // Physical Review. – 2007. – E 76, №3. – P. 1 – 5.

147. *Wong J.S.W.* Some stability conditions for $x'' + \alpha(t) f(x) = 0$ / J.S.W. Wong // SIAM. J. Appl. Math. – 1967. – 15, № 4. – P. 889 – 892.

148. *Wong J.S.W.* On the generalized Emden – Fowler equation / J.S.W. Wong // SIAM. Rev. – 1975. – 17, № 2. – P. 339 – 360.